

# 1. Cabri-géomètre : un outil d'aide à la visualisation dans l'espace.

Michèle DUPERIER et Yves BOUTEILLER  
IREM d'Orléans.

Le thème initial qui nous avait été proposé était "La CABRI-GÉOMÉTRIE de l'espace au lycée". Il nous est apparu trop ambitieux et prématuré d'aborder un sujet aussi vaste, c'est pourquoi nous lui avons substitué le titre ci-dessus qui correspond mieux à notre pratique de classe.

La préparation de cet exposé a été pour nous l'occasion de faire un bilan d'activités que nous avons développées dans nos classes ou dans des stages de formation MAFPEN depuis trois ans.

## I. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION DANS L'ESPACE.

La première situation de classe évoquée a été testée dans quatre classes de première scientifique sur une période de deux ans.

Il s'agit du problème d'optimisation suivant extrait de l'ouvrage publié chez HERMANN en 1988 par Y. et R. Sortais sous le titre "Géométrie de l'espace et du plan" dans la collection "Formation des enseignants et formation continue", p. 183-188. Voici l'énoncé :

*Soit (SABCD) une pyramide à base carrée dont l'arête [SA] est orthogonale à la base (ABCD). On note O le centre de ce carré. Par un point M variable de l'arête [SC], on mène un plan (P) parallèle à l'arête [SA] et à la diagonale [BD] de la base de la pyramide. Ce plan coupe l'autre diagonale [AC] de la base en un point X. On s'intéresse à l'évolution de l'aire A de la section de la pyramide par ce plan (P) lorsque le point M décrit l'arête [SC].*

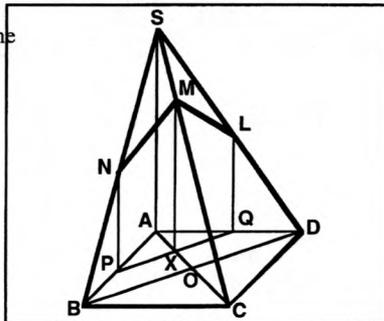
La première année, nous avons tenté, avec plus ou moins de bonheur, de faire modéliser cette problématique sans support logiciel. Nous ne ferons référence à cette première expérimentation que pour souligner les améliorations apportées à cette séquence l'année suivante.

La deuxième année nous avons à nouveau proposé ce scénario de classe sous forme de cours-TD devant deux classes de 35 élèves environ, sur une durée de deux heures avec pour outils d'aide à la visualisation : un PC connecté à une tablette rétroprojectable et pour logiciel : CABRI-GEOMETRE. Voici les principales étapes de cette expérimentation :

### 1<sup>ère</sup> étape.

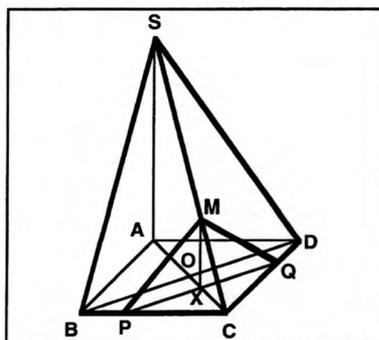
On a procédé à la construction d'une première section sur une pyramide brute conforme à l'énoncé en suivant les suggestions proposées par les élèves (Fichier PYRAIRÉ1.FIG).

On constate que cette construction cesse d'être opérationnelle lorsque le point M est trop bas sur l'arête [SC].



### 2<sup>ème</sup> étape.

On recommence la construction lorsque la première est défaillante



### 3<sup>ème</sup> étape.

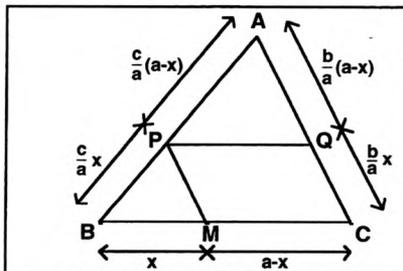
L'enchaînement des deux constructions permet de suivre qualitativement l'évolution de l'aire de la section et de conjecturer l'existence d'une position du point M pour laquelle cette aire est maximale.

En effet, cette aire est une fonction positive du paramètre fixant M sur [SC], nulle lorsque M est en S ou en C et intuitivement continue. Il existe donc au moins un point M de l'arête [SC] pour lequel cette aire est maximale.

