*Cabri-géomètre

Université d'été
Apprentissage et [illegible]ignement de la géométrie av[illegible]linateur : utilisation du l[illegible]géomètre en

Grenoble [illegible] uillet 1993

université joseph fourier
irem
de grenoble
b.p. 41 - 70, rue des maths
38402 st-martin-d'hères cedex
tél. 76.51.46.62

IUFM de Grenoble
IREM de Grenoble
LSD2-IMAG Université Joseph Fourier Grenoble

Sommaire

Introduction

UNE AVENTURE

Les destins des logiciels pour l'enseignement sont divers. Celui de Cabri-géomètre est déjà riche d'un passé de six ans et promet certainement de nouvelles péripéties dans l'avenir...

Cabri-géomètre a été conçu dans un laboratoire grenoblois de didactique des mathématiques et de mathématiques discrètes (IMAG-LSD2), contexte qui a certainement marqué les caractéristiques principales de ce logiciel : professionnalisme de la facture informatique, prise en compte dans les choix de conception, des utilisateurs que sont les élèves et les enseignants.
Ce micro-monde de géométrie qui illustre de façon exemplaire le principe de manipulation directe a reçu dès son plus jeune âge le trophée Apple du logiciel éducatif en 1988 alors qu'il n'existait qu'en version Macintosh. Il a pénétré de façon importante les établissements d'enseignement à partir de 1988 où il a existé en version MSDOS (diffusé pendant un temps sous le nom "Le Géomètre").
La qualité de son interface qui implique une grande facilité d'utilisation par les élèves évite les problèmes de communication avec la machine et permet de consacrer pleinement son temps en classe à la géométrie. Le caractère ouvert du logiciel et sa configuration variable suivant les besoins de la classe permettent un grand éventail d'usages possibles.

Les enseignants s'en sont rapidement aperçu en France et à l'étranger. Les Ministères de l'Education du canton de Vaud, d'Autriche et de Catalogne ont ainsi équipé il y a déjà plusieurs années tous leurs établissements d'enseignement secondaire avec Cabri-géomètre. L'extension d'usage dans les classes a permis une diversité d'expériences, la mise à jour de nouveaux types d'utilisation pédagogique et mathématique : on s'est aperçu qu'on pouvait aussi représenter des fonctions numériques, des solutions d'équations différentielles, des phénomènes de physique, des machines mécaniques, des objets complexes de l'espace, des commodes de style Empire ou autres ... avec Cabri-géomètre..
Le déplacement par la souris a fait revivre des noms au parfum suranné, fenêtre de Viviani, points de Brocard ou de Vecten mais aussi a conduit à la solution de problèmes actuels comme ceux d'empaquetage optimum. Derrière cette multiplicité d'usages qui ne cesse de croître c'est bien du triomphe de la géométrie et de son pouvoir de modélisation qu'il s'agit. Mais que l'on ne s'abuse pas; ce triomphe est rendu possible par la qualité informatique du produit et le modèle mathématique du moteur géométrique.

Depuis lors comme pour les livres à succès, une suite est parue, mais moins de vingt ans après. Cabri-géomètre II pour Macintosh accentue encore la philosophie de manipulation directe, s'attaque à de nouveaux objets, les coniques, les transformations, repousse les frontières de l'impossible en traitant les lieux comme des objets géométriques, s'empare de la géométrie analytique et n'hésite pas à aller vagabonder dans les domaines jusque là réservés aux calculettes et tableurs. Une version MSDOS est prévue pour très bientôt. Voilà de quoi constituer nouvelle matière à l'étude de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement pour les années prochaines.

L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ

En 1992 il s'avérait que Cabri-géomètre constituait un exemple, riche d'expériences, de l'insertion des nouvelles technologies dans l'enseignement. L'idée s'est alors faite jour de proposer une université d'été de formation d'enseignants dans laquelle serait analysée l'intégration du logiciel. Une demande a été déposée auprès du Ministère de l'Education de la tenue d'une telle université intitulée : "Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe". Le Ministère ayant agréé cette université dans son programme de formation et l'ayant soutenue financièrement de façon importante, elle a donc été organisée par un collectif regroupant quelques membres des institutions organisatrices : l'Institut de Formation des Maîtres, le LSD2 laboratoire berceau de Cabri-géomètre, le CIAP (Centre Informatique d'Applications Pédagogiques, décédé à l'heure où nous écrivons ces lignes) et enfin l'IREM.

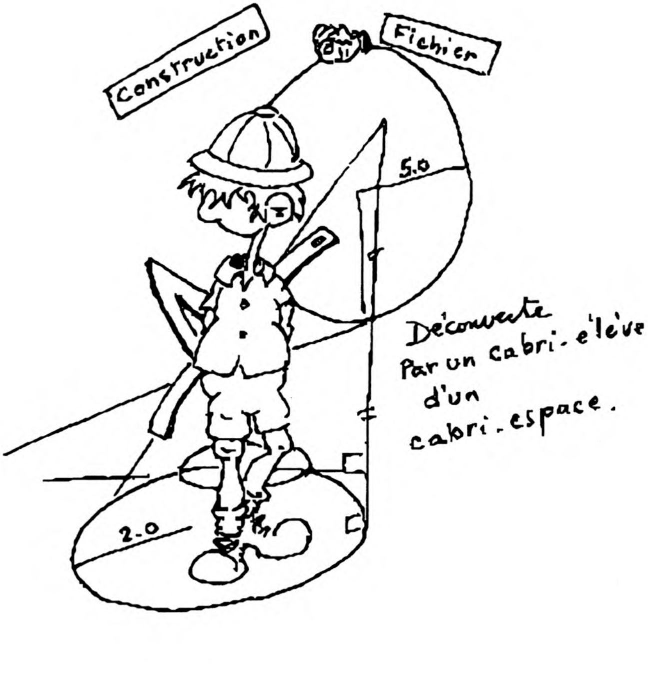
L'université a pu bénéficier des locaux de l'IUFM et en particulier de l'amphithéâtre équipé en matériel audiovisuel, le LSD2 a fourni une logistique importante en secrétariat et matériel, l'IREM a mis à disposition de l'université des moyens complémentaires de secrétariat pendant la tenue de l'université. Enfin, le CIAP par l'intermédiaire de Gilles Mounier, responsable de l'université d'été, a œuvré sur tous les fronts pour l'organisation et la conduite de l'université. Que tous ces organismes et les membres du collectif d'organisation soient ici remerciés.

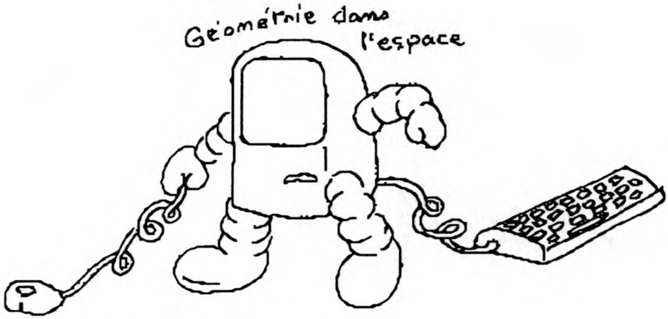
L'université d'été s'est tenue du 9 au 13 juillet 1993. Elle a abordé de nombreux thèmes mathématiques, différents niveaux d'enseignement, introduit une expérience étrangère, celle du canton de Vaud, où des élèves ont pu passer un examen de fin de scolarité obligatoire avec une disquette de Cabri-géomètre. Elle a permis la rencontre de personnes d'horizons divers, venant de France, des territoires d'outre-mer (la Réunion a envoyé une délégation de forte présence) ou de l'étranger, de l'enseignement secondaire ou supérieur, de fins connaisseurs du logiciel à des novices débutants. Le contenu reflétait la volonté de prendre en compte tous les facteurs déterminants de l'intégration d'un logiciel dans l'enseignement : les aspects de conception du logiciel, ses usages divers en classe (de la tablette à l'atelier, d'un usage épisodique à un usage régulier, d'une classe à tout l'établissement) la conception de formation (initiale ou continue) d'enseignants à l'usage du logiciel, la littérature autour du logiciel et en particulier les journaux d'utilisateurs, les usages plus poussés du logiciel pour les clubs d'élèves ou les enseignants obsédés.

Ces actes restituent après plus d'un an un peu de la saveur des exposés et ateliers de l'université. Nous pensons qu'ils ne seront pas seulement occasion de regrets nostalgiques de la part des participants mais qu'ils inspireront de nombreux lecteurs pour leur enseignement.

Partie I

De la conception d'activités à l'utilisation en classe




Géométrie dans
l'espace

1. Cabri-géomètre : un outil d'aide à la visualisation dans l'espace.

Michèle DUPERIER et Yves BOUTEILLER
IREM d'Orléans.

Le thème initial qui nous avait été proposé était "La CABRI-GÉOMÉTRIE de l'espace au lycée". Il nous est apparu trop ambitieux et prématuré d'aborder un sujet aussi vaste, c'est pourquoi nous lui avons substitué le titre ci-dessus qui correspond mieux à notre pratique de classe.

La préparation de cet exposé a été pour nous l'occasion de faire un bilan d'activités que nous avons développées dans nos classes ou dans des stages de formation MAFPEN depuis trois ans.

I. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION DANS L'ESPACE.

La première situation de classe évoquée a été testée dans quatre classes de première scientifique sur une période de deux ans.

Il s'agit du problème d'optimisation suivant extrait de l'ouvrage publié chez HERMANN en 1988 par Y. et R. Sortais sous le titre "Géométrie de l'espace et du plan" dans la collection "Formation des enseignants et formation continue", p. 183-188. Voici l'énoncé :

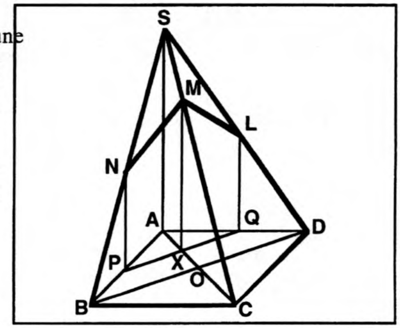
Soit (SABCD) *une pyramide à base carrée dont l'arête* [SA] *est orthogonale à la base* (ABCD). *On note* O *le centre de ce carré. Par un point* M *variable de l'arête* [SC], *on mène un plan* (P) *parallèle à l'arête* [SA] *et à la diagonale* [BD] *de la base de la pyramide. Ce plan coupe l'autre diagonale* [AC] *de la base en un point* X. *On s'intéresse à l'évolution de l'aire* A *de la section de la pyramide par ce plan* (P) *lorsque le point M décrit l'arête* [SC].

La première année, nous avons tenté, avec plus ou moins de bonheur, de faire modéliser cette problématique sans support logiciel. Nous ne ferons référence à cette première expérimentation que pour souligner les améliorations apportées à cette séquence l'année suivante.

La deuxième année nous avons à nouveau proposé ce scénario de classe sous forme de cours-TD devant deux classes de 35 élèves environ, sur une durée de deux heures avec pour outils d'aide à la visualisation : un PC connecté à une tablette rétroprojetable et pour logiciel : CABRI-GEOMETRE. Voici les principales étapes de cette expérimentation :

1ère étape.

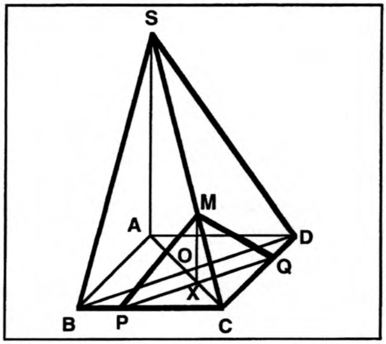
On a procédé à la construction d'une première section sur une pyramide brute conforme à l'énoncé en suivant les suggestions proposées par les élèves (Fichier PYRAIRE1.FIG).



On constate que cette construction cesse d'être opérationnelle lorsque le point M est trop bas sur l'arête [SC].

2ème étape.

On recommence la construction lorsque la première est défaillante



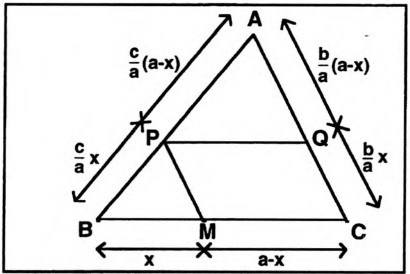
3ème étape.

L'enchaînement des deux constructions permet de suivre qualitativement l'évolution de l'aire de la section et de conjecturer l'existence d'une position du point M pour laquelle cette aire est maximale.
En effet, cette aire est une fonction positive du paramètre fixant M sur [SC], nulle lorsque M est en S ou en C et intuitivement continue. Il existe donc au moins un point M de l'arête [SC] pour lequel cette aire est maximale.

4ème étape.

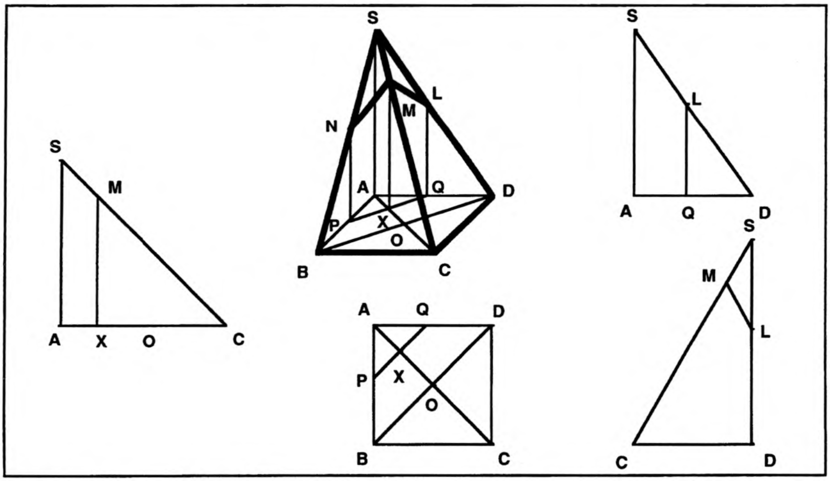
On modélise la situation. Après un court débat, la classe décide d'exprimer l'aire de la section en fonction de la distance x = AX. Le calcul effectif de l'aire de chaque type de section nécessite le calcul de certaines distances dont on fait le recensement. La configuration de Thalès est reconnue dans différentes sections, mais le calcul des distances utiles s'avère laborieux dans la première des deux classes (comme lors de la première expérimentation).

Un premier obstacle est la prise de conscience que dans cette configuration dès qu'un distance est fixée, toutes les autres deviennent calculables.



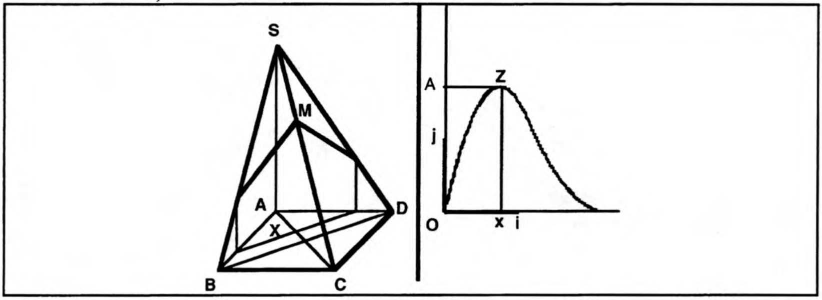
Un deuxième obstacle réside dans la difficulté à appréhender ces distances en vraie grandeur dans les différents plans de sections.
Michèle Duperier a profité du décalage dans le temps des deux expérimentations pour améliorer la mise en scène initiale.

5ème étape.
Pour faciliter la vision en vraie grandeur dans ces plans, elle a réalisé un patron éclaté de la pyramide dans des fenêtres contiguës à celle qui porte la figure de base. Ce patron est obtenu en procédant à une translation de la face (SAD) vue en vraie grandeur et à un rabattement dans le plan frontal de la face (SCD), de la base (ABCD) et de la cloison (SAC). On peut alors suivre les déplacements des points M, N, P, Q, L et X dans les faces qui les contiennent et faire émerger les outils de géométrie plane permettant d'exprimer l'aire A étudiée en fonction de la distance x = AX.
On notera que les différentes sections représentées sont solidaires de la pyramide initiale et évoluent en même temps qu'elle (Fichier PYRAIRE2.FIG).



6ème étape.
La mise en équation s'achève par la détermination de la fonction qui, à l'abscisse x du point X sur un axe porté par la diagonale [AC], associe l'aire A de la section étudiée.
Cette fonction est une fonction polynomiale du second degré par intervalle. Pour faciliter le passage de l'étude géométrique à l'étude fonctionnelle, on imaginé de faire tracer comme lieu la courbe représentant l'aire A en fonction de la variable x. Avec la version 1.7 de CABRI l'utilisation de la commande "Lieu de points" automatique en prenant pour point mobile le point courant M de l'arête [SC], on obtient un tracé de bonne qualité. On

constate que les deux arcs de parabole obtenus se raccordent de façon assez satisfaisante pour qu'on puisse inférer qu'au point de raccord ces deux arcs ont même tangente (Fichier PYRAIRE3.FIG).



L'exploitation de cette problématique permet de faire fonctionner les outils du cours d'analyse de la classe de première.

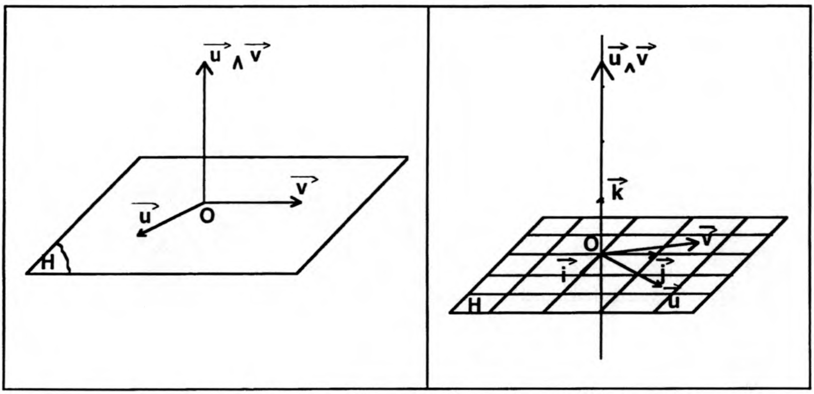
On trouvera dans une brochure intitulée : "Apprendre et pratiquer la géométrie avec l'ordinateur" qui sera prochainement publiée par l'IREM d'Orléans d'autres activités plus faciles, reprenant le même type de mise en scène.

II. UNE SÉQUENCE DE COURS EN TERMINALE SCIENTIFIQUE.

Cette séquence se proposait, dans une classe de TC, de visualiser le produit vectoriel de deux vecteurs et d'appréhender les qualités essentielles de ce produit :

- proportionnalité des normes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et de $\vec{u}$ (respectivement $\vec{v}$),
- annulation de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,
- changement de sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ franchit la frontière définie par $\Delta(O, \vec{v})$ dans le plan H.

A cet effet, en faisant varier le vecteur $\vec{v}$ sur une droite fixe et le vecteur $\vec{u}$ dans le plan H, on peut observer les modifications induites sur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (fichier PRODVECT.FIG).



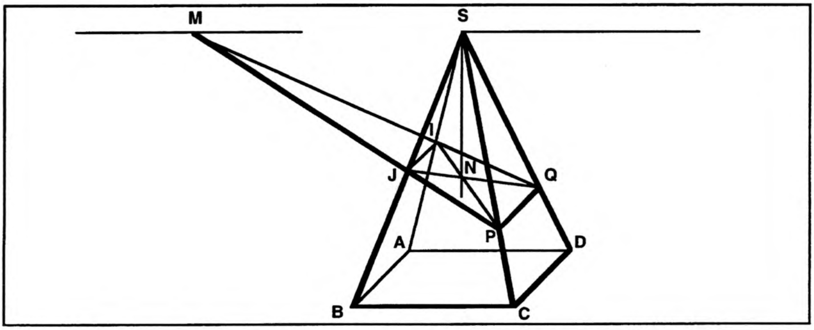
Cette visualisation a servi de support au cours théorique et permis d'ancrer dans les esprits l'essentiel de l'apprentissage de cette notion. A partir d'un autre fichier, on a pu vérifier le fonctionnement de l'expression analytique du produit vectoriel (fichier PRODVECA.FIG) en utilisant un quadrillage du plan H et une graduation de la normale en O à ce plan.

Un réinvestissement en physique pour faciliter la compréhension de la notion de champ magnétique induit par un solénoïde pourrait être envisagé à partir du même principe.

III. DES LIEUX DANS L'ESPACE.

La dernière séquence expérimentée a été construite pour des étudiants PLC1 de l'IUFM d'Orléans (centre de Tours) préparant l'oral du CAPES. Elle aurait pu sans inconvénient servir de point de départ pour une activité géométrique en terminale scientifique. Il s'agissait de trouver un exemple d'emploi des barycentres pour la recherche de lieux géométriques. Les étudiants n'ayant pas trouvé dans les manuels d'exemples dans l'espace, il leur a été proposé la situation suivante :

Soit (SABCD) *une pyramide régulière à base carrée. Par les milieux* I *et* J *des l'arêtes* [SA] *et* [SB], *on mène un plan* (F) *qui coupe respectivement les arêtes* [SC] *et* [SD] *en* P *et* Q. *On demande de vérifier que le quadrilatère* (IJPQ) *est un trapèze et de déterminer le lieu du point* M *(resp.* N*) intersection des diagonales* [IP] *et* [JQ] *(resp. des droites* (IQ) *et* (JP)*) lorsque le plan* (F) *pivote autour de la droite* (IJ).



Le fait que ces lieux soient inclus dans deux droites est assez évident géométriquement. Ce qu'apporte CABRI, c'est la délimitation précise de ces deux lieux (fichier LIEUESPC.FIG).
La justification précise peut alors être entreprise analytiquement en paramétrant par exemple la position du point P sur l'arête [SC] en terme de barycentre.

IV. BILAN DE CES EXPÉRIMENTATIONS.

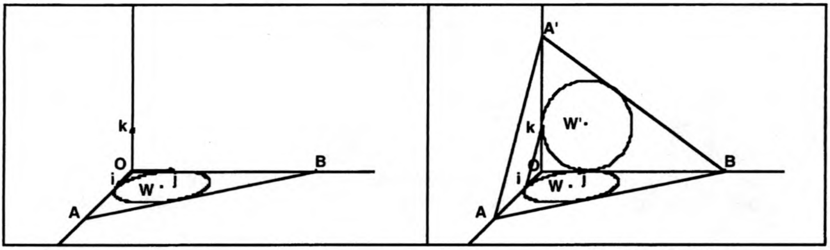
CABRI est outil précieux d'aide à la visualisation dans l'espace :
- il permet de mettre en place très vite les problématiques et de les faire évoluer,
- sa dynamique permet de conjecturer l'évolution qualitative (voire quantitative) des phénomènes.

V. LA CABRI-GÉOMÉTRIE : UN ART RÉSERVÉ AU MAÎTRE ?

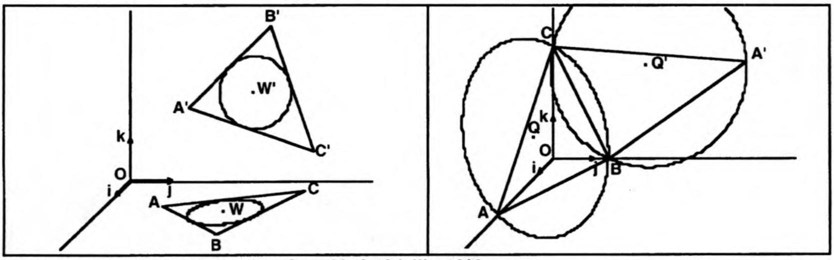
Les constructions mises en œuvre pour réaliser ces fichiers sont en général très élémentaires, mais sont souvent hors de portée des élèves. Cela nous a posé question puisqu'admettre ce fait, c'est reconnaître que tout un pan de notre culture mathématique n'est plus transmise à nos élèves. Il ne s'agit pas de regretter qu'on n'enseigne plus des techniques spécialisées de géométrie descriptive, mais de constater que projeter une figure sur un plan, rabattre un plan sur un autre,... ne sont plus des compétences exigibles en fin de cursus secondaire, bien que les notions de projection orthogonale et de rotation de l'espace figurent dans les programmes. Ces savoir-faire semblent tombés en désuétude plutôt par laisser-aller que par choix délibéré. Nous avons constaté en effet que les enseignants acceptent qu'une figure de l'espace soit construite avec négligence, alors qu'ils ont de grandes exigences de soin et de précision pour les figures planes. Voici un exemple illustrant ce constat :

On donne dans l'espace muni d'un repère orthonormal $R = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *un triangle* (OAB) *inclus dans le plan* (xOy) *tel que :* $A\in(Ox)$ *et* $B\in(Oy)$. *On souhaite faire intervenir le centre du cercle inscrit à ce triangle.*

Persuadé qu'il saura raisonner juste sur une figure fausse, l'enseignant se surprend à placer ce point au jugé alors que dans le plan il aurait pris la précaution de tracer les bissectrices intérieures du triangle.
Pourtant, le triangle étant fixé, ce point est unique, donc il n'est pas placé n'importe où lorsque le repère est donné. Et si on fait l'hypothèse que tous les objets inclus dans le plan frontal (yOz) sont vus en vraie grandeur, ce point devient constructible sans ambiguïté. Il suffit de rabattre le triangle en vraie grandeur dans le plan frontal (yOz), de construire le centre du cercle inscrit du triangle image puis de construire l'image de ce point dans le rabattement réciproque du précédent Cette construction, réalisable en situation papier-crayon, peut être exécutée économiquement sous CABRI à l'aide des macro-constructions associées à chaque rabattement (fichier TRI_XOY1.FIG).
On pourra s'exercer à réaliser ces travaux dans les ateliers de l'après-midi.



Ce procédé se généralise sans trop de peine pourvu que l'on dispose d'un plan de référence où l'on puisse exécuter les tracés en vraie grandeur. Voici deux autres exemples illustrant cette idée :



Le premier (fichier TRI_XOY2.FIG) généralise le même problème à un triangle quelconque inclus dans le plan (xOy) et le second (fichier TRI_OXYZ.FIG) traite le problème du tracé du cercle circonscrit à un triangle dont les sommets sont situés sur les axes du trièdre de référence.

Enfin, en enchaînant plusieurs macro-constructions de ce type, on peut faire tracer comme lieux certaines courbes gauches de l'espace telle la fenêtre de Viviani (fichier VIVIANIP.FIG) ci-contre.

FENÊTRE DE VIVIANI

Intersection de la sphère d'équation :

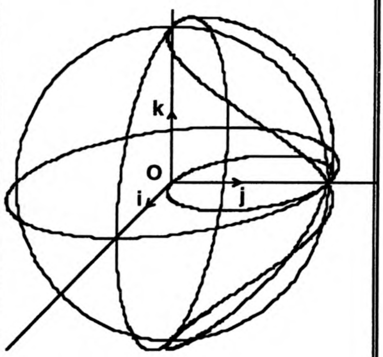
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

et du cylindre d'équation :

$$x^2 + y^2 - r\,y = 0$$

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \varphi \\ y = r \sin^2 \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$



En guise de conclusion nous laissons ouvertes deux questions :

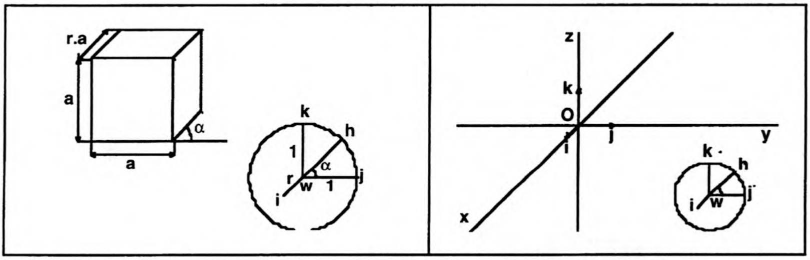
- de tels travaux peuvent-ils être envisagés sans un minimum de réflexion sur les principes de la perspective cavalière et un apprentissage d'un certain nombre de tracés fondamentaux ?
- cette CABRI-GEOMETRIE de l'espace artisanale n'est-elle pas déjà obsolète compte tenu de la naissance prochaine d'un CABRI-3D qui intégrera peut-être certaines de ces procédures comme outil de base ?

VI. LES ATELIERS DE CABRI-GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Lors des deux ateliers associés à notre exposé nous avons proposé aux participants de s'exercer à la CABRI-GEOMETRIE de l'espace.

A. Activité n°1.

En introduction on a proposé de charger une figure (fichier CSTPERSP.FIG) et une macro-construction (fichier CSTPERSP.MAC) permettant de régler les constantes de la perspective cavalière et de modifier ces constantes à la demande en cours de travail. Ces constantes sont le rapport de réduction de la norme du vecteur $\vec{i}$ par rapport aux deux autres vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ de la base et l'angle de fuite du vecteur avec le vecteur $-\vec{i}$ (cf. l'excellente brochure intitulée "La perspective cavalière" rédigée par G. Audibert publiée par l'APMEP en 1990, p. 68-70). Les choix classiques de $(r;\alpha)$ sont $(\frac{1}{2};30)$ ou $(\frac{1}{2};45)$ ou $(\frac{1}{2};60)$. Toutes les figures illustrant ce document ont été réalisées avec les constantes $(\frac{1}{2};45)$. Ce réglage étant effectué, on rangera le rapporteur en dehors de l'écran.



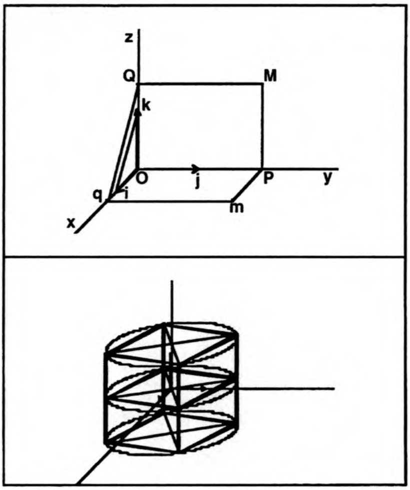
B. Activité n°2.

Nous avons ensuite proposé de réaliser la macro-construction permettant de rabattre un point du plan (yOx) dans le plan frontal (yOz) (fichier RABYX_YZ.MAC) ainsi que sa macro-construction réciproque (fichier RABYZ_YX.MAC).

N.B. En intervertissant les rôles de j et k lors de l'exécution de ces deux macro-constructions, on peut aussi rabattre un point du plan (xOz) dans le plan frontal (yOz) et vice versa.

En utilisant ces deux macro-constructions, tous les participants ont pu, sans trop de peine, réaliser les constructions des cercles inscrit ou circonscrit à un triangle inclus dans le plan (xOy) présentées dans l'exposé du matin.

Notre collègue Yves Martin a proposé comme autre application : faire tourner un cube autour de l'axe (Oz) (fichier GIROCUBE.FIG) dont voici une image.

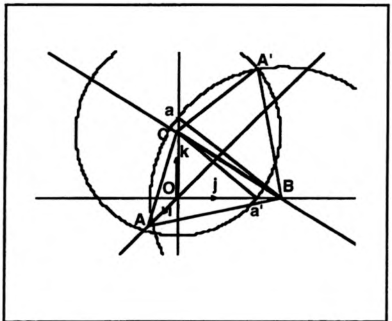


C. Activité n°3.

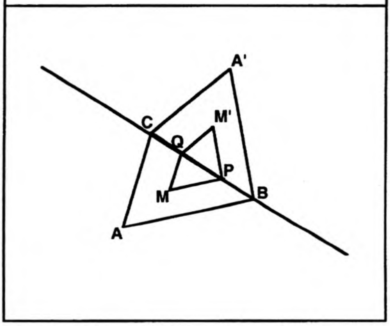
La reprise du même problème avec un triangle dont les sommets sont portés par les axes du repère a opposé plus de résistance à la sagacité des participants. Il a fallu venir à bout de deux difficultés :

- rabattre le triangle (ABC) dans le plan frontal (yOz) en le faisant pivoter autour de la droite (BC),
- rabattre un point quelconque du plan frontal dans le plan du triangle (ABC) par rotation autour de la droite (BC) et en faire une macro-construction.

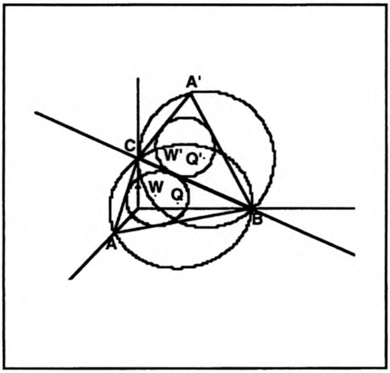
La première étape peut être franchie en rabattant le point A considéré comme point du plan (xOy) en a dans le plan (yOz). De même, on rabat le point A considéré comme point du plan (xOz) en a' dans le plan (yOz). Alors les distances Ba et Ca' représentent respectivement en vraie grandeur dans ce plan frontal (yOz) les distances BA et CA initiales. Pour obtenir l'image A' du point A par la rotation d'axe (BC) qui rabat le triangle (ABC) dans le plan (yOz), il suffit alors de construire un triangle s'appuyant sur [BC] dont les longueurs des côtés sont connues (fichier RABACBOC.FIG).



La procédure la plus économique proposée pour régler la deuxième difficulté consiste à mener par M' les parallèles aux côtés [A'B] et [A'C] du triangle (A'BC) qui coupent respectivement la droite (BC) en P et Q. Les images des droites (M'P) et (M'Q) dans le rotation d'axe (BC) qui rabat le triangle (A'BC) sur le triangle (ABC) sont les droites parallèles à [AB] et [AC] issues des points invariants P et Q. On achève donc en construisant ces deux parallèles qui se coupent au point M recherché. Une macro-construction permet d'automatiser cette procédure (fichier RABOCBAC.MAC).



En reprenant et en épurant la figure sauvée sous RABACBOC.FIG, on peut alors tracer les cercles circonscrit et inscrit au triangle (A'BC) et leurs centres respectifs Q' et W', puis faire appel à la macro-construction précédente pour déterminer les centres Q et W des cercles respectivement circonscrit et inscrit au triangle (A'BC). On choisit alors un point courant M' sur le cercle circonscrit et on détermine le point d'intersection N' du segment [W'N'] et du cercle inscrit. Toujours à l'aide de la même macro-construction, on rabat les points M' et N' dans le plan du triangle (ABC) et on demande leurs lieux lorsque le point M décrit le cercle circonscrit au triangle (A'BC) (fichier TRAXBYCZ.FIG).

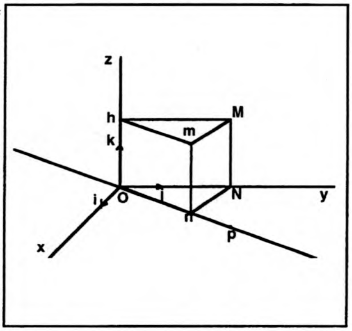


D. .Activité n°4.

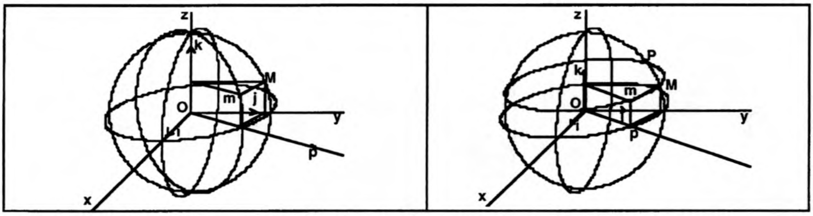
Une dernière activité avait été prévue, mais n'a pas pu être exploitée faute de temps.
Elle visait à réaliser la macro-construction d'une rotation d'axe (Oz) amenant dans le plan frontal (yOz) un point M quelconque de l'espace, puis à utiliser cette macro-construction pour réaliser quelques tracés sur une sphère.

Voici la description de la figure prévue (fichier ROTAXEOZ.FIG) pour servir de support à cette macro-construction (fichier ROTAXEOZ.MAC).
Le point m initial est défini par :
- un point p qui fixe le plan (pOz) contenant m,
- les projections n et h de m sur (Op) et (Oz).

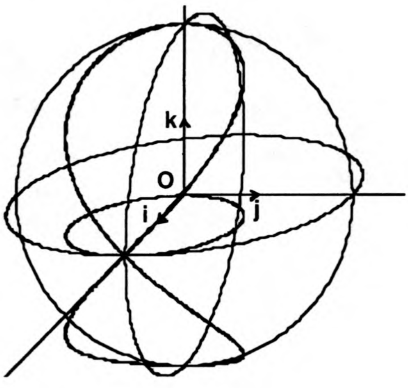
En déroulant l'historique on découvrira comment ont été construits les points N et M images respectives de n et m dans la rotation d'axe ($\overrightarrow{Oz}$) d'angle ($\overrightarrow{Op}$,$\overrightarrow{Oy}$). On a de même enregistré la macro-construction réciproque (fichier RECAXEOZ.MAC) à partir d'une figure analogue (fichier RECAXEOZ.FIG).



En utilisant ces macro-constructions on peut obtenir le tracé en perspective cavalière d'une sphère et faire dessiner le méridien ou le parallèle passant par un point m donné de cette sphère (fichier MERIDIEN.FIG et fichier PARALLEL.FIG).



Enfin pour terminer, en récompense, on peut faire un retour à la fenêtre de Viviani, cette fois vue de face (fichier VIVIANIF.FIG).



2. Cabri-géomètre : un outil pédagogique pour le physicien.

Mathilde ARAGON
Lycée Marie Curie
Echirolles

I. RENCONTRE AVEC CABRI

J'ai rencontré Cabri-géomètre à l'age de 17 ans alors que sur la terrasse de sa villa, Jean Laborde, père de Jean Marie Laborde, expliquait les mathématiques en faisant des dessins sur une feuille de cahier. J'étais la camarade de classe de sa fille et je pouvais ainsi bénéficier des talents de mathématiciens du père.
Le cahier de brouillon interactif était là sous mes yeux animé par la main et l'esprit de Jean Laborde. Les mathématiques devenaient magiques et lumineuses.

Quelques années plus tard, de passage à la tour Irma sur le campus universitaire de Grenoble, j'ai rencontré la version informatisée de Cabri-géomètre qu'avait fait naître Jean Marie Laborde. Je fus aussitôt séduite (eh oui !) par ce produit. (bien sûr), qui me permettrait de créer des modélisations en sciences physiques.

Quelques temps plus tard, je rencontrais Gilles Mounier, Cabri-spécialiste comme chacun le sait, qui eut la bonté de m'initier à l'art de la programmation avec Cabri.
Je fis donc mes premiers pas en dessinant sous la tutelle de Gilles une porte de garage basculante. (Ca manque un peu de poésie mais enfin .....)
Depuis grâce à certaines macros "qui ne sont pas grand chose et qui ne servent à rien", comme diraient certains mathématiciens modestes, j'ai réussi à progresser et à créer quelques modélisations en sciences physiques.
J'ai la chance de pouvoir les utiliser régulièrement avec mes élèves.
Il faut préciser que le lycée Marie Curie à Echirolles (38), où je travaille, est muni d'un réseau informatique.

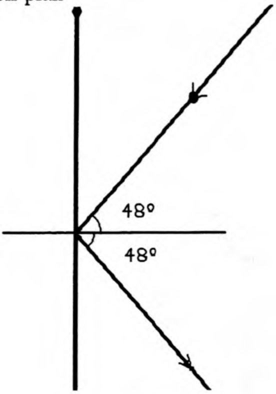
II. LES CONDITIONS D'UTILISATION AU LYCÉE MARIE CURIE.

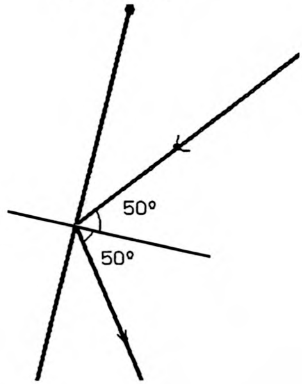
- Le réseau informatique du lycée Marie Curie relie
250 ordinateurs dont
20 pour les sciences physiques répartis en
trois salles de TP, dotés de 6 postes et
2 amphis munis de vidéo-projecteurs qui transmettent sur un grand écran, l'image du micro-ordinateur.
Le lycée a acheté une version réseau de Cabri et les élèves et les professeurs peuvent donc accéder à cette ressource en tous points de l'établissement pour les cours, les Travaux Pratiques (TP) ou le libre service.

III. LES APPORTS DE CABRI- GÉOMÈTRE DANS LES SCÉNARII PÉDAGOGIQUES EN SCIENCES PHYSIQUES

Remarque
Les copies d'écran ici en noir et blanc sont moins lisibles que les images couleurs sur l'écran du micro-ordinateur.

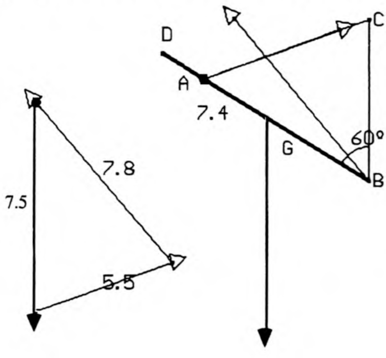
CABRI :
- Aide à la formalisation
- miroir plan (MIRPLAN)



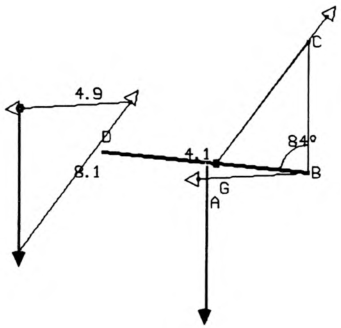


En TP l'élève réalise l'expérience, et compare simultanément avec la modélisation sur l'écran de son micro-ordinateur
Il peut ainsi plus clairement énoncer les lois de la réflexion en utilisant les notions d'angles d'incidence et de réflexion.

- équilibre d'un solide soumis à trois forces (ABRI)



En TP l'élève réalise l'expérience modélisée ci-dessus. Une tige BD homogène, peut tourner autour d'un axe B. Elle est attachée an A par un fil dont l'autre extrémité C est fixe. La tension du fil est mesurée expérimentalement par un dynamomètre. Les élèves pèsent la barre pour déterminer son poids.
La modélisation est à l'échelle.

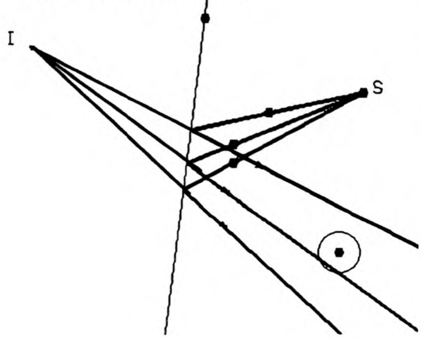


L'élève observe le vecteur poids lorsque la barre tourne : ce vecteur conserve sa direction, son sens et son intensité.
Pour chaque position de A l'élève peut comparer la valeur de la tension du fil avec celle qu'il mesure expérimentalement et ainsi valider le modèle.
Il découvre grâce à la simulation que les trois forces sont toujours concourantes à l'équilibre.
Il découvre sans faire de calculs que la somme vectorielle des forces est nulle.
Il visualise la réaction de l'axe en B .

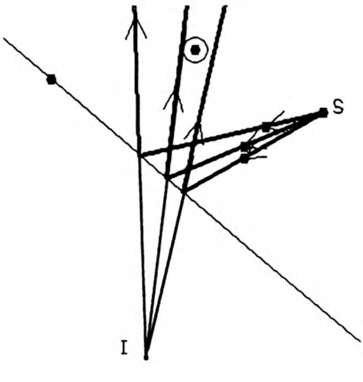
CABRI :
permet de simuler la réalité concrète en superposant une couche de concepts plus abstraits

- image dans un miroir plan

(MIRPLIMA)



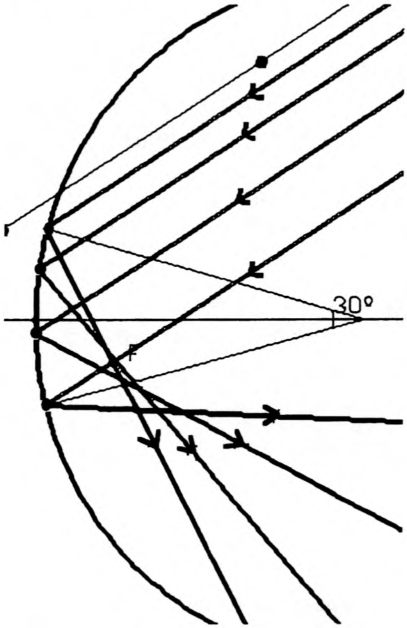
La généralisation des lois de la réflexion à la notion d'image dans un miroir est délicate.
Classiquement l'élève réalise l'expérience des deux bougies: il place deux bougies identiques éteintes en S et en I. La droite au centre est une vitre transparente. L'oeil (symbolisé par le cercle) voit donc la bougie en I.
Lorsque l'élève allume la bougie en S, celle en I s'allume aussi.



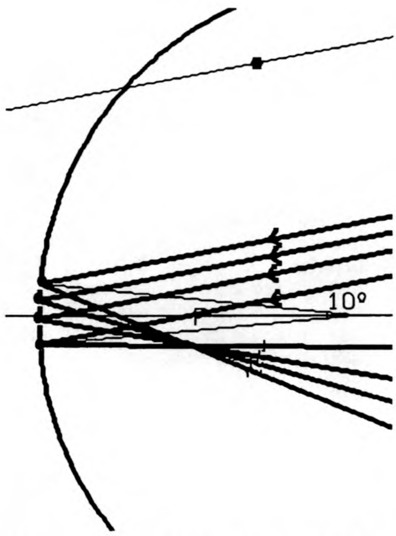
L'élève peut chercher l'explication en utilisant ses connaissances des lois de la réflexion.
On peut par la suite lui soumettre le fichier informatique sous Cabri, afin qu'il puisse visualiser son modèle dans tous les cas de figure.

CABRI :
permet d'amplifier artificiellement un phénomène.

- conditions de stigmatisme du miroir sphérique (MIRSPHE)



Des rayons lumineux parallèles entre eux ne convergent pour le miroir sphérique que dans les conditions de Gauss, c'est à dire lorsque les rayons sont proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à cet axe.

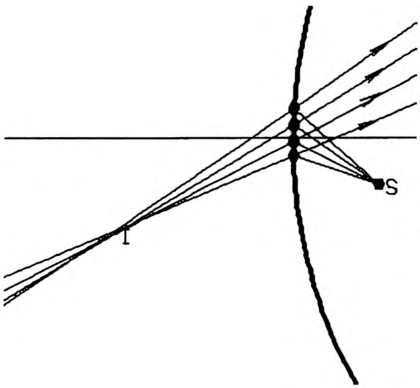


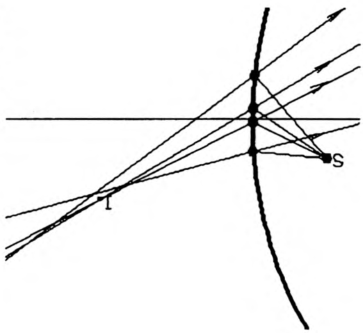
Dans les conditions de Gauss la notion de foyer du miroir sphérique devient alors pertinente.

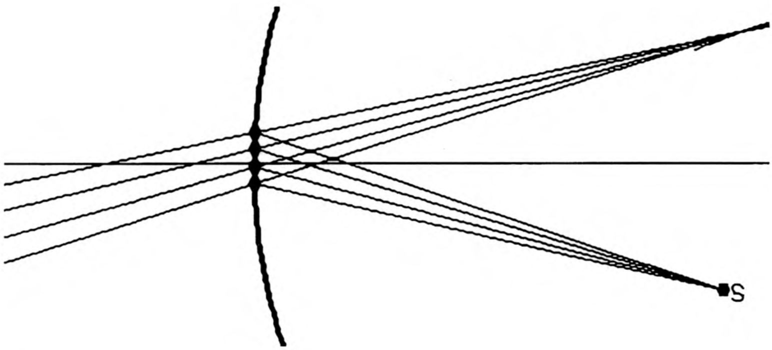
CABRI :
facilite l'approfondissement des concepts

- image étendue dans un miroir sphérique (MIRSPIMA)

Si on applique les lois de la réflexion à un miroir sphérique on découvre que la notion d'image subsiste mais dans les conditions de Gauss seulement.