### 4<sup>ème</sup> étape.

On modélise la situation. Après un court débat, la classe décide d'exprimer l'aire de la section en fonction de la distance  $x = AX$ . Le calcul effectif de l'aire de chaque type de section nécessite le calcul de certaines distances dont on fait le recensement. La configuration de Thalès est reconnue dans différentes sections, mais le calcul des distances utiles s'avère laborieux dans la première des deux classes (comme lors de la première expérimentation).

Un premier obstacle est la prise de conscience que dans cette configuration dès qu'une distance est fixée, toutes les autres deviennent calculables.



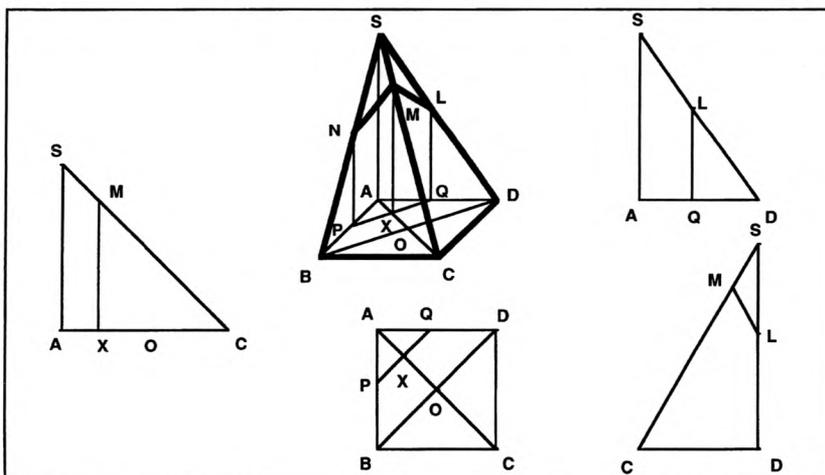
Un deuxième obstacle réside dans la difficulté à appréhender ces distances en vraie grandeur dans les différents plans de sections.

Michèle Duperier a profité du décalage dans le temps des deux expérimentations pour améliorer la mise en scène initiale.

### 5<sup>ème</sup> étape.

Pour faciliter la vision en vraie grandeur dans ces plans, elle a réalisé un patron éclaté de la pyramide dans des fenêtres contiguës à celle qui porte la figure de base. Ce patron est obtenu en procédant à une translation de la face (SAD) vue en vraie grandeur et à un rabattement dans le plan frontal de la face (SCD), de la base (ABCD) et de la cloison (SAC). On peut alors suivre les déplacements des points M, N, P, Q, L et X dans les faces qui les contiennent et faire émerger les outils de géométrie plane permettant d'exprimer l'aire A étudiée en fonction de la distance  $x = AX$ .

On notera que les différentes sections représentées sont solidaires de la pyramide initiale et évoluent en même temps qu'elle (Fichier PYRAIRE2.FIG).

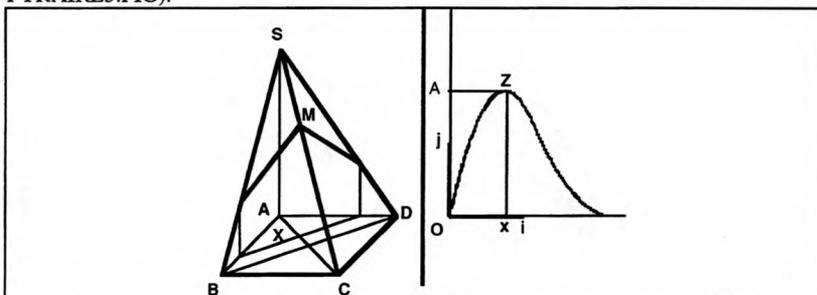


### 6<sup>ème</sup> étape.

La mise en équation s'achève par la détermination de la fonction qui, à l'abscisse  $x$  du point X sur un axe porté par la diagonale [AC], associe l'aire A de la section étudiée.