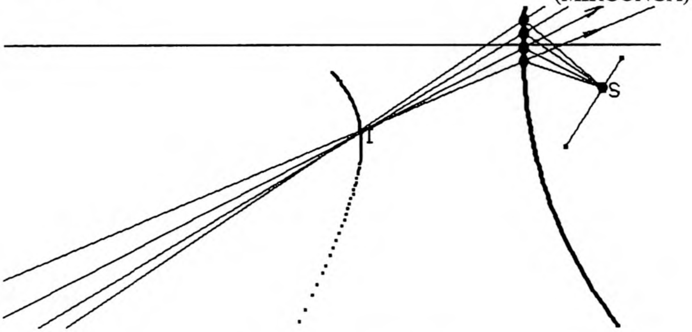


Par ailleurs l'image virtuelle n'existe plus que lorsque la source est au delà du foyer.

On peut facilement généraliser la notion d'image traitée dans le cas de la source ponctuelle au cas d'images étendues grâce à la puissance de calcul de l'ordinateur.
On lie la source à un objet étendu, ici un segment (voir schéma ci-dessous) et on demande le lieu des points image I lorsque la source décrit l'objet.
Cabri-géomètre trace le lieu qui correspond à l'image étendue.
L'élève constate qu'il y a bien déformation.

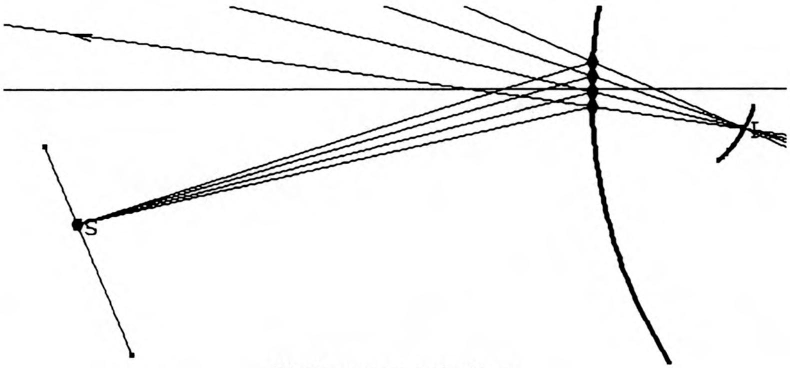
Il peut vérifier l'exactitude de ce modèle chaque fois qu'il place son doigt dans sa cuillère à soupe!
ou au dos de celle-ci

(MIRCONCA)



Miroir concave grossissant

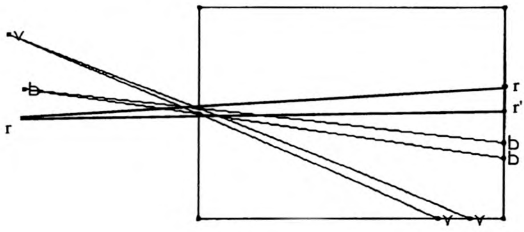
(MIRCONVEX)



Miroir convexe amincissant

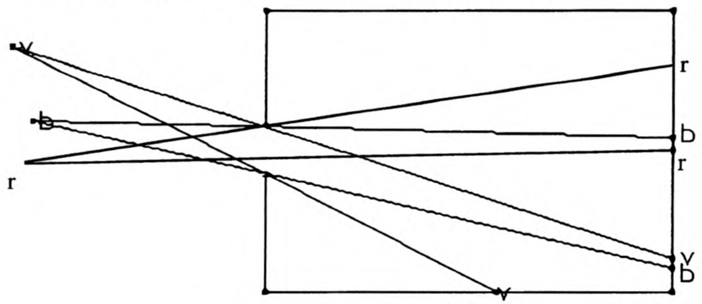
CABRI :
favorise la recherche expérimentale par la mise en évidence des paramètres

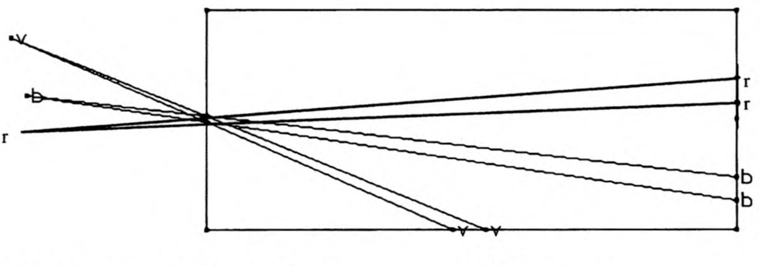
- la chambre noire (CHAMBNOI)



Une chambre noire est une boite percée d'un trou de diamètre réglable appelé diaphragme.
La fond de la boite est translucide, en papier calque ou verre dépoli.
En général il peut coulisser dans le corps de la boite .
Les élèves disposent d'une chambre noire et font des observations quant à la netteté, au renversement de "l'image", à sa taille lorsque les différents paramètres varient.
Il est intéressant de ne faire varier qu'un paramètre à la fois.
L'animation de la figure basée sur le propagation de la lumière en ligne droite aide l'élève à faire le lien logique entre ce qu'il perçoit et le modèle.
Voici quelques exemples :

Ici le diaphragme augmente et "l'image" se brouille complètement

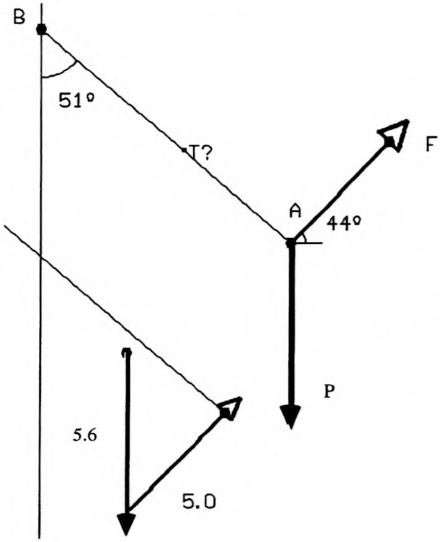




Ici la distance du dépoli au diaphragme augmente et "l'image" grandit.

CABRI :
aide à la résolution de problème par une appréhension perceptive
(avant la formalisation algébrique)

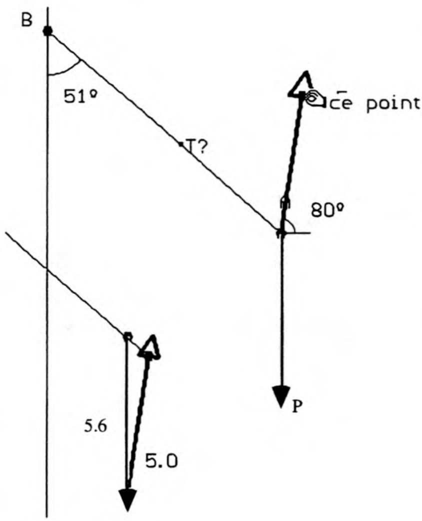
- problème d 'électrostatique (ANNEAU)

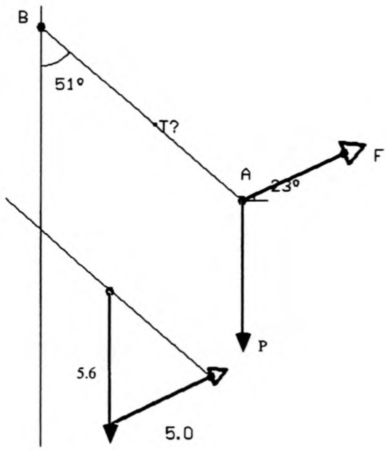


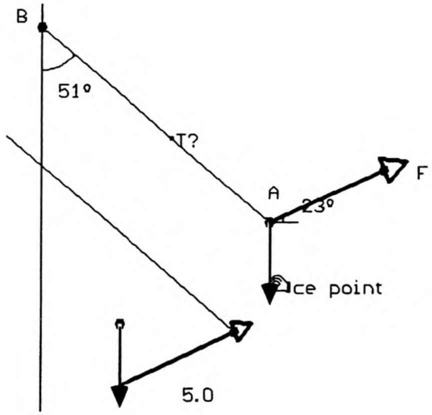
Une petite sphère électrisée est fixée à l'extrémité A d'un fil isolant.
L'ensemble est placée dans un champ électrique .
L'intensité du champ reste constante mais on peut faire varier sa direction et son sens.
La sphère sera donc soumise à une force constante en intensité, mais variable en direction.

L' angle du fil est donné, ainsi que le poids de la sphère et l'intensité de la force électrostatique.

Pour quelle orientation du champ y a-t-il équilibre de la sphère ?







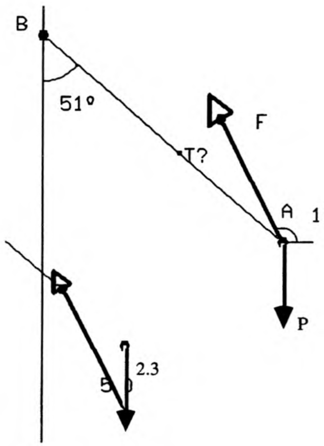
En faisant tourner la force électrostatique, on constate qu'il existe

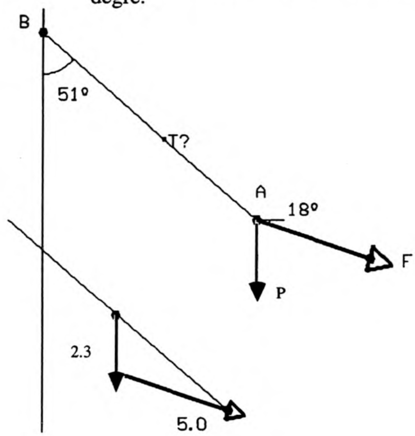
2 solutions acceptables (schéma ci-dessus)

0 solution (schéma ci contre)

2 solutions dont l'une est acceptable car elle correspond à une intensité positive pour la tension et l'autre qui n'a pas de sens pour le physicien car cette intensité est alors négative (voir schéma ci-dessous)

Lorsque l'on fait la résolution par le calcul, on est évidemment amené à résoudre une équation du second degré.

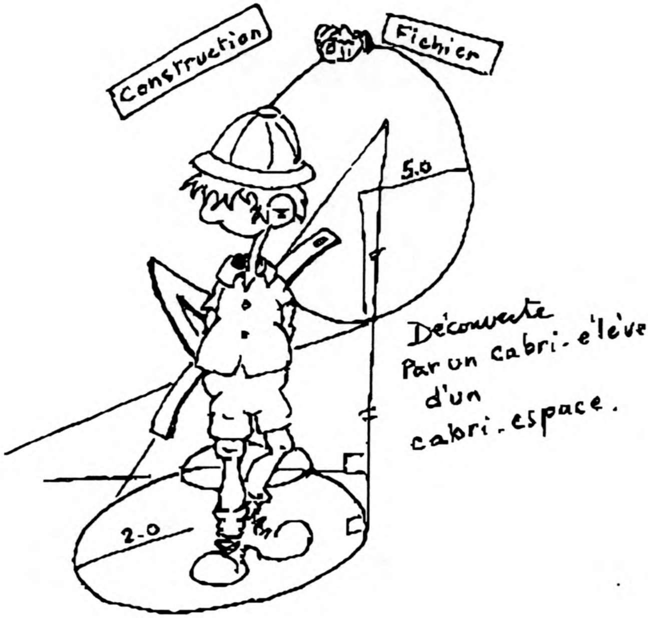




IV. Conclusion

Cabri-géomètre apporte une aide inestimable à la compréhension immédiate de certains phénomènes complexes. Il permet donc aux physiciens de faire de la modélisation sans utiliser certains outils mathématiques parfois très lourds.
Ma pratique pédagogique m'a cependant appris à me méfier aussi de cette facilité.
L'aspect ludique de l'animation fascine l' élève. Mais il ne doit pas lui masquer la véritable complexité des phénomènes . Lorsque l' élève rentrent chez lui, il cherche encore à s'approprier définitivement ces nouvelles connaissances à partir du cours du professeur transcrit dans le cahier. Ce cours, seul témoin de sa compréhension doit rester suffisamment détaillé pour qu'il puisse retrouver toutes les étapes de son observation.

Note : Edition des fichiers
Ces fichiers de modélisation en sciences physiques pour Cabri-géomètre vont être édités par le Centre National de Documentation Pédagogique avec un petit livre d'accompagnement donnant des explications quant à leur utilisation.
Vous pourrez les trouver à partir de 1994 dans la série du CNDP " FICHIERS POUR ...."


Construction
Fichier
5.0
2.0
Découverte
par un cabri-élève
d'un
cabri-espace.

3. Témoignage : j'ai rencontré des Cabri-élèves

Jean-François BONNET
Collège de la Vallée du Gapeau
Solliès Pont (Var).

I. PRÉAMBULE

A. Présentation.

Jean-François BONNET
Professeur de mathématiques
Depuis 1986 : * 1/2 service comme formateur informatique MAFPEN
* 1/2 service comme prof de maths (1 ou 2 classes en collège).
* Groupe académique maths et informatique présidé par les IPR de maths de l'Académie.
* Groupe IREM

B. Expérience.

Depuis 1988, je travaille avec des classes de collège, en utilisant beaucoup l'outil informatique en mathématiques, et en particulier le logiciel CABRI-Géomètre. J'ai suivi la scolarité d'élèves qui ont étudié tout le programme de géométrie du premier cycle à travers ce logiciel. Au cours des actions de formation que j'ai menées, CABRI-Géomètre a été systématiquement au coeur des débats. Nous avons discuté de son utilisation, préparé des séquences, observé des élèves.

C. Définition de l'intervention.

Mon intervention se propose :

* D'expliquer pourquoi et comment, au collège de la Vallée du Gapeau, l'informatique est devenue un outil incontournable en mathématiques.
* De montrer en quoi CABRI-Géomètre est un logiciel d'une grande intelligence, au point qu'il nous amène à repenser l'enseignement de la géométrie au collège.
* De donner, à travers un thème, la pédagogie des contraintes, la "température" de ce type de travail.

Je souhaite apporter le point de vue et le témoignage d'un praticien plus que d'un théoricien. L'originalité essentielle de mon expérience <u>est d'avoir existé</u>. Par les temps qui courent, compte tenu de l'état de l'informatique pédagogique dans l'Education Nationale, c'est déjà bien.

J'ai rencontré des CABRI-élèves !

II. CINQ ANS DE TRAVAIL AVEC DES CABRI-ÉLÈVES.

A. Le point de départ de l'activité.

En 1988, un jeune élève de CM2 est victime d'un terrible accident en escaladant un pylône haute tension. Bien qu'il conserve l'intégralité de ses capacités intellectuelles, Il doit subir plusieurs amputations dont le bras gauche et l'avant-bras droit.
Notre collège étudie son intégration à un système scolaire normal, pour son année de 6ème. Sachant qu'il ne pourra écrire qu'avec un clavier, nous décidons de créer une classe à dominante informatique dans laquelle les ordinateurs seront, pour <u>tous</u> les élèves, intégration oblige, des outils quotidiens et familiers, au service des différentes disciplines.

Dans un deuxième temps, l'expérience ayant donné entière satisfaction, et les infrastructures existant, nous étendons l'activité à d'autres classes.

B. Les différents types d'activités

Cette dynamique informatique a ouvert l'appétit à beaucoup de collègues. Pour ce qui concerne les maths, en plus de la dominante informatique, nous avons mis en place une activité "maths-info".

C. Le travail en dominante informatique.

Le principe du travail en dominante informatique est de créer les conditions pour que, dans la plupart des disciplines, l'outil informatique soit disponible pour être utilisé comme support pédagogique.
Créer les conditions : matériel, logiciels, formation ...

Les classes à dominante sont un certain nombre d'heures en salle info :

Disciplines	Nb heures par semaine	Nb heures année	Nb heures sur le cycle
Maths	3	96	384
Français	3	96	384
Histoire géo	1	32	128
LV1	1	32	128
Sciences exp	1	32	128
Techno	1	32	128
Total	10	320	1280

Remarque : être une heure en salle info ne veut par dire être une heure devant un ordinateur. Ce qui est important c'est que l'informatique soit rendue facile par la disponibilité du matériel.

Ce taux d'utilisation varie selon les matières. Pour ce qui concerne les maths, il semble qu'une moyenne de deux heures hebdomadaires soit proche de la réalité. Plus particulièrement, Cabri-Géomètre intervient au moins pour la moitié du temps.

Ce qui représente, pour une classe, pour une année scolaire, environ 40 h de travail sur CABRI-Géomètre, réparties en une centaine d'activités différentes.

D. L'activité maths-info.

Une autre activité a été mise en place dans le collège concernant les Maths. Elle s'adresse aux classes qui ne sont pas à dominante informatique. Les élèves vont une heure tous les quinze jours en salle informatique faire des exercices sur CABRI-Géomètre. Ceci représente un volume de seize séances pour l'année. Ces activités ont étés créées, testées et rédigées au cours d'un stage Mafpen de trois jours en début de chaque année.

Remarque : là aussi la priorité est donnée à la mise en place de conditions facilitantes et sécurisantes ...

E. Evolution dans le temps des activités informatiques et du matériel.

Année scolaire	Dominante info	Maths info	Matériel lié au travail en maths
1988/1989	6ème		Salle info 14 postes PC XT (CGA)
1989/1990	6ème 5èmè		Salle info 14 postes PC XT Salle profs 2 postes
1990/1991	6ème 5ème 4ème	6ème	Salle info 14 postes PC XT Salle info 14 postes PC 286 Salle profs 2 postes
1991/1992	6ème 5ème 4ème 3ème	6ème 5ème	Salle info 14 postes PC XT Salle info 14 postes PC 286 Salle profs 2 postes
1992/1993	6ème 5ème 4ème 3ème	6ème 5ème	Salle info 14 postes PC 386SX Salle info 14 postes PC 286 CDI 5 postes PC 386SX réseau Novell Salle profs 4 postes
1993/1994	6ème x 2 5ème 4ème 3ème	6ème 5ème 4ème	Salle info 14 postes PC 386DX réseau Novell Salle info 14 postes PC 386SX (5 en réseau avec le CDI) Salle info 14 postes PC 286 CDI 5 postes PC 386SX réseau Novell Salle profs 4 postes
1994/1995	6ème x 2 5ème x 2 4ème 3ème	6ème 5ème 4ème 3ème	Salle info 14 postes PC 386DX réseau Novell Salle info 14 postes PC 386SX (5 en réseau avec le CDI) Salle info 14 postes PC 286 CDI 5 postes PC 386SX réseau Novell Salle profs 4 postes

F. Les conditions de fonctionnement d'un site informatique.

Un projet : bien défini, réalisable.
Une équipe : motivée, réduite puis étendue.
Un consensus : tout l'établissement pousse dans le même sens.
Du matériel : performant, fiable, suffisant.
Des logiciels : peu mais bons (et surtout CABRI-Géomètre).
De la formation : pas technique mais pratique et pédagogique.
Une solide politique de maintenance : pannes, nouveaux logiciels et matériels, organisation du site.

En fait, la difficulté principale, c'est que pour que le site fonctionne bien, il faut que <u>l'ensemble de ces conditions</u> soient réunies.

III. LES STRATÉGIES D'UTILISATION DE CABRI-GÉOMÈTRE.

A. Les problèmes d'organisation de la classe.

Ce type de travail peut facilement, si on n'y prête garde, générer une grande agitation. Nous donnons dès le départ aux élèves des habitudes de travail assez rigoureuses, dont les règles sont portées sur un document co-signé qui est notre "code de conduite".

La plupart du temps, les élèves travaillent par groupes de deux, qu'ils forment comme ils le désirent.

Le point fort du travail sur informatique réside, entre autres, en une augmentation importante de la qualité de la concentration. Cependant, nous avons remarqué que l'activité des élèves devant les ordinateurs, bien que soutenue, ne se transforme pas forcément en une meilleure compréhension des problèmes mathématiques. L'élève peut très bien être allé au terme d'un exercice en ayant tout "réussi", comme dans un jeu vidéo, sans pour autant savoir pourquoi ou comment. L'astuce consiste à exploiter cette facilité de manipulation, basée sur une bonne intuition, en amenant l'élève à relier ceci à des concepts mathématiques.

Pour ceci, il faut :

* convaincre qu'il faut comprendre
* faire rédiger, formaliser ...
* faire redessiner sur papier, construire des maquettes ...
* ménager des temps de synthèse en commun
* valoriser les réflexions pertinentes

B. Différentes activités.

1. Aller à la découverte d'une notion.

Cabri permet de mettre les élèves dans une réelle situation de recherche s'appuyant sur une démarche expérimentale.

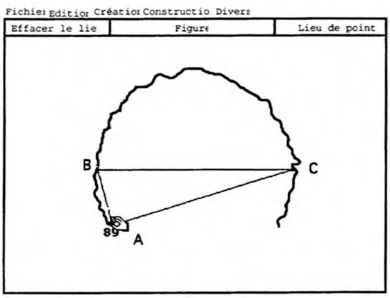
Pour exemple.

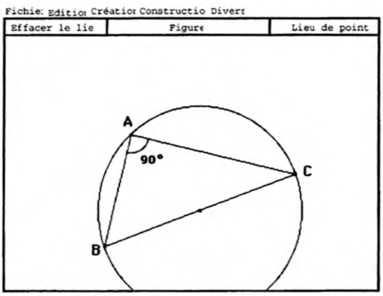
Question : *Pour un triangle ABC , où doit être A pour que le triangle reste rectangle en A.*

La méthode choisie consiste à créer un triangle ABC, marquer et mesurer l'angle A, et déplacer le point A en laissant l'angle A droit. La trace de A est obtenue en construisant le lieu du point A quand on déplace A !

L'hypothèse qui s'impose est que nous avons à faire à un cercle centré au milieu de [BC]. La vérification faite, l'activité pourra se poursuivre en jouant avec les outils "lier un point à un objet" et "supprimer les relations".

Il restera à rédiger un texte formalisant la loi découverte.





2. Construire une figure.

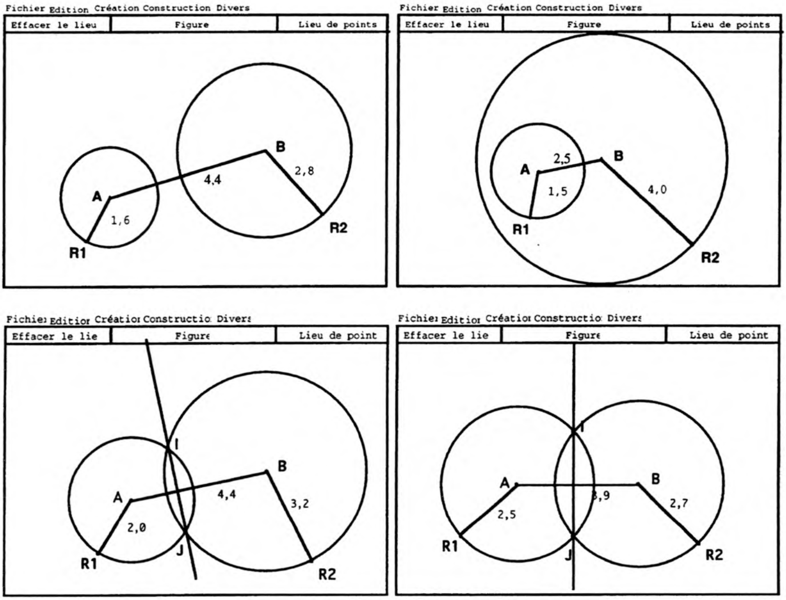
Avec CABRI-Géomètre, la notion de figure prend une valeur toute particulière. On est souvent amené à admettre qu'à partir d'un même énoncé de figure, pour son écran ou pour les écrans voisins, on observe une infinité de "dessins" possibles.

En fait, deux figures sont identiques si, pour une manipulation à volonté des points de base, les objets obéissent aux contraintes de l'énoncé. La figure joue le rôle d'une classe de dessins pour laquelle on a, à un moment donné, un représentant sous les yeux. Le dessin devient figure si on lui donne une dynamique.

Exemple typique :

Trace un segment [AB].
Trace un cercle de centre A et un cercle de centre B, ils se coupent en I et J.
Trace la droite (IJ).

A partir de cet énoncé, on peut obtenir les quatre dessins suivants :



Cette étude permet de travailler sur les conditions d'existence de la droite (IJ), la propriété de cette droite, la condition d'obtention de la médiatrice du segment.

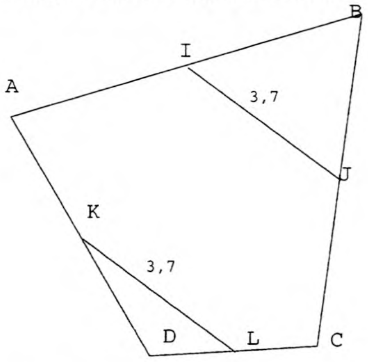
3. Etudier une propriété.

Avec CABRI-Géomètre la propriété a un statut particulier. C'est une particularité de la figure qui est permanente quand on déplace les points de base. On est proche de la législation anglo-saxonne : une propriété est vraie tant que l'on ne trouve pas une position des points de base qui la dément.

Est-ce une démonstration ?

Exemple :

Dans un champ à quatre côtés, pour faire une course, on trace deux pistes joignant les milieux de deux côtés consécutifs, en utilisant tous les milieux. Qu'en penses-tu ? ...

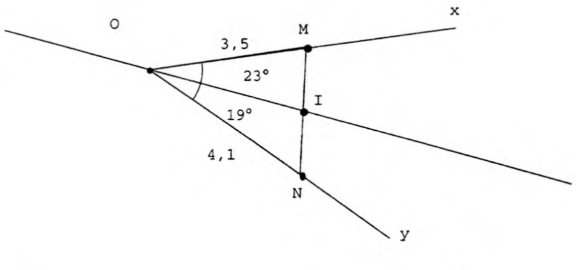


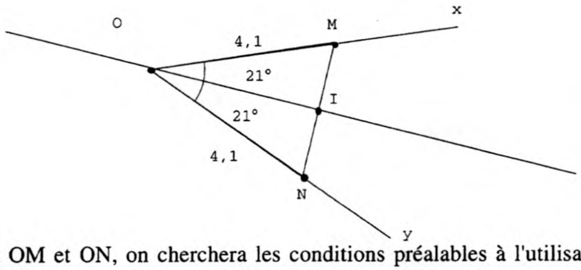
Cette activité de recherche, à travers le mouvement, amène l'élève à se poser la question de ce qui se passe dans les cas limites de la figure. Il doit se demander si il y a ou non continuité de la propriété. Je pense que ce travail, difficilement réalisable sur un autre support, représente un réel intérêt.

4. Vérifier si une propriété est vraie.

Un élève trace sur son cahier une bissectrice en prenant un point sur chaque côté, puis en utilisant le milieu du segment obtenu. Il prend son rapporteur, ça marche ... !

On décide de vérifier si la méthode est bonne.





En mesurant OM et ON, on cherchera les conditions préalables à l'utilisation de cette technique.

5. *Travailler sur les énoncés.*

a) Réaliser une figure à partir d'un programme de construction.

Nous savons tous que la lecture et l'interprétation des énoncés en mathématiques, et pour ce qui nous concerne en géométrie, est un réel problème pour les élèves.
CABRI-Géomètre représente, sans aucun doute, une aide précieuse pour amener les élèves à mieux s'organiser. Il est probable que, le logiciel effectuant les tracés, immédiatement et sans efforts, l'élève peut fixer toute sa concentration sur le déroulement de sa construction.

Au cours des activités de ce type, deux problèmes se sont posés et méritent réflexion :

* le choix du vocabulaire.
* la gestion des implicites.

(1) Choix du vocabulaire.

La première tendance des collègues qui se lancent sur CABRI-Géomètre est de faire coller l'énoncé avec le vocabulaire choisi pour les menus du logiciel.

Ce qui donne :

Crée un segment.
Nomme ses extrémités A et B.
Crée le cercle défini par son centre A, et B, un point de la circonférence.
Construis la médiatrice du segment [AB].
Construis ses intersections avec le cercle, on nommera celles-ci C et D.
Après avoir marqué l'angle $\widehat{CAD}$ *on le mesurera.*

De toute évidence, ce type d'énoncé, montre l'angoisse de l'auteur quant aux problèmes propres à l'utilisation du logiciel.

Je pense que la bonne stratégie est de jouer le jeu de la diversité des termes employés. C'est ceci qui correspond à la réalité de tous les jours. C'est à ce prix là, même s'il faut investir du temps pour cela, que l'élève passera de lui même à la phase d'analyse de l'énoncé.

D'autre part, il ne faut jamais oublier que les Cabri-élèves sont amenés à retrouver un enseignement dit "traditionnel", et il ne faut pas qu'ils aient l'impression de tomber d'une autre planète.

(2) Gestion des implicites.

Pour revenir à l'exemple précédent, on pourrait donner l'énoncé suivant :

Trace un cercle de rayon [AB].
La médiatrice de [AB] coupe ce cercle en C et D.
Mesure l'angle $\widehat{CAD}$.

Dans cette exemple, il apparaît que si le programme est clairement exprimé, chaque ligne de celui-ci contient non pas une action, mais, pour parler en termes d'informatique, un sous-programme.
On peut pousser le raisonnement plus loin :

Soit un losange (ABCD) de centre O.

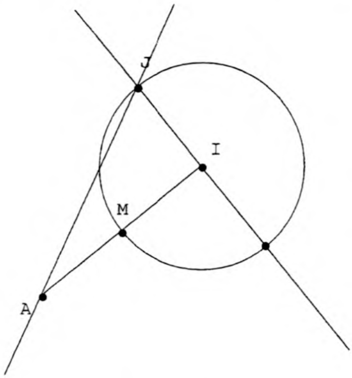
Il est évident que pour un élève de 5ème, ces énoncés ne correspondent pas à la notion de programme de construction.

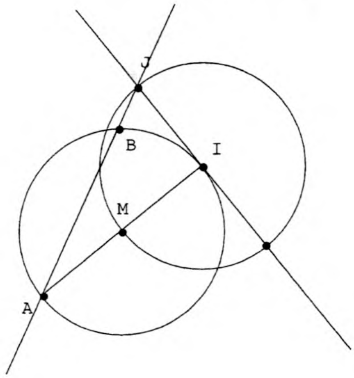
(3) Exemple de programme de construction en classe de 5ème.

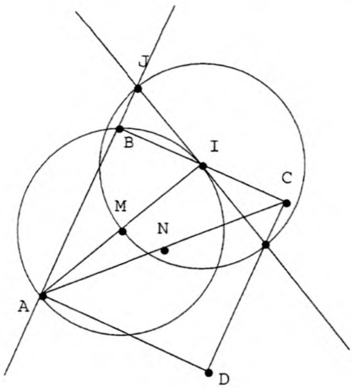
Trace un segment [AI].
Trace une droite d, perpendiculaire à [AI] passant par I.

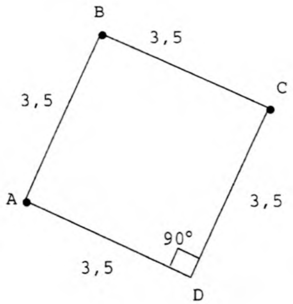
Trace le cercle de centre I passant par M, il coupe la droite d en J.
Trace la droite (AJ).
Trace le cercle de centre M passant par I, il coupe (AJ) en B.
Trace le point C, symétrique de B par rapport à I.
Trace [AC] et son milieu N.
Trace le point D, symétrique de B par rapport à N.
Trace le quadrilatère (ABCD).

Manipule la figure. Quels sont les points de base ? Que peux-tu dire de (ABCD) ?









b) Rédiger un programme de construction pour une figure.

Pour perfectionner l'activité *énoncé --> figure*, il est intéressant de faire travailler l'élève sur son inverse :
figure-->énoncé.

De ce point de vue, il est important de remarquer que CABRI-Géomètre mémorise le programme de fabrication d'une figure. La preuve en est qu'il est capable de le répéter.

(1) Utilisation de l'historique.

Un exercice peut consister à charger une figure existante et à demander à l'élève de rédiger l'énoncé qui lui correspondrait.

Deux remarques sur ce sujet :

* Créer un segment sera décrit dans l'historique par : point de base, point de base, segment.

Ici le niveau d'implicite est nul.

* Pour les intersections doubles, il peut apparaître des objets qui en fait, par la suite, ne servent pas à la construction.

(2) Utilisation d'une session de travail.

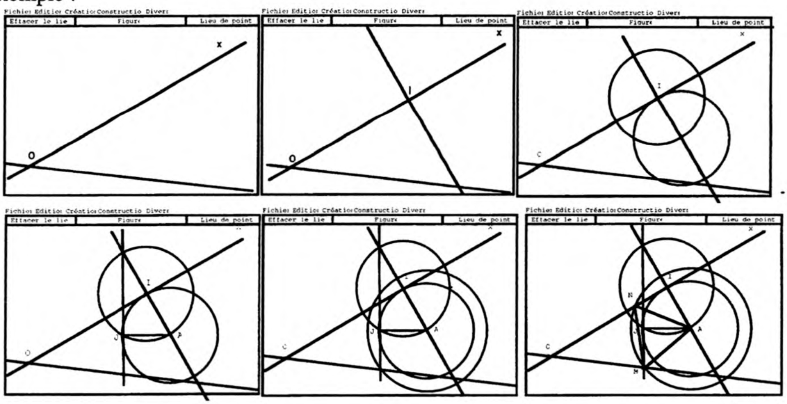
En fait, ce qui serait intéressant, serait d'avoir une photo pour chaque étape de la construction, celle-ci faisant apparaître le ou les éléments nouveaux.

Nous avons, pour y arriver, détourné la fonction "session de travail". Nous réalisons notre construction en direct. A chaque étape nouvelle, nous mettons en rouge l'élément nouveau puis nous sauvegardons la figure sous le nom : PHOTO1, puis PHOTO2, puis etc...

Pour utiliser ceci, l'élève déclare qu'il veut consulter une session de travail à partir de la PHOTO1 et tout fonctionne comme un diaporama.

Remarque : Au moment de la consultation de la session, nous travaillons sur des images, c'est à dire que l'on ne peut pas manipuler les objets de base. Cependant, chaque "photo" est une figure à par entière qui peut être ouverte et manipulée.

Exemple :



Pour cet exercice la consigne était de rédiger une phrase par photo. Ensuite, l'élève devait, à partir de son texte, reconstruire la figure. La particularité de celle-ci permet de vérifier rapidement si la construction "fonctionne".

6. Mettre en évidence des lois métriques.

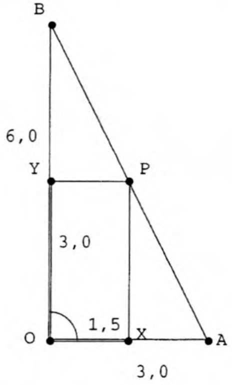
Soit un triangle OAB, rectangle en O.

P est un point de [AB], X sa projection sur [OA] et Y sa projection sur [OB].

On affirme que OX et OY sont liés par la relation suivante.

OY + a OX = b

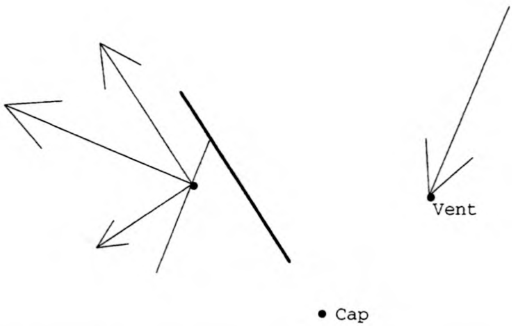
On demandera de calculer a et b, puis de réaliser un tableau de dix mesures vérifiant la relation.



L'étude fera apparaître que b=OB et que a= $\frac{OB}{OA}$.

Il sera certainement intéressant de prolonger cette activité en parlant de l'équation de la droite (AB) ...

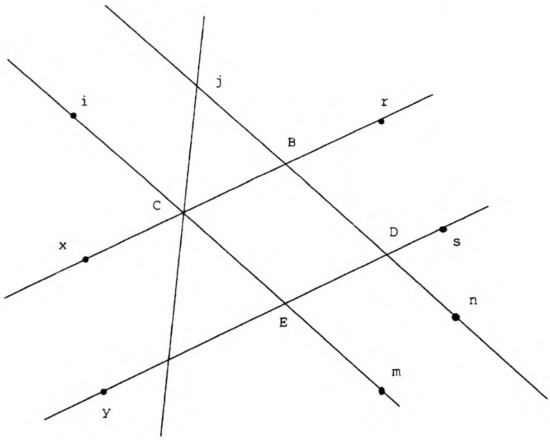
7. Simuler une situation physique.
Cabri-Géomètre permet de simuler des phénomènes physiques pour mieux les étudier. Ici, il s'agit de mettre en évidence la décomposition d'une force. Après un temps de manipulation, il conviendra de déterminer les limites du modèle et les paramètres sur lesquels on agit.



IV. ETUDE D'OBJETS SIMPLES À TRAVERS L'UTILISATION DE CONTRAINTES.

A. La force des figures simples.
Il semble parfaitement évident que l'intérêt pédagogique d'une figure n'est pas proportionnel à sa complexité. Dans la plupart des cas les CABRI-exercices font intervenir une dizaine d'objets. Cependant, à l'inverse, il peut être intéressant de présenter, à l'élève, une figure chargée dans laquelle il faut qu'il fasse abstraction des objets inutiles. L'utilisation des couleurs, et l'option "aspect des objets" apparaissent comme des outils pédagogiques précieux.

Voici un exemple dans lequel on recherchera, en 5ème, des angles particuliers.



B. Notion de propriétés privilégiées.

Une figure simple de géométrie comme un triangle ou un quadrilatère particulier comporte un certain nombre de particularités. Le géomètre, de façon arbitraire, décide que certaines, si elles sont suffisantes, correspondent à la définition, et les autres seront les propriétés de la figure.
Il semblerait que, même si les choses sont moins définies actuellement au niveau du collège, l'élève adopte un fonctionnement de ce type.

Quand on demande à un élève, sans rien préciser de plus, de construire un losange, il utilise instinctivement les propriétés privilégiées qui lui semble le mieux définir la figure.

Il est important de noter que ces propriétés privilégiées sont fortement influencées par la culture géométrique de l'élève. Par exemple, pour le losange, les CABRI-élèves se sont appuyés sur l'égalité des côtés, alors qu'à la même question, dans une autre classe "non info", l'outil principal a été la propriété des diagonales.

C. Amener l'élève à faire l'inventaire des propriétés.

La notion de contrainte est un artifice pédagogique qui force l'élève à faire l'inventaire des propriétés d'une figure, afin de résoudre le problème qui lui est posé.

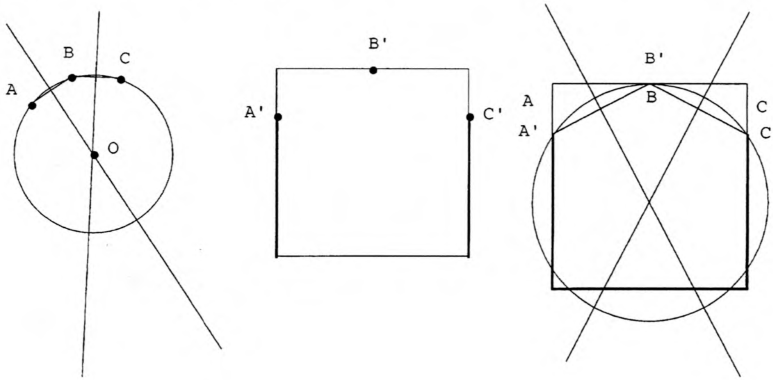
A bien y réfléchir, cet artifice est peut-être plus proche de la réalité que ce que l'on pense. Ne dira-t-on pas à un ingénieur du génie civil : faites moi un pont de 50 m de long, sachant qu'on ne peut avoir qu'un appui au milieu, et que les forces sur les berges doit être minimales. Faire un pont, "c'est simple", mais avec ces contraintes ...

D. Exemple type.

Soient trois points A, B et C et le cercle passant par ces trois points.

Il est évident que si je fais un travail papier-crayon le tour est vite joué. Avec CABRI-Géomètre le respect de l'énoncé m'oblige à me poser un problème intéressant. Un cercle avec dessus trois points sur objet, n'a rien à voir avec un cercle passant par trois points. Ce

sont deux outils qui, du point de vu de leur CABRI-mobilité, ont des propriétés très différentes.
Il est même intéressant de justifier ceci par une situation concrète. Par exemple, on veut tracer un linteau circulaire pour une porte.



E. Les règles du jeu.

L'élève, ou le professeur, a à sa disposition trois outils afin de vérifier le bon respect des contraintes :

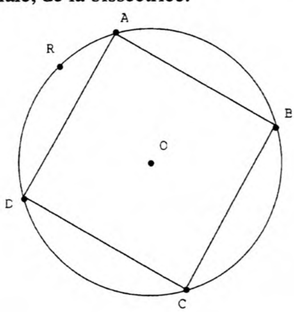
* La manipulation de tous les points de base de la figure.
* L'utilisation de l'historique.
* L'affichage de tous les éléments de la figure grâce à la fonction "aspect des objets".

F. Les différents types de contraintes.

1. Contraintes sur les outils utilisés.
L'option "modifier les menus" peut être utilisée dans ce contexte.

a) Interdire certains outils.
Construis un rectangle ABCD sans utiliser de droites.

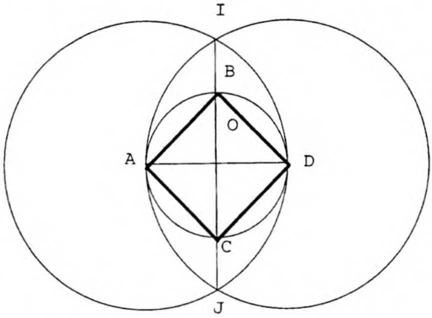
Cette contrainte, en fait, interdit l'utilisation des parallèles et des perpendiculaires, de la médiatrice, de la symétrie axiale, de la bissectrice.



La construction met en évidence qu'un rectangle est fait de deux triangles rectangles symétriques par rapport au centre. On peut remarquer que, pour cette méthode, le rectangle se déforme à diagonales constantes.

b) Exiger certains outils.

Construis un carré en utilisant comme seuls outils : cercle, segment et intersection.



c) Autres exemples.

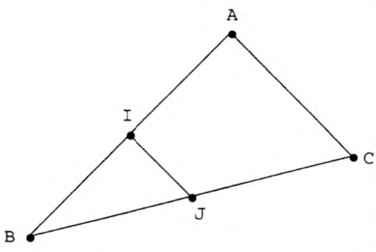
- Construis un triangle équilatéral sans utiliser deux fois le même outil.
- Construis un losange en utilisant une fois la symétrie centrale et une fois la symétrie axiale.

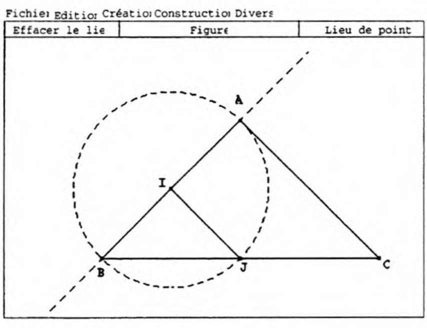
2. Détermination des objets de base.

Le principe est de fixer comme contrainte les objets de base. Le respect des consignes sera facilement vérifié à la souris.

a) exemple 1

I et J sont les seuls points de base de la figure. Construis un triangle ABC rectangle isocèle en A, tel que I soit le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].



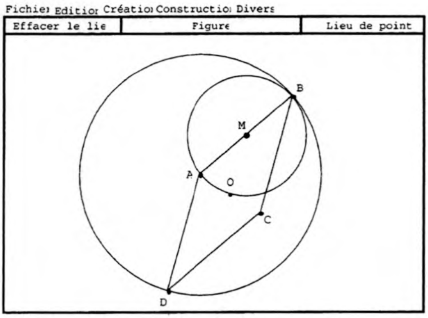


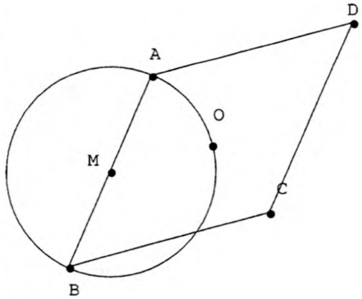
b) exemple 2

Construis un losange ABCD de centre O. A, B et O doivent être les seuls points de base.

Pour mener à bien cet exercice, il faut comprendre que le point O est forcément sur un cercle de diamètre [AB].

On peut préparer l'activité par une recherche du lieu du centre du losange quand un des côtés est fixe.



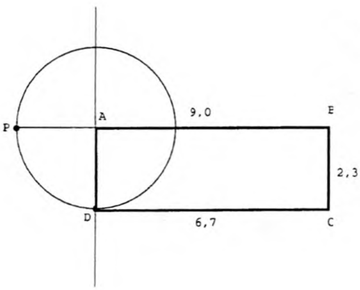


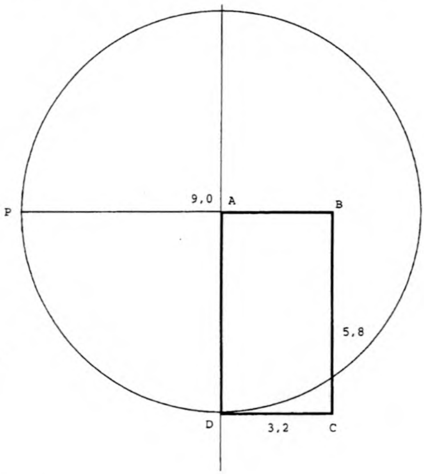
c) Trois autres exemples.
- Soit I et J deux points. Construis un carré ABCD tel que I soit le milieu de [AB] et J celui de [AC].
- Soit I et A deux points. Construis un carré ABCD tel que I soit le milieu de [AB].
- On a un segment [AB] et une demi-droite [Ax), construis un triangle ABC isocèle en B, pour lequel [Ax) est la bissectrice de l'angle A.

3. Particularités métriques de la figure.

a) Exemple 1.
Construis un rectangle ABCD dont le périmètre reste constant si on déplace A.

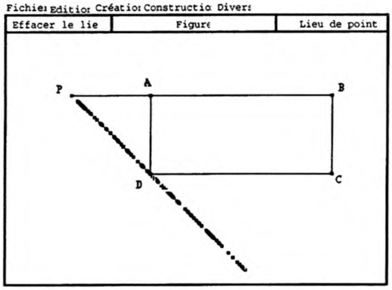
Une petite étude du problème fait apparaître que chaque côté aura une longueur comprise entre 0 et périm/2. On remarque que la valeur du périmètre doit être fixée au préalable.

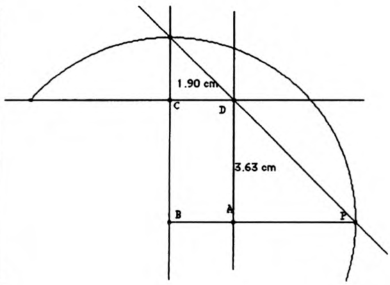




Le point de départ est un segment [PB] dont la longueur sera la valeur du demi-périmètre, et un point A sur ce segment.

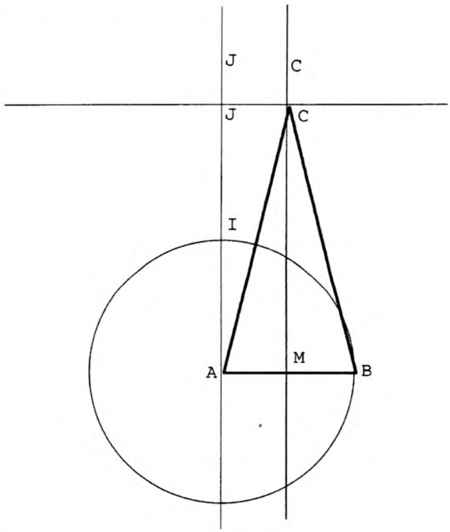
Remarque : Traçons le lieu des points B quand A décrit [PB]. Cette information permet de trouver une nouvelle méthode de construction. Cet exemple montre bien comment CABRI-Géomètre peut fonctionner comme un générateur d'idées, comme une aide au raisonnement.





b) Exemple 2.

Construis un triangle isocèle ABC, dans lequel la hauteur est deux fois plus longue que la base.

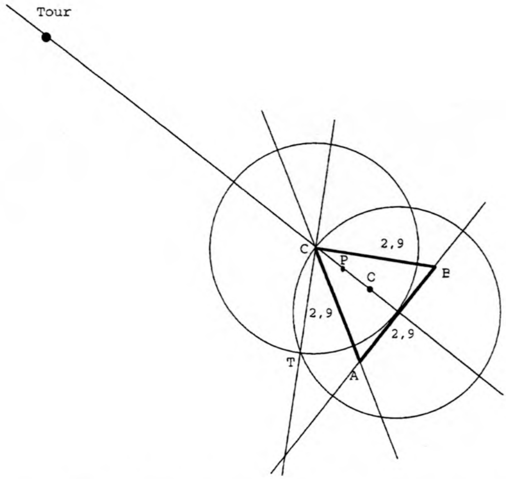


Dans ce type de figure, il est intéressant de remarquer que le triangle ainsi obtenu, du fait de la contrainte, n'est plus libre de tous ses mouvements. Ici, les angles seront fixes. Ceci explique que ce triangle ne possède que deux points de base.

4. Exigences de mouvement.

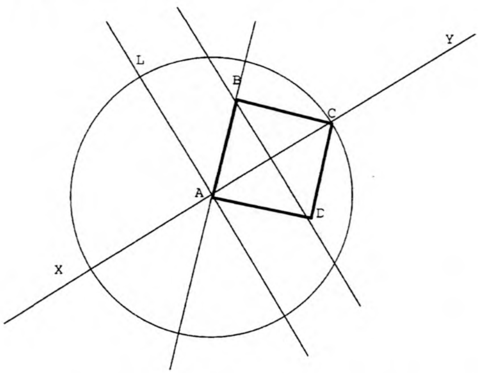
a) Exemple 1.

Construis un triangle équilatéral qui tourne autour de son centre.

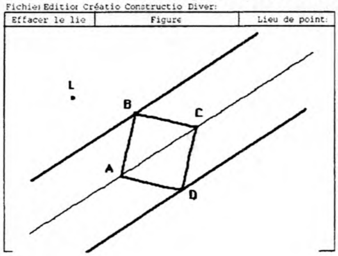


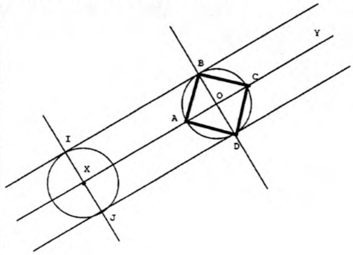
Pour cet exercice, il semble difficile de faire l'impasse sur la position du centre au deux tiers de la hauteur. D'autre par la contrainte oblige un travail sur les angles.

b) Exemple 2.
Construis un carré qui glisse le long d'une de ses diagonales, à côté constant.



Ici aussi l'étude d'un lieu de point peut induire une autre méthode de construction.





G. Application de la notion de mouvement : étude de la proportionnalité.

1. La géométrie du mouvement

CABRI-Géomètre met à la disposition des élèves une géométrie dynamique. Le mouvement des figures implique qu'il existe un moteur de celui-ci. Ce sont les points de base, je les appelle aussi les poignées de la figure. Quand les points de base se déplacent ils entraînent d'autres objets.

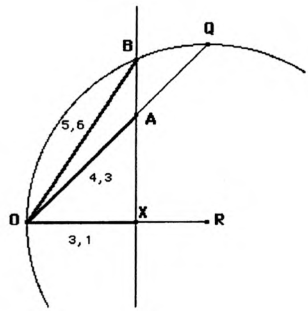
2. Condition d'étude.

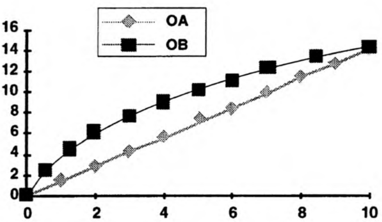
En général, l'étude d'une situation de proportionnalité nécessite deux grandeurs qui varient ensembles, l'une étant le moteur de la variation, l'autre le résultat de cette variation. (Exemple : le prix d'un certain nombre de baguettes de pain). L'énoncé de ceci fait apparaître que CABRI-Géomètre peut être un parfait outil pour ce type de travail.

3. Exemple 1

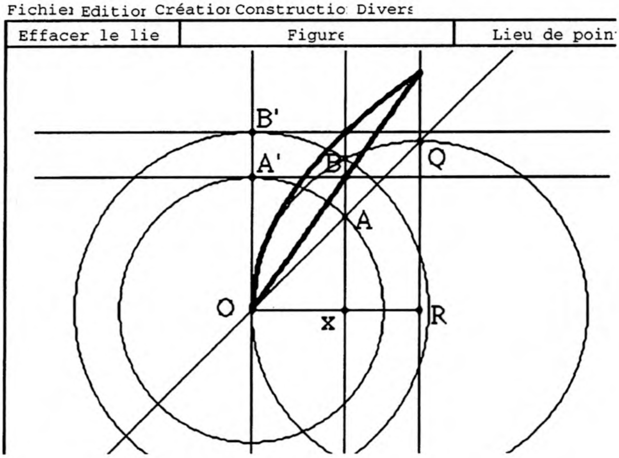
Dans cet exemple, on trace un cercle de rayon [OR]. X est un point de [OR], (RQ) et (XB) sont perpendiculaires à [OR]. On étudie les variations de OA et de OB en fonction de OX. On obtient le tableau de variation suivant :

OX	OA	OB
0	0	0
0.5	0.7	3.2
1	1.4	4.4
1.5	2.1	5.5
2	2.9	6.4
4	5.6	9
6	8.5	11
8	11.3	12.7
10	14.1	14.2



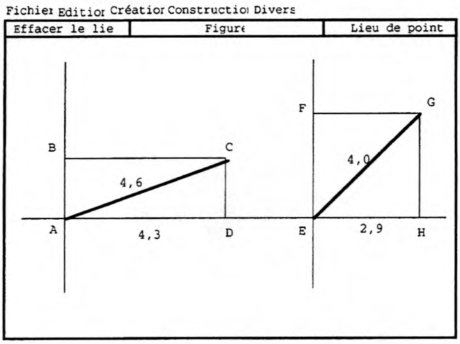


On peut remarquer qu'en restant dans le domaine de la géométrie, on peut, en faisant tracer les courbes par CABRI-Géomètre comme des lieux de points, obtenir des résultats intéressants.



4. Exemple 2

Dans un carré la diagonale et l'aire sont-elles proportionnelles à la longueur du côté ? Même question pour un rectangle ?

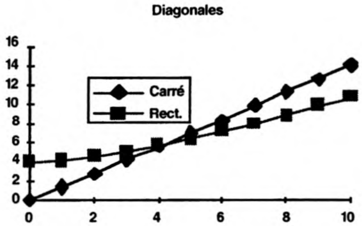


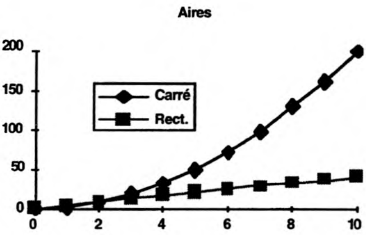
Les tableaux de variation donnent les résultats suivants.

Côté	Diagonale	Aire
0	0	0
1	1.4	1.96
2	2.8	7.84
3	4.2	17.64
4	5.6	31.36
5	7	49
6	8.4	70.56
7	9.9	98.01
8	11.4	129.96
9	12.7	161.29
10	14.1	198.81

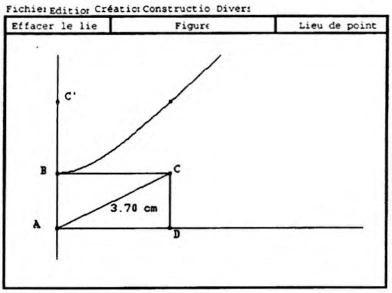
Longueur	Diagonale	Aire
0	4	0
1	4.1	4
2	4.5	8
3	5	12
4	5.7	16
5	6.4	20
6	7.2	24
7	8	28
8	8.9	32
9	9.9	36
10	10.8	40

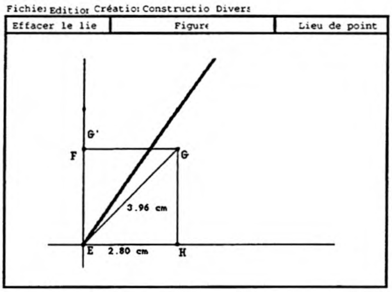
Ce qui donne les graphiques suivants :





Dans cet exemple aussi on peut tracer avec CABRI-Géomètre les graphes des diagonales de façon purement géométrique.





V. CONCLUSION.

Mon intervention montre, comment on peut, en utilisant CABRI-Géomètre, enrichir notre enseignement de la géométrie. J'espère qu'elle a montré aussi le grand plaisir que j'ai eu, pendant cinq ans à travailler de cette manière. Tout ceci a aussi induit une dynamique au niveau de l'établissement. L'informatique et CABRI-Géomètre ont été le ciment d'un groupe de profs de maths, impliqués dans un perpétuel travail de recherche pédagogique.

Il est certain que dans cette aventure, CABRI-Géomètre s'est imposé comme le complice idéal.


Allo Monsieur Bellemain
Monsieur Capponi a tout
Retiré des Menus.

4. Utilisation du Logiciel Cabri-géomètre en classe.

Exemple de l'insertion d'un logiciel dans un curriculum de collège.

Bernard CAPPONI
Collège de Moirans
LSD2-IMAG

Je voudrais montrer ici l'intérêt que présente pour un professeur de collège l'utilisation d'un logiciel comme Cabri-géomètre dans son enseignement puis fournir quelques réflexions sur les conditions d'utilisation dans une classe.

I. QUEL INTÉRÊT PRÉSENTE UN LOGICIEL POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE. ?

Dans cette partie je distinguerai plusieurs types d'utilisations intéressantes du logiciel avec des exemples pour illustrer le propos.

A. Des constructions

Les constructions constituent évidemment un domaine ou cabri-géomètre apparaît comme particulièrement adapté. Il faudra cependant noter que les constructions que l'on réalisent dans ce logiciel prennent tout leur sens quand les propriétés qui définissent une figure sont conservées par déplacement des objets de base. C'est d'ailleurs ainsi que je fais travailler les élèves : pour être validée une construction doit d'abord conserver les propriétés qui la caractérisent. Cet aspect particulier à cabri-géomètre change la nature du travail proposé aux élèves. Ce n'est plus un simple dessin qui doit être réalisé mais ils doivent fournir une description de la construction pour que la figure puisse être réalisée et conserve ses propriétés. Ainsi des travaux classiques réalisés en collège prennent un sens différent quand on les aborde dans un logiciel comme Cabri-géomètre. Voici trois exemples pour illustrer ceci.

Un triangle à côtés donnés

On donne, ou on fait construire par l'élève, trois segments quelconques, la tâche de l'élève est de construire un triangle qui a des côtés dont la longueur soit celle des trois segments donnés. Pour faire réaliser ce travail il est bon d'ajouter au menu **construction** une macro-construction **compas** qui permet de construire un cercle de centre donné et qui a pour rayon la longueur d'un segment donné.
La figure 1 illustre cet exemple avec les segments donnés [AB], [CD] et [EF] et le triangle construit RST.

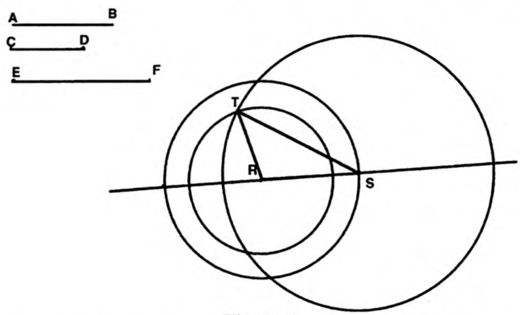


Figure 1

La construction est la même que celle qui utilise un compas pour la construction sur papier, mais on gagne ici la possibilité de changer les longueurs des segments initiaux et on peut sur la même figure étudier les conditions d'existence du triangle et traiter ainsi de l'inégalité triangulaire. La logiciel nous fait ici gagner un temps toujours précieux et permet de mieux comprendre la signification que revêt l'existence ou non du triangle relativement aux longueurs des côtés.

Centre du cercle circonscrit

Ce deuxième exemple permet aussi une construction classique avec des médiatrices (figure 2-a) et l'exploitation du déplacement pour les cas où les points sont alignés (figure 2-b). La construction nécessite de donner au moins deux médiatrices pour obtenir le centre. L'élève doit expliciter les objets permettant la construction du cercle. Mais, l'intérêt ici est, outre la construction, la possibilité par un déplacement continu de "voir" le rayon du cercle augmenter jusqu'à la disparition, le rayon étant infini et les médiatrices parallèles. Une seule figure permet de visualiser tous les cas sans nouvelles constructions ni données supplémentaires à fournir puisqu'il suffit de saisir un point avec la souris pour le déplacer.

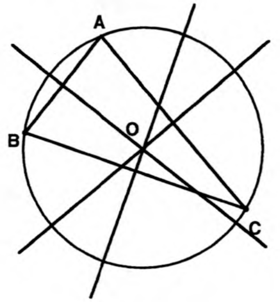


Figure 2-a

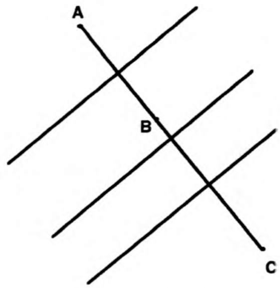


Figure 2-b

Tangente à un cercle

Le dernier exemple que je donnerai de construction est celui de la tangente à un cercle menée par un point donné. L'intérêt de ce type de construction est difficile à saisir pour les élèves parce que l'on obtient une très bonne approximation en construisant au jugé sur la papier. Ils ne voient donc pas l'intérêt de rechercher une "bonne" construction". Dans Cabri une construction "au jugé" ne peut pas convenir puisqu'elle n'est pas conservée par déplacement. Cabri-géomètre redonne un sens à cette construction. Mais cette construction permet aussi de se poser la question de la validité d'une construction fournie par un élève et permet ainsi de donner du sens à la recherche d'une preuve qui valide la construction fournie. Voici par exemple une construction fournie par un élève de troisième qui a donné lieu à un débat autour de la validation.

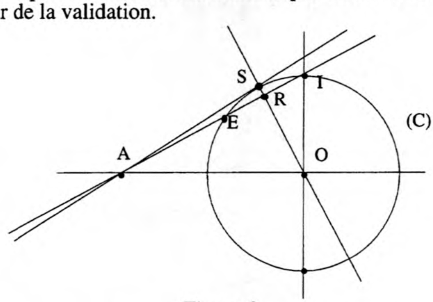


Figure 3

La tangente doit être menée du point A au cercle (C) (figure 3). Cet élève construit la droite (AO) puis la perpendiculaire (OI). La construction de (AI) ne donne pas perceptivement une tangente. Il construit alors la médiatrice de (EI) qui coupe le cercle en S. La droite (AS) est considérée par cet élève comme la tangente cherchée. Cette construction a été donnée à l'ensemble de la classe et a donné lieu à un débat très riche

pour reconnaître si cette construction fournit bien la tangente. Cabri géomètre peut fournir une première réponse en plaçant A très près du cercle. Mais une validation est aussi fournie par un raisonnement sur l'unicité de la perpendiculaire menée de A à la droite (OS). Dans ce contexte le raisonnement fournit une réponse qui a du sens pour les élèves dans la mesure où elle correspond à une question qu'eux-mêmes se sont posés à propos de cette construction.
Ces trois exemples illustrent la place que peut prendre Cabri-géomètre dans le domaine des constructions dans l'enseignement au collège.
Pour conclure ce paragraphe on peut dire que l'intérêt des constructions dans Cabri-géomètre c'est qu'elles nécessitent l'explicitation des propriétés et que par rapport au papier crayon on gagne la possibilité de parcourir la classe des figures.

B. Choix dans les menus

Un autre type d'utilisation consiste à demander aussi des constructions mais en jouant sur les outils mis à la disposition des élèves dans les menus. Je fournis ici deux exemples
Un parallélogramme sans donner droite parallèle.
Le premier exemple est simple et classique mais illustre bien l'intérêt de l'élimination de certains articles de menus.
Dans une étude sur le parallélogramme en classe de cinquième (élèves de 12 ans), si on supprime du menu **construction** l'article **droite parallèle**, on force à l'utilisation d'autres propriétés caractéristiques du parallélogramme pour la construction. Par exemple on peut construire le parallélogramme avec **milieu** et **symétrique** (par rapport à un point). Ainsi c'est la symétrie centrale qui caractérise le parallélogramme qui sera utilisée.

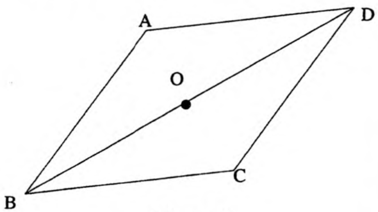
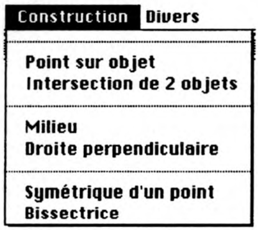


Figure 4



Parallèle à menus réduits
Un autre exemple est fourni par une étude que j'ai pu mener sur la construction d'une parallèle à une droite donnée passant par un point donné sans disposer des articles **parallèle** ni non plus **cercle def par 2 points**. (Capponi 93). Cette tâche réalisée par des élèves de quatrième a montré que deux grands types de stratégies sont effectivement développées par les élèves :
- la première utilise les propriétés de la symétrie orthogonale (la droite qui joint un point et son symétrique est perpendiculaire à l'axe) et les propriétés des parallèles et des perpendiculaires (deux droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles). Les élèves explicitent bien pour la plupart les propriétés qui entrent en jeu dans leur construction.
- la deuxième utilise la propriété des milieux ainsi que l'illustre la construction suivante.

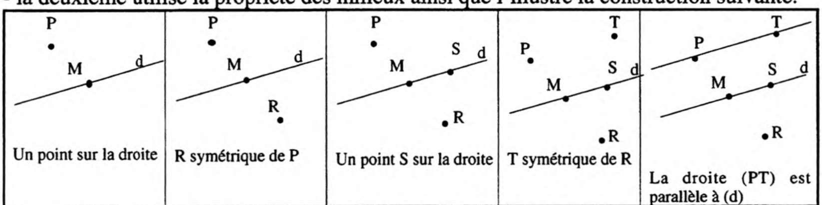


Figure 5

Les exemples de ce type sont nombreux et on peut dire que dans ce type d'utilisation les propriétés géométriques deviennent des outils de construction : ce ne sont plus des objets mais aussi des outils dans un domaine moins complexe que la démonstration.

C. Etudes de transformations.

Polygone et rotation

L'idée de "boîte noire" développée autour de Cabri-géomètre consiste à donner à l'élève une macro-construction produisant une certaine construction à partir d'objet initiaux donnés, sa tâche étant alors d'analyser le comportement de la figure produite pour réaliser une construction identique. Un travail de ce type a été étudié en détail dans le cadre de l'équipe DidaTech. (Boury V. 1993). On peut reprendre l'idée pour faire étudier des transformations géométriques comme la translation ou la rotation en collège.
On peut ensuite, de manière un peu analogue à ce qui est proposé avec les menus réduits, proposer des constructions aux élèves en ne leur laissant comme outil de construction que la rotation par exemple.
Soit par exemple la tâche suivante : En ne disposant que des menus de la Figure 6 construire un segment [AB] puis un carré de côté [AB].

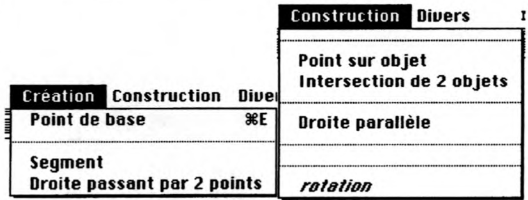


Figure 6

Cette construction rend opératoire la rotation dans une construction. Ce type de réalisation ne peut se concevoir sans un logiciel comme Cabri-géomètre.

Translation et vecteur

On peut faire un travail du même genre avec des translations et des vecteurs. il est bon de disposer alors de macros constructions de translations avec aussi des représentations figurées de vecteurs comme sur la figure 7.

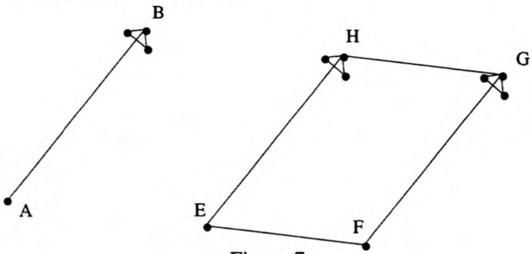


Figure 7

A partir du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du segment [EF] on demande la construction d'un parallélogramme.
En conclusion pour ce qui est des transformations elles peuvent être étudiées d'abord à partir de leurs effets . Elles deviennent ensuite des outils de construction.

D. Des simulations

Un autre exemple d'utilisation particulièrement riche est celui des simulations. Il s'agit en fait de modéliser à l'aide Cabri-géomètre une situation qui ne relève a priori pas directement de la géométrie. Je donne ici à ce sujet un exemple de situation physique et un exemple de traitement numérique.

Exemple du miroir

Le problème du miroir est classique et se trouve dans de nombreux ouvrages pour la classe de quatrième au chapitre de la propriété des milieux dans un triangle. Pour l'avoir utilisé dans ces classes j'ai pu observer la difficulté qu'ont les élèves à se représenter le phénomène physique. Ici Cabri-géomètre va permettre de construire une simulation du phénomène qui va donner du sens au traitement mathématique qui en est fait.
En classe on peut commencer à organiser un débat autour du miroir en commençant par des questions du type :
"*J'ai un petit miroir de 10 cm de haut . est ce que je peux me voir en entier dedans ?*" La conception la plus fréquente du phénomène fait intervenir la distance au miroir : plus on est loin et plus on verra un partie importante de l'image. Les limitations explicitées provenant du risque de se voir "trop petit" si on est loin. Ces conceptions sont étudiées par les élèves dans un travail "à la maison" où les élèves doivent essayer de déterminer s'il est possible de se voir en entier dans un petit Miroir. Le problème peut alors être traité à l'aide d'une simulation représentée par la figure 8 :

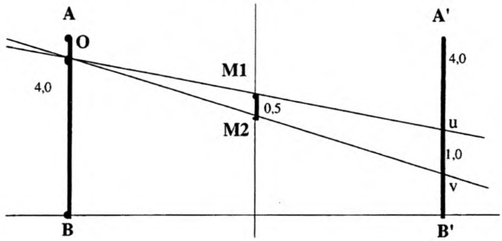


Figure 8

Sur cette figure AB représente un personnage qui se regarde dans le miroir M_1M_2 et A'B' est son image dans une symétrie d'axe (M_1M_2). O est l'œil du personnage (nous l'avons ajouté parce que des élèves l'ont introduit comme une variable de la situation). Dans cette simulation on peut avancer ou reculer le personnage par rapport au miroir et observer que ce qui est vu dans le miroir, c'est à dire uv ne varie pas (la longueur reste égale à 1). En agissant sur M_1 on ajuste la position du miroir (sans faire varier sa taille) et en agissant sur M_2 on augmente ou diminue la taille du miroir. Cette simulation permet de visualiser les différentes variables de cette situation et d'observer avant de démontrer que la condition pour que le personnage se voie en entier dans le miroir est que celui-ci ait au moins une taille égale à la moitié de AB.
Dans cette situation la simulation est indispensable pour modéliser le phénomène physique et pour pouvoir l'étudier dans de bonnes conditions, par exemple avec une tablette rétroprojetable, avec une classe.

Traitements Numériques

Un autre exemple de modélisation est celle que l'on peut réaliser sur un axe en représentant une variable numérique et son carré, son inverse ou son opposé. On peut construire aussi le produit, la somme ou le quotient de deux nombres quelconques. Ce type de représentation peut conduire, par exemple, à la comparaison de la somme et du produit de deux nombres ou à celle de l'évolution du produit de deux nombres quand la somme est constante.
Par ailleurs ce type d'outils rend possible l'étude des variations d'aires de triangles ou de quadrilatères ou les représentations graphiques de fonctions numériques en utilisant des lieux de points.

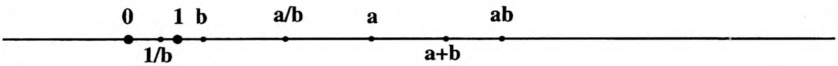


Figure 9

D'une manière générale les simulations permettent de traiter de manière dynamique des situations complexes.

E. Traitement dynamique de la figure

Il s'agit ici de situations où le déplacement d'un point sur un segment, un cercle ou une droite conduit à étudier des problèmes d'extremum ou des invariants de la figure, ou même parfois de lieux géométriques. Ce genre de problème est pratiquement impossible à étudier avec des élèves de collège si on ne dispose pas d'une représentation dynamique de la figure où le point variable est effectivement déplacé. La figure construite dans Cabri géomètre est utilisée pour explorer le phénomène qui doit être observé et conduit en général à une démonstration. J'en donne ici deux exemples.

La planche

Dans cette situation la construction de la figure est déjà un problème intéressant pour des élèves de troisième, par exemple. Il s'agit de représenter une planche dont les extrémités s'appuient sur un mur vertical et sur le sol. En déplaçant le point A on fait glisser la planche et on s'intéresse à la trajectoire du milieu.

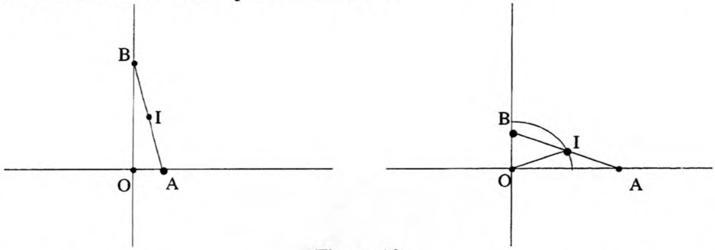


Figure 10

Cette situation parait souvent insolite aux élèves mais peut se traiter avec des connaissances qui relèvent de la classe de quatrième.

Minimum

Dans cet exemple issu du travail sur le problème ouvert de l'IREM de Lyon (Arsac 88). Les élèves construisent un triangle ABC rectangle en A. P est un point de l'hypoténuse qui se projette orthogonalement en I et J sur les côtés de l'angle droit (Les cathètes disent nos amis suisses). Le problème consiste à étudier pour quelle position de P la longueur IJ est minimale.

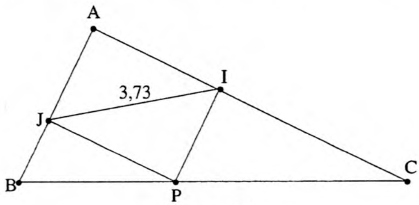


Figure 11

C'est la conservation du rectangle PIAJ dans le problème du minimum qui conduit à la solution et dans le problème de la planche c'est l'invariance de la longueur OI.

D'une manière générale le traitement dynamique de la figure met en évidence les invariants et permet une exploration qui conduit à l'explication du phénomène observé et à une démonstration.

Ces exemples illustrent quelques utilisations de Cabri-géomètre en classe et me semblent illustrer l'intérêt que l'on peut trouver à utiliser ce type de logiciel avec des élèves. L'utilisation peut être de plusieurs types que l'élève manipule lui même le logiciel en atelier ou que celui-ci soit utilisé comme un "imagiciel interactif" par le professeur - ou un élève- en classe entière. Le paragraphe précédent donne quelques informations sur les conditions d'utilisation en classe.

II. UNE SÉANCE AVEC CABRI-GÉOMÈTRE

Dans ce paragraphe je voudrais fournir quelques observations ou remarques concernant l'utilisation de Cabri-Géomètre dans une classe. La plupart de mes observations seront fondées sur l'expérience que j'ai pu acquérir avec mes collègues du Collège de Moirans en utilisant effectivement cabri-géomètre dans des classes du collège. Les premières expériences avec des groupes d'élèves datent de 1987 et l'utilisation avec des classes entières de 1990.

Dans un premier temps, il me semble nécessaire d'insister sur deux points particulièrement importants pour définir les conditions d'utilisation et qui conditionnent le succès ou l'échec des situations mises en place.
Tout d'abord il est nécessaire, comme pour toute séquence avec des élèves de déterminer avec soin l'objectif visé en termes de savoirs. Ensuite il faut préparer soigneusement la gestion matérielle d'une séance où l'on utilise Cabri-géomètre dans une classe, que cette utilisation soit collective ou au contraire si chaque élève travaille sur un ordinateur.

A. La connaissance du logiciel

Il ne faut pas négliger l'apprentissage à l'utilisation de Cabri-géomètre. Cette prise en main se fait rapidement parce que l'interface est très conviviale. Il n'en reste pas moins que des aspects liés à la communication avec l'ordinateur doivent faire l'objet d'un enseignement. Il en est ainsi de l'ouverture d'un fichier, de l'enregistrement d'une figure, du chargement d'un menu ou d'une macro-construction. Par ailleurs certaines caractéristiques du logiciel doivent faire l'objet d'un apprentissage comme le déplacement des objets de base ou les différents types de points (de base, sur objet ou d'intersection).

B. Le choix des menus

Construire une séance avec Cabri-géomètre, en particulier si les élèves construisent eux-mêmes des figures nécessite un choix judicieux des menus mis à la disposition des élèves. Ce choix relève de plusieurs types de nécessités :

1.simplifier l'interface

Dans les premières utilisations avec des élèves je choisis d'enlever les articles **Droite** et **Cercle** qui sont d'un emploi plus délicat que **Droite def 2 points** et **Cercle def par centre et point.** Cette suppression facilite les premiers contacts avec le logiciel. Par ailleurs suivant le niveau des élèves on peut supprimer certains articles comme **Symétrie centrale** en sixième ou **Lieu de points** dans les classes du collège. Ce dernier point peut être éventuellement discuté ainsi que le montre l'utilisation qu'en fait J.F. Bonnet (Cf son article dans ces actes) en développant la notion de "lieu mou".

2.choix de variables d'une situation : menus et macro-constructions.

Suivant les situations on peut être amené à limiter les menus ou à rajouter des macro-constructions. Des exemples ont été donnés dans la première partie de cet article. Ce choix doit être fait avec soin et permet d'enrichir beaucoup les possibilités jusque là à notre portée pour la création de situations didactiques.

C. L'observation des élèves

Suivant les besoins on peut simplement enregistrer les figures des élèves à la fin du travail et les analyser ensuite pour observer les étapes de leur travail grâce à l'article **Historique** du menu **Divers**. On peut aussi de manière plus fine enregistrer toutes les étapes de leur construction, y compris les suppressions en cours de construction, les hésitations, les effacements etc.. en utilisant le journal de session (Menu **Divers** sur Macintosh ou touches **F5-F6** sur PC). L'étude détaillée des procédures des élèves est souvent utile pour organiser les phases de bilan avec la classe entière après un atelier.

D. Les types d'utilisation dans l'enseignement

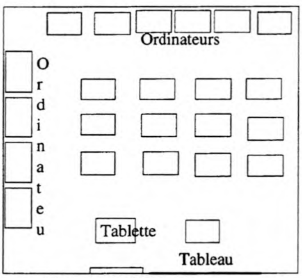
Suivant l'équipement dont on dispose ou suivant le type de séquence que l'on veut organiser avec les élèves on peut utiliser différemment le logiciel.

1.l'atelier

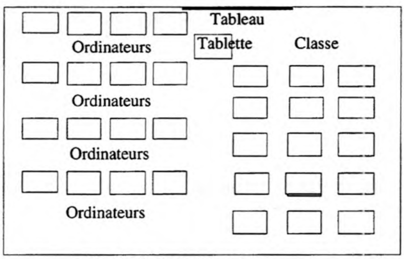
Si l'on dispose de suffisamment de machines, on peut mettre deux élèves par poste et leur donner un travail à réaliser seuls pendant une durée déterminée. Ce type d'utilisation nécessite une organisation relativement rigoureuse.

a. des élèves autonomes

Pendant la phase d'atelier la classe est constitué de groupes dont chacun travaille à son rythme. L'enseignant peut difficilement récupérer l'attention de la classe entière pour une remarque ou une modification de la consigne. Il est souhaitable que pendant cette phase d'atelier les élèves soient autonomes avec une tâche concrète à réaliser et à rendre (une figure, des remarques écrites sur une fiche par exemple). L'enseignant démarre la séance, fournit un document de travail et les limites horaires du travail. Il intervient ensuite dans les groupes pour aider les élèves et surveiller l'avancement du travail. Une séance d'atelier peut durer 20 minutes ou une heure et demie ... tout dépend du type de tâche et de l'organisation des salles. Pour ma part je préfère une disposition ou les ordinateurs sont dans une salle de classe suffisamment grande pour qu'une classe ordinaire puisse s'y dérouler. Nous avons pu observer qu'une telle disposition avait aussi été adoptée au Collège de Solliès-Pont[1].



Une salle à Moirans



Une salle à Solliès-Pont

Figure 12 : exemples d'aménagements de salles.

Je pense que à mesure que l'équipement des établissements se poursuit, il faut peser pour que ce type d'organisation soit retenu. Dans la gestion des salles de l'établissement, cette salle est une salle normalement attribuée à un professeur qui utilise souvent les ordinateurs (par exemple) et chaque collègue qui veut travailler avec les machines permute avec lui. L'organisation au jour le jour se négocie alors en équipe.

[1]Au cours de l'exposé on a pu observer quelques aménagements avec des élèves au travail sur des bandes vidéo.

b. l'exploitation de l'atelier

L'atelier doit le plus souvent donner lieu à un bilan collectif pour exploiter le travail des élèves. Dans certains cas l'atelier peut durer 30 à 40 minutes et le bilan se faire en fin d'heure. Le plus souvent le bilan peut se faire à une séance suivante. Ce bilan peut être fait par l'enseignant seul à l'aide d'un tablette retrojetable ou bien en faisant intervenir des élèves à propos de leur constructions. J'ai souvent utilisé ces bilans comme point de départ pour des activités de raisonnement ou de démonstration. Il me semble important de souligner que la phase d'exploitation est indispensable pour recadrer le travail des élèves.

2. Une tablette dans une classe

A défaut de pouvoir réaliser des ateliers, on peut utiliser une tablette rétroprojetable pour projeter des figures de Cabri-géomètre. On peut ensuite organiser un débat autour de cet imagiciel interactif. Les élèves peuvent venir manipuler la figure (comme dans l'exemple du miroir) ou réaliser ou modifier une construction. De nombreux professeurs utilisent Cabri-géomètre de cette façon. L'exemple des travaux de Danielle Bergue présentés dans cette université d'été illustrent bien un type de fonctionnement avec débat.

3. L'ordinateur : un outil disponible dans un travail de groupes

A la suite d'un atelier, ou pendant une séance de travail de groupes dans une classe, il m'est souvent arrivé de laisser des élèves qui le souhaitent utiliser un ordinateur pour analyser certaines figures de géométrie et explorer des propriétés. En général cette utilisation est librement décidée par le groupe pour faire avancer une réflexion. La tâche principale dans ce cas là n'est pas une figure à produire sur Cabri-géomètre mais un document ou une affiche où le logiciel n'est pas indispensable. Les élèves apprécient cependant la qualité des figures produites et l'exploration qui peut être faite à l'aide du logiciel. Notons que suivant le type d'activités ils utiliseront d'autres types de logiciels comme des tableurs par exemple.

En conclusion de cet exposé je noterai que l'utilisation de Cabri-géomètre en classe me semble être un outil remarquable pour faire accéder les élèves à la notion de propriété géométrique dès le début de la classe de sixième. Le logiciel aide à explorer des figures et dégager des invariants et sert de point d'appui pour le raisonnement déductif. C'est la validation d'une construction qui donne petit à petit du sens à la démonstration. Je noterai pour finir que l'ergonomie du logiciel et la qualité de la modélisation géométrique sont pour beaucoup dans la réussite des situations qui sont mises en place avec les élèves. Je souhaite simplement que rapidement tous les professeurs puissent disposer des moyens matériels qui permettent d'exploiter pleinement les qualités de Cabri-géomètre.

Références

ARSAC. G. GERMAIN G, MANTE M. (1988) Problème ouvert et situation problème IREM de Lyon.

BELLEMAIN F., CAPPONI B., (1992), Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. *In Educational Studies 23 (1992), n° 1, pp. 59-97.*

BERGUE D., (1992), Une utilisation du logiciel "Le géomètre" en 5ème, *Petit x n° 29 pp. 5-13.*

BOURY . V. 1993 La distinction entre figure et dessin en géométrie. Etude d'une "Boîte Noire" sous Cabri-géomètre. mémoire de DEA, Grenoble : Université Joseph Fourier.

CAPPONI B., LABORDE C., (1991). Cabri-Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire. *Actes de la VIème école d'été de didactique des mathématiques 1991, Plestin les Grèves, pp. 220-22.*

CAPPONI B., STRÄßER R., (1992). Cabri-Géomètre in a college Classroom. Teaching and Learning the cosine function with Cabri-Géomètre. Zentralbalt für Didactik des Mathematik, 90/5, pp. 171-90.

Capponi 93

CAPPONI. B., (1993) Modifications des menus dans Cabri-géomètre, des symétries comme outils de construction. *Petit x* n° 33 pp. 37 à 68, 1992-1993.

GUILLERAULT M. (1991): *La gestion des menus dans Cabri-géomètre, étude d'une variable didactique*, mémoire de DEA, Grenoble : Université Joseph Fourier.
LABORDE C., (1992), Solving Problems in computer based geometry environments : the influence of the features of the software ; *Zentralbatt für Didactik des Mathematik. 92/4, pp. 128-35.*

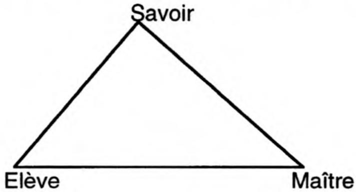
5. Débat de classe

Danièle Bergue (IREM de Rouen)

I. LE DÉBAT DE CLASSE. POURQUOI? COMMENT?

A. qu'est-ce qu'un débat de classe

En classe on trouve, habituellement, la structure didactique connue:



Un débat scientifique permet de mettre en place une autre coutume où peut s'établir une problématique commune au niveau de la classe ainsi que des confrontations explicites entre les différentes significations que les élèves attribuent aux concepts traités.
Au cours du débat:
- Dans une première partie il y a la productions d'énoncés.
- Dans une deuxième partie il y a DÉBAT. Les élèves doivent se prononcer sur la validité des énoncés.
- Enfin il y a démonstration des énoncés validés .Les autres prenant le statut d'énoncés dont il faut se "méfier" , "qu'on aimerait bien être vrais" comme dit M. Legrand.

B. pourquoi un débat en classe de collège ?

*** Pour ne pas répondre avant que les questions aient pris du sens**

La compréhension (et la mémorisation) des situations qu'elles soient "découvertes" de concepts ou leurs mises en action demande que l'élève ait déjà activé d'autres connaissances (rappel de propriétés, de figures voisines) pour organiser l'ensemble (cf Michel Mante) Les élèves en difficulté en mathématiques (et ailleurs) sont souvent des enfants qui mettent difficilement en oeuvre des facultés d'anticipation (vision globale des dessins, attitudes d'attentisme une fois le dessin réalisé).Ils vivent plus dans l'immédiateté. Souvent les explications du professeur ou les propositions de réponses d'autres élèves arrivent trop tôt et ces élèves en difficulté n'en voient, n'en comprennent pas la raison. Ils ne font qu'enregistrer l'aspect technique des solutions proposées.

Le sens donné par le professeur à ses explications n'est pas compris par l'élève , seule la "recette" passe.

Exemple : l'aspect algorithmique des équations est retenu indépendamment des règles de calcul qui sont utilisées pour les résoudre :

" Tu fais passer de l'autre côté et tu changes le signe ".

*** Pour avoir peut être "accès" aux représentations que l'élève est entrain de se construire de la notion visée.**

Que sait-on de ce que l'élève comprend au moment où le professeur expose une notion ou lorsqu'il travaille les activités proposées dans les livres? Quelles représentations significatives de ces notions sont présentes pour les élèves ?
En l'absence d'expressions immédiates des conceptions de la notion (au travers d'un débat par exemple), telle que l'élève les a acceptées, ce n'est que par les erreurs faites ou les stratégies mises en oeuvre pour répondre à un problème que le sens donné par cet élève émergera. Mais alors les connaissances visées comprises correctement ou non seront déjà relativement stabilisées car acceptées et organisées par l'élève dans son univers cognitif. Il est alors plus difficile de convaincre un élève de son erreur .

On peut citer comme exemple la construction des décimaux.

Le professeur bien que produisant des explications justes et "claires" n'est pas sûr du niveau de compréhension réel des élèves.

*** Pour construire une cohérence dans ce que l'élève apprend**

On sait que pour être utiles c'est à dire mises en oeuvre les connaissances doivent être significatives c'est à dire mises en place par un travail de réflexion qui fixe leurs finalités et leurs limites. Si les élèves pensent qu'il est utile d'apprendre telles ou telles notions que parce qu'elles font partie des contrôles, des examens, il ne leur est pas alors nécessaire de se préoccuper du sens et surtout de la cohérence de ce qu'ils apprennent. Quel savoir se construisent-ils ? Ce sont des connaissances scolaires vite oubliées pour la plus part.

C'est pourquoi, il est intéressant de proposer très tôt des situations où après que diverses stratégies de solution aient été trouvées individuellement les élèves puissent confronter leurs points de vue. Des outils de preuve divers sont alors proposés pour convaincre les autres (et non le professeur) Le statut de la preuve change de nature dans le débat avec des pairs : il s'agit de faire comprendre à des interlocuteurs qui n'ont pas compris et non de montrer que l'on fonctionne avec le niveau de codage et de connaissance requis par l'institution pour le niveau d'étude .
Le débat est l'occasion de réutiliser des connaissances ou d'en mettre en place de nouvelles avec l'aide du professeur. Elles prennent alors sens du fait de leur utilisation immédiate et nécessaire pour répondre à une difficulté posant question, pour construire une solution convaincante.

C. Mise en place de débat en classe

*** Conditions matérielles**

Les élèves doivent en principe pouvoir se voir aisément les uns les autres. La meilleure disposition est donc en large rectangle, mais ceci n'est guère réalisable d'où des dispositions en petits groupes ou même la structure habituelle de la classe.
Dans la situation présentée, le professeur a sa disposition un ordinateur et une tablette rétroprojectable(data show).
Il utilise Cabri-géomètre comme logiciel.

*** Quelle coutume met-on en place?**

Il s'agit d'établir un autre contrat didactique que celui habituellement présent en classe : l'enjeu n'est pas d'avoir raison seul mais de convaincre le groupe qui peut alors s'approprier le savoir.
Le rôle du professeur:
Il initialise la situation.
Il distribue la prise de parole en veillant a une équitable répartition des prises de parole
Il laisse se développer toutes les argumentations y compris celles qui sont fausses.
Il entretient la dynamique en soulignant les incertitudes, les contradictions.

Le rôle de l'élève:

Il utilise son savoir local pour proposer une preuve.
Il explique sa solution
Il conteste
Il y a une situation de codévolution du problème
Le groupe sert d'intermédiaire entre l'élève et le savoir institutionnalisé.

*** Les apports**

Débat et conflit sociocognitif:
On pense souvent que débat implique conflit sociocognitif.
Il n'y a pas forcément conflit sociocognitif dans un débat.
Dans le conflit sociocognitif (cf Gilly) deux réponses sont présentes dans l'esprit de l'élève et il a conscience de la contradiction. C'est la résolution de cette contradiction qui amène une réorganisation des connaissances mobilisables pour la résolution d'autres problèmes.
exemple :
Le débat est plus la source d'interaction entre pairs :
1) "Je comprends....." 2) "Je ne comprends pas" .
1) "J'explique ......" 2) "Tu précises....".
Il y a opposition argumentée de points de vue avec déstabilisation au moment de la mise en oeuvre du mode de résolution puis contrôle sous forme d'acquiescement ou de reformulation par les élèves.
Dans tous les cas, même si les réponses immédiates sont différentes des justifications qui seront fournies ultérieurement, il y a progrès cognitif: Le sens de la nouvelle connaissance visée se construit par rapport au savoir mis en action par l'apprenant.
Au cours du débat peuvent naître chez des élèves des conflits socio cognitifs que ce même débat permettra ou non de résoudre

Quels autres apports peut-on attendre d'un débat?
Des connaissances en maths
Des connaissances de méthodes
La prise de conscience du plaisir de la recherche.

*** Les inconvénients**

Le problème du temps nécessaire est essentiellement dénoncé. Mais c'est le fait de professeurs qui n'ont jamais essayé ce type de travail car très souvent ceux qui se "lancent" sont séduit dès le premier essai . Outre la motivation plus importante, la conscience d'un travail réellement productif des élèves modifie profondément le climat de la classe. Les élèves prennent aussi conscience que ne pas comprendre n'est pas significatif de passivité en face de la difficulté. Certains persuadés d'être "faibles" se révèlent aussi capables que les "forts" de proposer des arguments intéressants pour tous.
Un autre inconvénient est celui de la structure scolaire:
Ergonomie des salles
Durée limitée des séquences
Réactions des élèves par rapport aux autres cours.

II. DIFFÉRENTS TYPES DE DÉBAT. L'APPORT D'UN OUTIL SUPPLÉMENTAIRE : LE LOGICIEL .

A. Comment apparaissent les débats dans la classe ?

C'est toujours le professeur qui va lancer le débat mais l'initialisation peut se faire :
- en prenant au rebond dans les classes un questionnement d'un ou plusieurs élèves ce débat improvisé est celui qui est le plus difficile à gérer car aucune analyse a priori n'a été faite par le professeur . Mais c'est souvent celui qui répond a une vraie curiosité de la part des élèves.
- en proposant un problème en réponse à une difficulté pointée (lors d'un autre mode de fonctionnement)

- en proposant un problème dont la solution permettre d'institutionnaliser une nouvelle connaissance.

B. L'apport de cabri géomètre

Il se fait dans trois directions:
*** Il permet de poser le problème** :

L'utilisation de la dynamique de l'image va permettre la multiplicité des constructions et par la même une modification des cadres dans lesquels peut se poser le problème
Le débat fonctionne au niveau des représentations.

*** Il sert d'outil de preuve**
Les arguments qu'il permet de proposer entraînent souvent l'émergence de conjectures et une orientation du débat vers la démonstration.
Il fonctionne alors au niveau des procédures de résolution..

*** Il permet de "vérifier" des propositions de conjectures**

Il permet à l'élève angoissé dans la recherche de se rassurer.
Il fonctionne alors comme outil de contrôle de l'activité .

III. DES EXEMPLES

A. En 5ème , autour de la somme des angles d'un triangle.

Cette situation montre comment le logiciel va servir comme outil de preuve.
*** Description de la situation initiale** .