Cette fonction est une fonction polynomiale du second degré par intervalle. Pour faciliter le passage de l'étude géométrique à l'étude fonctionnelle, on imaginé de faire tracer comme lieu la courbe représentant l'aire A en fonction de la variable  $x$ . Avec la version 1.7 de CABRI l'utilisation de la commande "Lieu de points" automatique en prenant pour point mobile le point courant M de l'arête [SC], on obtient un tracé de bonne qualité. On

constate que les deux arcs de parabole obtenus se raccordent de façon assez satisfaisante pour qu'on puisse inférer qu'au point de raccord ces deux arcs ont même tangente (Fichier PYRAIRE3.FIG).



L'exploitation de cette problématique permet de faire fonctionner les outils du cours d'analyse de la classe de première.

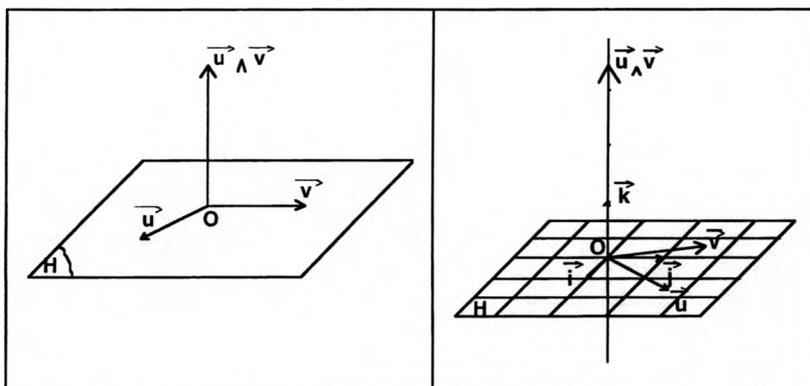
On trouvera dans une brochure intitulée : "Apprendre et pratiquer la géométrie avec l'ordinateur" qui sera prochainement publiée par l'IREM d'Orléans d'autres activités plus faciles, prenant le même type de mise en scène.

## II. UNE SÉQUENCE DE COURS EN TERMINALE SCIENTIFIQUE.

Cette séquence se proposait, dans une classe de TC, de visualiser le produit vectoriel de deux vecteurs et d'appréhender les qualités essentielles de ce produit :

- proportionnalité des normes de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  et de  $\vec{u}$  (respectivement  $\vec{v}$ ),
- annulation de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires,
- changement de sens de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  lorsque  $\vec{u}$  franchit la frontière définie par  $\Delta(O, \vec{v})$  dans le plan H.

A cet effet, en faisant varier le vecteur  $\vec{v}$  sur une droite fixe et le vecteur  $\vec{u}$  dans le plan H, on peut observer les modifications induites sur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  (fichier PRODVECT.FIG).



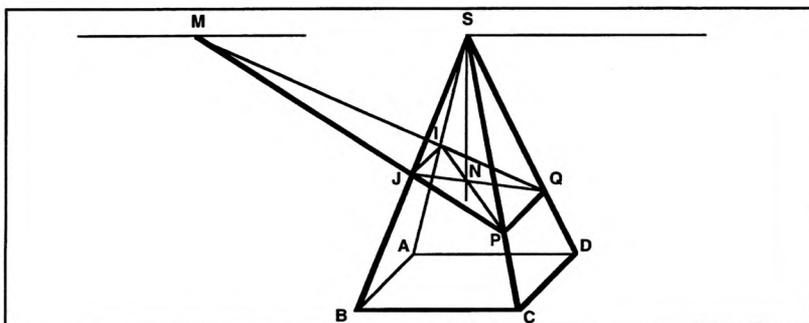
Cette visualisation a servi de support au cours théorique et permis d'ancrer dans les esprits l'essentiel de l'apprentissage de cette notion. A partir d'un autre fichier, on a pu vérifier le fonctionnement de l'expression analytique du produit vectoriel (fichier PRODVECA.FIG) en utilisant un quadrillage du plan H et une graduation de la normale en O à ce plan.

Un réinvestissement en physique pour faciliter la compréhension de la notion de champ magnétique induit par un solénoïde pourrait être envisagé à partir du même principe.