Objectif initial:
une observation de la position de l'orthocentre suivant la forme d'un triangle .
La situation:
Au cours de la formalisation des résultats par les élèves , les deux phrases suivantes sont écrites au tableau :
"lorsque qu'un triangle a ses angles aigus ,l'orthocentre est à l'intérieur"
"lorsque un triangle a ses angles obtus , l'orthocentre est à l'extérieur " .
Je demande aussitôt aux élèves de préciser les angles aigus et les angles obtus du triangle dessiné . Ils montrent un angle obtus mais sont tous convaincus qu'on peut en obtenir un deuxième .

*** Déroulement du débat**

Un élève encouragé par tous les autres va donc venir déplacer les sommets du triangle pour obtenir un angle obtus supplémentaire . Devant la transformation simultanée du premier angle obtus en angle aigu les élèves sont déçus mais pas convaincus que cela est impossible . Ils sont persuadés ne pas avoir choisi le bon angle et vont donc réessayer avec le troisième angle du triangle . Le nouvel échec va les amenés a se poser seuls la question " pourquoi ne peut-on avoir qu'un angle obtus ?"

*** Intérêt dans cette classe**

C'est une classe de cinquième en difficulté pour laquelle la notion de démonstration n'a guère d'attrait . Dans ce cas ils vont aller chercher avec intérêt les propriétés et s'exprimer ainsi: " un triangle ne peut pas avoir deux angles obtus car il n'y aurait plus de place pour le troisième " .
C'est la confrontation avec l'ordinateur qui a provoqué le conflit et l'intérêt pour la preuve mathématique . Il est certain que l'enjeu n'est pas le même que si j'avais demandé de démontrer qu'un triangle ne peut avoir qu'un angle obtus ou pour faire plus "ouvert" : "combien un triangle peut-il avoir d'angle obtus ? "
La résistance du milieu informatique est la source du conflit cognitif.

B. En 4ème , à propos de l'inégalité triangulaire

Cette situation a été mise en place pour donner un intérêt à cette propriété qui apparaît comme une évidence aux élèves de 4ème.

*** Description de la situation initiale**

Objectif :

une recherche de l'inégalité triangulaire comme solution de la situation proposée.

La situation:(voir annexe 1)

un triangle est donné dont on peut faire varier la longueur des côtés qui sont données par des segments dont on peut déplacer les extrémités grâce à CABRI. Lors des changements de longueurs un sommet disparaît. pourquoi?

*** Déroulement du débat**

Quand un élève passe à la manipulation de la souris sur l'un quelconque des côtés, le point disparaît:" Tiens! Tiens!"

Alors trois problèmes sont posés:

- Disparaît-il aussi pour des changements sur les autres côtés?

-Peut-on prévoir quand il va disparaître?

-Peut-on le faire réapparaître d'un côté ou de l'autre en agissant sur les trois côtés?

Les élèves vont essayer de répondre en utilisant l'ordinateur et en proposant l'idée de leur groupe. Ils viennent manipuler la souris suivant leurs besoins.

Finalement tout le monde est d'accord :"Cela dépend des mesures mais comment?"

Certains groupes vont chercher en faisant varier simultanément les trois côtés.

D'autres vont faire varier une seule mesure (idée de séparation des variables).

Ils vont tous fabriquer un tableau où apparaissent les trois longueurs Mais dans leur recherche de relations entre ces grandeurs, ils ne privilégient pas l'addition : "c'est trop simple pour des élèves de quatrième"

Lorsque un élève va aller afficher une proposition juste concernant la somme de deux côtés, tous les autres vont la refuser. Il va donc être amener pour les convaincre à reproduire sa solution pour toutes les paires de deux côtés consécutifs.

D'autres groupes s'intéressent à la différence:

Certains vont systématiquement calculer:" AB-AC". Ils vont donc trouver des valeurs positives ou négatives

D'autres vont calculer, soit" AB-AC", soit" AC-AB" pour trouver toujours des valeurs positives.

Les deux groupes trouvent finalement le même résultat:" La différence est toujours plus petite que BC !!"

Le débat aura lieu mais autour de : "A-t-on le droit d'écrire: AB-AC négatif?"

Dans le cas plus simple où les points sont alignés, un élève demande:

____A_____B__________C________

"Dans ce cas si on écrit AB-AC =

Qu'est-ce qu'on écrit BC ou CB? Lequel est positif? Sont-ils égaux?"

Les élèves ont dans cette discussion finalement mis en oeuvre deux questions importantes:

La mesure algébrique

La valeur absolue

Ils ne peuvent d'eux mêmes trancher, le professeur peut alors soit leur dire que la solution leur sera donnée dans les classes suivantes, soit apporter des éléments de notation (par exemple celle de la valeur absolue).C'est aussi l'occasion de préciser les différences entre mesure et distance.

*** Intérêt pour cette classe**

La dynamique de l'image a permis de poser un véritable problème pour cette propriété.

Les positions du point A sur le segment BC sont sûrement à l'origine des problèmes qui vont se poser pour les groupes qui s'intéressent à la différence.

C. Heuristique et démonstration en quatrième.

Un travail autour du statut des énoncés . (Présenté à l'U.E de Grenoble avec une vidéo)
Cette situation permet de faire prendre conscience que ce qui se voit sur un dessin prend en géométrie différents statuts au sein d'un problème. Dés qu'on associe au dessin un texte, un tri est possible entre les éléments de dessin de base(ce sont les hypothèses)qui permettent de le construire et le reste des "configurations" visibles qui deviennent les conclusions à démontrer. De plus certaines d'entre-elles peuvent ne pas résister à des déplacement des points de base, elles sont liées à des cas particuliers (que l'on pourra étudier après).
Le logiciel CABRI permet ce jeu de l'utilisation des points de base et aussi permet de reconstruire l'énoncé du problème par l'utilisation de la fonction "historique"

*** Description de la situation initiale**
objectif

Travail sur le statut du dessin et de la figure et sur le statuts des énoncés indépendamment de toute démonstration.

La situation: (voir en annexe 2 et 3 dessin et texte associé)
Un dessin est projeté sur lequel les élèves vont avoir à proposés des énoncés qui leur semblent visuellement vrais.
En déformant le dessin puis avec la donnée du texte du problème(sans les questions) ils vont avoir à effectuer un tri faisant travailler leur appréhension visuelle puis discursive de la figure.

*** Déroulement du débat.**

La première étape de propositions d'énoncés n'est pas sujet à débat puisque justement chacun doit pouvoir dire ce qui lui semble vrai.
Un travail important est fait sur les énoncés qui vont rester implicites et qui sont explicités.
Cette différenciation est très difficile pour les débutants en géométrie par exemple:
Est-il nécessaire d'écrire: "C est un cercle" ?
Vaut-il mieux écrire : "N est un point de la droite (AM)"
ou
"A,M,N sont alignés"
ou
Ne rien n'écrire, car ça se voit bien ?
Comprendre ce qui doit rester ou non au niveau de l'implicite demande donc un apprentissage spécifique .
Dans une deuxième étape, un tri va s'effectuer dans les énoncés proposés: certains vont se trouver éliminés.
Sont éliminés sans débat, ceux qui ne résistent pas à un déplace ment de certains points.
Sont éliminés avec débat, ceux que les élèves estiment retrouvés dans le texte fournis, chacun venant expliquer où se retrouve l'énoncé choisi dans le texte.
Quels sont ceux qui sont nécessaires?
En oublie-t-on?.
Le débat a lieu autour d'énoncés tels que:
"C et C' sont tangents": ce n'est pas écrit ainsi dans le texte du problème mais on sait par le texte qu'ils ont un point commun. Autrement dit certains considèrent l'utilisation de la définition des cercles tangents comme nécessaire d'autres comme implicite. On trouve ici une origine aux difficultés de compréhension des démonstrations de propriétés considérées comme évidentes par les élèves.
La fonction "historique" de CABRI va permettre de vérifier si la liste des énoncés qui ont pris statuts d'hypothèse est suffisante pour obtenir le dessin proposé au départ.

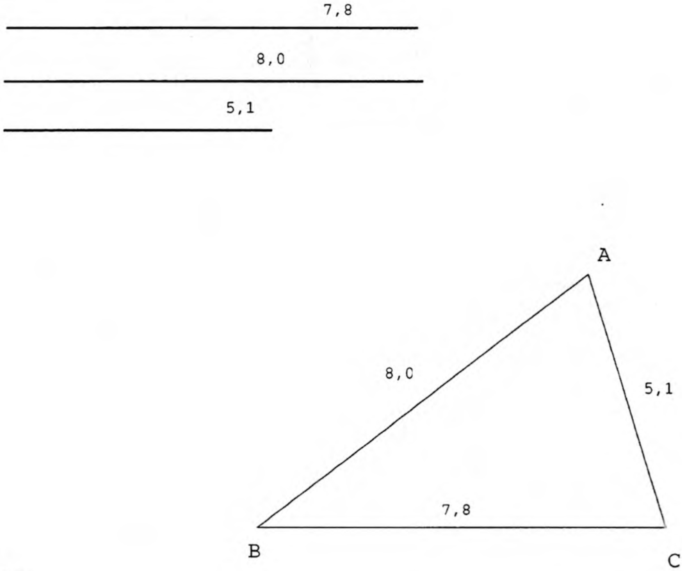
*** Intérêt pour cette classe.**

Dans ce débat les mathématiques prennent leur aspect social : Il s'agit de convaincre ses pairs du bien fondé de sa proposition en fonction de règles acceptées par la communauté
Le rôle du logiciel CABRI est ici fondamental pour faire comprendre aux élèves la différence entre le dessin et la figure .La dynamique de l'image permet de voir les cas particuliers. L'historique montre que c'est l'association étroite entre un dessin et un texte qui permet de parler de figure sur laquelle on peut faire des conjectures.
Enfin les questions qui étaient posées dans le problèmes sont les énoncés qui étaient après modification du dessin les plus controversés.

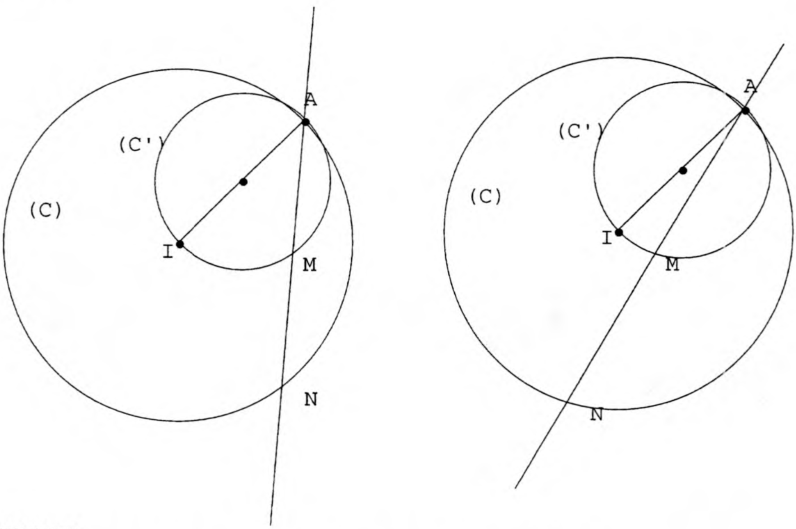
IV. CONCLUSION

Beaucoup de points sont encore à préciser dans cette utilisation du débat en classe de collège .
Mais dans le travail sur la géométrie l'utilisation de CABRI avec tablette rétroprojectable permet une visualisation rapide des propositions des élèves introduisant un rythme dans le débat. De plus l'interaction entre la proposition et la réponse du logiciel est un moyen efficace et plus "neutre " de susciter des conflits cognitifs remettant en cause les représentations que l'élève est entrain de se créer.

ANNEXE 1



ANNEXE 2



ANNEXE 3
Tracer un cercle (C) de centre I , puis placer un point A sur ce cercle.
Tracer le cercle (C') de diamètre IA.
Tracer une droite passant par A et ne passant pas par I qui coupe (C') en M et (C) en N.

6. Reflets d'une mise en pratique

Michel CHASTELLAIN, maître de didactique des mathématiques du SPES
(Séminaire Pédagogique de l'Enseignement Secondaire du canton de Vaud)
SUISSE

I. CONTEXTE

Depuis plusieurs années, et par suite d'une conjoncture nettement plus favorable que celle d'aujourd'hui, le canton de Vaud (Suisse romande) a doté d'un équipement informatique chacun de ses complexes scolaires secondaires. Dans la grande majorité des cas, le matériel à disposition se compose d'une quinzaine d'ordinateurs «Macintosh» avec disque dur ou deuxième lecteur, d'une imprimante laser ou de plusieurs ImageWriter, ainsi que d'un poste pour le maître muni d'un rétroprojecteur sur grand écran. Quelquefois, ces appareils sont connectés en réseau.

«Cabri-Géomètre» ayant été diffusé de ce côté du lac Léman (parfois appelé lac de Genève !) dès sa création, l'expérimentation s'est déroulée durant les années scolaires 90-91 et 91-92, à deux niveaux différents :

- Dans une classe de 14 élèves de 12 à 14 ans (6e, puis 7e année), appartenant à une section latin-anglais avec une dotation horaire en mathématiques de 4 périodes hebdomadaires de 45 minutes. Pour cette catégorie d'élèves, le programme de géométrie recouvre, notamment, les notions suivantes : systèmes de coordonnées – isométries (symétries, translations, rotations) – homothéties – surfaces et solides – longueurs, aires et volumes – angles (angles inscrits) – cercles – constructions.

- Dans une classe de 21 élèves de 14 à 16 ans (8e, puis 9e année) inscrits dans une filière scientifique (7 périodes chaque semaine, dont une est consacrée au dessin géométrique). Les principales notions de géométrie à traiter sont : trigonométrie (triangle rectangle, puis quelconque) – étude de figures en vue de démonstrations – similitudes et isométries de triangles – théorèmes (Thalès, métriques, ...) – composition de transformations géométriques – lieux géométriques – études de figures de l'espace. En ce qui concerne le dessin géométrique, il s'agit tout d'abord d'affiner la manipulation des instruments de base, lors de différentes constructions élémentaires, puis de s'attacher à la construction de solides et de quelques sections planes de ceux-ci.

L'expérimentation relatée ici n'est pas officielle. Elle tient avant tout à l'enthousiasme procuré par la découverte de «Cabri-Géomètre» et au désir de mettre en place un contexte d'enseignement qui permette aux élèves de trouver, ou de retrouver, un certain plaisir dans la résolution de problèmes de géométrie.

II. MODALITÉS

Les deux classes se sont rendues à raison d'une période par semaine en salle informatique, chaque élève disposant d'un poste de travail. Ce laps de temps a été délibérément «pris» sur les heures de cours, l'idée étant celle de l'outil informatique mis au service des mathématiques. Autrement dit, le but visé résidait dans une utilisation de «Cabri-Géomètre» pour atteindre une partie des objectifs des programmes concernés, les autres l'étant au cours d'un enseignement frontal «traditionnel» .

En début d'année scolaire, tous les élèves de 14 à 16 ans ne maîtrisent pas la «philosophie» du Macintosh, mais la plupart ont déjà eu l'occasion de découvrir l'un ou l'autre des logiciels fondamentaux (traitement de texte, éditeur graphique, ...). Par contre, la majorité des élèves de 12 à 14 ans ne connaissent pas le fonctionnement des appareils.

Dans les deux cas, l'enseignement a lieu pour tous les élèves en même temps, le maître étant «seul face à sa classe». Voilà pourquoi certaines notions ou certains problèmes, abordés en salle informatique, ont été repris, voire approfondis, durant une leçon de géométrie.

Il est important de signaler que les élèves avaient la possibilité de travailler sur feuille blanche, parallèlement à leur réflexion à l'aide de l'ordinateur, pour chacune des situations où ils en éprouvaient l'envie. Cette conception est fondamentale dans la mesure où l'apport de «Cabri-Géomètre» ne doit pas supplanter la référence aux outils «traditionnels» de géométrie que sont la règle, l'équerre et le compas.

Chaque élève a disposé d'une disquette sur laquelle il sauvegardait les exercices réalisés. Cette manière de procéder présente plusieurs avantages :

– les enregistrements sur disque dur ne «disparaissent» plus, d'une séance de travail à l'autre, par suite d'une manipulation fautive d'un autre utilisateur;

– le maître, n'étant pas à même de tout contrôler au cours d'une leçon, détient ainsi la possibilité d'emporter les disquettes et de vérifier chez lui, ou ailleurs, les solutions élaborées;

– lorsque le problème proposé nécessite une figure de départ identique pour chaque élève, ou lorsque la «barre des menus» implique une configuration spécifique, l'enseignant a la possibilité d'élaborer la construction de base ou de préparer «l'environnement» de travail, avant de déposer l'information sur chaque disquette;

– l'élève qui a la chance de posséder un appareil similaire chez lui, ou qui vient en salle informatique au cours de la semaine, peut ainsi poursuivre ses investigations. A ce propos, il y a lieu de préciser que dans l'un des bâtiments concernés par l'expérimentation les élèves ont la liberté, après inscription auprès du responsable, de se rendre en salle informatique sans la présence d'un maître, pour autant que celle-ci soit libre.

D'une manière générale, tous les problèmes de géométrie résolus avec «Cabri-Géomètre» ont été imprimés, les productions étant ensuite collées dans les cahiers des élèves afin qu'ils gardent une trace écrite de leurs différentes réalisations. Signalons que celles-ci ont été fréquemment accompagnées de commentaires manuscrits, ou agrémentées du libellé de la construction obtenu à partir de l'outil «Énoncé».

Pour respecter l'esprit de «Cabriole», journal des utilisateurs de «Cabri-géomètre», il convient avant tout de s'adresser aux praticiens-lecteurs. Voilà pourquoi il convient de dégager ici quelques apports et limites, apparus durant l'expérimentation, et qui mettent tout particulièrement en évidence le vécu de classe.

III. APPORTS PÉDAGOGIQUES ET DIDACTIQUES

• Enthousiasme, plaisir de faire de la géométrie

Chaque entrée en salle informatique s'accompagne d'une bousculade suffisamment explicite : les élèves éprouvent toujours beaucoup de satisfaction dans cet environnement familier. Autrement dit, «faire de la géométrie» devient ou redevient attrayant. Cet aspect mérite d'être souligné car, après plus de dix-huit années d'enseignement, je n'avais pas souvent entendu parler d'élèves se précipitant, dès la sonnerie de fin de récréation sur leur crayon, leur équerre et leur compas ! Dans le même ordre d'idée, il faut également relever que «boucler» la salle informatique en fin de séance n'est pas toujours une chose aisée, tant les élèves s'attardent sur la figure momentanément étudiée !

• «Cabri-Géomètre» favorise l'autonomie des élèves

Le maître n'est plus nécessairement «LA» référence et les élèves perdent l'habitude de tout attendre de «celui qui sait» ! Par exemple, ils «questionnent» le didacticiel, ils déplacent un objet pour vérifier l'influence de cette modification sur leur construction, ou encore, ils comparent leur figure avec celle de leur voisin dans un réflexe autocorrectif. De ce fait et indirectement, l'apport du didacticiel valorise les procédures adoptées pour résoudre des problèmes et favorise l'apparition de stratégies propres à chaque individu.

• L'élève n'est plus «bloqué» devant une figure

Dans une situation d'enseignement «traditionnel» et face à l'élaboration d'un raisonnement hypothético-déductif, il arrive fréquemment qu'un élève «ne voit» pas ! Si d'aventure sa motivation n'est pas grande, il y a fort à parier qu'il prenne la désagréable habitude d'attendre la démonstration que le maître apportera, tôt ou tard ! On ne saurait l'en blâmer, tant certains cas de figures s'avèrent complexes ou peu «parlant». Avec «Cabri-Géomètre» il en va autrement : les élèves prennent l'habitude de modifier leur construction pour faire apparaître un cas de figure «plus simple» ou s'efforcent de déterminer plusieurs mesures afin de mettre en évidence les «invariants» grâce auxquels ils pourront ensuite mettre en place leur puzzle déductif.

• L'utilisation du didacticiel suscite une démarche «scientifique»

La phase de tâtonnements, de doutes, de questionnements, à laquelle les élèves sont confrontés lors de l'investigation «dynamique» qu'ils mènent dans une figure, s'inscrit dans l'esprit d'une démarche de type «scientifique» puisqu'ils émettent des hypothèses, les vérifient, défendent leurs affirmations, comparent leurs résultats auprès des voisins ou encore, justifient leurs actions vis-à-vis du maître.

• «Cabri-Géomètre» permet de parcourir des activités du programme

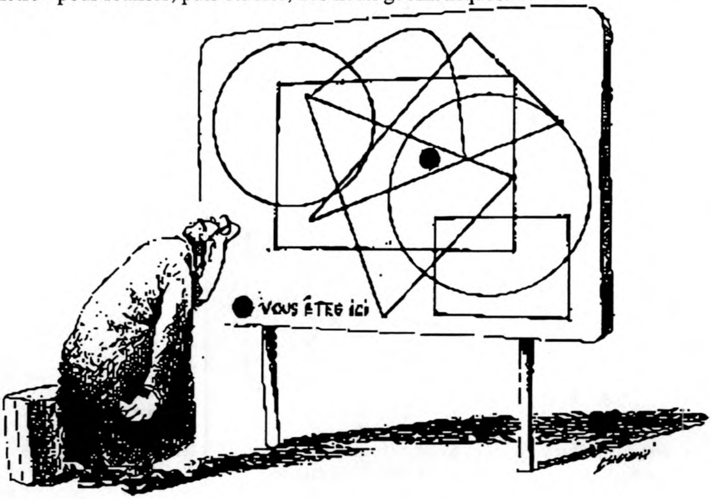
Mis à part les activités d'introduction (qui ont permis de présenter les outils à disposition), tous les problèmes élaborés par les élèves s'inscrivent dans le contexte des programmes concernés :

– en 6e, l'effort («je devrais dire : le plaisir») a porté principalement sur des constructions de polygones (triangles, quadrilatères, ...), sur des transformations du plan et sur quelques activités de repérage dans un système de coordonnées ;

– en 7e, les élèves ont élaboré et manipulé beaucoup de constructions faisant appel à la notion de cercle (notamment à propos des angles inscrits). Ils ont également réalisé des constructions élémentaires (bissectrice, médiatrice, ...);

– en 8e, ils ont principalement étudié des figures dans le but de faire ressortir les éléments invariants nécessaires à l'élaboration d'une déduction;

– enfin en 9e année, si les élèves ont abordés de manière générale des problèmes touchant au contenu du programme, tel qu'il figure en première page, ils ont surtout utilisé «Cabri-Géomètre» pour réaliser, puis étudier, des lieux géométriques.



Auto-évaluation

• Le niveau de connaissance des élèves n'a pas diminué

Pour autant que l'on puisse juger, les élèves ne sont pas plus «faibles» qu'avant. Certes, comme nous le verrons par la suite, le nombre d'exercices réalisés n'est pas le même que celui relatif à un enseignement traditionnel, ne serait-ce parce qu'il a fallu consacrer de l'énergie à une mise à niveau des connaissances liées au didacticiel. Mais, il n'est pas prouvé que «faire beaucoup d'exercices» est la garantie d'un bon apprentissage en mathématiques ! Par contre, on peut affirmer sans crainte que dans un domaine au moins l'apport de «Cabri-Géomètre» a pour conséquence une meilleure maîtrise du programme. En effet, pour les lieux géométriques son utilisation se révèle payante car les possibilités d'investigations qu'il offre, grâce à son aspect dynamique, favorisent incontestablement le travail de chacun. J'en veux pour preuve les faits qui suivent.

En 9e année, les élèves de seize ans parviennent au terme de la scolarité obligatoire. A ce stade, notre Système Éducatif impose un examen intitulé «Certificat de fin d'études secondaires», dont l'obtention permet de poursuivre des études au Gymnase (lequel conduit alors au Baccalauréat). En mathématiques (section scientifique), ce certificat se compose de quatre examens : deux écrits et deux oraux, respectivement en algèbre et en géométrie. Dans l'expérimentation dont il est question ici, les oraux de géométrie de la classe de 9e année ne comportaient que des questions relatives à des lieux géométriques, ce qui n'est pas la coutume car ce chapitre s'avère l'un des plus délicat du programme. Les élèves avaient pour tâche de déterminer un ensemble de points jouissant de la même propriété, c'est-à-dire, de le construire, de le décrire et de l'analyser, si possible en justifiant leurs affirmations. Pour ce faire, ils disposaient d'une vingtaine de minutes de préparation et du matériel traditionnel de géométrie (règle, équerre, compas). De plus, ils avaient la possibilité d'élaborer la recherche et de présenter leur résultat à l'aide d'un ordinateur et de «Cabri-Géomètre». Face à ce choix, il faut souligner que tous les élèves, sans exception, ont opté pour l'ordinateur. Après avoir enregistré leur document sur une disquette, ils ont utilisé ce dossier durant l'examen oral. Plutôt que de démontrer de manière «traditionnelle» au tableau noir, ils ont préféré projeter leur construction sur un tableau blanc, construction qu'ils ont alors complétée et modifiée (à l'aide d'un stylo feutre) au fur et à mesure de leur démonstration, tout en conservant la figure de base intacte. Au plan informatique, il faut relever la parfaite maîtrise des fonctions de base de «Cabri-Géomètre» et 19 élèves sur 21 ont été capables de gérer les données de base pour élaborer correctement le lieu géométrique qu'ils avaient à trouver. Les réalisations ont été présentées soit «point par point», soit à l'aide de la fonction automatique. Au plan des mathématiques, les performances des élèves sont comparables à celles que l'on aurait obtenu sans l'aide de l'informatique, voire supérieures dans la mesure où même les plus «faibles» ont présenté une construction cohérente face à des exercices considérés comme délicats. Relevons cependant qu'une minorité seulement a utilisé habilement la puissance du logiciel pour étudier les cas particuliers qui se présentaient et que peu ont exploité les effets graphiques disponibles pour distinguer les éléments mobiles des éléments fixes. Mais on touche là à des détails qui n'apparaissent que rarement, même après un enseignement plus «traditionnel».

En tant qu'expert, dans la classe de mon collègue Serge Lugon, je n'ai pas remarqué de lacunes dans les connaissances mathématiques des élèves, ni de baisses de performances évidentes qui auraient été dues à une perte de temps liée à la découverte du fonctionnement de «Cabri-Géomètre». De plus, et cet aspect mérite d'être retenu, je n'avais encore jamais assisté lors d'examens «sans ordinateur», à un tel travail en profondeur de la part des élèves sur ce chapitre particulier de notre programme de mathématiques.

Signalons également que l'apport de «Cabri-Géomètre» se révèle spécialement agréable pour l'examinateur qui a la liberté d'atteindre, après une brève manipulation, un cas de figure permettant d'aider l'élève à formuler des constats, à énoncer des justifications ou encore à présenter des preuves.

IV. RÉSISTANCES ET OBSTACLES

• Consacrer le temps nécessaire à la maîtrise de l'outil informatique

Il ne faut pas minimiser les différentes étapes relatives à la découverte de «Cabri-Géomètre» et à l'apprentissage des techniques propres à l'outil informatique, étapes qui permettront ensuite aux élèves d'aborder de véritables problèmes mathématiques. Cela signifie pour le maître souhaitant organiser son enseignement en fonction du didacticiel qu'il va le faire au détriment de l'acquisition de nouvelles notions car il doit notamment accepter de consacrer le temps nécessaire à :

– la mise à niveau des élèves dans leur connaissance de l'ordinateur, c'est-à-dire à la découverte des différentes manipulations de base comme : «atteindre» un fichier, enregistrer une séquence, imprimer une figure, etc. Même si les procédures relatives à ces démarches méritent d'être présentées au fur et à mesure de la découverte du logiciel, elles impliquent un laps de temps non négligeable, surtout si les élèves ne connaissent pas la «philosophie» de l'ordinateur avec lequel ils travaillent;

– la découverte des outils à disposition. Bien que leur utilisation se révèle relativement simple, l'expérience montre que cet apprentissage n'est pas toujours immédiat (spécialement avec les élèves les plus jeunes). C'est ainsi que, durant les premières séances, il est préférable de présenter un outil de base et d'entraîner sa manipulation au travers de quelques exercices spécifiques, avant de vouloir présenter le suivant. A vouloir progresser trop rapidement, nous nous sommes parfois retrouvés dans des situations de classe peu prolifiques. Durant ces périodes où il s'agit de revenir à maintes reprises sur l'utilisation de plusieurs outils, le maître éprouve un désagréable sentiment de stagnation, voire de temps perdu;

– la compréhension des différents concepts du logiciel. Par exemple, si en situation «traditionnelle» de classe un élève place, à l'aide de son crayon, un point **a** sur un segment **[pq]**, il procédera «de même» avec «Cabri-Géomètre» en faisant appel à l'outil «Point de base». Cette démarche, quoique parfaitement cohérente pour l'élève, n'est pas valable puisqu'un déplacement ultérieur du segment **[pq]** ne modifie pas la position du point de base **a**.

• Mise en pratique et assimilation des nouvelles notions

Il n'est guère envisageable de se rendre en salle informatique plus d'une fois par semaine, ce qui explique pourquoi les élèves oublient souvent les manipulations de base. N'ayant pas l'occasion d'entraîner ces nouvelles connaissances, ils éprouvent de la difficulté à progresser. Bien qu'avec l'expérience cette problématique s'estompe, il faut bien admettre que la «rentabilité» des premiers mois se révèle relativement mauvaise et que le maître doit faire part d'une bonne dose de confiance dans la réussite d'une mise en pratique à long terme.

• Contraintes institutionnelles

Les contraintes institutionnelles fixent des normes, notamment pour ce qui touche au passage à un degré supérieur. Dès lors, un enseignant a-t-il le droit de consacrer une période hebdomadaire à des activités traitées à l'aide de «Cabri-Géomètre», sans évaluer les acquisitions de ses élèves ? Ou alors peut-il élaborer un contrôle écrit, pour note, risquant de pénaliser ceux dont la maîtrise informatique se révèle déficiente, alors que leurs connaissances mathématiques s'avèrent suffisantes ?

Dans un autre ordre d'idée, on ne peut passer sous silence le regard des collègues, voire les propos des parents qui développent, chez le maître, un sentiment de culpabilité étant donné que «l'Institution» semble réclamer des résultats tangibles comme des pages d'exercices ou encore une «avance» dans le programme : «Qu'est-ce que c'est que ces leçons de mathématiques où nos enfants s'amusent ? – Comment se fait-il qu'ils n'aient pas de devoirs ? – L'évaluation commune de fin de semestre mettra en évidence le temps perdu ! – Les programmes ne sont-ils pas déjà surchargés ? – etc.»

• Inflation de travail pour le maître

L'énergie dépensée par l'enseignant en salle d'informatique et sans aucun doute plus importante que celle qu'il doit mettre en jeu dans sa classe. Avec «Cabri-Géomètre», comme avec tout autre logiciel d'ailleurs, il faut inlassablement «papillonner» d'un ordinateur à l'autre, saisir instantanément le cheminement logique de l'élève qui appelle, pour déceler la faille de son raisonnement, répondre à de multiples questions de niveaux différents en s'efforçant de rendre tolérable l'attente de chacun ou encore, «déplanter» un ordinateur par suite d'une mauvaise manipulation de son utilisateur. Cette situation provient du fait que le travail en salle d'informatique permet aux élèves d'avancer à leur propre rythme, tout en étant stimulés par d'éventuels partenaires. Si cette autonomie est souhaitable, elle conduit cependant à de grands écarts entre les élèves et, par là même, amplifie les activités du maître, notamment au plan de sa disponibilité.

Et puis, il existe aussi la difficulté, paradoxalement désagréable, de capter l'attention des élèves, chacun étant actif devant son ordinateur. Le maître rencontre beaucoup de peine à faire passer un message commun. Après quelques explications la tentation de revenir à son écran et à son propre problème l'emporte et le maître a la désagréable impression de prêcher dans le désert.

• Problèmes d'ordre matériel

La pratique révèle également que certains jours sont maudits, tant les pépins techniques sont fréquents (panne d'imprimante, réseau qui ne fonctionne pas, «bombes» d'un Macintosh, disjoncteur qui «saute», etc.) ! Même si cet aspect peut faire sourire le lecteur, il faut bien constater que le risque de rencontrer ces désagréments est fonction du taux d'occupation de la salle informatique : plus le nombre de collègues qui l'utilisent est élevé et plus les problèmes de ce type sont fréquents.

V. CONCLUSION

Les propos qui précèdent montrent que le bilan final de l'expérimentation est positif : les élèves ont progressé dans l'acquisition de nouvelles connaissances mathématiques et leur motivation pour «faire» de la géométrie est retrouvée. Il ne faudrait cependant pas en déduire qu'il suffit de présenter «Cabri-Géomètre» aux enseignants pour que «ça marche» ! En effet, malgré l'intérêt suscité au premier abord par cette nouvelle modalité d'enseignement, les maîtres hésitent à se lancer dans l'aventure tant qu'ils ne maîtrisent pas le didacticiel. Car enfin, quel maître accepte-t-il de proposer des problèmes à ses élèves, problèmes qu'il n'est pas nécessairement capable de résoudre avec «Cabri-Géomètre» ? Le lecteur comprendra aisément que la réticence est ici de caractère affectif, par suite de la perte d'un certain pouvoir, de la modification du statut de «celui qui sait» et de l'image de marque qu'il souhaite dégager. Autrement dit, l'utilisation de «Cabri-Géomètre» en classe change le rôle de l'enseignant qui passe de celui de meneur de jeu à celui de conseiller : il cherche avec les élèves, il informe (à propos, par exemple, de la façon d'utiliser tel outil), il pose des questions («As-tu pris la peine de vérifier la mesure de ces deux angles ? – Le déplacement du point **a** aura-t-il des conséquences ? – etc.»), il «relance» la recherche («L'extrémité du segment **[rs]** fait-elle partie du lieu géométrique cherché ?»), il suggère («N'oublie pas de camoufler les droites de construction afin d'aérer ta figure»), bref, il s'abstient d'apporter des indications prématurées, voire la solution. Ce faisant, il se garde de juger et accepte le droit à l'erreur des élèves comme partie intégrante de l'élaboration du savoir mathématique.

Cette modification fondamentale de conception méthodologique et didactique passe par une formation et un encadrement des enseignants qui représentent des conditions sine qua non pour la mise en pratique généralisée de «Cabri-Géomètre». Ne pas prendre conscience de cette nécessité, c'est courir le risque de passer à côté d'un instrument qui valorise l'enseignement des mathématiques tout en redonnant du plaisir aux élèves.

7. Résoudre des problèmes avec Cabri-géomètre

Gilles MOUNIER & Gérard VIVIER :
IREM de Grenoble

Comment la pratique de CABRI amène-t-elle à changer sa propre façon d'aborder un problème et d'en chercher une solution ?

Nous essaierons de voir, à travers différents exemples de problèmes, des aspects tels que :

- l'aide à la visualisation du problème à partir de l'énoncé

- l'activité d'observation active de "phénomène"

- la création d'un paramétrage dynamique dans la représentation, permettant d'introduire la "variation" correspondant aux deux quantificateurs (existentiel et universel) souvent implicites dans les problèmes

- le travail du type "conjecture", essai, erreur, conviction ...

- l'aide à l'abstraction et la mise en évidence d'invariants avec la question : *Comment créer des constructions "fructueuses" qui permettront de "voir" la solution du problème ?*

- le recours particulier à divers outils de visualisation ou "vérification"

- la comparaison entre "formalisation sous Cabri" et "mise en équation" traditionnelle

- la question du travail de recherche au brouillon et de ces représentations soit mentales, soit sur papier, soit avec Cabri, avec leurs spécificités et leur complémentarité.

Pour cela nous décrirons des activités de recherche de solution sur deux problèmes :
- le problème du "carré inscrit dans un triangle"
- le problème du "pont entre deux villes"

Sur le premier problème, nous relatons une activité personnelle face au problème et sur le second une activité menée en classe de 1ère Scientifique.

I. LE PROBLÈME DU "CARRÉ INSCRIT DANS UN TRIANGLE"

Nous reprenons ici certains éléments en partie abordés dans le journal Cabriole n°4.

Enoncé du problème :

Etant donné un triangle ABC et un point P sur [AB], comment construire un carré PQRS avec Q sur [AC] et avec R et S sur [BC] ?

Quelle construction faire sous Cabri pour représenter le problème à partir de l'énoncé ?

Une construction "naturelle" semble être de créer un triangle libre ABC et un point P semi-libre sur [AB], à partir duquel on construit le rectangle PQRS avec Q sur [AC] et R et S sur [BC].

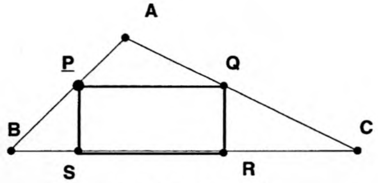
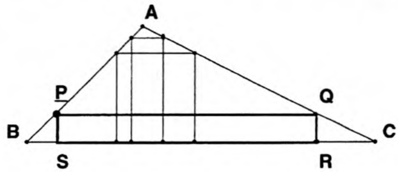


fig.Cabri : Carentri1

Remarque :

La lettre P est soulignée et le point est grossi pour indiquer qu'il est "manipulable"

On voit qu'en déplaçant P sur [AB], on donne au rectangle PQRS toutes les formes possibles par variation continue et qu'il y a un carré (et un seul) parmi elles.



Cela permet de visualiser le problème de manière dynamique en mettant à jour un paramétrage du problème et l'existence d'une solution.

Réaliser une telle représentation est déjà un objectif appréciable, notamment par rapport à l'attitude de nombreux élèves qui négligent souvent l'observation et l'analyse de la figure pour se polariser sur une "solution" hasardeuse ou pire sur la recherche de la page du cours à "appliquer".

Nous avons remarqué que certains élèves, simplement mis en face d'une telle "figure cabri", sont parfois gênés par le trop grand nombre d'éléments variables accessibles au même instant. C'est une réelle et intéressante difficulté, car cela pose la difficile question des différents types et niveaux de paramétrage, dans la démarche de **formalisation** (ou de mise en équation) d'un problème.

On peut en effet remarquer qu'il y a dans notre figure deux niveaux de paramétrage et donc de variation :
-1- le paramétrage du contexte du problème : ici le triangle qui est quelconque et à la variation duquel est attaché implicitement un quantificateur universel.
-2- le paramétrage d'une solution éventuelle : ici, grâce au point P, le paramétrage du rectangle inscrit PQRS, à la variation duquel est attaché implicitement un quantificateur existentiel associé à une condition "être un carré".

Ce n'est pas Cabri qui crée cette difficulté. Comme c'est souvent le cas avec un outil informatique, Cabri ne fait que la rendre explicite, là où elle est souvent masquée et implicite (comme ici cette notion de quantificateur).

En effet bien comprendre le problème, c'est observer que quel que soit le triangle, il existe un "carré inscrit", et qu'il faudra le caractériser (en indiquer une construction) quel que soit le triangle.

Attardons nous un instant sur cette démarche fondamentale de "paramétrage d'une solution éventuelle" que Cabri rend particulièrement explicite :

On est à la recherche d'un (ou plusieurs) objet-solution S défini a priori, dans l'énoncé du problème, par une caractérisation "statique" sous la forme d'un ensemble de conditions imposées. (ici 2 conditions : C1 "être carré" et C2 "être un rectangle inscrit").

On va traiter de manière dissymétrique ces 2 conditions, l'une étant prise comme "principale" et l'autre comme "secondaire".

En levant provisoirement la contrainte dite "secondaire" (ici "être carré"), on dispose pour la contrainte "principale" d'une famille F de solutions (ici la famille des "rectangles inscrits") que Cabri permet de paramétrer par un objet libre ou semi-libre (ici le point P) dont la manipulation directe engendre la visualisation dynamique de la famille F.

En reprenant maintenant en considération la condition secondaire, l'objet-solution S apparaît comme le (ou l'un des) élément de la famille F qui vérifie cette condition, et la manipulation directe permet de le faire apparaître comme le résultat d'un "cabri-ajustement" manuel.

L'ensemble donne ainsi ce qu'on pourrait appeler une "cabri-formalisation" du problème qu'il serait intéressant de comparer très systématiquement à la "mise en équation" traditionnelle en géométrie analytique.

Ceci dit, avec cette figure et sa variation "tous azimuts", on voit bien le problème et l'existence d'une solution, mais on est incapable de la caractériser en terme de construction. C'est peut être que la construction n'est pas porteuse des "bonnes images". On va en faire une autre.

On choisit maintenant de construire, à partir de P, le carré PQRS avec Q sur [AC].

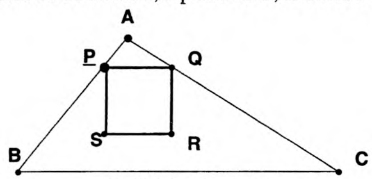
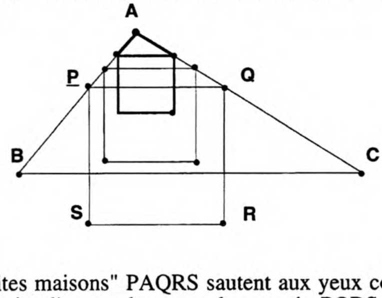


fig.Cabri : Carentri2

En déplaçant P, on voit qu'on peut agrandir le carré de manière continue et qu'à un moment (unique) son coté [SR] est sur [BC].

Si l'on reprend la description précédente de la démarche de "paramétrage d'une solution éventuelle", on voit que, par rapport à la construction précédente, on a simplement permuté les deux conditions "principale" et "secondaire" : au lieu de chercher un "carré" parmi une famille de (rectangles) "inscrits", on cherche maintenant un (rectangle) "inscrit" parmi une famille de "carrés".

Or, avec cette nouvelle construction, oh chance ! ..., non seulement on visualise le problème, mais on rend quasi évidente la solution en déplaçant le point P :



En effet, les "petites maisons" PAQRS sautent aux yeux comme homothétiques. Il suffira donc de construire l'un quelconque des carrés PQRS, la droite (AR) et son intersection avec [BC] qui nous donnera le point R cherché sur [BC].

Un "mal-voyant" aurait pu en plus tracer le lieu de R, mais ici c'est presque "de la triche".

Qu'est-ce qui fait que contrairement à la précédente, cette deuxième construction est fructueuse et nous donne de "bonnes images" ?

C'est qu'elle permet (en reprenant ici et poursuivant la description "méthodologique" de notre démarche) de :

mettre en évidence, pour la famille F, une nouvelle propriété ***invariante I*** (ici l'homothétie), *dont la conjonction avec la condition "secondaire" donne, pour l'objet cherché, une caractérisation en terme de construction.*

Mais comment créer ces constructions fructueuses, qui visualisent de tels invariants ? Voilà une question à creuser ... ultérieurement.

Notons ici que cette notion de construction "fructueuse" est très relative car, en "regardant de plus près", on aurait pu voir que la première construction elle-aussi permettait de visualiser la solution. Il "suffisait" (!) de construire la droite (AS), son intersection E avec la perpendiculaire en B à (BC) et enfin le rectangle BCDE.

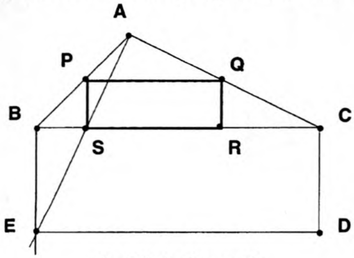


fig.Cabri : Carentri3

Quand on déplace P, les 2 rectangles PQRS et BCDE se déforment conjointement en restant (nouvel invariant !) toujours homothétiques l'un de l'autre. Ainsi PQRS sera un carré si et seulement si BCDE en est un. D'où à nouveau une construction rigoureuse, rejoignant en partie la précédente.

II. LE PROBLÈME DU PONT ENTRE DEUX VILLES

Ce problème a donné lieu dans une classe de 1ère Scientifique, à une activité étalée sur deux fois deux heures. Les élèves ne connaissaient pas Cabri, qui a été utilisé avec un grand écran et un ordinateur "collectif" dans la classe.

Nous décrirons en partie cette activité, mais notre objectif n'est pas ici d'en faire un compte-rendu détaillé et par ailleurs, nous aborderons aussi des questions qui n'ont pas été soulevées dans cette activité en classe.

Enoncé du problème :

Etant donné une rivière aux berges rectilignes et parallèles, et deux villes V1 et V2 situées de part et d'autre de la rivière, où faut-il placer un pont P_1P_2 perpendiculaire à la rivière pour rendre minimal le trajet $V_1P_1P_2V_2$?

Représentation du problème

Là encore posons nous la question : Quelle construction faire sous Cabri pour représenter le problème à partir de l'énoncé ? *(On verra plus loin que cette question n'est pas du tout triviale)*

La construction qui semble a priori la plus "naturelle" est sans doute :

- d'abord, créer une droite d (ici horizontale), un point libre R2 par lequel on trace la parallèle à (d) et enfin 2 points libres V1 et V2 (voilà pour le paramétrage du contexte du problème, ici : la rivière et les deux villes)
- ensuite, créer un point P1 semi-libre sur (d) et construire sa projection orthogonale P2 sur l'autre berge ainsi que les segments du trajet $V_1P_1P_2V_2$ (voilà pour le paramétrage d'une solution éventuelle, ici : une position du pont).

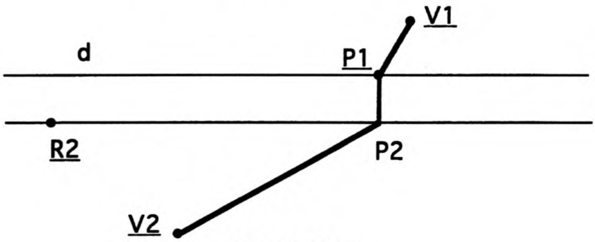


fig.Cabri : Pont1

Remarquons à nouveau l'aspect distinct des 2 étapes mentionnées ci-dessus dans la construction qui correspondent à 2 niveaux distincts de paramétrage et donc de variation.

C'est seulement une fois fixé le contexte, que l'on fait varier la position du pont pour découvrir la position optimale, mais cette position "solution" devra (autant que possible) être caractérisée en termes généraux valables pour n'importe quel choix du contexte.

On retrouve, pour la variation du contexte du problème, une quantification de type universel et, pour la variation de la position du pont, une quantification de type existentiel associée à une condition de minimisation.

C'est cette construction "naturelle" que nous avons faite devant la classe, en montrant simplement comment les diverses possibilités de variation donnent une bonne représentation de l'énoncé.

Notons la tendance quasi unanime des élèves à proposer immédiatement une "solution définitive" plutôt que d'avancer des remarques "partielles" de bon sens issues de l'observation. Nous aurions aimé par exemple qu'on remarque que la solution pour P1 est forcément dans l'intervalle des projections sur (d) de V1 et V2. En effet, dès que P1 sort de cet intervalle, il y a augmentation à la fois de V1P1 et de V2P2. Au contraire dans cet intervalle, pour un déplacement de P1, si V1P1 augmente alors V2P2 diminue et réciproquement, d'où l'incertitude à l'intérieur de cet intervalle.[2]

---

[2]en note de bas de page

1/ Une meilleure approximation

Peut-on montrer facilement et directement que la solution pour P1 est entre les 2 projections sur (d) des intersections de la droite V1V2 avec chacune des 2 berges ?

2/ Une approche différentielle

Une question judicieuse mais difficile serait de se demander autour de quel point P1, un déplacement infinitésimal de P1 provoque des variations (opposées) de V1P1 et V2P2 qui se compensent. Une étude "différentielle" pourrait ainsi conduire à la solution de l'égalité des angles d'incidence sur la berge (en remarquant que pour un déplacement infinitésimal dx de P1 sur (d), le différentiel sur V1P1 ne dépend que de l'angle de [V1P1] avec (d) et non de la longueur V1P1).