### III. DES LIEUX DANS L'ESPACE.

La dernière séquence expérimentée a été construite pour des étudiants PLC1 de l'UFM d'Orléans (centre de Tours) préparant l'oral du CAPES. Elle aurait pu sans inconvénient servir de point de départ pour une activité géométrique en terminale scientifique. Il s'agissait de trouver un exemple d'emploi des barycentres pour la recherche de lieux géométriques. Les étudiants n'ayant pas trouvé dans les manuels d'exemples dans l'espace, il leur a été proposé la situation suivante :

*Soit (SABCD) une pyramide régulière à base carrée. Par les milieux I et J des arêtes [SA] et [SB], on mène un plan (F) qui coupe respectivement les arêtes [SC] et [SD] en P et Q. On demande de vérifier que le quadrilatère (IJPQ) est un trapèze et de déterminer le lieu du point M (resp. N) intersection des diagonales [IP] et [JQ] (resp. des droites (IQ) et (JP)) lorsque le plan (F) pivote autour de la droite (IJ).*



Le fait que ces lieux soient inclus dans deux droites est assez évident géométriquement. Ce qu'apporte CABRI, c'est la délimitation précise de ces deux lieux (fichier LIEUESPC.FIG). La justification précise peut alors être entreprise analytiquement en paramétrant par exemple la position du point P sur l'arête [SC] en terme de barycentre.

### IV. BILAN DE CES EXPÉRIMENTATIONS.

CABRI est outil précieux d'aide à la visualisation dans l'espace :

- il permet de mettre en place très vite les problématiques et de les faire évoluer,
- sa dynamique permet de conjecturer l'évolution qualitative (voire quantitative) des phénomènes.

## V. LA CABRI-GÉOMÉTRIE : UN ART RÉSERVÉ AU MAÎTRE ?

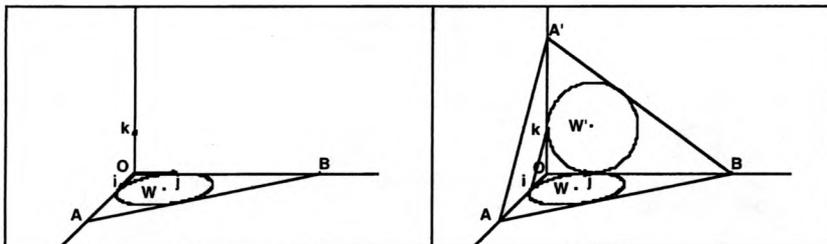
Les constructions mises en œuvre pour réaliser ces fichiers sont en général très élémentaires, mais sont souvent hors de portée des élèves. Cela nous a posé question puisqu'admettre ce fait, c'est reconnaître que tout un pan de notre culture mathématique n'est plus transmise à nos élèves. Il ne s'agit pas de regretter qu'on n'enseigne plus des techniques spécialisées de géométrie descriptive, mais de constater que projeter une figure sur un plan, rabattre un plan sur un autre,... ne sont plus des compétences exigibles en fin de cursus secondaire, bien que les notions de projection orthogonale et de rotation de l'espace figurent dans les programmes. Ces savoir-faire semblent tombés en désuétude plutôt par laisser-aller que par choix délibéré. Nous avons constaté en effet que les enseignants acceptent qu'une figure de l'espace soit construite avec négligence, alors qu'ils ont de grandes exigences de soin et de précision pour les figures planes. Voici un exemple illustrant ce constat :

*On donne dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , un triangle (OAB) inclus dans le plan (xOy) tel que :  $A \in (Ox)$  et  $B \in (Oy)$ . On souhaite faire intervenir le centre du cercle inscrit à ce triangle.*

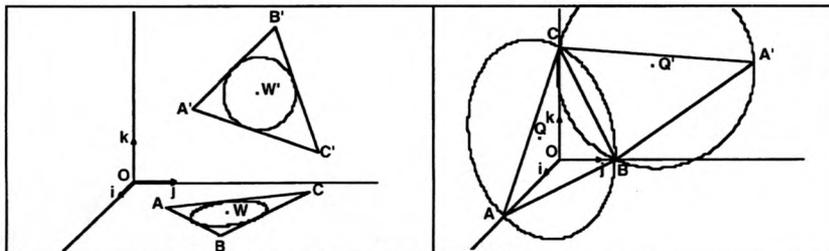
Persuadé qu'il saura raisonner juste sur une figure fautive, l'enseignant se surprend à placer ce point au jugé alors que dans le plan il aurait pris la précaution de tracer les bissectrices intérieures du triangle.

Pourtant, le triangle étant fixé, ce point est unique, donc il n'est pas placé n'importe où lorsque le repère est donné. Et si on fait l'hypothèse que tous les objets inclus dans le plan frontal (yOz) sont vus en vraie grandeur, ce point devient constructible sans ambiguïté. Il suffit de rabattre le triangle en vraie grandeur dans le plan frontal (yOz), de construire le centre du cercle inscrit du triangle image puis de construire l'image de ce point dans le rabattement réciproque du précédent. Cette construction, réalisable en situation papier-crayon, peut être exécutée économiquement sous CABRI à l'aide des macro-constructions associées à chaque rabattement (fichier TRI\_XOY1.FIG).

On pourra s'exercer à réaliser ces travaux dans les ateliers de l'après-midi.



Ce procédé se généralise sans trop de peine pourvu que l'on dispose d'un plan de référence où l'on puisse exécuter les tracés en vraie grandeur. Voici deux autres exemples illustrant cette idée :



Le premier (fichier TRI\_XOY2.FIG) généralise le même problème à un triangle quelconque inclus dans le plan (xOy) et le second (fichier TRI\_OXYZ.FIG) traite le problème du tracé du cercle circonscrit à un triangle dont les sommets sont situés sur les axes du trièdre de référence.

Enfin, en enchaînant plusieurs macro-constructions de ce type, on peut faire tracer comme lieux certaines courbes gauches de l'espace telle la fenêtre de Viviani (fichier VIVIANIP.FIG) ci-contre.

### FENÊTRE DE VIVIANI

*Intersection de la sphère d'équation :*

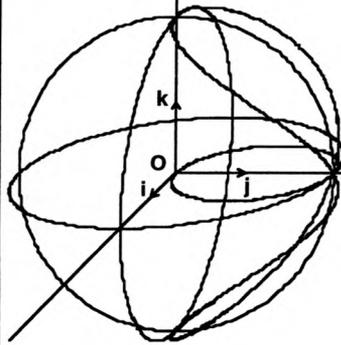
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

*et du cylindre d'équation :*

$$x^2 + y^2 - r y = 0$$

*Représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \varphi \\ y = r \sin^2 \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$



En guise de conclusion nous laissons ouvertes deux questions :

- de tels travaux peuvent-ils être envisagés sans un minimum de réflexion sur les principes de la perspective cavalière et un apprentissage d'un certain nombre de tracés fondamentaux ?

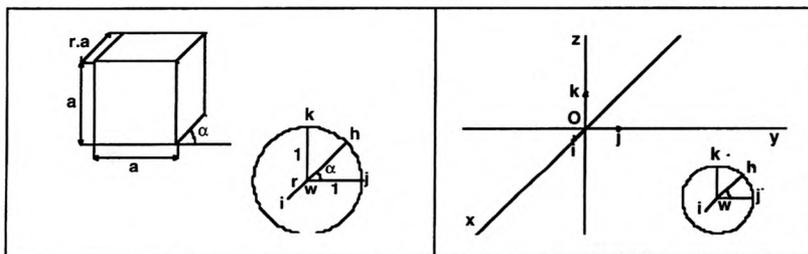
- cette CABRI-GEOMETRIE de l'espace artisanale n'est-elle pas déjà obsolète compte tenu de la naissance prochaine d'un CABRI-3D qui intégrera peut-être certaines de ces procédures comme outil de base ?

## VI. LES ATELIERS DE CABRI-GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Lors des deux ateliers associés à notre exposé nous avons proposé aux participants de s'exercer à la CABRI-GÉOMETRIE de l'espace.

### A. Activité n°1.

En introduction on a proposé de charger une figure (fichier CSTPERSP.FIG) et une macro-construction (fichier CSTPERSP.MAC) permettant de régler les constantes de la perspective cavalière et de modifier ces constantes à la demande en cours de travail. Ces constantes sont le rapport de réduction de la norme du vecteur  $\vec{i}$  par rapport aux deux autres vecteurs  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  de la base et l'angle de fuite du vecteur avec le vecteur  $-\vec{i}$  (cf. l'excellente brochure intitulée "La perspective cavalière" rédigée par G. Audibert publiée par l'APMEP en 1990, p. 68-70). Les choix classiques de  $(r, \alpha)$  sont  $(\frac{1}{2}; 30)$  ou  $(\frac{1}{2}; 45)$  ou  $(\frac{1}{2}; 60)$ . Toutes les figures illustrant ce document ont été réalisées avec les constantes  $(\frac{1}{2}; 45)$ . Ce réglage étant effectué, on rangera le rapporteur en dehors de l'écran.