Une approche par conjecture et cas particulier

Les élèves ne doutent pas de l'existence d'une réponse générale et chacun propose "sa" solution. On peut ainsi recenser plusieurs "**conjectures**" :

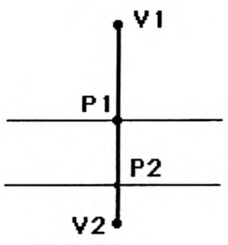
-1- pont sur l'intersection de [V1V2] et de l'axe médian de la rivière
-2- pont au milieu des projections de V1 et V2 sur leur berge
-3- pont tel que [V1P1] et [V2P2] soient parallèles
-4- pont à "hauteur" de la ville la plus proche de sa berge
-5- pont entre les projections de V1 et V2 sur leur berge, *mais "plutôt du côté de la ville la plus proche de sa berge" ... et plus précisément ...* dans un rapport de distances à ces projections égal à celui de V1 et V2 à leur berge.

A travers des déplacements provoquant la variation du contexte du problème, on peut montrer l'aspect exigeant d'une solution générale et installer un certain doute *("ma conjecture est-elle vraie pour tous les cas ? ").* La concurrence aidant, on ne tarde pas voir surgir la recherche de "**cas particuliers**" servant de **contre-exemples** pour "détruire" les conjectures "adverses".

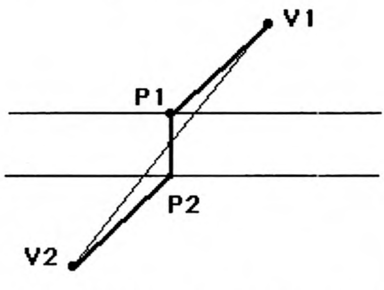
On s'attarde sur cette notion de "cas particulier". Comment la définir ici ? C'est un **contexte** particulier du problème, pour lequel la solution (la position optimale du pont) est clairement établie.

On énumère ainsi après ... discussion, **4 "cas particuliers"**, et on visualise chacun d'eux avec la solution associée :

V1 et V2 sur la même perpendiculaire à la rivière

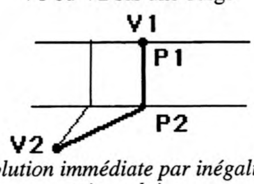


V1 et V2 à égale distance de la rivière



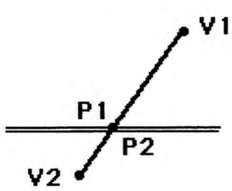
Ici la solution associée est intuitive mais demande à être démontrée.

V1 ou V2 sur une berge



Solution immédiate par inégalité triangulaire.

La rivière de largeur nulle



On passe chacune des conjectures "au crible" de ces 4 cas particuliers et seules "résistent" les conjectures numérotées ci-dessus 3 et 5, dont on peut d'ailleurs montrer qu'elles sont "équivalentes".

On pourrait à ce stade essayer de démontrer cette conjecture 3-5.

Cependant nous préférons prolonger la phase de recherche en proposant à la classe une visualisation originale du problème grâce à Cabri.

Une approche par visualisation immédiate de la fonction à minimiser

On construit, "au dessus et à la verticale" de P1, le point L tel que la longueur P1L soit la somme des longueurs V1P1 et V2P2. (Cela ne demande que des reports de longueurs très simples). Il suffit alors de tracer le lieu de L quand P1 varie sur sa berge pour voir apparaître la **courbe représentative de la fonction** que l'on souhaite minimiser.

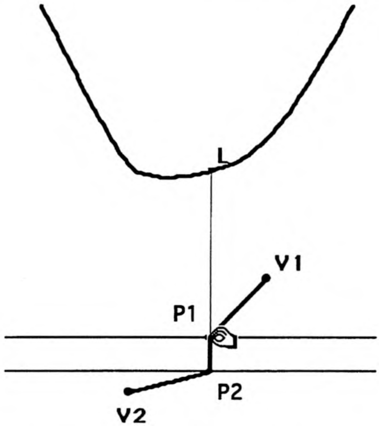


fig.Cabri : Pont1-L (Lieu)

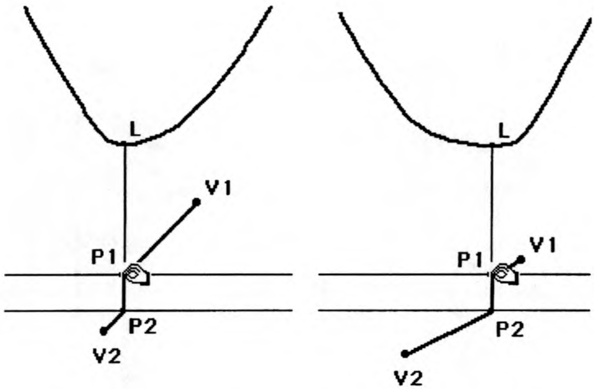
Ce type d'utilisation des lieux est aujourd'hui familier pour de nombreux utilisateurs de Cabri. Arrêtons-nous cependant un instant sur un point très remarquable dans ce type de travail.

Cette courbe, on peut l'obtenir bien sûr sans Cabri, mais beaucoup plus tard : en réalisant la formalisation analytique du problème qui donnera une expression algébrique de la fonction "longueur du chemin" que l'on pourra étudier (elle n'est pas triviale) et dont un grapheur nous donnera la courbe.

L'apport remarquable de Cabri est de fournir très simplement cette courbe à partir de sa cabri-formalisation, et surtout de juxtaposer, au même instant et sur la même figure, 2 niveaux très différents de représentation du problème :

- en bas, le niveau très "concret" du pont que l'on déplace manuellement
- en haut, le niveau habituellement considéré comme "abstrait" de la représentation graphique de la fonction.

Remarquons notamment que le tracé du lieu en mode manuel, permet de visualiser la position du pont associée au minimum sur la courbe, et ainsi de renforcer la conjecture déjà avancée (V1P1 parallèle à V2P2). D'autant que l'on pourra tracer plusieurs lieux, chacun associé à un contexte différent (du problème) caractérisé par la rivière et les 2 villes.



Cette juxtaposition et cette intégration de niveaux différents de représentation est un des apports reconnus de l'informatique, et ici en particulier de Cabri, qui aide à prendre du recul par rapport à un problème.

Cependant, il est clair que tout cela ne nous donne toujours pas une démonstration de notre conjecture.

La suite du travail effectué en classe

Dans le travail effectué en classe, nous sommes alors passés à l'attaque précise d'une démonstration de la conjecture.

Une seconde séance a ensuite été consacrée, très classiquement, à la formalisation analytique du problème, puis à l'étude de la fonction dont on a ensuite tracé la courbe avec un grapheur.

Notons que la grosse difficulté pour les élèves réside dans cette **formalisation**, avec le choix des axes, des "paramètres" (ceux qu'on note a, b, c ... associés au contexte : la rivière et les 2 villes) et de la variable (celle qu'on note x) associée à la position du pont. L'approche Cabri aura aidé en donnant du sens à ces 2 niveaux de variation (d'une part le contexte, d'autre part la position du pont pour un contexte donné) et à la courbe, déjà familière, finalement obtenue.

Remarquons enfin que l'étude du minimum de la fonction, donne une expression algébrique de la position optimale du pont en fonction des paramètres du contexte, mais n'en donne pas de caractérisation géométrique. Ainsi encore faut-il disposer de la bonne conjecture (segments [V1P1] et [V2P2] parallèles) pour pouvoir la vérifier analytiquement.

Les éléments qui suivent dans cet article n'ont pas été abordés dans l'activité en classe.

Une approche par recherche d'invariant dans la famille des solutions possibles

Dans l'esprit de la méthode utilisée pour le "carré inscrit dans le triangle", comment pourrait-on raisonner ?

On a déjà réalisé le "paramétrage d'une solution éventuelle" donnant une famille F décrite par la manipulation du point P1. La question est désormais : Comment dégager un invariant dans cette famille ? Grâce à quelle construction complémentaire ?

L'idée de "mettre bout à bout" les longueurs V1P1 et V2P2 est naturelle, mais la première idée est de le faire sous forme de segments colinéaires, et cela ne semble pas très productif.

L'idée productive, mais honnêtement pas spontanément immédiate, est de "mettre bout à bout les segments-vecteurs", c'est à dire de construire le segment [P1V'2] tel que les vecteurs $\overrightarrow{P1V'2}$ et $\overrightarrow{P2V2}$ soient égaux.

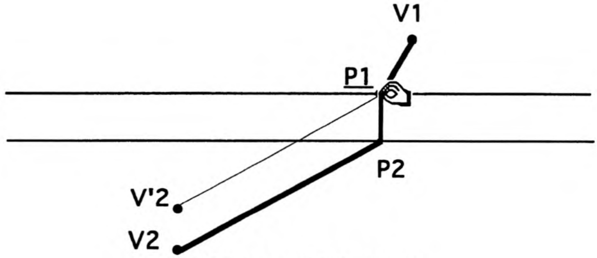


fig.Cabri : Pont1-I (Invariant)

Dans le déplacement manuel de P1, il saute alors aux yeux, que le point V'2 ainsi construit reste fixe (voilà l'invariant !) et la démonstration en est immédiate. Dès lors, il est clair que la position optimale de P1 est sur l'alignement de V1 et de V'2.

Une approche par recherche d'invariant dans la variation du contexte

A défaut d'avoir la "bonne idée" précédente, on peut envisager de faire varier non plus la position du pont, mais le contexte (la rivière et les 2 villes) pour rechercher un invariant (au second degré) portant sur la comparaison entre 2 positions du pont.

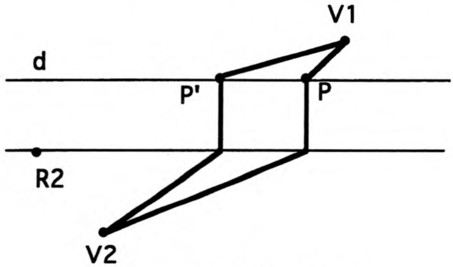


fig.Cabri : Pont1-C (Comparaison)

Sur une telle figure "comparative" entre deux positions P et P', on peut faire varier le contexte du problème, en déplaçant les points libres V1, V2 et R2, mais ces manipulations ne sont pas très productives.

Ainsi la variation de la largeur de la rivière par la manipulation du point R2 donne la "dynamique" ci-dessous assez stérile.

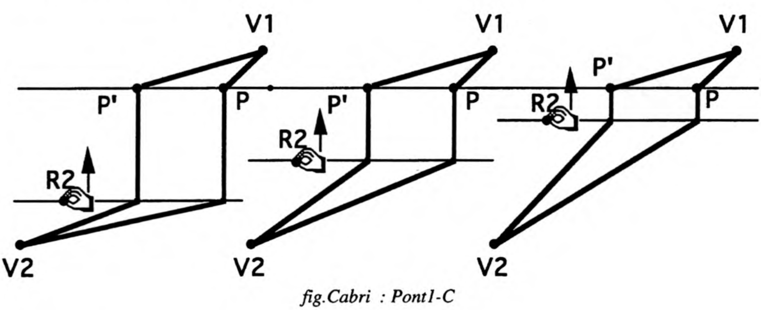


fig.Cabri : Pont1-C

On peut alors remarquer que l'on a commis une légère erreur dans la représentation du problème.

En effet, quels sont les paramètres qui déterminent le contexte du problème ? Ils sont au nombre de quatre : la distance de chaque ville à sa berge, la largeur de la rivière et l'écartement entre les projections des villes sur une même horizontale.

Ces 4 paramètres, que l'on retrouve dans la formalisation analytique du problème, sont a priori indépendants. Or, dans notre construction, ils ne le sont plus. En effet, quand on déplace R2 pour faire varier la largeur de la rivière, V2 qui est libre ne bouge pas, et ainsi la distance de V2 à la berge se trouve modifiée.

Le souci de pouvoir faire varier indépendamment les 4 paramètres du contexte du problème va donc nous amener à réaliser une autre construction pour la représentation du problème.

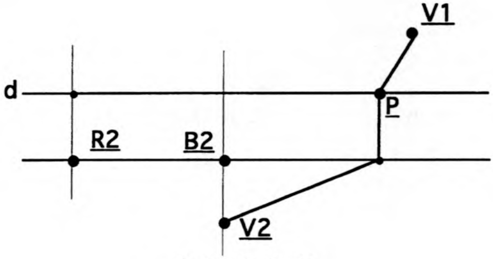


fig.Cabri : Pont2

Le point V1 est libre, ainsi que la droite (d) représentant la berge supérieure. R2 semi-libre sur une perpendiculaire à (d) permet de construire la berge inférieure. V2 n'est plus libre mais semi-libre sur une perpendiculaire à la berge inférieure, passant par un point B2, lui-même semi-libre sur cette berge. Ainsi V2 est directement déplaçable verticalement et déplaçable horizontalement par B2, mais il "suit" sa berge quand on fait varier la largeur de la rivière par R2.

Avec cette construction, moins "naturelle" que la précédente, on peut faire varier les 4 paramètres du contexte, en toute indépendance.
Et cette fois, la variation de la largeur de la rivière par la manipulation du point R2 donne la "dynamique" ci-dessous très éclairante.

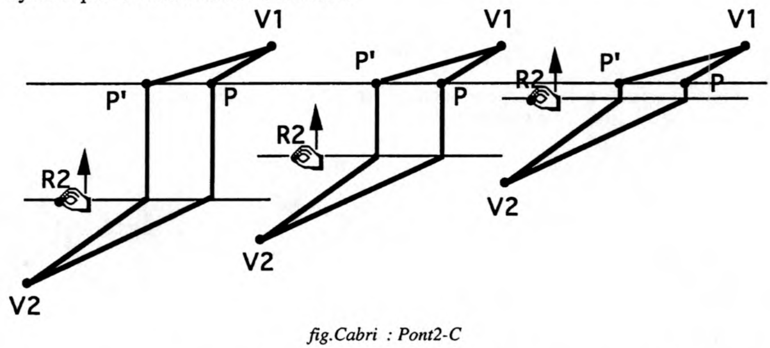


fig.Cabri : Pont2-C

On voit en effet apparaître un invariant "de comparaison" que l'on peut exprimer ainsi :
P et P' étant deux points quelconques de la berge supérieure, si, dans un contexte donné, le chemin par P est meilleur que celui par P', alors cela reste vrai après une opération de translation de l'ensemble "berge inférieure et ville V2", orthogonalement à la rivière

(c'est-à-dire en ne modifiant que la largeur de la rivière et en laissant inchangés les 3 autres paramètres).

Ainsi le résultat de la comparaison reste inchangé jusqu'au cas limite où la rivière est de "largeur nulle". Or, dans ce cas limite, la position optimale de P est évidemment dans l'alignement de V1 et V2.

D'où l'on retrouve, pour un contexte quelconque, la construction de P dans l'alignement de V1 et de l'image V'2 de V2 dans la translation "vers le haut" correspondant à la largeur de la rivière.

Un "méta-problème" intéressant est ainsi de chercher, face à un problème donné, quelle est la construction Cabri dont la manipulation permettra de mettre en évidence des invariants et une solution. Retenons sur ce point cette idée générale d'indépendance des paramètres, même si, certaines fois, ce sera au contraire leur non-indépendance qui fera apparaître un invariant.

III. EN GUISE DE CONCLUSION PROVISOIRE

Ces deux exemples montrent, parmi bien d'autres, comment CABRI permet de “pétrir" une figure représentant la donnée du problème, comme un "phénomène" que l'on observe de manière active et sur lequel on expérimente dynamiquement à travers plusieurs constructions, dans une recherche très heuristique.

Au delà de cet aspect heuristique, et sans vouloir figer la recherche dans des "recettes", on peut dégager la méthode de "paramétrage dynamique d'une solution éventuelle" et de recherche d'un invariant. Cette "méthode" n'est pas nouvelle, ni spécifique à l'utilisation de Cabri, mais le logiciel l'illustre et la soutient très bien. En effet comment représenter un paramétrage et mettre en évidence un invariant, sans un outil pour organiser la variation.

Certains diront peut-être que cette manipulation dynamique peut se faire mentalement à partir d'un simple dessin (brouillon) à la main sans CABRI. C'est vrai, heureusement, et c'est typique de l'opération fondamentale d'abstraction que réalisera spontanément le "bon élève". Mais beaucoup d'élèves ne le feront pas "spontanément" et notre pari (qui reste à démontrer) c'est justement qu'un travail régulier avec Cabri doit aider à se créer de "bonnes images mentales" et à développer ce mécanisme d'abstraction.


Franck Bellemain
découvrant la surface de Schwarz
pendant
ses
vacances
en Chine !
Archives LSD2

8. Apprendre à voir et manier l'objet géométrique au delà du tracé dans Cabri-géomètre

Colette LABORDE
DidaTech - LSD2 IMAG-CNRS, Université Joseph Fourier

La didactique des mathématiques a consacré une partie importante de ses travaux à l'étude des situations problème dans lesquelles l'apprenant doit construire des outils de solution (présentant un caractère de nouveauté pour lui) pour résoudre le problème qui lui est posé. La théorisation proposée par Brousseau (1986) décrit ces situations comme celles d'une interaction entre un milieu et l'apprenant. En termes de système, si le système didactique est celui construit autour du triangle enseignant, savoir, apprenants, le milieu est au sein de ce système, le sous-système antagoniste de l'apprenant. C'est par des actions sur le milieu, par l'interprétation de rétroactions du milieu susceptibles de fournir des éléments de validation de sa solution (Margolinas 1993, chap.1 & 2), dans la répétition d'essais de résolution d'un même problème, que l'apprenant élabore des adaptations nouvelles à la situation qui lui pose problème. Ces adaptations peuvent être la source de connaissances nouvelles. Une hypothèse importante en didactique postule que le milieu doit être organisé pour permettre de telles adaptations de l'apprenant.

Les EIAO (environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur) peuvent servir à la constitution de milieux organisés pour l'apprentissage et être analysés de ce point de vue. En effet, ils offrent particulièrement cette possibilité de confrontation longue et répétée à une situation problème et cette dualité d'actions et de retours du dispositif aux productions des élèves, comme le confirme un grand nombre d'observations d'élèves travaillant sur ordinateur (Gras 1987, Artigue 1991, Bellemain et Capponi 1992). Les spécificités des EIAO tiennent en particulier à ce que :
- un EIAO contient des connaissances (mathématiques en l'occurrence) ;
- ces connaissances en raison de contraintes de représentations en machine et à l'interface peuvent avoir un fonctionnement particulier, différent en certains aspects de celui des connaissances de référence.

La première spécificité entraîne en particulier que :
- des actions conceptuellement complexes peuvent être rendues directement possibles à l'utilisateur du dispositif ;
- la machine est susceptible d'offrir des rétroactions fondées sur des connaissances
- la machine a un comportement en partie autonome de l'apprenant.

L'objectif de cet article est d'analyser les spécificités d'un EIAO et leur rôle sur la conception et le fonctionnement de situations adidactiques. L'exemple choisi est le logiciel Cabri-géomètre en tant que constituant d'un milieu organisé pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Cet apprentissage est en effet un point clé de l'apprentissage de la géométrie au collège, comme nous chercherons à le montrer au paragraphe I. Nous présenterons ensuite le logiciel (§II) et le reste de l'article sera consacré à l'étude du milieu adidactique susceptible d'être organisé autour du logiciel et au caractère adidactique de situations mettant en jeu les rapports entre dessin et objet géométrique (§III et IV).

I. LES RAPPORTS ENTRE DESSIN ET OBJET GÉOMÉTRIQUE

La géométrie enseignée traite d'objets théoriques mais met aussi en jeu des représentations graphiques dont le rôle dans l'apprentissage de la géométrie n'est plus à souligner.

A. - La figure en tant que rapport entre dessin et objet géométrique

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fishbein (1993) appelle *figural concept*

Les rapports entre dessin et objet géométrique peuvent être grossièrement caractérisés par le fait que des propriétés de l'objet géométrique se traduisent graphiquement par des relations spatiales. Par exemple, une trait rectiligne qui touche un tracé circulaire peut être interprété dans une théorie géométrique comme une droite tangente à un cercle.
Il importe cependant de souligner la complexité des rapports entre dessin et objet géométrique; en effet le passage du dessin à l'objet géométrique est l'objet d'une interprétation par un sujet humain. Il s'ensuit que :
(i) d'une part, un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprété par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique,
(ii) d'autre part les interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique sont multiples pour deux raisons : la première tient à ce que les interprétations dépendent du lecteur et de ses connaissances ainsi que du contexte, la deuxième tient à la nature même du dessin ; à lui seul il ne peut caractériser un objet géométrique.
Précisons ces affirmations qui servent de points de départ à notre cadre théorique.

Un dessin renvoie aux objets théoriques de la géométrie dans la mesure où celui qui le lit décide de le faire, l'interprétation est évidemment dépendante de la théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur. Le contexte joue un rôle fondamental dans le choix du type d'interprétation. La figure 1 peut ainsi être interprétée comme le dessin d'une pomme à laquelle reste attaché un bout de tige. Dans un contexte de mathématiques, un mathématicien y reconnaîtra sans nul doute un cercle.
Mais il sera plus réticent pour le faire pour le dessin de droite (Fig.2) alors que l'ensemble des marques d'encre sur le papier du dessin de droite est probablement une meilleure approximation aux moindres carrés d'un cercle.

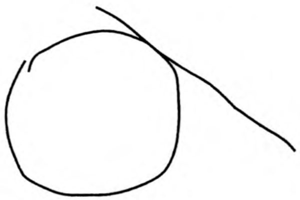


Fig. 1

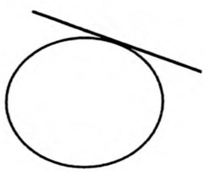


Fig. 2

Ce comportement trouve une explication si l'on prend en compte le choix du type d'interprétation du lecteur. Le mathématicien dans son contexte de travail considère ces dessins dans une interprétation totalement géométrique et parce que dans cette interprétation les dessins doivent renvoyer à des objets établis de la théorie, tenant compte du tracé à main levée, il cherchera à voir un cercle dans le premier, tandis qu'il hésitera entre une ellipse et un cercle dans le second, compte tenu de l'exactitude apparente du tracé.

Un dessin même géométrique peut être interprété de multiples façons et en particulier la perception intervient dans la construction d'une interprétation lorsque le lecteur ne dispose pas de fortes connaissances théoriques géométriques qui lui permettent de dépasser la première lecture perceptive. On a pu ainsi montrer que les aspects perceptifs (Duval, 1988, Mesquita, 1989, Padilla, 1990) du dessin peuvent gêner ou au contraire favoriser la lecture géométrique par des élèves de collège, en attirant l'attention sur des éléments du dessin non pertinents pour cette lecture. La configuration de Thalès n'est ainsi pas reconnue avec le même degré de facilité par des élèves de troisième dans les deux dessins ci-dessous (Fig. 3) (Cordier & Cordier, 1991).

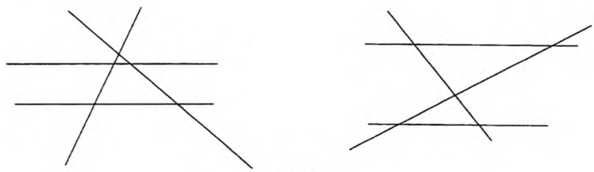


Fig.3

Des dessins prototypiques d'objets géométriques (Noirfalise, 1991) se sont constitués au fil du temps, résultant d'influences à la fois perceptives et culturelles (au sens large et scolaire). Certains sont bien connus (carré/losange), d'autres moins comme celui du parallélogramme : le dessin prototypique d'un parallélogramme est, du moins en France, celui où la diagonale AC est perpendiculaire au côté AD (Fig.4) ; nous avons justement débusqué ce cas de typicalité en utilisant Cabri-géomètre.

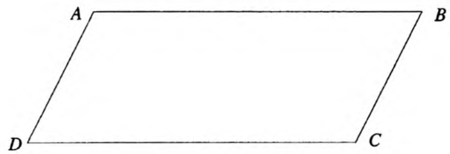


Fig.4

En tant que signifiant, d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un *domaine de fonctionnement* au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin). Ainsi un dessin ne rend-il pas compte du domaine de variation des éléments de l'objet géométrique. A partir d'un dessin, il est impossible d'inférer si un point d'un segment appartient au seul segment ou à la droite support du segment, si deux cercles sécants le sont par hypothèse ou peuvent être dans une position relative quelconque. Une *description discursive caractérisant l'objet géométrique est nécessaire* pour lever les ambiguïtés inhérentes au dessin (Duval 1988, Parzysz 1988).
Inversement toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet, au dessin est attaché un *domaine d'interprétation.* La position du dessin dans la feuille de papier par exemple est en dehors du domaine d'interprétation des dessins en tant que signifiants d'objets de la géométrie euclidienne. Certains des problèmes rencontrés par des élèves tiennent justement à ce qu'ils fonctionnent avec un domaine d'interprétation différent de celui de la géométrie euclidienne.

B. - Les rapports entre dessin et objet géométrique dans l'enseignement de la géométrie

L'enseignement de la géométrie ignore les rapports entre objet géométrique et dessin en passant sous silence la distinction entre les deux, ou en faisant comme si un lien naturel les unissait. Nous voudrions reprendre la thèse défendue par Berthelot et Salin (1992) et le cadre théorique afférent développé à propos des rapports entre connaissances spatiales et connaissances géométriques : l'écrasement des connaissances spatiales au profit des connaissances géométriques aboutit à ce que la géométrie enseignée s'appuie sans contrôle sur un rapport privilégié à l'espace réservé au traitement de petits objets ou de tracés tenant sur une feuille de papier, sur l'évidence perceptive : "on voit bien que..." (Bessot, 1993).

Nous interprétons l'ignorance par l'enseignement des rapports entre dessin et objet géométrique en liaison avec cet écrasement : l'enseignement néglige la possibilité d'une lecture spatiale du dessin et ne considère que la seule lecture géométrique du dessin, il méconnaît l'existence du domaine d'interprétation d'un dessin : l'évidence perceptive y est naturellement et immédiatement interprétée en termes géométriques. Il faut dire que le langage facilite cette confusion spatial géométrique, souvent le même terme désigne la propriété spatiale et celle géométrique qui lui est attachée. De par cette indifférenciation, l'enseignement méconnaît la spécificité des rapports entre dessin et géométrique et ne les prend pas pour objet d'apprentissage.

On pourrait décrire brièvement ces rapports en disant que d'une part la géométrie peut être considérée comme le résultat d'une modélisation du dessin, et qu'ainsi elle peut servir d'instrument de production et de contrôle du dessin, ou même de prédiction. Mais inversement, le dessin en géométrie peut être considéré comme modèle de l'objet géométrique (Laborde, 1992), en cela il offre un lieu d'expérimentation graphique (Chevallard, 1990). Parce que l'enseignement ignore les rapports entre dessin et objet géométrique, ce caractère d'expérimentation n'est pour ainsi dire pas perçu par les élèves et encore moins utilisé (ajouter à un dessin des éléments non mentionnés par l'énoncé ou l'enseignant ne relève pas de décisions prises spontanément par les élèves mais nécessite un apprentissage). En tant que modèle de la géométrie, le dessin se prête à des expérimentations rendant compte de questions posées à la théorie, traduites ensuite dans le dessin dont la réponse dans le dessin ne donne pas une réponse dans la théorie mais fournit des suppositions, des pistes pour le travail théorique. On peut ainsi tracer un grand nombre de triangles et remarquer l'inclination au concours de ses hauteurs.

Ces rapports sont subtils et cela signifie que pour que les élèves en prennent conscience, il faudrait développer dans l'enseignement des situations problème
- portant sur les dessins dans lesquelles la géométrie est un outil efficace de modélisation et de solution, par exemple dans lesquelles elle permet de produire de dessins satisfaisant à des contraintes données, de façon moins coûteuse que le tâtonnement contrôlé par la perception et elle garantit la correction du résultat : par exemple, la géométrie assure du caractère tangent d'une droite à un cercle lorsque celle ci est perpendiculaire au rayon.
- des situations en géométrie, où le recours et l'expérimentation sur le dessin évitent de se fourvoyer dans des solutions théoriques trop longues.

C'est dans cet esprit qu'ont été développés depuis quelques années des environnements informatisés offrant un système de représentation d'objets géométriques par des dessins à l'écran de l'ordinateur qui peuvent être produits par l'intermédiaire de commandes données dans un langage géométrique. Ces objets à l'écran présentent un domaine de fonctionnement plus étendu que les dessins en papier crayon et permettent de disqualifier certaines interprétations illicites. Cabri-géomètre est l'un d'eux. Il est présenté dans le paragraphe suivant.

II. CARACTÉRISTIQUES DE L'ENVIRONNEMENT CABRI-GÉOMÈTRE

Deux caractéristiques importantes de cet environnement informatique (pour une description de l'environnement cf. Bellemain & Capponi 1992 et Laborde & Straesser 1990) résident dans la coexistence de *primitives de dessin pur* et de *primitives géométriques* et dans la manipulation directe du dessin. Si l'on déplace à l'aide de la souris un des éléments de base du dessin, celui-ci se déforme en respectant les propriétés géométriques qui ont servi à son tracé et celles qui en découlent ; par suite si un dessin a été réalisé à l'aide de primitives de dessin pur c'est-à-dire au jugé, il perd ses propriétés spatiales apparentes dans son état original lors du déplacement d'un de ses éléments. La figure 5 présente un parallélogramme obtenu par le tracé de 4 segments posés au jugé sur l'écran (les sommets sont des points de base) à l'état original à gauche, puis après déplacement de A à droite.

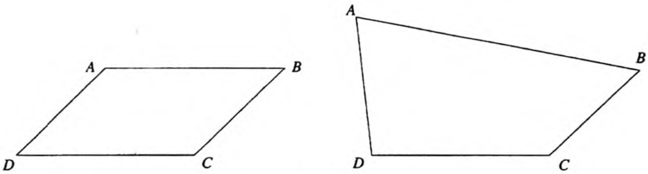


Fig. 5

Le tracé à l'écran d'un dessin attaché à un objet géométrique doit garder au cours du déplacement ses propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques de cet objet, il nécessite donc d'être produit par les primitives géométriques (telles milieu, médiatrice, droite parallèle, droite perpendiculaire etc.). L'exigence de communiquer au logiciel un procédé géométrique de construction permet ainsi de caractériser l'objet géométrique (on retrouve la nécessité que nous avons mentionnée plus haut de la description discursive de l'objet géométrique pour sa caractérisation).

Dans le tracé à l'écran du dessin d'un objet géométrique, c'est donc l'interaction entre les deux caractéristiques du logiciel qui entraîne le recours aux primitives géométriques, comme l'indique le schéma ci-dessous (Fig.6). Le logiciel a été conçu avec l'idée que ce passage par des primitives géométriques devrait favoriser l'usage de connaissances géométriques.

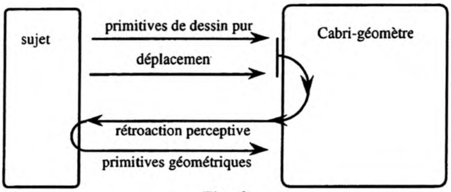


Fig. 6

L'environnement répond donc à l'intention d'offrir un système de signifiants ayant un plus grand domaine de fonctionnement par rapport à la géométrie et rendant plus apparentes les limites du domaine d'interprétation. Parce que le déplacement du dessin est contrôlé par une théorie géométrique (*grosso modo* celle de la géométrie euclidienne), l'environnement rend compte en particulier de la variabilité des éléments de l'objet géométrique et de leur domaine de variation (extension du domaine de fonctionnement) et permet de disqualifier des interprétations non pertinentes (mise en évidence des limites du domaine d'interprétation) ; en effet les propriétés attribuées à l'objet parce que lues sur un dessin statique le représentant ont de fortes chances de n'être apparemment plus vérifiées lors de la déformation du dessin.

Le champ d'expérimentation offert par le dessin dans le dessin papier crayon est limité pour des raisons matérielles (imprécision du tracé, impossibilité de rendre temporairement invisible une partie du dessin, limitation du nombre d'éléments à gérer). L'environnement Cabri-géomètre, non seulement par ses fonctionnalités d'éditeur graphique mais aussi par les connaissances géométriques qu'il intègre, élargit le champ d'expérimentation possible. Les actions possibles autant que les retours tout en étant étendus sont de nature différente puisque fondés sur des connaissances géométriques. Le type de représentation graphique fourni par l'environnement diffère donc du dessin papier crayon. Pour marquer cette différence, dans la suite on appellera *Cabri-dessin* une représentation graphique sur l'écran de Cabri-géomètre.

On peut s'attendre à de nouvelles possibilités d'organisation pour des situations adidactiques et à des modifications de conduites des élèves.

III. Les rétroactions de l'environnement informatique

Le déplacement par manipulation directe est une des composantes importantes de Cabri-géomètre offrant une rétroaction aux actions de l'élève.

A. - L'importance du caractère extérieur des rétroactions

C'est parce que le déplacement est fondé sur des connaissances de géométrie, qu'il permet une rétroaction extérieure plus riche sur une même production du sujet. Prenons l'exemple d'un élève ayant à résoudre une tâche que nous décrirons en termes classiques comme une tâche de construction d'une figure satisfaisant à des conditions données (dans nos termes, ce serait une tâche de tracé d'un dessin d'un objet géométrique donné issu d'un procédé contrôlé par des connaissances géométriques). Dans un contexte papier crayon l'élève peut tourner sa feuille de papier et voir le dessin dans différentes positions mais il ne peut faire varier les éléments variables qu'en traçant à nouveau un dessin, c'est-à-dire en engageant une nouvelle action fondée sur des connaissances.
Il n' y a pas alors rétroaction extérieure sur la *même* production du sujet qui peut très bien changer de façon implicite, voire inconsciente, son procédé de tracé dans la production de nouvelles occurrences du dessin. Le recours au déplacement contient en lui-même l'usage de connaissances ; l'avantage est que ces rétroactions sont issues d'un dispositif externe au sujet et indépendant de l'enseignant : elles sont ainsi susceptibles de faire évoluer le sujet.

B. - L'interprétation des rétroactions

La richesse des rétroactions dues au déplacement permet des interprétations à différents niveaux par le sujet utilisateur du logiciel. Citons ci-dessous les niveaux que nous distinguons *a priori* dans une tâche de construction d'un Cabri-dessin satisfaisant à des conditions données, dans un ordre qui correspond à un contrôle croissant par les connaissances géométriques du sujet :

- par le déplacement on place le Cabri-dessin dans une position particulière (prototypique par exemple) qui permet de reconnaître si l'apparence du dessin recherchée a été obtenue ; à ce niveau l'interprétation relève essentiellement de la perception
- on s'assure que le Cabri-dessin reste solidaire dans le déplacement
  Remarquons que l'interprétation d'une absence de liaison entre constituants d'un Cabri-dessin peut elle-même être interprétée à deux niveaux différents :
    - comme une absence de liaison de type physique ou mécanique au niveau du Cabri-dessin, l'interrogation du sujet ne porte pas sur l'objet géométrique mais sur le Cabri-dessin, la rectification se fera certes par l'usage de primitives géométriques du logiciel mais pour satisfaire une finalité liée à l'apparence du Cabri-dessin ;
    - comme une absence de relation géométrique entre éléments de l'objet géométrique représenté par le Cabri-dessin ; la rectification se fera aussi par l'usage de primitives géométriques mais pour satisfaire à une finalité géométrique.
- on cherche à analyser géométriquent la trajectoire de certains éléments du Cabri-dessin dans le déplacement ;
    - pour valider ou invalider la construction par rapport à la satisfaction des conditions demandées ;
    - ou pour chercher les erreurs dans les cas où la production serait reconnue comme invalide.

C. - Utilisation en interaction des possibilités d'action et de rétroaction

Comme dans toute situation, les rétroactions du milieu peuvent être sollicitées par le sujet qui décide de se livrer à certaines actions dont la sanction par le milieu fournira des éléments d'information sur sa production. Il s'agit en quelque sorte d'une *expérimentation dans le modèle* fourni par l'environnement informatique.

L'environnement Cabri-géomètre permet ce genre d'expérimentation par la conjugaison de l'usage des primitives géométriques et du déplacement : pour vérifier ainsi que deux

droites sont perpendiculaires, on trace la perpendiculaire à l'une des droites et l'on vérifie que dans le déplacement elle reste confondue avec l'autre droite.
Le sujet peut même se livrer à une expérimentation fondée sur un calcul inférentiel : il montre l'équivalence de la propriété P à vérifier et d'une autre propriété P' qu'il peut vérifier par le procédé présenté ci-dessus. Par exemple, pour vérifier qu'il a bien construit un losange, il peut tracer la médiatrice d'une diagonale et vérifier la coïncidence de cette médiatrice avec l'autre diagonale au cours du déplacement.
Dans une analyse d'un Cabri-dessin donné ayant pour finalité de repérer les dépendances géométriques entre propriétés de l'objet géométrique, un autre type d'expérimentation possible consiste à supprimer des relations géométriques entre éléments et à vérifier si les relations qu'on supposait dépendantes ne sont plus satisfaites.

D. - La répétition

Margolinas a mis en évidence l'importance de la répétition du problème dans les travaux d'ingéniérie, qui jusqu'alors n'avait pas été prise en compte au plan théorique (*op. cit,* p.117). Elle montre bien qu'il ne s'agit nullement d'une conséquence d'une option behavioriste dans laquelle la répétition de la confrontation à des stimuli permettrait un apprentissage par renforcement mais bien d'une conséquence d'une option constructiviste : la répétition de la confrontation au même problème permet à l'élève de construire un sens au problème (processus de dévolution), le "rend de plus en plus conscient de ce qui le pousse à agir". La répétition est intéressante quand les rétroactions ne sont pas simplement en juste ou faux mais sont de nature riche. C'est justement ce que tendait à montrer l'analyse des deux paragraphes précédents. Dans l'usage régulier de Cabri-géomètre sur un long terme dans des classes de 4ème et de 3ème d'un des auteurs (B. Capponi), on a pu constater lors de résolution de problèmes une absence de renoncement de la part des élèves, presque toujours un engagement important fait de la succession de nombreuses tentatives de solutions, et - certes un peu moins souvent - une évolution des solutions.

IV. UN NOUVEL APPRENTISSAGE ?

Les situations adidactiques en géométrie visent à ce que :
- les stratégies de solution fondées sur des connaissances géométriques apparaissent comme plus efficaces que des stratégies empiriques ou fondées sur la perception. "La géométrie résulte d'une ruse, d'un détour dont la route indirecte permet d'accéder à ce qui dépasse une pratique immédiate" (Serres 1993, p.196).
- ces stratégies ne soient pas la réponse à des attentes externes au problème que l'élève croit deviner par exemple chez l'enseignant ou l'auteur du problème.

Notre attention se porte ici sur les situations qui donnent sens à la notion de figure géométrique; ces situations mettent donc en jeu un dessin qui peut être interprété comme représentant un objet géométrique à l'aide d'une analyse géométrique. Pour que cette interprétation ait lieu, il faut qu'elle soit sollicitée par le problème à résoudre, c'est-à-dire que la résolution du problème conduise à un traitement géométrique. Nous cherchons dans le paragraphe suivant à déterminer les modifications apportées par Cabri-géomètre dans les caractéristiques des situations : quels nouveaux types de démarches un environnement comme Cabri-géomètre est-il susceptible de favoriser chez les élèves ? Quel nouveau type de situations adidactiques est il rendu possible?

A. - Quels problèmes dans l'environnement Cabri-géomètre ?

On peut distinguer deux types de problèmes suivant la production demandée aux élèves :
- des problèmes de production de Cabri-dessins,
- des problèmes de preuve.

Dans le premier type de problèmes, la production demandée est, comme on l'a vu, de nature nouvelle : il ne s'agit pas de fournir un tracé mais un dessin à l'écran gardant certaines propriétés spatiales imposées lors du déplacement d'un des points de base du dessin. La tâche consiste donc pour l'élève à élaborer un procédé de production du Cabri-dessin fondé sur les primitives géométriques disponibles.
Outre le caractère nouveau de la production demandée, le déplacement introduit de plus des nouveaux types de problème:

- production de Cabri-dessins ayant un comportement contraint au niveau de leur déplacement
- la recherche de la généricité du procédé de construction
- la reproduction d'un Cabri-dessin donné à l'écran que l'on peut explorer grâce au déplacement.

Un Cabri-dessin est un dessin dynamique; outre l'invariance de propriétés spatiales, on peut imposer des contraintes spécifiques de mouvement. Par exemple, on peut demander de produire un triangle équilatéral tournant autour de son centre. Cela revient à imposer les points fixes, les points mobiles du Cabri-dessin, et certaines trajectoires. On joue ici sur la nature nouvelle du Cabri-dessin, c'est un dessin dont les éléments décrivent des trajectoires, ces trajectoires étant soit réduites à un point du plan, un sous-ensemble de points du plan, ou le plan tout entier. La géométrie devient dans ce problème un outil de modélisation des relations spatiales du dessin au cours du mouvement. Ce type de situation requiert donc une analyse en termes géométriques.

Certains procédés de construction dépendent des positions respectives de certains éléments de base et sont profondément modifiés si ces positions changent. Que l'on pense par exemple au procédé d'obtention d'une tangente à un cercle de centre O passant par un point P donné; le procédé habituel diffère suivant que le point est sur le cercle ou à l'extérieur : dans le premier cas, on trace la perpendiculaire au rayon, dans le deuxième un cercle de diamètre PO. Si l'on déplace P, la tangente obtenue reste tangente au cercle jusqu'à disparaître lorsque P est amené sur le cercle. La production de Cabri-dessins conduit donc à un nouveau type de problèmes celui de la généricité d'un procédé de construction.

Dans la reproduction de dessins en papier crayon, les connaissances géométriques sont susceptibles d'être un outil efficace mais l'on sait aussi que le tracé empirique contrôlé simplement par la perception peut fournir un tracé visuellement satisfaisant. La reproduction de Cabri-dessins disqualifie le tracé empirique contrôlé par la visualisation. Elle exige de plus la reconnaissance d'invariants géométriques de ce Cabri-dessin lors du déplacement, ou à proprement parler elle nécessite que l'on reconnaisse des propriétés géométriques à l'aide des invariants spatiaux du dessin dans le déplacement. Ce type de problème met donc particulièrement l'accent sur la correspondance entre visualisation d'invariants spatiaux et leur description géométrique. Nous appelons *boîte noire* ces situations problèmes dans laquelle les élèves ont à reproduire un Cabri-dessin donné à l'écran de façon à obtenir un Cabri-dessin ayant un comportement identique lors du déplacement (pour la validation d'une telle production, cf. § IV.3). De telles activités peuvent être utilisées dans l'apprentissage des transformations géométriques.

La preuve est susceptible de prendre un autre statut dans Cabri-géomètre en ce qu'elle permet d'expliquer des phénomènes visuels ou même l'impossibilité de phénomènes visuels. Ainsi des élèves de 5ème (Bergue 1992) se sont demandés si un triangle pouvait avoir deux angles obtus. La précision du logiciel et le déplacement continu assure aux yeux des élèves de l'impossibilité d'obtenir un tel triangle. Ils sont alors en mesure de s'approprier la question de l'explication d'une telle impossibilité. Il y a dévolution (Brousseau 1986) du problème de la preuve mathématique de l'inexistence de tels triangles. La preuve prend de ce fait un autre statut, celui d'expliquer des propriétés spatiales en contradiction avec les attentes des élèves. Une autre source de problèmes menant à une preuve consiste à demander de trouver les conditions auxquelles doit satisfaire un objet géométrique pour obtenir à l'écran un cas particulier résistant au déplacement. Par exemple, A, B C étant trois points fixes, à quelles conditions sur D les médiatrices du quadrilatère ABCD se coupent-elles en un même point ? (Fig.7). Les élèves ont la possibilité d'obtenir manuellement la trace du point D en essayant de satisfaire visuellement aux contraintes d'intersection des 4 médiatrices. Ils obtiennent ce qu'un de nos collègues J.F. Bonnet appelle un *lieu mou.* A nouveau, la démonstration apparaît comme un moyen de s'assurer de la nature de ce lieu mou.

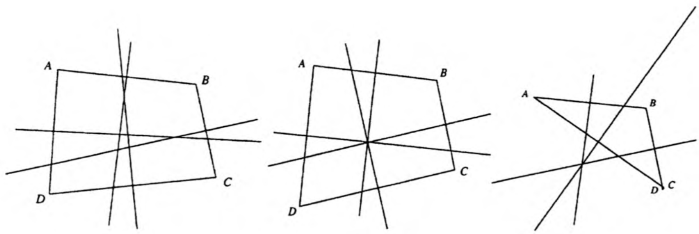


Fig. 7

B. Discussion du caractère adidactique de situations de production de Cabri-dessins

Le caractère adidactique de production de Cabri-dessin peut paraître plus facile à satisfaire pour deux raisons

-il s'agit de faire faire et non de faire un dessin ; les élèves doivent communiquer un procédé de tracé au dispositif et non faire le tracé eux mêmes. Le dispositif oblige à la distinction entre tracé et procédé de tracé. D'autre part l'enseignant est absent du processus de communication au dispositif.

- un Cabri-dessin est par définition un dessin qui garde au cours du déplacement les propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques attachées à l'objet géométrique qu'il représente ; les procédés de tracé au jugé sont disqualifiés par le dispositif même. Le logiciel par le déplacement offre une invalidation des tracés au jugé et les élèves sont conduits à effectivement utiliser des primitives géométriques pour obtenir le tracé à l'écran d'un Cabri-dessin d'un objet géométrique.

Mais est-il possible à partir de cette constatation de faire deux hypothèses supplémentaires selon lesquelles

(i) demander aux élèves de produire un Cabri-dessin en fixant l'ensemble de primitives géométriques disponibles n'ouvrirait pas la possibilité à une recherche des attentes de l'enseignant et par là favoriserait la recherche par les élèves de procédés s'appuyant sur des connaissances géométriques ?

(ii) le recours à des primitives géométriques s'appuierait nécessairement sur un traitement géométrique ?

Evidemment non !

Nous voudrions nuancer ces hypothèses qui fournissent un tableau trop contrasté des rapports entre élèves et machine.

D'une part, des phénomènes de contrat sont susceptibles de se produire, ainsi certaines primitives géométriques peuvent apparaître aux yeux des élèves comme d'utilisation plus souhaitée que d'autres par l'enseignant.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que les stratégies empiriques des élèves sont renforcées par le fait que les commandes de construction sont en nombre restreint : il leur est loisible de chercher à construire le Cabri-dessin demandé par l'essai successif de diverses combinaisons de menus, et cela d'autant plus que le nombre de primitives géométriques est réduit. Ce n'est pas l'usage de connaissances géométriques qui contrôle le processus de tracé mais la recherche d'une suite de menus conduisant à un Cabri-dessin qui sera validé par le déplacement. La conception de situations adidactiques de construction géométrique avec Cabri-géomètre doit prendre en compte l'accentuation de cette dimension empirique, en choisissant des tracés à réaliser pour lesquels de telles stratégies sont coûteuses et ne conduisent pas au succès.

On a pu de plus constater qu'un jeu s'établit entre une activité perceptive favorisée par le déplacement, une stratégie combinatoire et l'usage de connaissances de géométrie dans les situations où les élèves ont à produire un Cabri-dessin à partir d'une caractérisation discursive. Les élèves abordent le problème par des combinaisons systématiques de menus sur les objets existants mais il peut arriver qu'ils découvrent lors du déplacement un des invariants géométriques demandés mais reliant d'autres objets que ceux souhaités. Ils se placent alors dans une problématique géométrique en cherchant à réobtenir cet invariant entre les objets souhaités et à cette fin, ils analysent géométriquement ce qu'ils ont fait de façon empirique : la géométrie devient un moyen qui leur permet de contrôler la reproduction d'un invariant obtenu de façon aléatoire.

C. - Validation de la production d'un Cabri-dessin

L'environnement offre aussi une validation pragmatique d'un Cabri-dessin satisfaisant à des conditions données. Il suffit pour cela que l'enseignant crée une macro-construction d'arguments les objets donnés du problème et réalisant la construction donnée. Par exemple dans le problème du tracé d'un carré de côté donné [AB], l'élève voulant vérifier sa production appelle une macro-construction préenregistrée de la construction d'un carré de côté donné, l'applique à [AB] et peut vérifier si sa production reste en coïncidence avec le carré solution lors du déplacement de A ou de B. La superposition de deux dessins identiques du papier crayon est remplacée ici par la superposition lors du déplacement de deux Cabri-dessins, superposition qui assure très probablement de l'identité des objets géométriques associées. Cette possibilité de validation s'est avérée relancer les élèves dans l'activité lorsque leurs productions ne satisfont pas aux conditions demandées.

V. CONCLUSION

La reconnaissance visuelle est donc susceptible de jouer un rôle important dans l'environnement Cabri-géomètre. Or la reconnaissance visuelle de propriétés spatiales associées aux propriétés géométriques n'est pas spontanée et doit être l'objet d'un apprentissage. L'association entre visuel et géométrique prend difficilement du sens dans l'environnement papier crayon qui écrase la distinction entre visuel et géométrique (étroitesse du domaine de fonctionnement et absence de limites apparentes du domaine d'interprétation). Comme il a été dit, l'environnement Cabri-géomètre a été conçu pour permettre la distinction entre visuel et géométrique. L'observation des élèves montre que de plus le géométrique peut apparaître dans Cabri-géomètre comme *un moyen de reproduire du visuel ou de l'expliquer* (explication du comportement d'un Cabri-dessin). Le géométrique ne serait pas seulement construit dans cet environnement pour pallier les limites du visuel mais aussi en lien avec le visuel ; le géométrique est un *outil de modélisation du visuel*. C'est une dimension qui nous paraît intéressante dans la mesure où la géométrie trouve son origine dans le contrôle des phénomènes spatiaux.

Entre d'une part l'écrasement entre visuel et géométrique et d'autre part la rupture entre ces aspects, une voie différente nous semble possible dans laquelle l'apprentissage de la géométrie dans ses débuts consisterait en *l'apprentissage du contrôle des rapports entre visuel et géométrique*. L'environnement Cabri-géomètre offre des possibilités d'organisation d'un milieu pour l'apprentissage de ce contrôle pour trois raisons :
- les phénomènes visuels prennent de l'importance de par la dimension dynamique du Cabri-dessin ;
- ces phénomènes sont contrôlés par la théorie puisqu'ils sont le résultat d'une modélisation graphique d'un modèle analytique de propriétés géométriques ;
- les possibilités sans fin de situations géométriques qui peuvent être visualisées avec un grand nombre d'objets et de façon précise.

Références

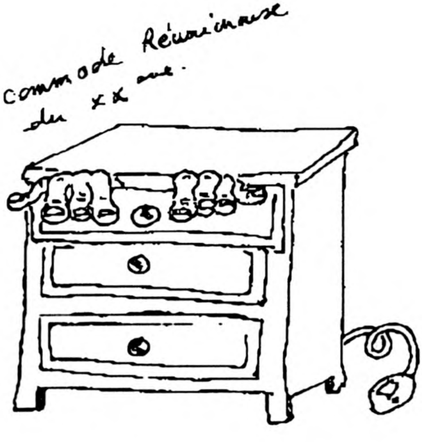
ARTIGUE M. (1991) Analyse de processus en environnement informatique *Petit x,* n° 26, 5-27
BELLEMAIN F., CAPPONI B. (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur, *Educational Studies in Mathematics* 23. 1, 59-97
BERGUE D. (1992) Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème, *Petit x*, IREM de Grenoble, n°29, pp.5-13
BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université Bordeaux 1

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7. 2, 33-115
BESSOT A. (1993) Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace, *Publications du CIRADE*, Montréal, Canada : Université du Québec à Montréal
CAPPONI B. (1993) Modifications de menus dans Cabri-géomètre : des symétries comme outils de construction, *Petit x*, 33, 37-68
CHEVALLARD Y. (1990) Autour de l'enseignement de la géométrie, *Petit x*, 27, 41-76
CORDIER F. & CORDIER J. (1991) L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 11, n°1, 45-64
DUVAL R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives* , Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg, Vol 1, 57-74
FISHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.24, n°2, 139-162
FISHER (1978) Visual Influences of figure orientation on concept formation in geometry, In : *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, (pp. 307-21), Colombus, Ohio : ERIC Center for Sciences, Mathematics and Education, The Ohio State University
GRAS R. (1987) Une situation de construction géométrique avec assistance logicielle, *Recherches en didactique des mathématiques,* 8.3, 195-230
LABORDE C. (1992) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, Conférence plénière au *7 ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7*, Québec, Canada, août 1992
LABORDE J.M., STRÄSSER R.(1990) Cabri-Géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralbalt für Didactik der Mathematik.* 90/5, 171-90.
MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions, 256p.
MARIOTTI A. (1991) Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems, *Proceedings of PME XV*, Furinghetti F. (ed.), (Vol. II, pp.389-396), Assisi, Italie
MESQUITA A.L. (1989) *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves: éléments pour une typologie,* Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg
NOIRFALISE R. (1991)Figures prégnantes en géométrie ? *Repères - IREM,* n°2, 51-58
PADILLA V. (1990) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ULP, IREM de Strasbourg, Vol.3, 223-252
PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19.1, 79-92
SERRES M. (1993) *Les origines de la géométrie*, Paris : Flammarion


attention Cabri
peut être une drogue
Dangereuse....

Partie II

Connaissance plus approfondie du logiciel : des aspects techniques à la géométrie sous-jacente.




Cabri c'est plus fort que toi!!

9. De d'Alembert à Cabri-Géomètre : le constructeur universel d'équations.

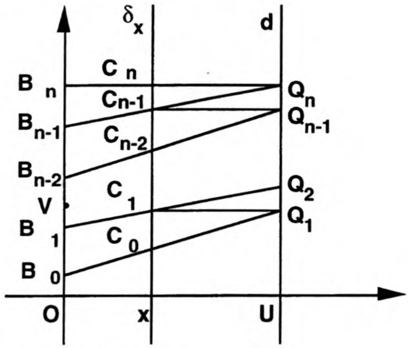
Michel CARRAL et Roger CUPPENS
IREM, IUFM et Université Paul Sabatier, Toulouse.

I. INTRODUCTION.

Dans un précédent article [1], R. Cuppens étudie les fondements informatiques et géométriques du logiciel Cabri-Géomètre. En particulier, il affirme que les "constructions avec glissement", utilisant les possibilités offertes par le logiciel pour modifier une figure tout en conservant les relations imposées au départ aux objets de la figure, permettent de simuler n'importe quel système articulé.

Pour illustrer ceci, nous présentons ici l'exemple du "constructeur universel d'équations", système présenté par d'Alembert dans l'Encyclopédie de Diderot et permettant a priori de trouver graphiquement les racines d'un polynôme situées dans l'intervalle [0,1]. Nous rappelons brièvement le principe de ce constructeur[3] :

Étant donné un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, on considère un repère orthogonal (O,U,V) et les points $B_0, B_1, \dots, B_n$ de l'axe OV d'ordonnées respectives a_0, $a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Notons d (resp. δ_x) la verticale d'abscisse 1 (resp. x, où x est un nombre réel compris entre 0 et 1).



La parallèle à l'axe OU passant par B_n coupe δ_x et d aux points C_n et Q_n respectivement ; la droite $B_{n-1} Q_n$ coupe δ_x en C_{n-1} et la parallèle à l'axe OU passant par C_{n-1} coupe d en Q_{n-1} ; la droite $B_{n-2}Q_{n-1}$ coupe δ_x en C_{n-2}, et ainsi de suite... La mesure algébrique $\overline{xC_0}$ est égale[4] à P(x).

[3] On trouvera dans l'Annexe 1 une reproduction de l'article de d'Alembert.
[4] Nous donnons une démonstration de ce résultat dans les deux paragraphes qui suivent.

A l'époque, l'intérêt de ce système n'était que théorique. Il fut néanmoins réalisé (cf. la planche reproduite en Annexe), mais, en raison des frottements, le système ne fonctionnait correctement que pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La simulation dans Cabri-Géomètre de ce constructeur lève cet obstacle et permet en outre de considérer des valeurs de x extérieures à l'intervalle [0,1]. On pourra utiliser le constructeur de deux manières différentes :

- en déplaçant l'un des points de base, on pourra "voir fonctionner" le constructeur ;
- en utilisant la possibilité de tracer des lieux géométriques, on obtiendra un traceur de polynômes et même (en ajoutant un dispositif supplémentaire) de fractions rationnelles assez précis.

II. THÉORIE ALGÉBRIQUE DU CONSTRUCTEUR.

Dans ce paragraphe, nous montrons que les idées de d'Alembert se ramènent à une variante intéressante du schéma de Hörner. Rappelons que le schéma de Hörner qui permet de calculer les valeurs d'un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

repose sur le résultat suivant :

La suite $(c_k(x))$ définie par les relations

$$c_n(x) = a_n \qquad (1)$$

$$c_k(x) = x\, c_{k+1}(x) + a_k \qquad (2)$$

vérifie

$$c_k(x) = \sum_{j=k}^{n} a_j x^{j-k} \qquad (3)$$

pour k = 0, …, n.

Démonstration. Si

$$c_{k+1}(x) = \sum_{j=k+1}^{n} a_j x^{j-k-1},$$

de (2), on obtient

$$c_k(x) = x \sum_{j=k+1}^{n} a_k x^{j-k-1} + a_k = \sum_{j=k}^{n} a_j x^{j-k}.$$

Puisque (1) nous donne (3) pour k = n, on obtient par récurrence le résultat.

Remarques.

1. Pour n = 0, on obtient $c_0(x) = P(x)$. On peut donc calculer les valeurs d'un polynôme en effectuant seulement n multiplications et n additions : l'algorithme fourni par le schéma de Hörner est de complexité minimale.

2. Ce résultat reste vrai si on remplace les constantes a_k par des fonctions de x.

Ce schéma qui est le plus simple pour le calcul algébrique, ne donne pas une construction géométrique simple. Pour en obtenir une, nous le modifierons de la manière suivante :

En posant $b_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$, on obtient $a_0 = b_0$ et $a_k = b_k - b_{k-1}$ (k = 1, …, n), ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1})\, x^k \\
&= b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k - \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}\, x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, x^{k+1} \\
&= b_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, (1 - x)\, x^k.
\end{aligned}
$$

Le schéma de Hörner appliqué à cette représentation donne :

La suite $(c_k(x))$ définie par les relations

$$c_n(x) = b_n, \tag{4}$$

et

$$c_k(x) = x\, c_{k+1}(x) + (1\text{-}x)\, b_k \tag{5}$$

pour $k = 0, \ldots, n\text{-}1$ est telle que $c_0(x) = P(x)$.

III. THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DU CONSTRUCTEUR.

Nous supposons le plan rapporté à un repère orthogonal (O,U,V) et notons d la verticale d'abscisse 1, c'est à dire la parallèle à OV passant par U.

Soient

- n un entier naturel,
- x un nombre réel,
- $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels,
- $b_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$ $(k = 0, \ldots, n)$,
- $c_k(x)$ la suite définie à partir des b_k par les relations (4) et (5),
- B_k le point de l'axe OV d'ordonnée b_k pour $k = 0, \ldots, n$,
- C_k le point d'abscisse x et d'ordonnée $c_k(x)$ pour $k = 0, \ldots, n$,
- P_k (resp. Q_k) la projection de C_k sur OV (resp. d) pour $k = 0, \ldots, n$.

Du paragraphe précédent, on déduit que C_0 est le point d'abscisse x et d'ordonnée

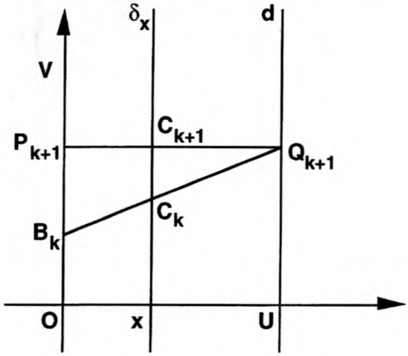
$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, c'est à dire le "point courant" de la représentation graphique du polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

La relation (4) nous dit que C_n est la projection de B_n sur la droite verticale d'abscisse x et (5) peut se récrire sous la forme

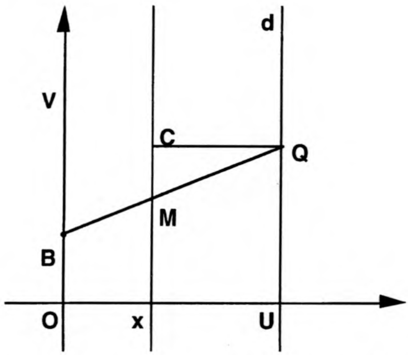
$c_k(x) - c_{k+1}(x) = (1 - x)\,(b_k - c_{k+1}(x))$,
c'est à dire
$\overline{C_{k+1}C_k} = (1 - x)\ \overline{P_{k+1}B_k}$.

Du théorème de Thalès, on déduit que les points Q_{k+1}, C_k et B_k sont alignés : pour $k = 0,\ldots, n-1$, C_k est le point d'abscisse x de la droite joignant B_k à la projection Q_{k+1} de C_{k+1} sur la droite d.



En notant P la projection sur la verticale d'abscisse x et A la fonction qui, à deux points B et C du plan, associe le point d'intersection[5] M de la parallèle en C à OV avec la droite joignant le point B à la projection Q de C sur d, on obtient que les points C_k sont définis par

$$\begin{cases} C_n = \mathrm{P}(B_n), \\ C_k = \mathrm{A}(B_k, C_{k+1}) \qquad (k = 0,\ldots, n-1). \end{cases}$$



Remarques. 1. La construction reste valable dans le cas où X se trouve en dehors du segment OU.
2. On peut donner la définition récursive suivante du constructeur : si on note C la fonction qui au (n+1)-uplet $(B_0,\ldots B_n)$ associe le point C_0, C est définie par :

$\mathrm{C}((B_0,\ldots, B_n))$ = si $n = 0$ alors $\mathrm{P}(B_0)$
sinon $\mathrm{A}(B_0, \mathrm{C}(B_1,\ldots,B_n))$.

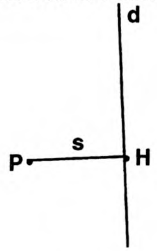
---

[5] Ce point est parfaitement défini dès que B n'appartient pas à la droite d.

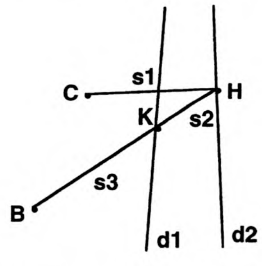
IV. RÉALISATION DE CE CONSTRUCTEUR.

Pour obtenir avec Cabri-Géomètre ce constructeur de polynômes, on utilisera deux macro-constructions de base : proj et alemb.

La première correspond à la fonction P du paragraphe précédent. Elle a pour objets initiaux un point P et une droite d et pour objet final le segment[6] PH, H étant la projection de P sur d, c'est à dire le point d'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par P.



La deuxième devrait correspondre à la fonction A. Néanmoins, puisqu'il est commode qu'une macro-construction ait des objets initiaux indépendants et qu'un même objet ne soit pas construit plusieurs fois, nous la généraliserons un peu. La macro-construction alemb aura pour objets initiaux deux points C et B et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux trois segments s1, s2 et s3 : s1 est le segment CH obtenu en appliquant la macro-construction précédente à C et à d2 tandis que s2 et s3 sont les segments HK et KB, K étant le point d'intersection de d1 avec la droite BH[7].



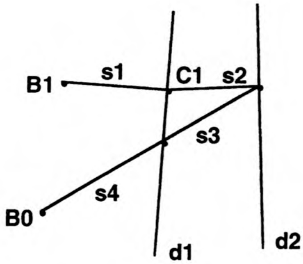
Comme une macro-construction de Cabri-Géomètre ne peut dépendre ni d'un nombre entier, ni d'un nombre variable d'objets initiaux, on construit ensuite une suite de macro-constructions, construc-1, construc-2, ..., de la manière suivante :

- construc-1 est une macro-construction ayant pour objets initiaux deux points B0, B1 et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux quatre segments s1, s2, s3 et s4 : s1 est le segment B1C1 obtenu en appliquant proj à B1 et d1 tandis que les trois autres s'obtiennent en appliquant alemb à C1, B0, d1 et d2;

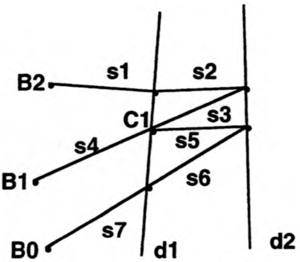
---

[6] Dans tout ce paragraphe, on prend comme objectif de visualiser à l'écran le fonctionnement du constructeur. Si on veut seulement tracer des représentations graphiques, il suffit de remplacer comme objets finaux dans les macro-constructions les segments par un point unique.

[7] Le fait d'utiliser les deux segments HK et KB au lieu du seul segment HB permet de traiter le cas où X est en dehors du segment OU.



- construc-2 est une macro-construction ayant pour objets initiaux trois points B0, B1 et B2 et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux sept segments s1, ..., s7 : les quatre premiers s'obtiennent en appliquant construc-1 à B1, B2, d1 et d2 tandis que les trois autres s'obtiennent en appliquant alemb à C1, B0, d1 et d2 où C1 est l'une des extrémités du segment s4, l'autre étant B1 ...



Remarque. Les limites du logiciel ne permettent pas d'aller au delà de construc-6.

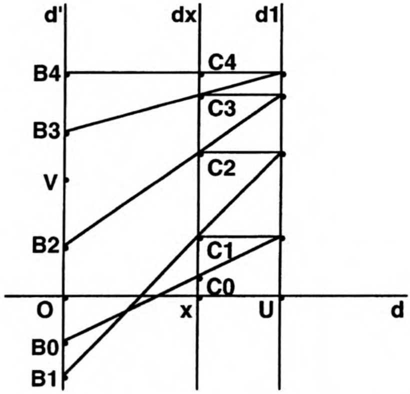
Pour obtenir la représentation graphique d'un polynôme $a_0 + \ldots + a_n X^n$ dans un système orthogonal, mais pas nécessairement orthonormé, les unités pouvant être modifiées à tout moment, on trace
- une droite d,
- des points O et U sur d,
- la perpendiculaire d' en O à d et V un point de d' :

d et d' seront les axes, OU étant l'unité des abscisses et OV l'unité des ordonnées[8].

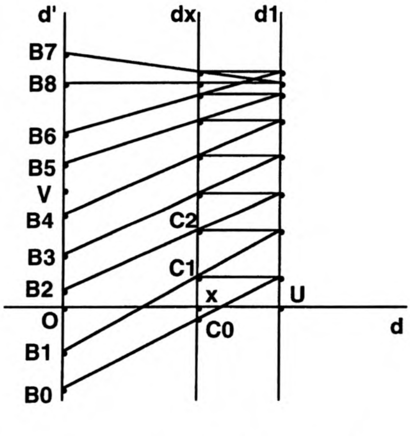
On trace alors
- un point x sur la droite d,
- les perpendiculaires dx et d1 à d en x et U
- sur d' les points $B_0, \ldots, B_n$ dont les ordonnées sont $b_0 = a_0, \ldots, b_n = a_0 + \ldots + a_n$.

Enfin, si $n \leq 6$, on applique construc-n à $B_0, \ldots, B_n$, dx et d1.

[8] On constate que les unités sur les deux axes peuvent être différentes. Il peut être intéressant de graduer les droites d et d'.



Si n > 6, puisqu'on ne peut pas définir construc-n, on reviendra à la définition : on applique construc-6 à B_{n-6}, ..., B_n, dx et d1, ce qui donne le point C_{n-6}, puis on applique alemb à C_{n-6}, B_{n-7}, dx et d1, ce qui donne le point C_{n-7}, etc.

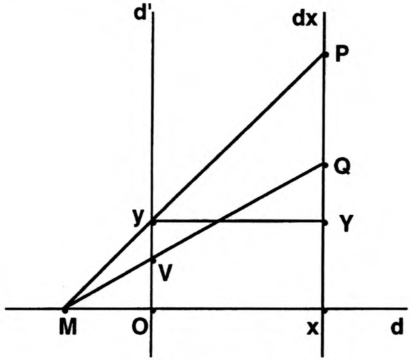


En déplaçant le point X, on voit le fonctionnement du constructeur tandis qu'en traçant le lieu de C0 quand X varie, on obtient la représentation graphique du polynôme : des exemples de telles représentations sont fournis dans l'annexe 2.

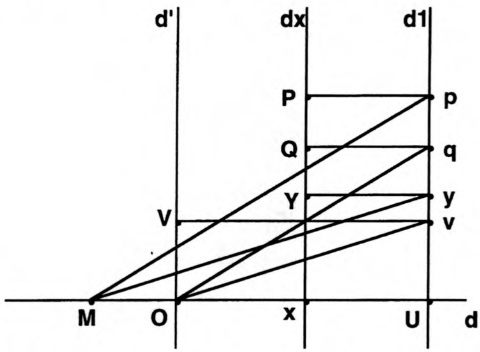
V. Un constructeur de fractions rationnelles.

Pour obtenir la représentation graphique d'une fraction rationnelle, on applique le constructeur au numérateur et au dénominateur. Si P et Q sont les deux points de la droite dx tels que $\overline{XP}$ et $\overline{XQ}$ soient les valeurs du numérateur et du dénominateur, on cherche le point Y de dx tel que $\frac{\overline{XY}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}}$.

La construction la plus simple serait la suivante : on trace la droite VQ qui coupe OX en M, puis la droite PM qui coupe OV en y; le point Y est alors le point d'intersection de la droite XP avec la parallèle à OX passant par y.



Néanmoins, on constate que cette construction ne donne rien lorsque $\overline{XQ} = \overline{OV} = 1$. Pour obtenir une construction valable également dans ce cas, nous utiliserons la méthode suivante : déterminer la projection p (resp. q, v) de P (resp. Q, V) sur d1, trouver l'intersection M de la parallèle en p au segment Oq avec d, puis l'intersection y de d1 avec la parallèle en M à Ov. Le point Y est alors la projection de y sur dx.



On trouvera dans l'annexe 3 des exemples de courbes représentatives obtenues avec ce constructeur.

VI. Représentation des fonctions rationnelles sur un seul axe.

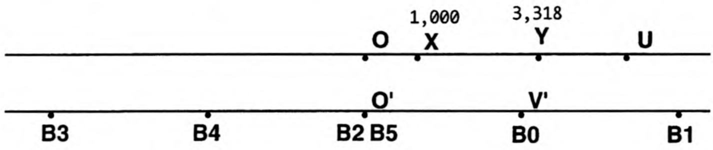
Dans [2], G.V suggère de représenter avec Cabri-Géomètre des fonctions en utilisant un seul axe de coordonnées, ce qui est possible en déplaçant le point représentant l'abscisse avec la souris. Un des reproches que l'on peut faire à ce qui est présenté dans cet article est d'imposer automatiquement la même unité pour les points X et Y, ce qui peut nuire à la précision des études.

L'utilisation de notre système permet de lever cette critique : pour obtenir une telle représentation, il suffit de prendre le symétrique du point Y par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{UOV}$. Pour la clarté de la figure, il peut être intéressant d'utiliser un deuxième axe parallèle au premier et gradué où on déterminera l'unité des ordonnées et où l'on placera les coefficients des polynômes ou des fractions rationnelles.

En utilisant l'outil Mesurer, on peut déterminer ici avec une grande précision la valeur d'une fonction rationnelle en un point, les racines ou les extréma de cette fonction. Par exemple, pour le polynôme

$P(X) = X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1$

dont on trouvera une représentation graphique dans l'annexe 2, on voit qu'il y a un maximum entre 0 et 1/2. La représentation linéaire fournit pour le maximum :



Avec l'outil Mesurer, on peut préciser et on obtient pour cette position :
Abscisse(O)= 0,000 000 000 000 000 000
Abscisse(U)= 5,000 000 000 000 000 000
Abscisse(O')= 0,000 000 000 000 000 000
Abscisse(V')= 3,000 000 000 000 000 000
Abscisse(X)= 1,000 000 000 000 000 000
Abscisse(Y)= 3,317 759 999 999 999 999

(on peut évidemment arrondir cette dernière valeur à 3,317 76) et pour des positions voisines

Abscisse(X)= 0,964 285 714 285 714 286
Abscisse(Y)= 3,317 320 073 871 749 866

et

Abscisse(X)= 1,035 714 285 714 285 714
Abscisse(Y)= 3,317 318 324 712 173 499

On a donc pour le maximum x = 0,2 et y = 3,317 76/3 = 1,105 92. Le calcul donne

$P'(X) = 5X^4 + 4X^3 - 6X^2 - 4X + 1 = (X + 1)^2 (X - 1)(5X - 1)$

qui a bien pour racine X = 1/5 = 0,2 et on a alors

$$P\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1 + 5 - 50 - 250 + 625 + 3125}{5^5} = \frac{3456}{5^5} = \frac{3456 \mu 32}{10^5} = 1{,}105\ 92.$$

En utilisant les mêmes idées, mais deux axes de coordonnées (O, U, V) et un axe "des temps" (Ot, Ut), on peut construire les courbes paramétrées d'équation x = f(t), y = g(t) où f et g sont des fractions rationnelles. On trouvera dans l'annexe 4 la représentation obtenue pour la courbe $x = t - t^2$, $y = t^3$.

VII. Conclusion.

Il est évident que tout ce que nous venons de présenter se fait plus facilement avec un grapheur ou un système de calcul formel. Il semble néanmoins intéressant de montrer que la séparation entre analyse et géométrie n'est pas un mur étanche : certains problèmes de géométrie se ramènent à une étude de fonction et, comme nous le montrons ici sur un exemple, certains problèmes d'analyse peuvent se résoudre géométriquement. En outre, les outils mathématiques utilisés sont élémentaires : théorème de Thalès pour la géométrie, manipulations algébriques sur les polynômes (ou suites récurrentes, mais elles ne sont pas indispensables) pour l'analyse. Ceci peut donc se faire dès la classe de seconde.

On peut remarquer plus précisément que l'on construit des représentations graphiques de fonctions comme des lieux géométriques. Ceci peut sembler surprenant dans notre enseignement où les lieux géométriques sont des droites, des cercles ou, à la rigueur, des coniques[9]. Mais cet obstacle culturel n'est pas un obstacle conceptuel : on constate que les lieux géométriques "constructibles", tout comme les représentations graphiques des fonctions "constructibles", peuvent être vus comme des ensembles de points vérifiant certaine(s) équation(s).

En d'autres termes, ce que trace le constructeur universel de d'Alembert, et plus généralement tout mobile articulé, peut être considéré comme le graphe d'une fonction ou le lieu géométrique d'un point : c'est le point de vue de l'utilisateur qui décidera.

Terminons en faisant remarquer combien les courbes fournies par le constructeur[10] sont différentes de celles qu'un enseignant tracerait au tableau après une étude de fonction : comme les figures de la géométrie élémentaire, les graphes des fonctions sont munis d'un statut, statut implicite dans notre enseignement et trop peu souvent explicité.

Références

[1] Roger CUPPENS. Quelques réflexions sur le logiciel Cabri-Géomètre (à paraître)

[2] G. V. Une idée ... bizarre ! Représenter des fonctions sur un seul axe. Cabriole n° 2 (novembre 1992) p. 3.

---

[9] Daniel Lacombe rappelle qu'il fut un temps où sévissait dans les classes préparatoires à Saint Cyr "l'axiome de Saint Cyr" s'énonçant "Tous les lieux géométriques sont des droites ou des cercles" et dont la "preuve" irréfutable était "Ce sont les seuls lieux géométriques au programme du concours".

[10] On trouvera dans l'Annexe 5 la représentation de la même courbe fournie par le constructeur et celle que l'on trouve dans un vieux manuel scolaire.

Annexe 1

Le texte de d'Alembert

on prendra d'abord 15 degrés pour chaque heure, on prendra le quart des minutes de temps, on en ſera des degrés ; le quart des ſecondes, on en ſera des minutes ; le quart des tierces de temps, l'on en ſera des ſecondes de degrés.

Ces regles aiſées à retenir & à pratiquer, ſe peuvent faire ſans le ſecours des tables ; cependant on trouvera des tables propres à faire ces converſions de temps en parties de l'*équateur*, & des parties de l'*équateur* en temps, dans la *connoiſſance des temps*, &c. L'opération ſe réduit à multiplier par 15 le temps qu'on veut réduire en parties du cercle, ou à diviſer par 15 les parties de l'*équateur* qu'il s'agit de convertir en temps.

La converſion du temps en parties de l'*équateur* eſt différente de la converſion en temps ſolaire moyen dans laquelle on prend 360° 59′ 8″ pour vingt-quatre heures, ou 15° 2′ 27″ $\frac{3}{10}$ pour chaque heure; c'eſt le nombre des parties de l'*équateur* qui paſſe par le méridien pendant la durée des heures ſolaires, marquées par une pendule du moyen mouvement ; quand cette pendule a fini ſes vingt-quatre heures, il a paſſé, non ſeulement 360ᵈ de l'*équateur*, mais encore les 59′ 8″ que le ſoleil a parcourues en ſens contraire, & qui doivent paſſer par le méridien pour que le ſoleil y arrive. (M. DE LALANDE.)

ÉQUATION. *Conſtruction & uſage d'une machine pour trouver les racines de quelque équation que ce puiſſe être.* (*Algebre. Machines.*) M. Paſcal s'eſt fait une réputation dans le monde pour avoir inventé ſa machine arithmétique. Celle dont je vais donner la deſcription n'eſt pas moins ingénieuſe ; & on peut l'appliquer à toutes les *équations* de quelque degré qu'elles ſoient. Avant que d'en donner la conſtruction, il convient d'expoſer en peu de mots la théorie ſur laquelle elle eſt fondée : elle ſuppoſe, dans ceux qui liront cet article, quelque connoiſſance de l'Algebre.

Soit l'*équation* à réſoudre $a + bx + cxx + dxx$, &c. $= 0$.

Tirez ſur la ligne ZZ priſe pour baſe dans la *fig.* 1 ou 2 de la *pl. I. d'Algebre, des planches, ſupplément*, les perpendiculaires SS & RR, éloignées l'une de l'autre de telle diſtance qu'il vous plaira. Prenez enſuite ſur la ligne SS de l'une ou de l'autre figure les parties OA, AB, BC, CD, &c. proportionnelles aux coefficiens a, b, c, d, &c. de l'*équation*, obſervant de prendre chacune de ces lignes de bas en haut, à compter de l'extrémité de la derniere lorſque le coefficient qu'elle doit repréſenter eſt poſitif, & dans un ſens contraire lorſqu'il eſt négatif. Cela fait, tirez par l'extrémité de la derniere des lignes OA, AB, BC, &c. ſavoir, par D, la ligne DC, parallele à la baſe ZZ, & par le point C, où DC coupe RR, cC, & parallélement à SS, & à telle diſtance qu'il vous plaira MM ; par le point où Cc coupe MM, la ligne kb parallele à DC ; par le point b, où la derniere coupe RR, la ligne bB ; par le point où celle-ci coupe MM, la parallele à DC, & enfin par le point a, où bB coupe MM, la, & par le point a, où la coupe RR, la ligne aA. Suppoſons maintenant que les lignes SS, RR, Cc, repréſentent trois regles avec des rainures telles qu'on le voit *figure* 3, que vous fixerez dans leurs places reſpectives SS, RR & Cc ſur un plan ou chaſſis de grandeur ſuffiſante.

Soient Bb, Aa, d'autres regles de même forme, qui ſe meuvent ſur les centres B, A, &c. leſquels ſe meuvent eux-mêmes en haut & en bas le long de la regle SS, mais de maniere qu'on puiſſe placer les centres B & A l'un ſur l'autre, ou ſur C, ſi l'occaſion le requiert, & les arrêter avec des écroues ; ſavoir, le centre A en A, le centre B en B, &c. Soient kb & la, d'autres regles mobiles, comme les premieres, & diſpoſées de façon qu'elles ſe meuvent toujours parallélement les unes aux autres, & à la ligne Dc & MM, une autre regle de pareille forme. On aſſemblera les regles Kb & MM avec la regle fixe Cc au moyen d'une pointe coulante qui paſſe par le point a, où leurs rainures ſe coupent. On aſſemblera de même les regles Kb, Bb, la & Aa enſemble, & avec MM & RR, avec de pareilles pointes qui les traverſent dans les points b, r, a & s. La derniere de ces pointes doit être faite de maniere à pouvoir porter un crayon. Je dis maintenant que ſi l'on avance ou recule la regle MM de SS, en ſorte qu'elle lui soit toujours parallele, le crayon s décrira la courbe qu'on demande; que les distances à compter du point O où le crayon coupera la base ZZ, à droite de SS, marqueront les racines positives de l'*équation*; celles qui seront à gauche, les racines négatives; & les endroits où il approchera de la base sans la toucher, les racines impossibles ou imaginaires. Ces distances doivent être prises sur une échelle, sur laquelle la ligne DC sera prise pour l'unité.

Démonstration. Puisque les lignes OA, AB, BC, &c. sont proportionnelles aux coefficiens a, b, c, &c. Supposons que la premiere OA soit égale au premier coefficient a, ou à telle de ces parties qu'on voudra, n, par exemple, seroit $\frac{a}{n}$; alors pour conserver la proportion ci-dessus, la suivante AB sera égale à $\frac{b}{n}$, Bc à $\frac{c}{n}$ & cD à $\frac{d}{n}$, &c. Si l'on nomme OQ ou son égale DPx, pour lors Dc étant prise égale à l'unité, Pc sera égale à $1-x$; & comme Dc est égale à $\frac{d}{n}$, on aura, à cause des triangles semblables, DCc & Pqc, cette proportion $1 : 1-x :: \frac{d}{n} : \frac{d-dx}{n} =$ Pq ou DK: mais $KB = BC + CD - DK$, c'est-à-dire, à $\frac{c}{n} + \frac{d}{n} - \frac{d-dx}{n}$; savoir à $\frac{c+dx}{n}$. Les mêmes triangles semblables donnent $Kb : qb :: KB : qr$, c'est-à-dire, $1 : 1-x :: \frac{c+dx}{n} : \frac{c+dx-cx-dxx}{n} = qr$ ou Kl: mais $Al = AD - DK - Kl$, ou $\frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d-dx}{n} - \frac{c+dx-cx-dxx}{n}$ ou à $\frac{b+cx+dxx}{n}$. Les mêmes triangles donnent encore $la : ra :: Al : rs$, ou $1 : 1-x :: \frac{b+cx+dxx}{n} : \frac{b+cx+dxx-bx-cxx-dxxx}{n} = rs$. Or, Qs, qui par la figure est égale à $QP - Pq - qr - rs = \frac{a+b+c+d-d-dx}{n} - \frac{c+dx-cx-dxx}{n} - \frac{b+cx+dxx-bx-cxx-dxxx}{n}$ savoir à $\frac{a+bx+cxx+dxxx}{n}$; & par conséquent, lorsque $Qs = 0$, c'est-à-dire, lorsque la courbe décrite par S coupe la base, $\frac{a+bx+cxx+dx^3}{n} = 0$, ou à $\frac{a+bx+cxx+dxxx}{n}$, qui par l'*équation* même est égale à o. Qs, dans ces circonstances, sera donc aussi égale à $a + bx + cxx + dxxx$, & par conséquent toute valeur de x ou de OQ, qui rend $a + bx + cxx + dxxx = 0$, rend pareillement Qs égale à zéro. Or, toute valeur de x qui rend $a + bx + cxx + dxxx = 0$, est une racine de l'*équation* proposée $a + bx + cxx + dxxx = 0$, dont la courbe coupera la base ZZ pour chaque racine réelle de cette *équation*, soit positive ou négative, & ne la touchera point lorsqu'elle sera imaginaire, comme le savent ceux qui connoissent les propriétés des courbes. C. Q. F. D.

Cette démonstration est applicable à toute autre *équation* que l'on voudra.

Nota. Pour avoir les racines négatives, on placera les regles à gauche de SS *figure 2*, où elles sont marquées par les mêmes lettres que dans la premiere figure. Par exemple, on posera la regle Cc de c ou q, la regle Bb de b ou r, la regle aA de n ou s, vers la gauche, en sorte que les centres A, B, des deux dernieres se trouvent sur la ligne fixe SS.

Il n'est pas nécessaire que la courbe soit décrite avec exactitude, ni même qu'elle tombe sur le plan, excepté lorsqu'elle coupe la base, & par conséquent on ne risque rien à faire les lignes OA, AB, &c. fort longues. Mais les regles fixes OD & Tc, doivent être si près l'une de l'autre, que leur distance Dc ou OT, étant prise pour l'unité, la base OT qui s'étend à droite jusqu'à l'extrémité du plan, puisse contenir toutes les racines positives, & à gauche toutes les négatives.

Il y a encore une chose à observer: c'est que si l'on a une *équation* comme celle-ci $xxx - Sxx + 1200x + 9000 = 0$, dont les coefficiens S, 1200 & 9000 sont différens l'un de l'autre, qu'il seroit difficile de les prendre sur la ligne OD, on peut les réduire de la maniere suivante: c'est de mettre dans l'*équation* à la place de chaque x, $10x$, $20x$, ou $100x$. Je suppose qu'on mette $20x$; pour lors, au lieu de xxx, on aura $8000xxx$, au lieu de $Sxx - 2000xx$, &c., & l'*équation*

Ggggg 2

sera changée en celle-ci $8000\,xxx - 2000\,xxx + 24000\,x + 9000 = 0$. Divisant chaque terme par 100, on aura cette autre $8\,xxx - 2\,xx + 24\,x + 9 = 0$, dont la réduction sera plus aisée. Mais on se souviendra pour lors, que faisant x 20 fois plus petit qu'il n'est, les racines que vous trouverez seront pareillement vingt fois plus petites, & qu'il faudra par conséquent les multiplier par 20 pour qu'elles aient leur juste valeur.

Voici quelques observations sur l'application de ces regles, qui peuvent avoir leur utilité.

1°. Les racines d'une *équation* peuvent être de trois sortes, positives, négatives & impossibles ou imaginaires.

2°. Toute *équation* contient autant de racines qu'elle a de degrés.

3°. Les racines imaginaires sont toujours au nombre de deux.

Par exemple, si une *équation* a une racine imaginaire comme celle-ci $a = b\sqrt{-1}$, elle en aura une autre; savoir, $a - b\sqrt{1}$, qui la suit toujours. Il suit de là que toute *équation* qui a des racines imaginaires, en contient 2, 4, 6, &c.; c'est-à-dire, qu'elles sont toujours en nombre pair. Toutes les fois que la courbe, que les regles décrivent, approche de la base sans la couper, c'est une marque qu'il y a deux racines impossibles; de sorte que si elle en approche trois fois, l'*équation* contient six racines imaginaires. C'est tout ce que ces regles peuvent faire par rapport à ces sortes de racines; elles marquent leur nombre, & non leur nature. J'enseignerai plus bas le moyen de connoitre celle-ci. Puis donc que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair, & que leur nombre est égal aux degrés de l'*équation*, il s'ensuit:

4°. Que toute *équation* dont le nombre des degrés est impair, doit contenir au moins une racine réelle.

5°. Que toute *équation* dont le premier & le dernier termes après avoir été transposés, ont des signes contraires, contient au moins une racine réelle. Lorsque cela arrive, & que le nombre de ses dimensions est pair, de même que celui des racines impossibles, celui des racines réelle doit l'être pareillement.

6°. Que si l'on divise une *équation* par l'inconnue, moins une de ses racines, on la réduira à une dimension plus bas; comme toute *équation* contient autant de racines qu'elle a de degrés, il s'ensuit encore:

7°. Que retranchant le nombre des racines imaginaires de celui de ses racines, je veux dire, du nombre de ses dimensions, le restant sera celui des racines réelles.

8°. Après avoir trouvé, par le moyen des regles, les racines réelles, faites la quantité inconnue x égale à chacune: transposez les termes d'un côté: multipliez les *équations* les unes par les autres, & divisez l'*équation* proposée par le produit qui en résultera. Faites le quotient égal à zéro, & vous aurez une *équation* qui renfermera toutes les racines impossibles, sans en avoir aucune de réelle. On trouvera ensuite les racines impossibles par la méthode qu'enseigne M. de Bougainville, dans son *traité du calcul intégral*, dans les cinquieme & sixieme chapitres de son introduction. C'est la meilleure que je connoisse.

Elle consiste à partager l'*équation* donnée en deux autres du même nombre de dimensions, mais qui ne contiennent que des racines réelles que vous trouverez par le moyen des regles, ou autrement, au moyen de quoi vous aurez toutes les racines impossibles de votre *équation*.

Comme peu de gens connoissent cette méthode, il convient de la donner ici.

L'auteur commence par donner la démonstration des deux propositions suivantes.

Prop. 1. Lorsqu'une quantité est égale à zéro, & composée de plusieurs termes, dont quelques-uns sont réels, & les autres multipliés par $\sqrt{-1}$, la somme de tous les termes réels est égale à zéro; & celle de tous ceux qui sont multipliés par $\sqrt{-1}$, égale pareillement à zéro. C'est le soixante-neuvieme article de son *Introduction*.

Prop. 2. Lorsqu'une *équation* ne contient que des racines imaginaires, on peut toujours supposer la quantité inconnue égale à $m + n\sqrt{-1}$, dans laquelle m & n ſont des quantités réelles. C'eſt le huitieme article de la même introduction.

Par conſéquent, pour trouver les racines d'une *équation* telle que celle dont il s'agit, il faut mettre à la place de chaque inconnue, x; par exemples, $m + n\sqrt{-1}$, & l'on aura une nouvelle *équation* qui contiendra des termes réels & les termes multipliés par $\sqrt{-1}$, dont le premier & le dernier ſont égaux à zéro par la propoſition 1. Faites-le donc, & vous aurez deux *équations* dont il vous ſera facile de découvrir les deux quantités m & n, de même que celle de x, qui par la deuxieme propoſition eſt égale à $m + n\sqrt{-1}$.

Voici un exemple qui fera comprendre ce que j'ai dit dans la premiere partie de cet article. Suppoſez que les racines réelles, découvertes par le moyen des regles dont j'ai parlé, ſoient a, $b - c$, &c. Faites $x = a$, $x = b$, $x = -c$, &c. Tranſpoſez les termes, & vous aurez $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, &c. multipliez ces dernieres *équations* les unes par les autres, diviſez l'*équation* donnée par leur produit, & procédez comme j'ai dit ci-deſſus.

9°. Le plus grand coefficient négatif d'une *équation* quelconque, conſidéré comme poſitif, & augmenté de l'unité, excede toujours la plus grande racine poſitive de l'*équation*. Par conſéquent,

10°. Si en place de la quantité inconnue x de l'*équation*, vous mettez le coefficient, pris comme poſitif & augmenté de l'unité, moins x, toutes les racines deviendront poſitives. Dans ce cas, vous n'aurez beſoin que des regles de la *figure 1*, dont les centres ſont à leurs extrêmités, & elles vous ſuffiront pour tous les cas poſſibles; car vous devez avoir obſervé que les centres de celles de la deuxieme figure ſont autrement diſpoſés.

11°. Si après avoir rendu toutes les racines de votre *équation* poſitive, vous voulez vous éviter la peine de tranſporter la regle MM à ſa droite de RR; ce qui eſt ſujet à quelque inconvénient, je veux dire, ſi vous voulez que toutes les racines de votre *équation* ſe trouvent entre O & T, ou entre zéro & l'unité, au lieu de la quantité inconnue x de la derniere *équation*, mettez x, multipliée par le plus grand coefficient négatif, conſidéré comme poſitif & augmenté de l'unité. Par exemple, ſi le plus grand coefficient négatif de l'*équation*, eſt -9, metrez 10 x à la place de chaque x, & vous aurez une nouvelle *équation*, dont toutes les racines ſe trouveront ſur la ligne OT, ſans qu'il ſoit beſoin de la prolonger, car elles ſeront moindres que l'unité, je veux dire, que DC ou OT; mais après avoir ainſi trouvé les racines, il faut les multiplier par le coefficient augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire, dans l'exemple ci-deſſus, par 10, parce qu'ayant mis 10 x pour x, on rend chaque racine dix fois plus petite qu'elle n'étoit.

Ces propoſitions ſont reçues de tous les algébriques, & n'ont pas beſoin d'être démontrées.

Voici la deſcription d'une machine pour régler le mouvement des regles dont j'ai parlé: elle n'eſt que pour les *équations* du deuxieme degré; mais on peut également l'employer pour toutes les autres.

ABCD, *figure 4*, eſt un chaſſis de fer ou d'acier, compoſé de quatre barres de fer aſſemblées par leurs extrêmités, qui forment un parallélogramme rectangle de douze pouces de long ſur huit de large, aux quatre coins duquel ſont des appuis *EF*, *GH*, *IK*, & *LM*, ſur leſquels il porte. Sur le côté *A*, eſt un coulant *N*, qu'on peut arrêter avec une vis dans tel endroit qu'on veut, & ſur lequel la traverſe *NO* tourne ſur ſon centre. Son autre extrêmité tient par le moyen d'une vis avec ſon écroue à la traverſe *PQ*, qui eſt pareillement arrêtée ſur le chaſſis aux endroits *P* & *Q*, mais de maniere qu'on peut l'approcher ou l'éloigner à volonté de l'extrêmité *A*. Cette traverſe eſt repréſentée par la ligne *RR* de la premiere figure. Les quatre appuis *EF*, *GH*, *IK*, *LM*, portent trois traverſans *ST*, *UX* & *YZ*, ſur le premier deſquels eſt une boite coulante *o*, qui ſert de centre au traverſant *a b*. Le ſecond & le troiſieme, ſavoir, *UX* & *YZ*, ſont pareillement garnis de deux noix coulantes *e* & *f*, qu'on arrête où l'on veut par le moyen d'une vis, & auxquelles la ſoie *e f* eſt attachée. Les trois traverſans *ST*, *UX*, *A*, ou plutôt la ligne tracée ſur celui d'en haut repréſente la ligne *SS* de la *figure 1*, & la ſoie *ef*, la baſe *ZZ* de la même figure.

g h i k eſt un autre parallélogramme environ deux fois plus long que le premier, dont les côtés *g k* & *h i* coulent dans des ſupports attachés par des vis au chaſſis *ABCD*, dont trois ſont marqués par les lettres *l*, *m*, *n*, & ont des dents triangulaires par deſſous, depuis *g* juſqu'à *d*, & depuis *h* juſqu'à *o*, leſquelles s'engrainent avec celles des deux roues *s* & *t* de même diametre, dont l'axe *pr* eſt ſoutenu dans deux endroits, ſavoir, *u*, & un autre qu'on ne peut voir dans la figure. Ces dents ſervent à régler le mouvement des traverſans *gk* & *hi*, lorſqu'on fait mouvoir la machine; au moyen de quoi, les barres *n x* & *y z*, qui coulent dans deux pieces 1 & 2 ſont toujours paralleles. Elles ſont repréſentées par la ligne *MM* de la premiere figure. Celle de deſſous *nx* eſt garnie d'une pointe 3, dont l'extrémité ſupérieure paſſe dans la rainure de la barre 4, 5, & l'inférieure par celle de l'alidade *NO*. Sur la barre de deſſus *y z*, eſt attachée une pointe perpendiculaire 6, 7, dont on peut ôter la pointe pour y mettre un crayon; cette pointe repréſente le point *s* & la premiere 3, le point *r* de la premiere figure. Sur la barre 4, 5 eſt un boulon rivé 8, qui eſt placé directement au deſſus de la rainure de la barre *P Q*, & qui repréſente *t e*, le point *a* de la premiere figure. Les deux traverſans 9, 10, 11, & 12, coulent dans les ſupports 13, 14, 15 & 16, ſont garnis de dents triangulaires, qui engrainent avec celles des roues 17 & 18, dont l'axe eſt marqué par les nombres, 19, 20. Ces roues reglent le mouvement des barres, & font que celle qui eſt marquée par les chiffres 4, 5, ſe meut toujours parallélement; elle eſt repréſentée par la ligne *l a* de la premiere figure. Les coulans *e*, *f*, *c*, *N* & *R*, étant arrêtés avec des vis dans les endroits convenables ſelon les coefficiens de l'*équation*, ainſi qu'on le verra dans l'article ſuivant, en avançant ou reculant la barre *gh*, on fera mouvoir la machine, & la pointe 6, 7 décrira une courbe qui ſera le lieu de l'*équation*. Les endroits où elle paſſera ſous la ſoie *ef*, à compter de la ligne ponctuée, qui eſt marquée ſur la traverſe *UX*, indiquera les racines réelles; & le nombre de fois qu'elle approchera & s'éloignera de la même ſoie ſans paſſer deſſous, marquera celui des racines imaginaires. Au deſſus des montans *EF*, *GH*, *IK* & *LM*, ſont de petites pieces 21, 22 & 23, qui empêchent les barres qui coulent deſſous de ſortir de leurs places. Voici maintenant la maniere de rectifier la machine pour une *équation* donnée.