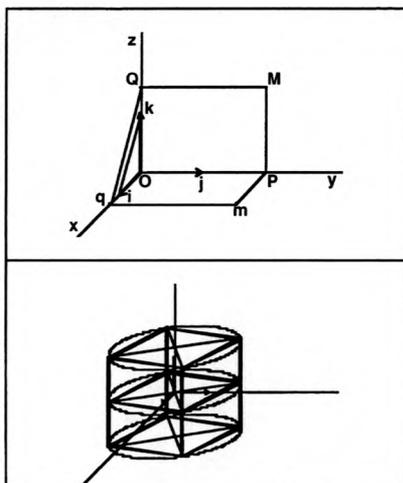
### B. Activité n°2.

Nous avons ensuite proposé de réaliser la macro-construction permettant de rabattre un point du plan  $(yOx)$  dans le plan frontal  $(yOz)$  (fichier RABYX\_YZ.MAC) ainsi que sa macro-construction réciproque (fichier RABYZ\_YX.MAC).

N.B. En intervertissant les rôles de  $j$  et  $k$  lors de l'exécution de ces deux macro-constructions, on peut aussi rabattre un point du plan  $(xOz)$  dans le plan frontal  $(yOz)$  et vice versa.

En utilisant ces deux macro-constructions, tous les participants ont pu, sans trop de peine, réaliser les constructions des cercles inscrit ou circonscrit à un triangle inclus dans le plan  $(xOy)$  présentées dans l'exposé du matin.

Notre collègue Yves Martin a proposé comme autre application : faire tourner un cube autour de l'axe  $(Oz)$  (fichier GIROCUBE.FIG) dont voici une image.

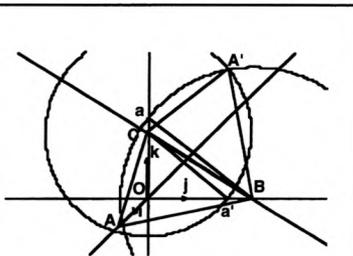


### C. Activité n°3.

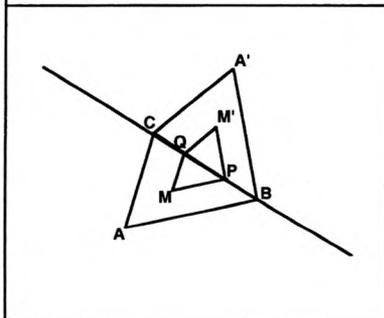
La reprise du même problème avec un triangle dont les sommets sont portés par les axes du repère a opposé plus de résistance à la sagacité des participants. Il a fallu venir à bout de deux difficultés :

- rabattre le triangle (ABC) dans le plan frontal (yOz) en le faisant pivoter autour de la droite (BC),
- rabattre un point quelconque du plan frontal dans le plan du triangle (ABC) par rotation autour de la droite (BC) et en faire une macro-construction.

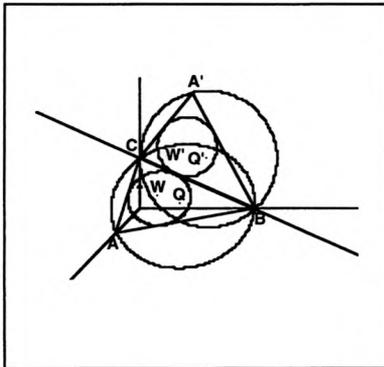
La première étape peut être franchie en rabattant le point A considéré comme point du plan (xOy) en a dans le plan (yOz). De même, on rabat le point A considéré comme point du plan (xOz) en a' dans le plan (yOz). Alors les distances Ba et Ca' représentent respectivement en vraie grandeur dans ce plan frontal (yOz) les distances BA et CA initiales. Pour obtenir l'image A' du point A par la rotation d'axe (BC) qui rabat le triangle (ABC) dans le plan (yOz), il suffit alors de construire un triangle s'appuyant sur [BC] dont les longueurs des côtés sont connues (fichier RABACBOC.FIG).



La procédure la plus économique proposée pour régler la deuxième difficulté consiste à mener par M' les parallèles aux côtés [A'B] et [A'C] du triangle (A'BC) qui coupent respectivement la droite (BC) en P et Q. Les images des droites (M'P) et (M'Q) dans le rotation d'axe (BC) qui rabat le triangle (A'BC) sur le triangle (ABC) sont les droites parallèles à [AB] et [AC] issues des points invariants P et Q. On achève donc en construisant ces deux parallèles qui se coupent au point M recherché. Une macro-construction permet d'automatiser cette procédure (fichier RABOCBAC.MAC).



En reprenant et en épurant la figure sauvée sous RABACBOC.FIG, on peut alors tracer les cercles circonscrit et inscrit au triangle (A'BC) et leurs centres respectifs Q' et W', puis faire appel à la macro-construction précédente pour déterminer les centres Q et W des cercles respectivement circonscrit et inscrit au triangle (A'BC). On choisit alors un point courant M' sur le cercle circonscrit et on détermine le point d'intersection N' du segment [W'N] et du cercle inscrit. Toujours à l'aide de la même macro-construction, on rabat les points M' et N' dans le plan du triangle (ABC) et on demande leurs lieux lorsque le point M décrit le cercle circonscrit au triangle (A'BC) (fichier TRAXBYCZ.FIG).



#### D. Activité n°4.

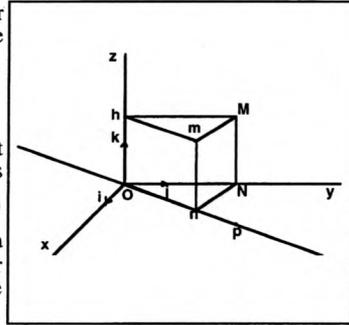
Une dernière activité avait été prévue, mais n'a pas pu être exploitée faute de temps. Elle visait à réaliser la macro-construction d'une rotation d'axe  $(Oz)$  amenant dans le plan frontal  $(yOz)$  un point  $M$  quelconque de l'espace, puis à utiliser cette macro-construction pour réaliser quelques tracés sur une sphère.

Voici la description de la figure prévue (fichier ROTAXEOZ.FIG) pour servir de support à cette macro-construction (fichier ROTAXEOZ.MAC).

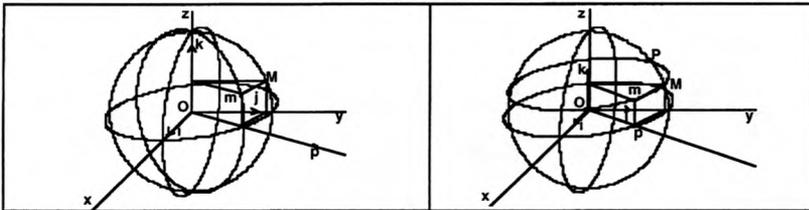
Le point  $m$  initial est défini par :

- un point  $p$  qui fixe le plan  $(pOz)$  contenant  $m$ ,
- les projections  $n$  et  $h$  de  $m$  sur  $(Op)$  et  $(Oz)$ .

En déroulant l'historique on découvrira comment ont été construits les points  $N$  et  $M$  images respectives de  $n$  et  $m$  dans la rotation d'axe  $(\vec{Oz})$  d'angle  $(\vec{Op}, \vec{Oy})$ . On a de même enregistré la macro-construction réciproque (fichier RECAXEOZ.MAC) à partir d'une figure analogue (fichier RECAXEOZ.FIG).



En utilisant ces macro-constructions on peut obtenir le tracé en perspective cavalière d'une sphère et faire dessiner le méridien ou le parallèle passant par un point  $m$  donné de cette sphère (fichier MERIDIEN.FIG et fichier PARALLEL.FIG).



Enfin pour terminer, en récompense, on peut faire un retour à la fenêtre de Viviani, cette fois vue de face (fichier VIVIANIF.FIG).