Arrêtez les noix *e f*, auxquelles la ſoie eſt attachée à égales diſtances des ſoutiens *EF* & *LM*; avancez enſuite la noix *c*, qui porte l'extrêmité de la barre *a b*, de ſorte qu'elle ſoit plus éloignée du ſoutien *EF*, que l'endroit où vous avez arrêté la noix *e*, d'un nombre de diviſions priſes ſur une échelle de parties égales, égal au terme connu de *l'équation*, s'il eſt poſitif, & plus près s'il eſt négatif; & arrêtez-la dans cet endroit. Faites enſuite couler la noix *N*, qui porte la barre *NO*, l'éloignant ou l'approchant du ſoutien *EF*, plus que ne l'eſt la noix *c*, d'un nombre de diviſions priſes ſur la même échelle égal au coefficient de l'*équation*, je veux dire, celui où la quantité inconnue n'a qu'une dimenſion, plus loin ſi le coefficient eſt poſitif, & plus près s'il eſt négatif. Faites enſuite couler la noix *R*, qui fixe l'autre extrêmité de la barre *NO*, juſqu'à ce qu'elle ſoit plus éloignée d'une ligne tirée du ſoutien *EF* au ſoutien *LM*, je veux dire, du côté *D* du chaſſis, que la noix *N*, d'autant de diviſions que le coefficient du terme de l'*équation*, où l'inconnue à deux dimenſions l'indique, plus loin s'il eſt poſitif, & plus près s'il eſt négatif. Pour cet effet, on doit graduer le côté *A* du chaſſis, les barres *ST*, *UX*, *YZ*, & le traverſant *PQ*, à commencer du front *D*. Ces gradations ſont marquées différemment ſur la machine, mais d'une maniere moins commode. Si l'on obſerve les endroits où la pointe, où le crayon 6, 7, coupe la ſoie *ef*, à commencer de la ligne ponctuée marquée ſur la traverſe *U X*; & qu'on les meſure ſur une échelle, ſur laquelle la diſtance du traverſant *P Q*, priſe depuis une ligne tirée du milieu de l'extrêmité *A* de *E F* à GH repréſente l'unité (on peut en voir la raiſon dans la démonſtration ci-deſſus, où Dc ou OT, *figure 1*, qui marque la diſtance de cette ligne PQ de la barre A, eſt priſe pour l'unité), on aura les racines que l'on cherche. Si l'on ôte la ſoie ef, & qu'on mette un carton ſur la machine, ſur les deux traverſans ſupérieurs UX & YZ, après avoir tracé deſſus une ligne qui repréſente la ſoie ef, & mis un crayon en place de la pointe 7; ce dernier décrira une courbe, qui, avec la ligne droite dont je viens de parler, conſtruira l'*équation* donnée. Plus les coefficiens ſeront grands (on peut les augmenter autant qu'on veut ſans changer les racines, en les multipliant par tel nombre qu'on voudra), plus les angles, que la courbe & la ligne formeront, ſeront grands; ce qui eſt avantageux dans la conſtruction des *équations*. Comme il paroît par la démonſtration précédente, qu'en augmentant les barres de cette machine, on peut l'employer généralement pour toutes les *équations* de quelque degré qu'elles puiſſent être, on peut l'appeller, à juſte titre, un *conſtructeur univerſel d'équations*. (*V*)

ÉQUATIONS DÉTERMINÉES. (*Algebre.*) Je me bornerai dans cet article à expoſer ce qui a été fait juſqu'ici ſur la ſolution générale des *équations*, dont on n'avoit pas parlé dans ce *Dictionnaire*, parce que lorſque l'*article* ÉQUATION fut imprimé, les analyſtes ne s'étoient pas encore occupés de cet objet, comme ils l'ont fait depuis.

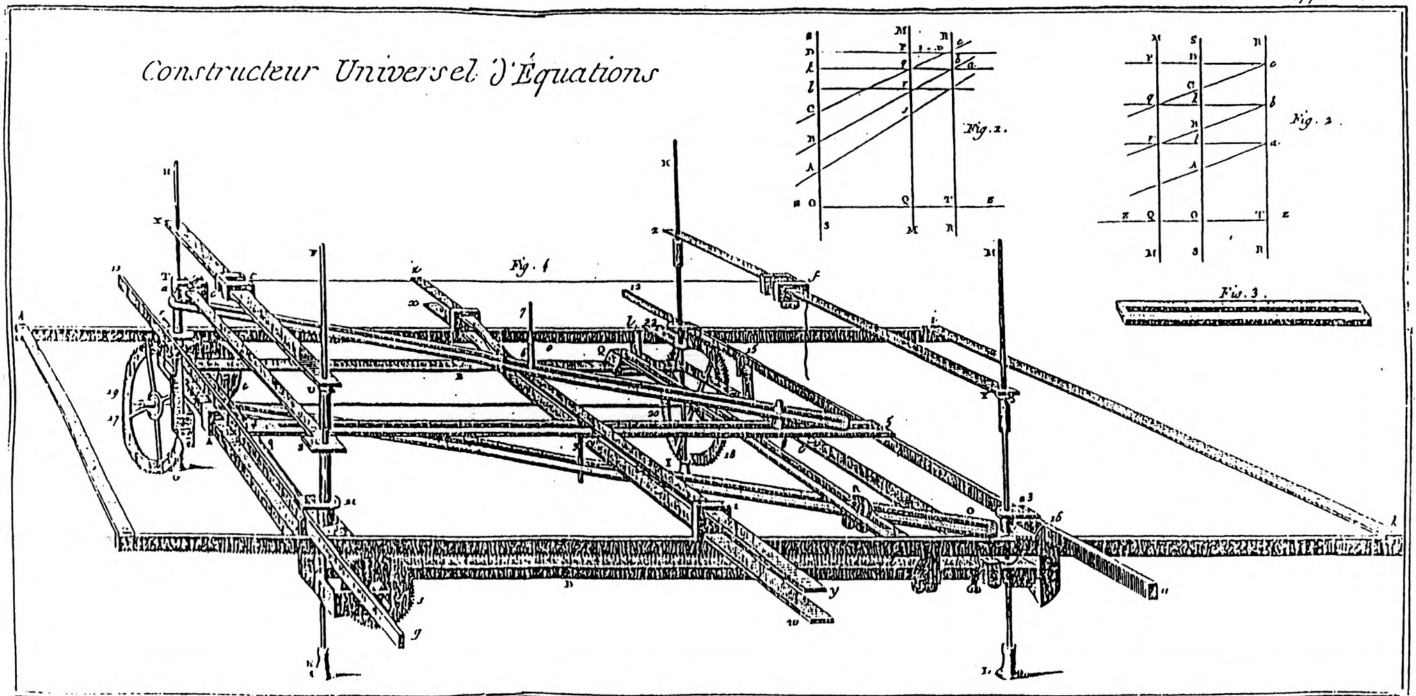
Le premier qui ait fait quelques pas dans cette recherche, eſt le célebre Tchirſnaus, géometre Allemand, à qui l'on doit la découverte des cauſtiques. Il propoſa une méthode pour faire diſparoître autant de termes qu'on voudroit d'une *équation* propoſée par le moyen d'une ſubſtitution; & il trouva que ſi on vouloit la réduire à deux termes, le premier & le dernier, & faire diſparoître les intermédiaires, on feroit dépendre la ſolution de la propoſée, de celle d'une *équation* $Y^n + A = 0$, n étant le degré de la propoſée, & A dépendant d'une *équation* du degré $n-1$; $n-2$ .... 2. 1.

M. Euler & M. Bezout, l'un dans le *tome XI* des *mémoires de Péterſbourg*, l'autre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1765, ont pris une autre méthode. Ils ont ſuppoſé que la racine d'une *équation* du degré n, étoit de la forme $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$... le nombre des A, B, &c. étant $n-1$; & ils ont trouvé que l'on avoit A par une *équation* auſſi du degré $n-1$, $n-2$, $n-3$... 2. 1.

La ſolution d'une *équation* du 5^e^. degré ſe trouvoit donc réduite à celle d'une *équation* du vingt-quatrieme. Et quoique (*Voyez* les *recherches* de M. de la Grange & de M. de Wandermonde, ſur cet objet) cette *équation* ſoit réductible à une du ſixieme, l'*équation* du cinquieme degré n'eſt pas rabaiſſée par ce moyen, & celle du ſixieme le feroit encore moins.

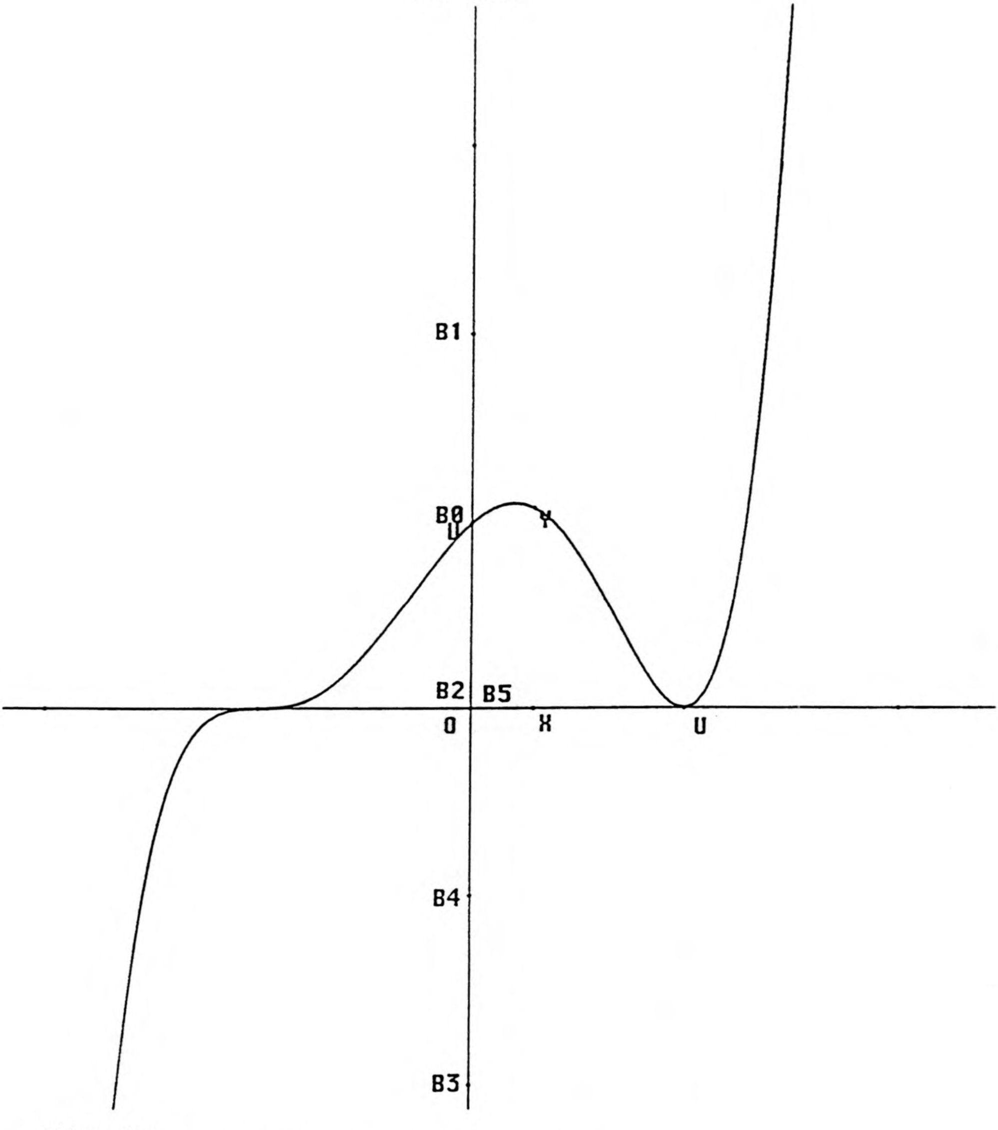
Il reſte donc ici deux objets à conſidérer; l'un, la poſſibilité de parvenir à cet abaiſſement, auquel les *équations* ſemblent ſe refuſer; l'autre, les moyens de rendre praticables les calculs immenſes où cette méthode générale doit néceſſairement conduire.

MM. Waring & Wandermonde ſe ſont occupés avec beaucoup de ſuccès du ſecond objet. On ſait que le ſecond terme d'une *équation* eſt égal à la ſomme des racines; le troiſieme à celle de leurs produits deux à deux, & ainſi de ſuite. On ſait auſſi que ces fonctions qui ſont connues, puiſqu'elles ſont les coefficiens de la propoſée, étant données, on peut en tirer la valeur d'une fonction quelconque des racines, pourvu que toutes y entrent d'une maniere ſemblable; mais les formules des coefficiens de la propoſée qui expriment ces fonctions ſemblables de racines, ſont difficiles à exprimer ſous une forme générale & commode, lorſque le nombre des racines ou les expoſans de ces fonctions ſont des quantités indéterminées. Si les fonctions ſemblables de toutes les racines ſont rationnelles, les fonctions des coefficiens de la propoſée le ſont auſſi: mais ſi elles ſont irrationnelles; ſi au lieu de fonctions ſemblables de toutes les racines, on cherche des fonctions ſemblables de deux, de trois racines ſeule-

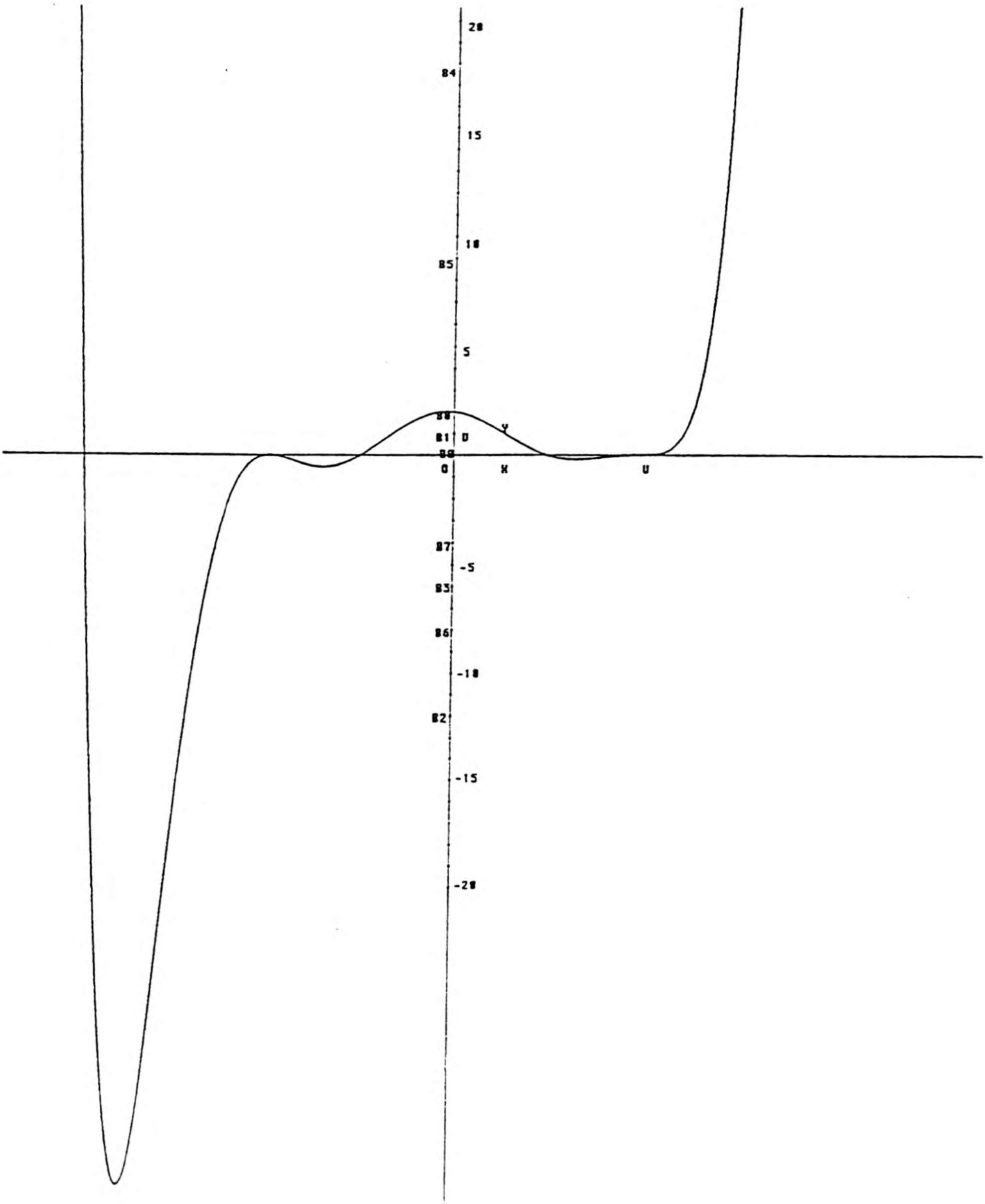


Algèbre

Annexe 2

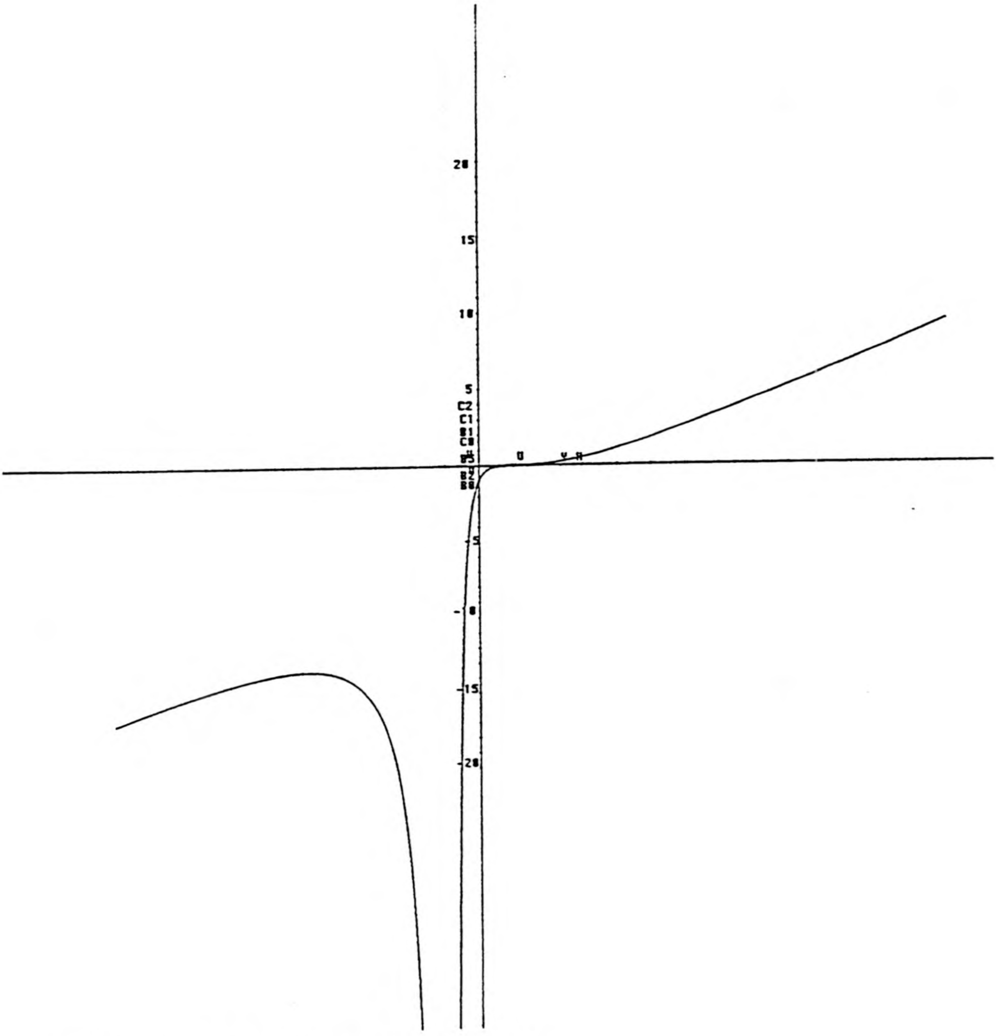


L'équation
X^5 + X^4 - 2 X^3 - 2 X^2 + X + 1 = 0
a une racine triple en -1 et une racine double en +1.



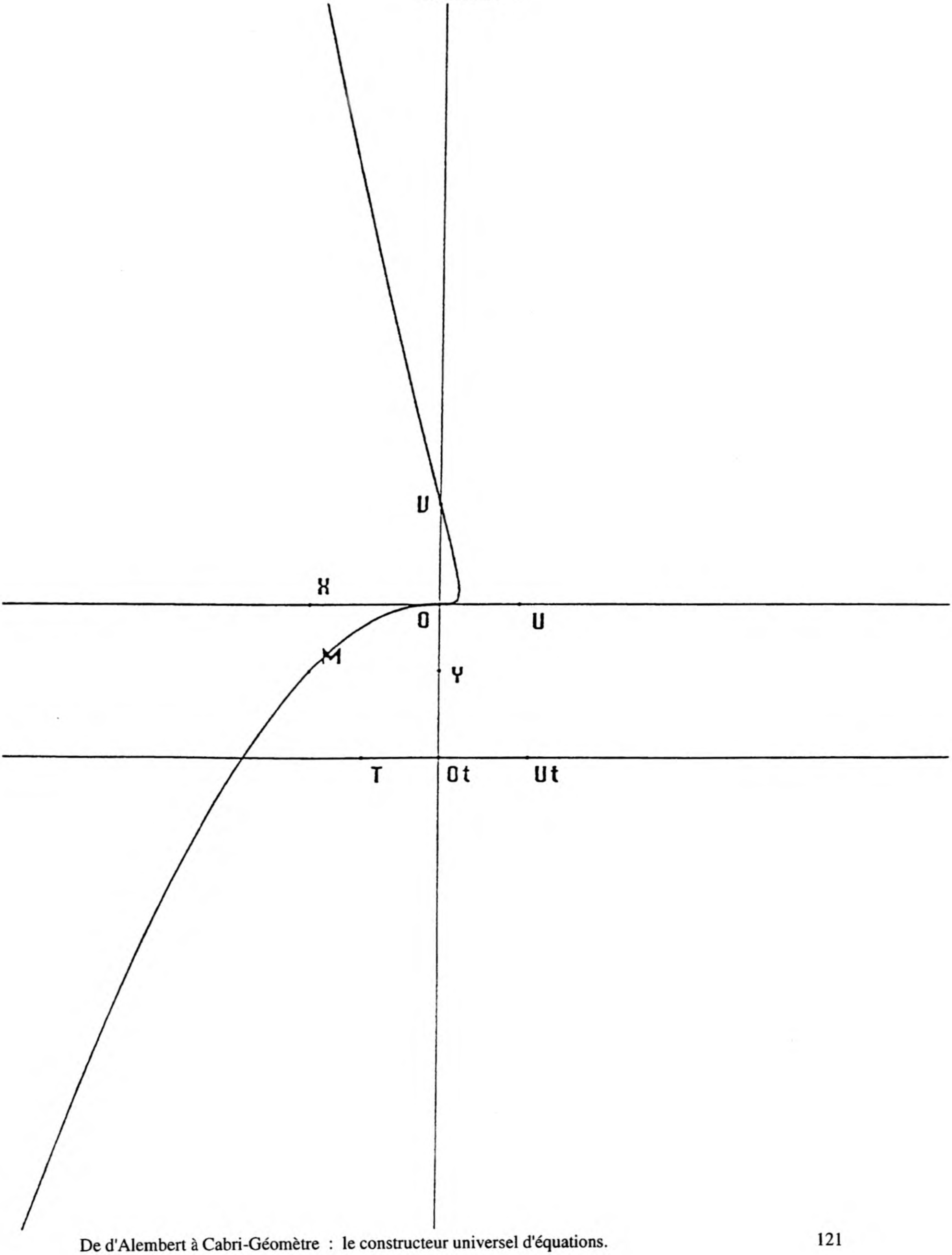
es racines de l'équation
$X^8 + 4 X^7 - 17 X^6 - 9 X^5 + 24 X^4 + 6 X^3 - 13 X^2 - X + 2 = 0$
ont : 1 (triple), -1 (double), $\pm$ 1/2 et -2.

Annexe 3

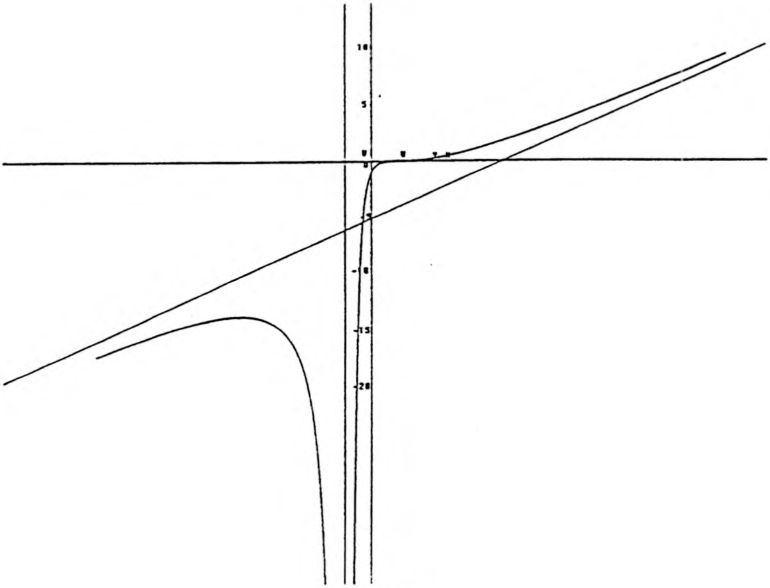


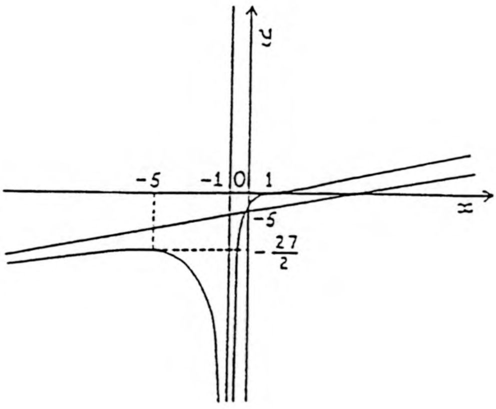
Courbe représentative de (x - 1)^3 / (x + 1)^2

Annexe 4



Annexe 5





Comparaison de la courbe représentative de l'annexe 3 avec celle fournie dans le manuel "Mathématiques M.P.C. et Spéciales B" de Léonce Lesieur publié en 1964 par la librairie Armand Colin.

10. Macros logiques

Yves MARTIN
Ravine des cabris
LA REUNION

L'exposé, tel qu'il est rédigé ici ne correspond pas exactement à ce qui a été exposé lors de l'Université d'été. En effet, on y avait présenté beaucoup de figures basées sur les techniques développées dans l'introduction. Ces figures n'ont de l'intérêt que si on les voit effectivement, ou si on désire les reconstruire. On a préféré proposer ici un exposé un peu plus complet que ce qui avait été fait sur les macros logiques avec référence aux figures présentées. Toutes les figures proposées sur les macros logiques lors de la séances sont fournies sur disquette, et quelques unes de la suite de l'exposé, sur les macros CLFC et les macros externes.

Les macro-constructions que l'on va aborder dans cet exposé sont assez différentes de celles que l'on réalise d'ordinaire. L'utilisation de Cabri-géomètre qu'elles permettent nous éloigne un peu de l'aspect originel de Cahier du BRouillon Interactif, pour nous approcher davantage de la *programmation* des figures.

Pourtant, paradoxalement, avec ces macros logiques, il va être question de se donner les outils nécessaires à l'utilisation de tout le dynamisme de Cabri, en particulier pour réaliser des figures correctes dans tous les cas de figure.

I. INTRODUCTION

En fait, on peut voir les macros logiques sous deux aspects, un premier, de tests conditionnels avant la réalisation d'une figure, et un second aspect, de dessin d'un objet : une macro logique étant alors une macro qui *dessinera* un objet dans *certaines conditions* au lieu de le *construire* dans tous les cas. La distinction est purement pratique, en réalité, c'est la même technique qui est utilisée dans les deux cas, seul le type des objets finaux diffère, compte tenu de l'utilisation que l'on veut en faire. Mais avant de réaliser des macros assez théoriques, commençons par une illustration de ces deux aspects.

A. Exemple 1 : Objets conditionnels à l'existence d'une figure.

Étant donné un segment [AB] et un point M en dehors de ce segment, on se propose de construire un point C tel que M soit le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Une première idée qui vient à l'esprit consiste à dire que (AM) et (BM) étant deux bissectrices, le point C est à l'intersection des droites (AB') et (BA') On construit ainsi le point C et le triangle ABC. En traçant également le cercle inscrit de centre M, à partir de la perpendiculaire à [AB] issue de M - le segment plutôt que la droite - on remarque sans peine que, quand M se déplace, ce cercle n'est pas toujours à l'intérieur du triangle ABC, et plus précisément que le cercle est *parfois* le cercle inscrit, *parfois* le cercle exinscrit associé au troisième sommet. On aimerait modifier la figure pour que le tracé du triangle ABC *n'apparaisse que* s'il y a une solution, c'est-à-dire que si M peut être réellement le centre du cercle inscrit à un triangle de sommets A et B.

Pour cela, on va introduire, dans la construction même du triangle ABC, la condition nécessaire et suffisante (CNS) pour qu'il y ait une solution. Il est facile de voir, par des considérations sur les angles, que cette CNS est tout simplement l'appartenance de M au cercle de diamètre [AB].

Nous allons donc créer notre première macro logique nommée *M intérieur au cercle*. Cette macro aura comme objets initiaux un cercle de base et un point de base M, que l'on placera à l'intérieur du cercle pour la construction. Elle rendra un point M', sur M, si et seulement si M est à l'intérieur du cercle.

On prend donc un cercle *de base* et M un point *de base* à l'intérieur. Soit O le centre du cercle. M est à l'intérieur du cercle si et seulement si (ssi) la perpendiculaire en M à [OM] coupe le cercle. Soit K un point d'intersection et I le milieu de [MK]. M est à l'intérieur du cercle ssi I existe, et donc ssi M', le symétrique de K par rapport à I existe. Cette technique du symétrique par rapport au milieu du point M et d'un point d'existence conditionnelle est la base de toutes ces méthodes, on la rencontrera systématiquement.

M' est donc un point sur M qui n'existe que si M est à l'intérieur du cercle. On peut nommer le point M' et enlever le nom du point M. On vérifie alors à l'écran que M' existe seulement à l'intérieur du cercle. En replaçant M dans le cercle, pour que M' existe, on transforme facilement cette figure en macro logique : objets initiaux le cercle de base et le point de base M, objet final, le point M'.

On peut alors revenir à la figure de départ, et appliquer la macro au cercle de diamètre [AB] et au point M. À ce stade, deux attitudes sont possibles : soit supprimer les deux droites (AM) et (BM), et reprendre la construction à partir des droites (AM') et (BM'), alors le point C construit sera bien le point cherché puisqu'il est conditionnel à l'existence de M' sur M. Une méthode plus rapide est, après la suppression du triangle ABC, construire sur C un point conditionnel C' lié à l'existence de M'. Pour cela il suffit d'utiliser la même technique que la fin de la construction précédente : on prend le milieu de [M' C] et le symétrique de M' par rapport à ce milieu est un point C' sur C dont l'existence est conditionnée par celle de M'. Il suffit alors de tracer le triangle ABC', et d'effacer le point C pour que le triangle soit correctement construit.

La technique de base peut être placée en macro, puisqu'elle sera toujours - ou presque - appelée en fin de réalisation : prendre deux points de base M et X, et construire sur M le symétrique M' de X par rapport au milieu de M et X. Appeler cette macro *Existence conditionnelle 1 pt*, les objets initiaux étant - dans l'ordre - M et X, l'objet final M'. (figure ML1.a sur la disquette)

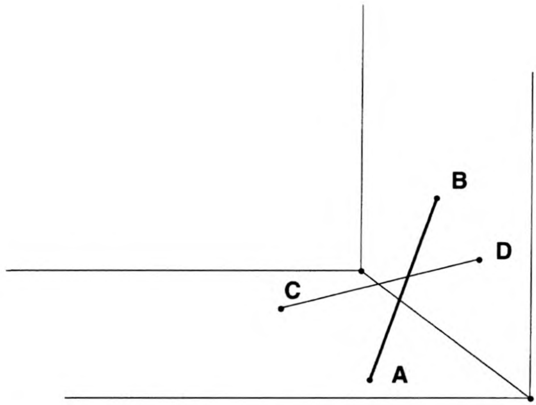
Avant d'entamer la réalisation de différentes macros logiques fondamentales, donnons un second exemple d'utilisation.

B. Exemple 2 : Position de deux droites dans l'espace.

On considère, sur deux plans orthogonaux symbolisants le sol et un mur vertical, deux segments [AB] et [CD], A et C étant sur le mur du sol, B et D sur le mur vertical. Le but de la figure est de représenter de manière particulière - en couleur, ou en gras - celui des deux segments qui est au dessus de l'autre.

Le principe va être de les projeter orthogonalement sur le sol et de regarder la position sur les deux segments des points dont la projection est à l'intersection des deux projections.

On commence par réaliser la figure suivante, [AB] étant en trait ordinaire. Soient B' et D' les projection orthogonales de B et D sur le plan du sol, et I l'intersection des segments [CD'] et [AB']. L'intersection des segments suffit ici, il s'agit surtout d'exposer la démarche.



La droite verticale, c'est-à-dire orthogonale au plan du sol issue de I coupe les segments [AB] et [CD] respectivement en M et N. Alors le segment [AB] est au dessus du segment [CD] si et seulement si N est entre I et M. En classe on peut commenter en remarquant que I est l'ombre au soleil de midi des deux points M et N ...

Il reste donc à faire une macro d'appartenance à un segment. Soit, alors, sur une autre page, une droite définie par deux points (AB) et un point sur objet M - choisi entre A et B - de cette droite. Alors M est entre A et B ssi la perpendiculaire à la droite (AB) passant par M coupe le segment [AB]. En notant M' cette intersection, on vérifie bien que M' existe ssi M est entre A et B. Il ne reste plus qu'à transformer cette figure en une macro *M intérieur à [AB],* avec comme objets initiaux A, B et M. La macro renvoyant le point M' ssi M est bien intérieur au segment.

On peut alors revenir à la figure initiale, et se placer dans le cas où N est entre I et M. En appliquant la macro précédente, on a un point N' prouvant que la condition est réalisée. On peut alors utiliser la macro *Existence conditionnelle 1 pt* pour construire sur A un point A' ssi N' existe et tracer le segment [A'B] en gras.

Pour que la figure soit complète, on applique à nouveau la macro dans le cas où cette fois M est entre I et N, et on termine de même sur [CD]. Ainsi, sur cette figure, est en gras le segment qui se situe au dessus de l'autre. (figure ML1.b sur la disquette)

Après ces deux exemples, on conçoit bien qu'il existe toute une série de situations types de base qui reviennent régulièrement dans ce genre de problèmes où il ne s'agit pas tant de *construire* à l'aide d'une macro que de *dessiner* une construction donnée *selon certaines contraintes.* C'est ce que nous allons détailler maintenant.

II. MACROS LOGIQUES DE POSITION SUR UNE DROITE

1) *Existence conditionnelle 1 pt* : Déjà construite, rappelée ici car c'est une macro logique de base, très souvent employée.

2) *M à l'intérieur de [AB]* : déjà construite. On verra plus loin des variantes selon que l'on accepte ou non les bornes. On peut facilement construire M Œ [AB[ou M Œ]AB[. Rappelons que le point M appartient à priori à la droite (AB).

Proposition d'utilisation : troncature *complète* du cube par les sommets.

On part d'un cube en perspective cavalière, et on le tronque par les sommets (sur les faces qui ne sont pas en vraie grandeur, on utilise les parallèles aux diagonales). On notera, pour la description écrite ici, ABCD la face avant du cube, dans le plan frontal, la troncature étant effectuée à partir d'un point M sur le segment [AB]. On note I le milieu de [AB]. On sait qu'il y a deux méthodes de construction différentes, selon que l'on tronque, disons autour de A, à une distance AM inférieure ou supérieure à la moitié de [AB]. En faisant la construction sans prendre de précaution, on obtient une figure qui est correcte dans la première moitié du segment et fausse dans la suivante. (figure ML3.a1 : problème sans utilisation des macros logiques)[11]

Pour obtenir une figure correcte, on prend toujours M sur objet de [AB] mais on construit les points M' et M" sur M selon que M est sur [IB] ou sur [AI]. À partir des parallèles aux diagonales des faces, on construite les segments correspondant à la troncature selon que M' ou M" existe. Si la figure est correctement réalisée, on peut même transformer le cas du parallélogramme en macro-construction que l'on appliquera aux deux autres faces visibles, les autres faces étant complétées par la symétrie centrale du cube. (figure ML3.a2 : avec macros logiques).

3) *A, B, M dans cet ordre* : une autre utilisation de la macro précédente est une légère variante où l'on rend vrai sur M ssi B est entre A et M. C'est une variante qui intervient naturellement dans plusieurs situations, en particulier dans des figures de représentation dans l'espace (utilisée dans figure ML2.b par exemple)

4) *M à l'extérieur de [AB]* : soit I le milieu de [AB]. M est à l'extérieur de [AB] ssi le segment [MI] coupe le cercle de diamètre [AB].

III. MACROS LOGIQUES DE POSITION DANS LE PLAN.

A. Régionnement par rapport à une droite.

Deux macros sont très utiles dans ce contexte *M et A du même côté de* D où D est une droite, A un point fixe et M un point mobile, et la macro réciproque *M et A de chaque côté de* D .

Les points M et A sont du même côté de la droite D ssi le symétrique M' de M par rapport à la droite et A sont de part et d'autre de cette droite, c'est-à-dire ssi [AM'] coupe la droite. On termine par une *existence conditionnelle 1 pt*. Des variantes de dessin sont utiles, comme par exemple rendre un segment [AB] visible ssi un point variable M et un point fixe O sont d'un même côté de la droite (AB). Éventuellement s'y entraîner. (exemple classique d'utilisation ML7.a : la commode - Terracher 1°S)

Un exemple d'utilisation simple est la mise en place *d'interrupteurs*, pour passer d'une situation à une autre. Pour le principe, deux points *Ch1* et Ch2 sont de part et d'autre d'une droite de base. Un point de base *Chx* permet de placer un point d'encrage sur *Ch1* ou *Ch2* selon que *Chx* est du même côté que ce point. La suite de la figure est liée à l'existence de l'un de ces deux points d'encrage sur *Ch1* et *Ch2*. À chacun ensuite d'améliorer la présentation de son interrupteur.

Exemples d'interrupteurs : choix de présentation (ML2.b déjà citée, et ML2.c : diagramme en bâton/histogramme. Autre figure ML6.a : choix d'un exercice à chercher). On remarquera, dans ses premiers essais de telles constructions, le problème du point Chx placé sur la droite de base qui donne les deux orientations possibles simultanément, ce qui peut être fâcheux. On y reviendra plus loin.

B. Intérieur d'un triangle.

Étant donnés un triangle ABC et un point M, on réalise une macro qui renvoie un point M' sur M ssi M est à l'intérieur du triangle. Il ne faut surtout pas appliquer trois fois

[11] On notera qu'une construction exposée le dimanche matin par les collègues suisses proposait une autre approche du passage du cube à l'octaèdre, à priori sans avoir à faire cette distinction, mais le point à déplacer *n'était pas sur une arête du cube*, probablement pour cette raison.

des macros de positionnement d'un point par rapport à une droite, on peut y arriver en 6 objets intermédiaires seulement, en utilisant les céviennes (droites joignant les sommets au point M). Dans les objets initiaux, on donnera plutôt les trois points A, B et C que le triangle, cela évite de construire le triangle dans les cas où il est inutile.

Différents types d'applications sont possibles, d'abord la finition de figures dans l'espace ou apparaît des faces triangulaires. On peut ainsi travailler avec des sections qui disparaissent quand le point n'est plus sur la face. Si vous disposez de sections du tétraèdre, vous pouvez les retravailler à partir de cette macro.

Remarque importante : Quand on propose dans la suite de reprendre des figures qui ont pu être longues à construire, il ne s'agit pas de les reconstruire, mais simplement de les modifier. Dans le cas de figure avec des points *de base* sur les faces, la tâche est très facile. Par exemple dans le cas d'un point I qui devrait être intérieur à une face ABC, à côté de ce point I on prend un point *de base*, disons R, de lui appliquer la macro M intérieur triangle, on obtient le point R'. Il suffit alors de redéfinir le point I comme étant le point R' pour que l'existence du point I soit attachée à l'intérieur de la face.

Un autre type d'application, plus pédagogique, consiste à réaliser une figure pour faire *observer* les élèves sur un thème précis. Avec la macro M intérieur triangle, il est facile de construire un triangle qui a une couleur par défaut, et prend une autre couleur quand tous les angles sont aigus. On peut, dans de petites classes faire observer les angles, et au lycée demander, sachant que la figure est construite selon qu'un point ou non est intérieur au triangle, quelles sont les méthodes possibles de réalisation de cette figure. (figure ML4.a)

C. Intérieur d'un parallélogramme.

S'obtient de façon semblable à l'intérieur d'un triangle, en 6 objets aussi : ce sont les mêmes. Là encore indispensable pour la gestion correcte des sections d'un cube avec des points sur les faces. (figures ML7.c1 et ML7.c2)

D. Intérieur d'un quadrilatère convexe.

C'est une autre application intéressante de la macro M intérieur triangle. Soit un quadrilatère ABCD. Alors ABCD est convexe ssi ses diagonales [AC] et [BD] sont sécantes. Soit I l'intersection de ces deux segments. L'existence de I est équivalente à la convexité du quadrilatère. Soit alors un point M
à l'intérieur de ABCD. On veut une macro qui rendra M' sur M ssi le quadrilatère est convexe et M est à l'intérieur.

Les macros logiques sont efficaces sur des *ET* logiques - on prend le milieu, il faut donc arriver à penser les problèmes en termes d'intersection plutôt que d'union. Ici, M appartient au triangle ABC ou au triangle ACD est inefficace, à cause du *OU*. On va au contraire considérer ABCD comme l'intersection de deux triangles.

Soient alors D_1 la parallèle au segment [BI] passant par A et D_2 celle passant par C. Ces deux droites ont donc une existence conditionnée à celle de I, donc toute la suite des constructions sur elles aussi.

La droite D_2 est coupée par (AD) en E et par (AB) en F. La droite D_1 est coupée par (CD) en E et par (BC) en H. Alors M est à l'intérieur du quadrilatère ABCD ssi il est à l'intérieur des deux triangles AEF et CGH. On applique une première fois au point M et un seconde fois au point que l'on vient de créer, c'est le point M', dont l'existence est directement liée au point I donc à la convexité du quadrilatère.

E. Intérieur d'un cercle.

La macro a déjà été construite. Elle peut avoir une utilisation très différente des précédentes, comme macro d'approximation du genre *M est en A à e prés*, e étant le rayon d'un cercle. Il suffit de se donner e par un segment, un point A, et un point M. Alors M sera en A à e prés s'il est à l'intérieur du cercle de centre A de rayon e.

Cette macro peut être très utile pour proposer certaines constructions conditionnelles, approchées certes, mais suffisamment de l'ordre du pixel - pour être acceptable à' l'écran. Une autre application possible, et la validation d'une réponse donnée par l'élève, lorsqu'une réponse est correcte, lors de *figures-exercices* (exemple figure ML6.a sur les vecteurs)

Autre utilisation ludique : le jeu du Tic Tac Toe (figure ML8.a)

IV. MACROS LOGIQUES DE RELATIONS

A. L'appartenance

Appartenance à une droite de base : On considère une droite *de base* - la choisir horizontale - et deux *points sur objet* A et B sur cette droite. En construisant les deux sommets des triangles équilatéraux ABI et ABJ, on dispose de deux points fixes, I et J, respectivement au dessus et en dessous de la droite.

Soit M un point de base, par des intersections de [IM] et [JM] avec la droite, on peut construire sur cette droite deux points P et Q selon que M est au dessus ou en dessous. L'existence simultanée de P et Q assure que M est sur la droite : on fait une existence conditionnelle de M par rapport au milieu de [PQ][12].

On remarquera qu'un point *de base* n'a de chance d'appartenir, par cette macro, à une droite *de base* que si celle-ci est horizontale, verticale ou de pente ±1. Mais cela peut être utile dans ces cas là.

D'autre part, un point *de base* a peu de chance d'être un point d'une droite construite par le logiciel. Pour cette raison, le problème de bord rencontré plus haut sur la construction des interrupteurs disparaît si au lieu de prendre une droite de base comme droite de départ on prend la médiatrice de deux points verticaux distants d'un nombre *impair* de pixels. Alors le point *Chx* du choix ne sera jamais sur cette droite qui ne contient aucun point de la grille des points de base.

Appartenance à un cercle : Il est facile de faire une macro M extérieur cercle, et en appliquant une démarche analogue à celle ci-dessus, on peut penser construire une macro M sur cercle. On remarquera alors que les deux points qui jouent les rôles de P et Q ci-dessus n'apparaissent simultanément à l'écran qu'aux 4 points cardinaux et à l'intersection du cercle avec les bissectrices du repère formé par ces points. En pratique une telle macro d'appartenance est inutilisable sans se donner une marge d'incertitude.

[12] Peut s'améliorer grandement en considérant une droite de base et un point de base A *n'appartenant pas à la droite* (5 objets intermédiaires).

B. Les différences

Ce sont les macros les plus faciles à obtenir. Par exemple deux points sont différents pour Cabri ssi leur médiatrice existe. Cela permet de renvoyer un point sur l'un des deux ssi ils sont différents.

Une autre utilisation est le traitement des bornes dans l'appartenance à un segment. Si M' est renvoyé sur M entre A et B, on peut construire une macro M est sur]AB] - ouvert en A - en renvoyant sur M' le symétrique de A par rapport à la médiatrice de [AM']. Faire aussi une macro M est sur]AB[, ouvert de chaque côté.

Autre exemple d'apprentissage : on pourrait construire de même une macro qui , étant donné deux segments, renvoie un segment sur le plus petit.

C. Les affirmations

Il faut déployer plus d'astuce pour obtenir un test d'égalité de deux points avec Cabri, ou un test de parallélisme de deux droites. Après tous les détails donnés pour les tests précédents, il est intéressant de chercher soit même:

- une macro qui renvoie sur l'un des deux points A et B, un troisième point s'ils sont confondus : *réalisable en 5 objets intermédiaires.*

- une macro qui, étant donnés deux droites *de base* - les choisir horizontales - et un *point sur objet* sur la première, renvoie un point sur celui-ci ssi elles sont parallèles : se trouve facilement en un peu moins de 15 objets intermédiaires, nombre que l'on peut abaisser à *5 objets intermédiaires.* Indication : expérimenter des figures simples de non parallélisme.

Il est facile de vérifier en quelques manipulations que le test de parallélisme, s'il fonctionne théoriquement, en pratique a peu de chance de donner des résultats en dehors de droites à pentes facilement reproductibles.

Ce type de test n'est pourtant pas purement gratuit. On peut par exemple l'utiliser pour tracer des centres d'homothétie de segments ssi ces segments sont parallèles (figure ML3.b). On peut aussi l'utiliser pour une présentation dynamique du théorème du toit par exemple (figure ML5.a)

V. LES DIFFÉRENTS CHAMPS D'UTILISATION DES MACROS LOGIQUES

- *Amélioration d'une figure* : ce sont les situations dans lesquelles ont veut une figure correcte dans tous les contextes possibles. Dans ce cas, on conditionne le résultat obtenu en fonction des différentes contraintes, ce qui se ramène à des considérations d'appartenance à des régions particulières du plan.

- *Construction de situations d'observation* : on en a parlé à propos de ML4.a utilisant l'intérieur d'un triangle. Il s'agissait de changer l'aspect d'un triangle dès qu'il a un angle obtus. Dans le même genre d'idée, on peut aussi réaliser des figures de Cabri qui marquent un angle seulement quand il est aigu. On peut également construire une figure qui étant donné un triangle ABC, C étant variable, trace d'une couleur précise *le plus petit* des deux côtés [AC] et [BC], et dégager ainsi la notion de médiatrice quand ils sont tous les deux de cette couleur[13]. (ML4.b)

---

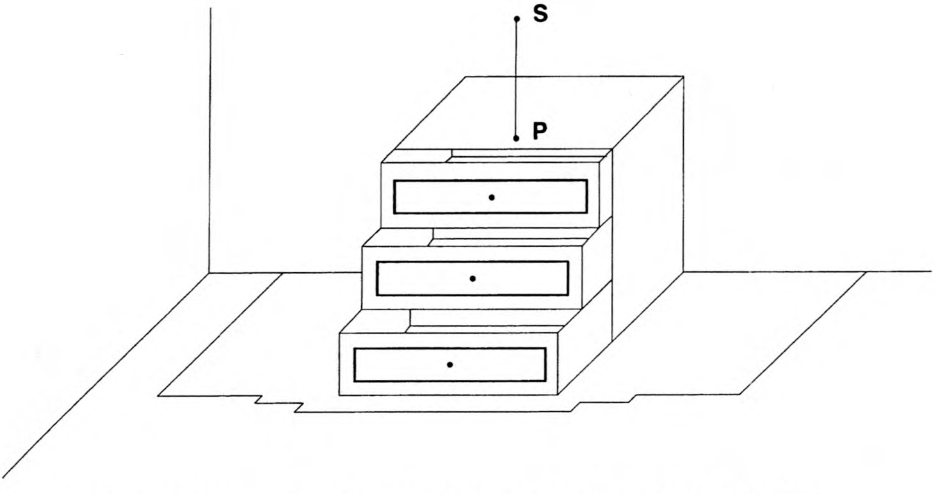
[13] Il faut alors un nombre de pixels *impair* pour [AB] pour qu'un point *de base* ait quelques chances d'être sur la médiatrice.

- *Film de démonstration* : une démonstration du théorème de Pythagore par la méthode des aires (Euclide) particulièrement visuelle a été proposée, méthode utilisant fortement le thème des macros logiques.

- *Présentation de choix* : les interrupteurs peuvent être utilisées à différentes fins pédagogiques de choix, mais aussi de masques partiels d'information. (ML2.b, ML2.c et ML6.a)

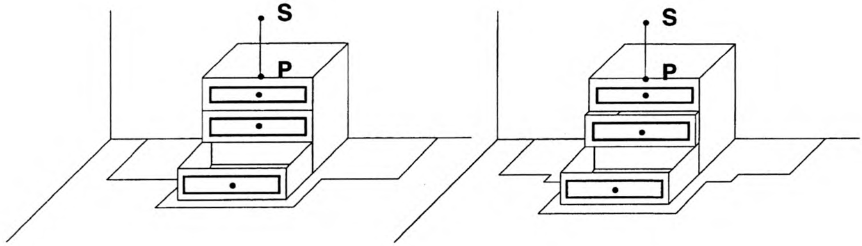
- *Gestion des parties cachées d'un solide en rotation*. Il ne s'agit ici - quand les solides n'ont que des faces convexes, ce qui est toujours le cas en classe - que d'une gestion de position d'un point par rapport à une droite, ce qui peut donner quelques visions de l'espace assez saisissantes de part le dynamisme de Cabri, comme la rotation d'un cube - ou d'une troncature de cube - dans l'espace, avec gestion des parties cachées, et choix (interrupteur) de l'axe de rotation.

- *Simulation* : réalisations de figures, en particulier de l'espace, qui peuvent éventuellement être longues à réaliser.

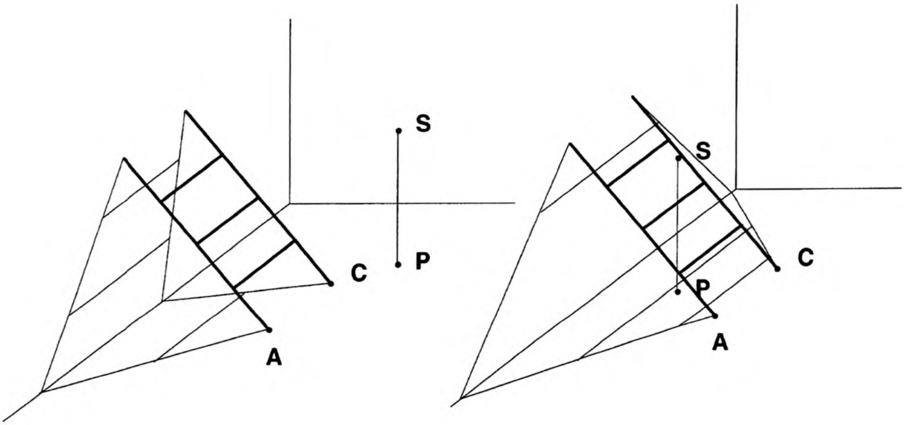


Ont été présentées l'ombre d'une commode éclairée par un abat-jour (ML7.a), l'ombre sur trois murs d'une échelle éclairée par un réverbère (ML7.b) et le découpage d'un cube selon sa section par un plan passant par trois points de ses faces visibles (ML7.c1 et c2)

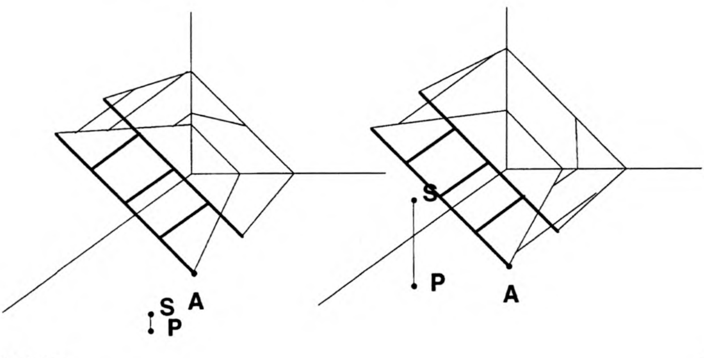
Ci dessus, exemple de l'ombre d'une commode, ici avec les trois tiroirs ouverts. S est la source lumineuse, P le pied de l'abat-jour. On remarquera la gestion du fond du tiroir. Même construction, avec gestion des parties cachées dans la partie gauche de l'ombre.



Exemple de l'ombre d'une échelle sur trois murs. S est la source lumineuse, P le pied du lampadaire. L'échelle est mobile par le point A.



Ombres ordinaire, exercice classique de 1°S.



Autres positions de l'éclairage, réalisée dans la même construction.

VI. AUTRES TECHNIQUES PRÉSENTÉES

L'exposé s'est poursuivi sur la présentation de macros dites *macros-CLFC* pour *Combinaisons Linéaires de Fonctions Caractéristiques.*

L'idée est que les macros logiques, si elles permettent de nombreuses réalisations, ne permettent pas le OU logique, par construction même. Or on peut avoir parfois besoin de ce OU. La question est de savoir si le OU de deux points est réalisable à la règle et au compas, par une Cabri-construction.

Plus précisément, étant donnés deux points I et J construits, mais pouvant être inexistants, comme l'intersection de segments, d'une droite et d'un cercle par exemple, peut-on construire à la règle et au compas un point M qui existe ssi l'un des deux points I ou J existe ?

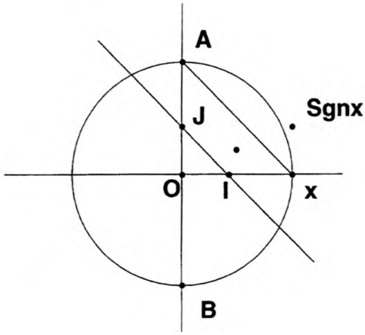
Il est intéressant de savoir qu'effectivement, le ou existentiel de deux points est bien constructible à la règle et au compas. La technique n'a pas été décrite en détail, seules les premières démarches ont été détaillées, mais elles suffisent pour arriver au résultat.

La première chose à faire est de construire la fonction caractéristique d'un intervalle, c'est-à-dire un point qui prend, quand on le projettera sur un axe, deux positions distinctes selon d'un autre point, variable, appartient ou non à un intervalle [AB]. Une façon de réaliser cela, est par exemple de construire une fonction Signe(x) qui prend deux valeurs opposées selon que l'on est à gauche ou à droite d'un point choisi comme origine.

Pour cela, on considère un cercle de centre O passant par un *point sur objet* x d'une droite. Ce cercle coupe l'axe des ordonnées en A et B.

L'intérêt de la figure est que, quand x passe de part et d'autre de O, A et B ne sont pas inversés. Alors à partir d'une unité arbitraire I sur l'axe des abscisses, la parallèle à (-x A) passant par I coupe l'axe des ordonnées en un point qui est le signe de x (soit +1 ou -1 en pratique)

On réalise ainsi une fonction Signe(x) en 8 objets intermédiaires , et 6 objets seulement si on ne s'intéresse qu'à sa projection en ordonnée.



Une fois transformée en macro, cette technique, appliquée deux fois à un intervalle [AB] donne un point *qui existe toujours*[14] mais prend des positions différentes selon que x est entre A et B ou à l'extérieur (20 objets intermédiaires).

En multipliant ensuite cette fonction caractéristique par un coefficient k - *qui lui aussi doit toujours exister, sinon on retombe dans les macros logiques* - on réalise une macro kc_{AB} . Cette macro est réalisable en 26 objets, et peut être améliorée encore de quelques objets probablement.

Ensuite des macros de somme permettent de réaliser de véritables combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques, à coefficients variables ce qui permet certes de tracer des fonctions de style E(x), $(-1)^{E(x)}$ et toutes les variantes que l'on imagine facilement (figures CLFC3.a à 3.d) mais aussi de *lier* des lieux de point (figure CLFC 2.a sans cette liaison, pour comparer, et 2.b avec la liaison).

L'exposé s'est poursuivi sur des considérations plus techniques : en multipliant correctement ces CLFC entre elles, on arrive à des drapeaux d'appartenance à des régions (cercles, parallélogrammes, triangles) et, en réintroduisant par dessus des macros logiques en dernière couche, on peut alors construire des points qui existent ssi un point variable appartient à la réunion de deux ou plusieurs régions. C'est bien entendu *le même point* qui existe dans les deux régions, c'est la nouveauté de cette démarche par macro CLFC par rapport aux macros logiques.

Enfin, pour conclure cette partie, en multipliant autrement les CLFC - avant la dernière couche de macros logiques - on peut, plus ou moins facilement selon le cas à traiter, réaliser des OU existentiels sur des points d'intersection, de segment, de cercles, ou de droites.

En pratique ces constructions sont très gourmandes en objets, d'où l'idée de les programmer. Pour cela l'exposé s'est terminé par une spécificité d'une version de développement de Cabri sur Macintosh - la version dite 2.5ß, qui permet la programmation de macros directement en C.

Avant la dernière partie de l'exposé, quelques exemples d'utilisation de telles *macros externes* ont été montrées rapidement pour familiariser l'auditoire, comme ME1.a l'ombre d'une conique sur 5 murs, ou encore ME2.a la figure *x ->Cos(x)* sur Cabri, avec manipulation directe sur les axes et les unités. Ces macros externes permettent aussi la constructions de macros *numériques* avec appel d'une boite à dialogue qui demande une valeur numérique à l'utilisateur (la macro ME3.a est une macro d'homothétie qui à partir de 2 points demande le rapport (entier ou fractionnaire). Faire Option+déplacement d'un point pour modifier le rapport.

Ensuite, une technique particulière, pour répondre au trop grand nombre d'objets que nécessitent effectivement les OU existentiels de points, a été présentée.

Elle a été développée par Éric Hakenholz, collègue de La Réunion, et permet de réaliser toute opération logique sur des points en très peu d'objets, mais en utilisant les macros externes.

La démarche se réalise en quatre étapes : création d'un point rafraîchi dès que l'un de ceux dont dépend le résultat étudié est modifié, initialisation booléenne de ce point à faux, liaison entre les points logiques de la figure et ce point booléen, et enfin, à partir d'un point de base quelconque, création d'un point symétrique de celui-ci à partir du point booléen, mais avec la particularité que l'on fait le symétrique ssi le point booléen est à vrai. C'est ce dernier point qui sert d'encrage booléen[15].

En pratique, c'est plus facile à utiliser qu'à décrire. De plus, dans certains cas, on peut réaliser des OU le plus naturellement possible en liant deux fois de suite des points logiques différents au même point booléen. Le rafraîchissement de l'arbre de parcourt de Cabri fait lui-même le OU.

Sur la disquette se trouvent les macros nécessaires, avec commentaires détaillés et exemples. Rappelons que ces techniques ne sont pour le moment, disponibles que sur Macintosh.

---

[14] C'est la différence *essentielle* d'avec les macros logiques. Dans le cas des macros logiques, un point M' n'existait que si on était sur le segment [AB]. Ici, on a vrai drapeau, au sens informatique du terme, d'où le nom de macros *booléennes*.

[15] Réellement booléen, alors que les point logiques sont semi-booléens.


encore une
intervention
du Service
d'urgence
....
over-dose
de Cabri

11. Réalisation et utilisation de " films de constructions " avec le logiciel Cabri - géomètre

P.G. BERTOMEU
Collège Henri Bosco
83160 La Valette-du-Var

I. PRÉAMBULE

Le logiciel " Cabri - Géomètre " offre, avec l' article **Historique** (du Menu **Divers**), la possibilité de revoir depuis le départ, ou bien de remonter ([Alt] + **Historique**) jusqu' au début, le déroulement d' une construction géométrique ; un commentaire succinct accompagne la re-vision des objets dans l' ordre logique où ils ont été créés ; les objets supprimés en cours de séance n' y sont plus présents . Ceci permet à l' utilisateur géomètre (l' élève tout particulièrement) de retrouver le " fil " d'une construction, de se remémorer les tâches déjà effectuées .

Pour tout observateur d' élève en situation " cabri - géométrique ", un autre outil est proposé par le logiciel : la création d' un Journal de session . Ceci permet de suivre une démarche dans ses moindres détails : la trace intégrale des essais, des erreurs, des rectifications est enregistrée dans l' ordre chronologique.

Par prolongement, ce principe de narration par images successives permet aussi de communiquer une construction géométrique dans ses étapes essentielles .L' objectif de ce rapport est de décrire les procédés informatiques de réalisation de films de constructions et leur utilisation par les élèves, en classe entière ou en atelier informatique .

II. RÉALISATIONS

Dans l' environnement " Cabri -géomètre ", un Journal de session est activé par la touche [F5] : chaque modification de la figure est alors systématiquement enregistrée dans un répertoire choisi au préalable, SESSIONk (k = 0,1,2,...) ; ces étapes de la construction portent alors le nom générique de PHOTOn.FIG, (n = 1,2,...) .

L' arrêt est provoqué par la touche [F6] La relecture d' une session est amorcée par la touche [F7]: les touches ([→]) et [←] permettent de se déplacer séquentiellement dans cette collection de photos, [ESC] pour terminer la relecture .

Pour la production de film de construction, ce déclenchement automatique d'enregistrement peut manquer de souplesse et de pertinence : une meilleure maîtrise dans la constitution de l' album peut être obtenue en ne sélectionnant que les étapes significatives de la construction . Celles-ci sont alors enregistrées "manuellement" sous le nom réservé PHOTOn.FIG , dans un répertoire précis . Cette session "artificielle" peut être relue normalement.

Le transfert de ces films sur papier a été fait dans l' environnement graphique Windows, paramétré en mode 386 étendu, ce qui nécessite un poste de travail fonctionnant autour d' un processeur 386 (ou mieux 486) et de 4 Mo de mémoire vive (pour plus de rapidité, 8 Mo) . Ceci permet d' installer Cabri - Géomètre et de l' utiliser en plein écran ; la touche [F3] supprime le bandeau supérieur de la barre des Menus pour obtenir une figure de visibilité maximale . Le transfert des images avec les autres applications se fera alors très simplement par le PRESSE-PAPIERS, grâce à des recopies d'écran (touche IMPRESSION ECRAN) . La combinaison [Alt]+ [TAB] permet de passer d' un logiciel actif à un autre, par exemple de Cabri - Géomètre à Image - in, pour des retouches d' images, puis la commande COLLER du logiciel destinataire, termine le transfert . L' image obtenue, améliorée, est alors définie en mode point (bitmap) et peut-être enregistrée au format PCX pour une utilisation ultérieure , dans un diaporama par exemple .

III. UTILISATIONS

Les films de constructions présentés ci-après ont été expérimentés de différentes façons , avec des élèves de 5° et de 4° de collège :

_ en classe entière, sur support transparent retroprojeté, avec les consignes d' observer l' ensemble de la construction, de refaire les étapes avec les instruments de géométrie et ensuite de les traduire en programme de construction.

, en atelier informatique de géométrie, avec un groupe d' élèves volontaires, tous débutants avec Cabri-géomètre, la consigne étant de refaire la construction à l' aide des commandes du logiciel, augmentés à l' occasion par des outils supplémentaires (macro-commandes). L' utilisation de Menus personnalisés a été systématique : suppression d' articles (Milieu, ...) ajout de macro-commandes spécifiques (report de longueur, ...) suivant les contraintes de construction (à la règle non graduée et au compas ; au compas seul ; ...) .

IV. CONCLUSION

La production d' une banque de films de constructions géométriques est envisageable avec le logiciel Cabri-géomètre, comme générateur d' images de qualité.
Sur support papier ou transparent pour rétroprojecteur, ou bien animés par un logiciel comme Imagepcx, ces films détaillent par "photos" une construction, la rendant ainsi plus visuelle, plus accessible . Les nouvelles stations multimédia, avec leur support CD-ROM, devraient rendre encore plus efficaces cette manière de présenter l' activité géométrique .

Références :

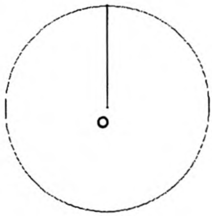
Cabri-géomètre, manuel de l' utilisateur, version 1.6 pour MS-DOS, 1991 .
Windows est l' interface graphique de Microsoft, actuellement à la version 3.1 .
Image - in est le logiciel de retouches d' images de CPI S.A. fonctionnant dans l' environnement Windows.
Imagepcx est un logiciel passe-vue diffusé gratuitement par son développeur Mr **SIRIEX**, Lycée Polyvalent Louis Armand, 63 rue de La Bugellerie B.P. 621, 86 022 Poitiers Cedex

V. EXEMPLES DE " FILMS DE CONSTRUCTIONS " EXPERIMENTES EN CLASSE OU EN ATELIER :

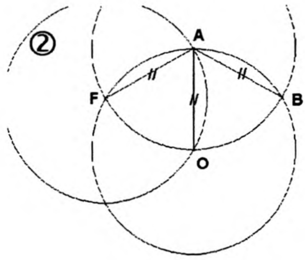
Nous donnons dans les pages qui suivent suite quelques exemples de films de constructions.

A. Rosace à six branches.

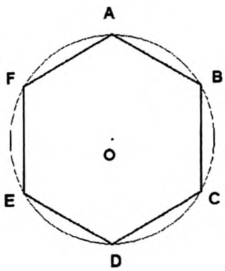
①



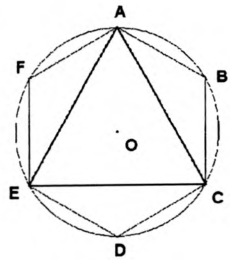
②



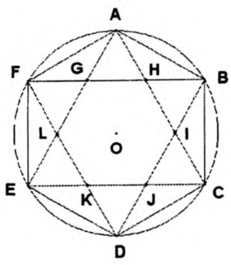
③



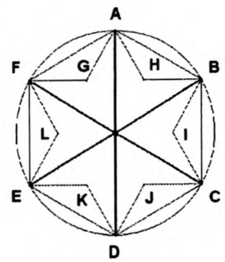
④



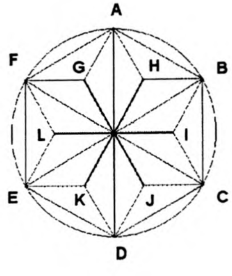
⑤



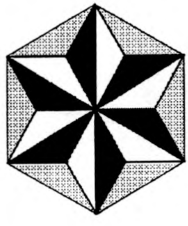
⑥



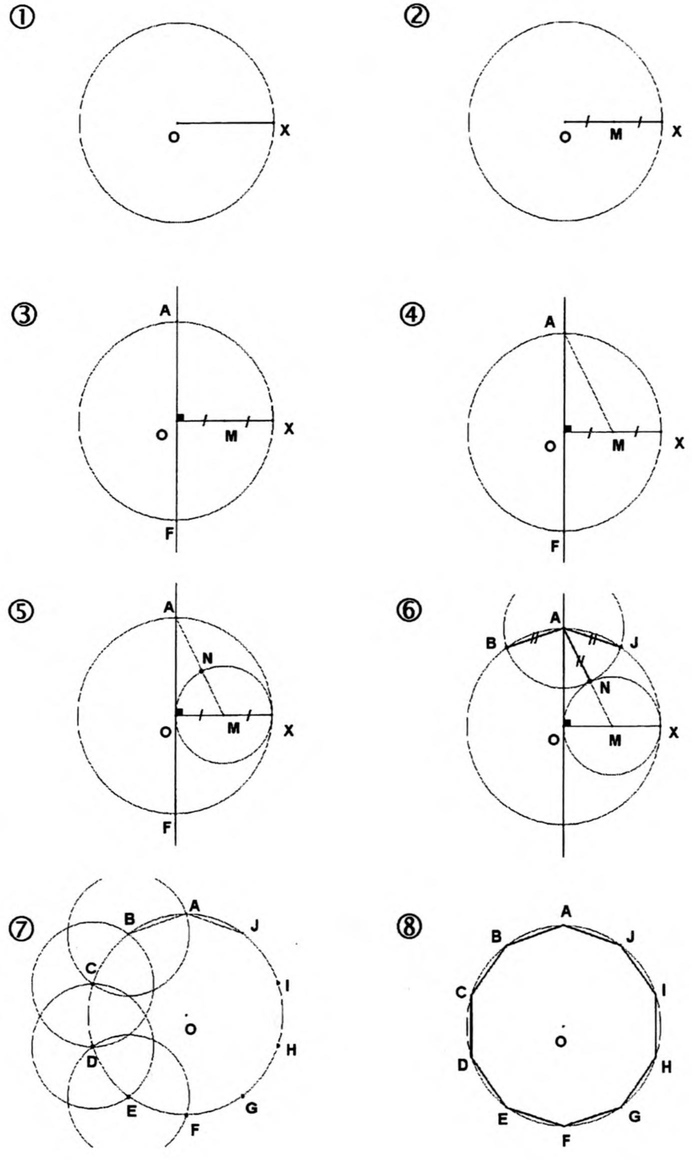
⑦



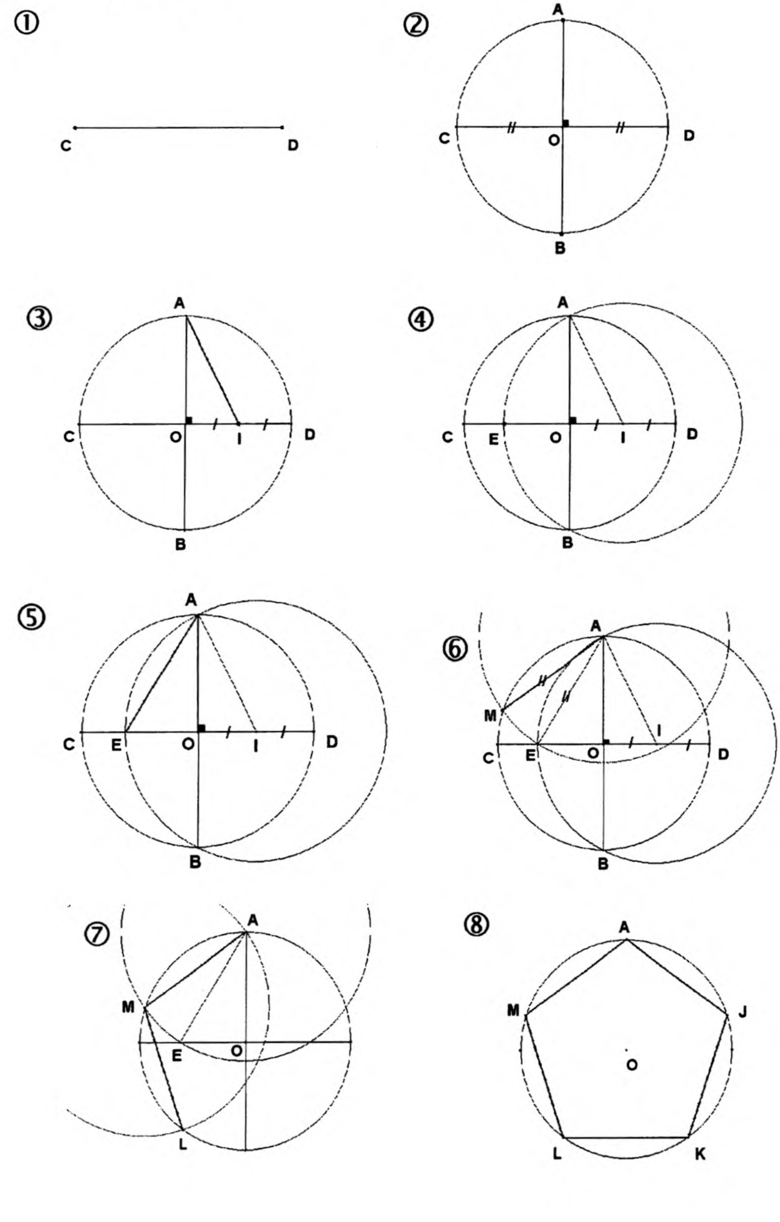
⑧



B. Décagone régulier.



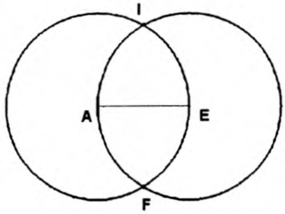
C. Pentagone régulier



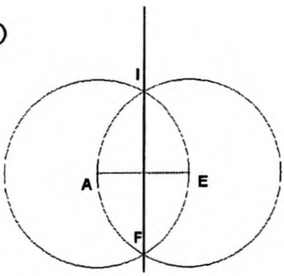
D. Pentagone " presque régulier"

①

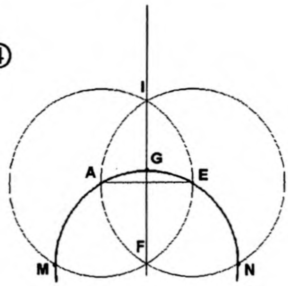
②



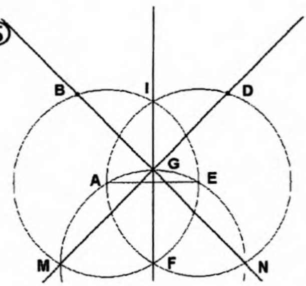
③



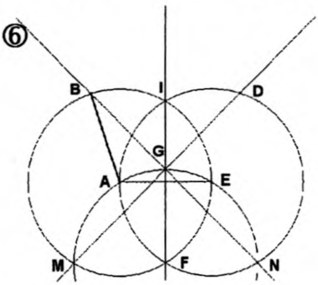
④



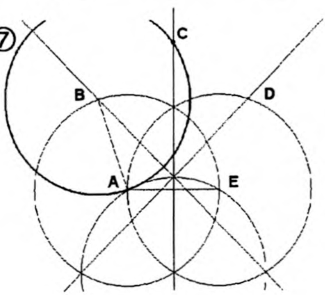
⑤



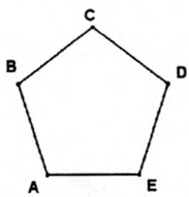
⑥



⑦

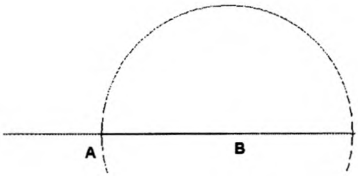


⑧

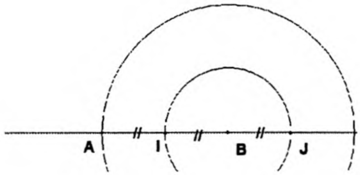


E. Cube en perspective cavalière.

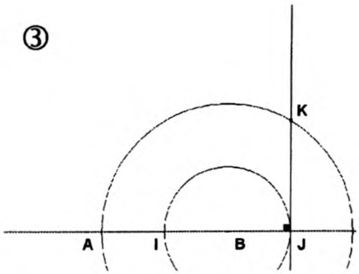
①



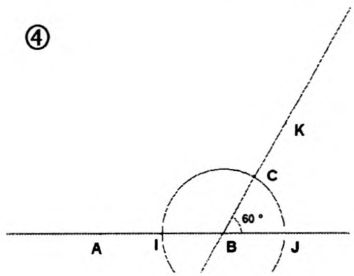
②



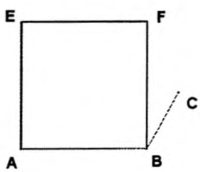
③



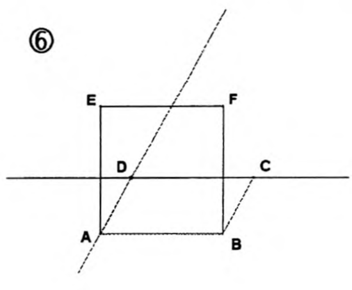
④



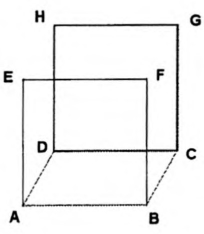
⑤



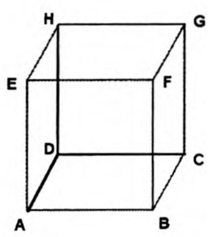
⑥



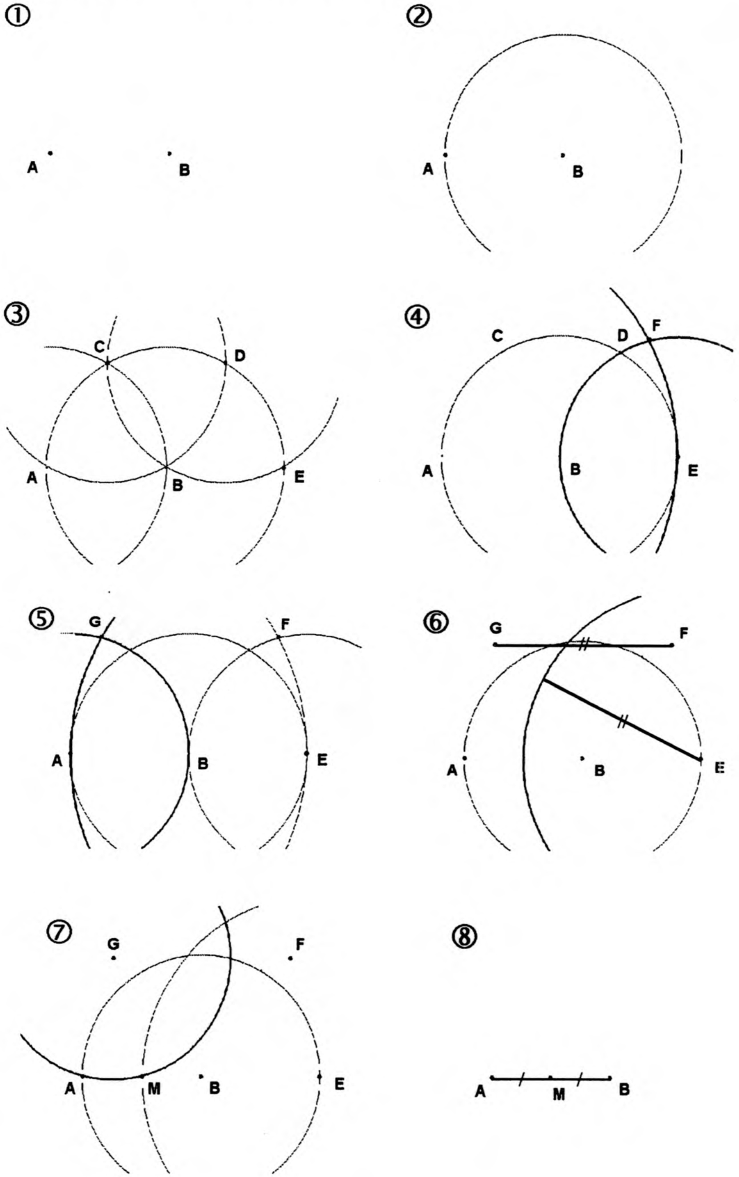
⑦



⑧

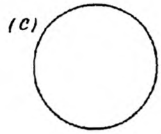


F. Milieu de deux points au compas seul.

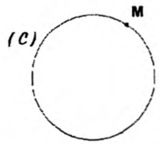


G. Centre d'un cercle au compas seul.

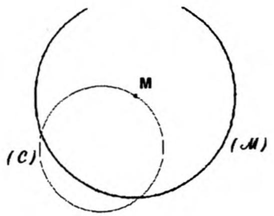
①



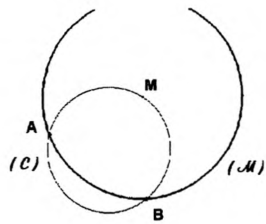
②



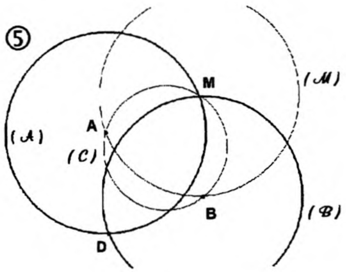
③



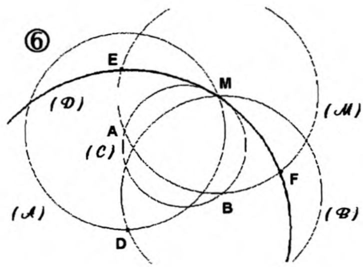
④



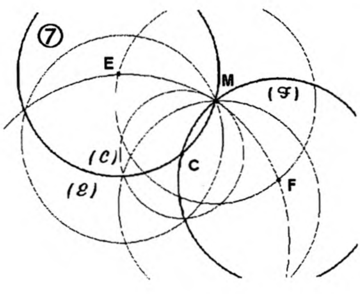
⑤



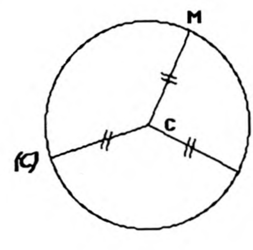
⑥



⑦



⑧




Cabri.....

12. Principales spécifications de Cabri-géomètre II au regard de celles de Cabri-géomètre I

Jean-Marie LABORDE
Directeur de recherche au CNRS
Responsable du projet IMAG Cabri-géomètre

Cabri-géomètre II est le résultat d'une redéfinition complète des versions actuelles de Cabri-géomètre (Le Géomètre version 1.6, Cabri-géomètre MS-DOS version 1.7 et Cabri-géomètre Macintosh version 2.1).
Le concept de manipulation directe a naturellement présidé à cette redéfinition puisque c'est lui qui, déjà largement mis en oeuvre dans les versions actuelles, a fait le succès de Cabri-géomètre, face à la concurrence en France comme à l'étranger.
Cabri-géomètre permet ainsi à son utilisateur de manipuler avec encore plus de facilité n'importe quelle figure concevable dans le cadre de la géométrie, telle qu'elle s'est développée au cours des siècles.

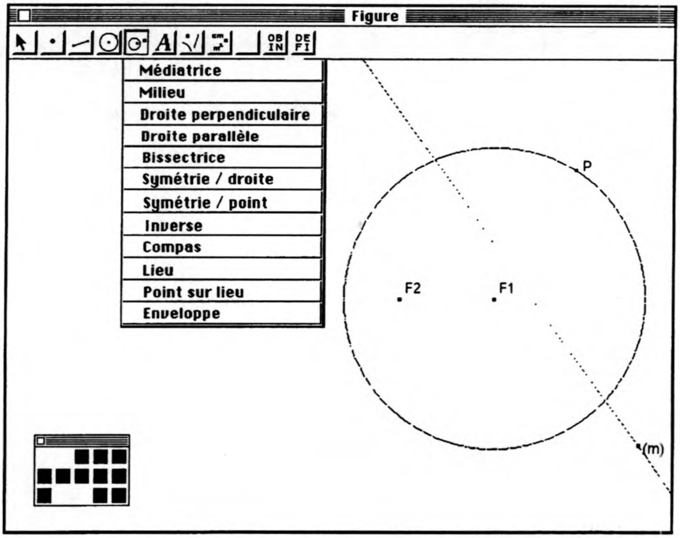
I. LES 3 NOUVEAUTÉS LES PLUS VISIBLES

Une barre de menu "icotextuelle":
Ce qui frappe le plus est sans doute la nouvelle barre de menu. Elle associe dans un nouveau concept les avantages d'une barre d'outils (comme dans WORD, EXCEL, etc.) et les avantages des menus textuels, plus classiques mais qui contribuent à l'expression verbale indispensable dans un contexte d'enseignement.
L'utilisateur change d'outil tout simplement en cliquant sur l'icône de l'outil désiré.
En fait, en cliquant un peu plus longtemps, il s'aperçoit bien vite que se déroule un menu offrant d'autres fonctionnalités. En parcourant ce menu on fait apparaître dans la barre d'outils la représentation iconique et imagée du concept sous-jacent.

Nous avons recueilli un certain nombre d'appréciations sur cette nouvelle interface "icotextuelle":

• d'une part auprès des participants à l'*Université d'Été Cabri-géomètre* qui s'est tenue à Grenoble début juillet 93. L'accueil a été exceptionnel, mais on pourrait craindre que le jugement des participants à cette université, déjà acquis à la philosophie de Cabri, ne soit un peu biaisé et qu'ils n'aient pas un jugement vraiment objectif...

• de façon beaucoup plus sûre nous avons recueilli, sous forme d'interviews cliniques, les réactions d'élèves de 4ème et de 3ème d'un collège de la banlieue Grenobloise (Moirans). Nous avions choisi des classes dont les élèves pratiquaient couramment Cabri et l'on aurait pu craindre qu'il ne soient perdus pour faire face à une nouvelle situation puisque nous ne leur avions fourni ni explications particulières, ni mode d'emploi. Pourtant quasiment tous les élèves ont déclaré en substance que c'était là exactement ce qui leur fallait, que cela leur permettait d'aller beaucoup plus vite et de moins se tromper.



Un instantané de l'interface "icotextuelle" de Cabri-géomètre II.
Des boutons, façon 3-D, permettent de changer d'outils.
L'ensemble des outils d'un même type apparaît lorsque l'on presse
l'outil un peu plus longtemps, ce qui fait se dérouler un menu.
Figure 1

De nouveaux objets géométriques disponibles dans Cabri-géomètre II:
La deuxième nouveauté très visible vient des nombreux nouveaux objets géométriques que Cabri-géomètre II permet de construire et de manipuler les arcs de cercle, les 1/2 droites, les polygones, les conique (ellipses, paraboles, hyperboles quelconques) etc.
Il s'ouvre ainsi de nouveaux champs d'application à Cabri-géomètre, qui de plus en plus permet de faire de la géométrie, mais apparaît aussi comme en outil de modélisation en physique. Pour ne citer que quelques exemples: composition de forces, notion de champ de vecteur, étude du champ produit par un condensateur électrique, optique linéaire et non linéaire, théorie de l'arc en ciel, astronomie, phases de la lune, éclipses, saisons, dessin en perspective et dessin technique, développements et patrons de polyèdres de l'espace, etc..

Un nouveau moteur graphique:
Enfin, Cabri-géomètre II bénéficie d'une implémentation fondamentalement indépendante de toute plate-forme. L'ensemble de ses algorithmes graphiques lui sont propres, ce qui permet d'obtenir exactement la même interface sur Macintosh, sur MS-DOS, ...
Les portages sont ainsi grandement facilités et seront réalisés très rapidement, si la demande existe, vers MS-Windows, Next-Step, Archimède, etc. Toutes ces implémentations de Cabri-géomètre partageront le même "look and feel" tout en étant chacune teintée de ce qui fait la spécificité et le charme des différents environnements: fenêtres style MS-Windows pour MS-Windows, fenêtre et boîtes de dialogues davantage Mac sur Macintosh.
L'implémentation graphique recourt de plus à une nouvelle technique d'informatique graphique que nous avons spécialement développée. Celle-ci assure à la fois des performances (vitesse de tracé) très grandes alliées à l'absence complète de scintillement ou d'effacement partiel d'objets lors de leur déplacement. Il s'agit d'une technique différente des simples "*offscreens*" auxquels recourent certains logiciels au détriment de la vitesse et donc de l'impression de coulée lors des déplacements d'objets.

II. LES SPÉCIFICATIONS DE CABRI-GÉOMÈTRE PLUS EN DÉTAIL:

Machines cibles

Dans l'immédiat,

• MS-DOS, versions 3.3 et postérieures, 1 Mega de mémoire minimum, carte EGA, VGA, Super-VGA (Hercules pourrait être envisagée si la demande existe vraiment) (support pour les réseaux Novell et LanManager).
Cabri-géomètre II tournera sur AT 286, mais une machine à base de "vrai" 386 est recommandée. (Souris indispensable, Coprocesseur indifférent)

• Macintosh, système 6 ou postérieur, 1 Méga de mémoire minimum.
Cabri-géomètre II tournera sur Mac Plus et SE mais une machine à base de 68020 à 16 Mhz au moins sera préférable. Couleur souhaitée.
La machine d'entrée de gamme idéale pour Cabri II sur Mac serait un LC 475 ou encore un Macintosh Classic couleur.

• Des portages sous MS-Windows (3.1), Unix, Archimède (Acorn en Grande Bretagne) seront réalisés selon l'évolution de la demande.
Toutes les versions auront le même comportement et il ne devrait, par exemple, y avoir qu'un seul mode d'emploi.
Tous les fichiers créés par Cabri II seront des fichiers textes, pouvant être lus indifféremment sur une machine ou sur une autre assurant ainsi un totale inter-opérabilité des différentes implémentations de Cabri-géomètre II.
Cabri-géomètre II relira les figures et les macros provenant de Cabri-géomètre I ou du Géomètre.
Le code final sera environ de 600 KO.

Définition du logiciel

Cabri-géomètre II, dans la lignée de Cabri-géomètre I, constitue un micromonde de géométrie. Il peut y ainsi être utilisé dans de très nombreux contextes d'enseignement et d'activités ouvertes en géométrie. Les aspects de Cabri-géomètre comme aide à la modélisation apparaissent de plus en plus clairement à ses utilisateurs enseignants. Cela est apparu particulièrement clairement lors de l'Université d'été citée plus haut.
On pourrait ranger Cabri-géomètre dans la catégorie des *"simulateurs"*, même si cette expression apparaît un peu réductrice.
Cabri-géomètre repose sur une implémentation de l'axiomatique de la géométrie euclidienne aussi fidèle que possible. Quelques fonctionnalités permettent à Cabri II de sortir du strict monde des constructions à la règle et au compas, comme par exemple l'implémentation du report de la longueur d'un arc de cercle.
Il est toujours possible évidemment de reconfigurer le logiciel pour en limiter la puissance et symétriquement il convient de noter que par le biais des macro-constructions, la puissance théorique de Cabri-géomètre est la même que celle du calcul des prédicats du premier ordre. Cabri-géomètre II couvre ainsi l'essentiel du domaine de la modélisation mathématique.
On s'est attaché à donner une interface et des fonctionnalités étendues ai concept de macro-construction; on peut ainsi recourir à Cabri-géomètre comme à un support très intéressant pour des activités de type programmation informatique (itération, récursion, notion de variables, de variables liés, d'indépendance).

Objets géométriques manipulés

Cabri-géomètre II présente une palette étendue d'objets de base :

• Points, droites, segments, demi-droites, triangles et polygones quelconques;

• Cercles, arc de cercles, coniques (propres ou dégénérées, ellipses, paraboles, hyperboles), arcs de coniques.

Ceux des objets précédents qui possèdent un intérieur peuvent avoir leur intérieur matérialisé (distinction entre le disque et la circonférence d'un cercle par exemple).

Tous les objets peuvent recevoir des attributs graphiques d'épaisseur, de pointillés, de couleurs et de forme.
Une remarque doit être faite concernant les coniques et la possibilité de réaliser, peut-être, Cabri-géomètre II sous la forme d'un module principal sans les coniques, et d'un module complémentaire, qui s'il est présent dans le dossier de Cabri, lui adjoigne les fonctionnalités propres aux coniques
Deux raisons au moins militent en effet pour que les coniques ne soient pas disponibles en standard. D'une part, les coniques relèvent de contenus d'enseignement relativement avancés et leur présence risque de faire penser que Cabri-géomètre serait un logiciel complexe et ainsi non adapté à des usages à l'école primaire ou même au collège.
D'autre part le module des coniques représente à lui seul plus de 150 KO, nécessaires à son fonctionnement très performant (les coniques sont manipulées en temps réel pratiquement à la même vitesse que des cercles); ce qui vient "gonfler" le logiciel. Sur des machines "bas de gamme" certains utilisateurs non intéressés par les coniques préféreront ne disposer que d'un module principal sans les coniques.

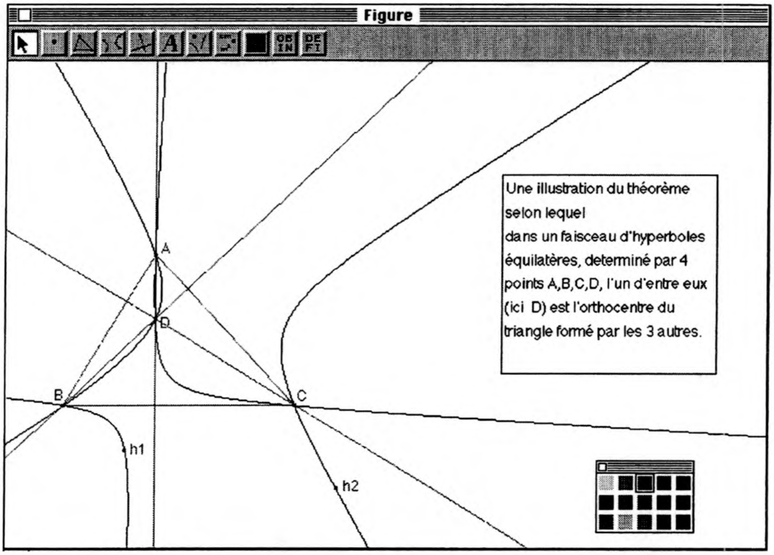


Illustration d'un théorème, pas tout à fait classique, sur les faisceaux d'hyperboles
Figure 2

Constructions géométriques implémentées

Comme Cabri-géomètre I, Cabri-géomètre II implémente les constructions élémentaire de la géométrie euclidienne, ainsi que quelques constructions sortant du cadre strict de l'axiomatique "règle-compas", en vue d'applications de type modélisation:

- perpendiculaire, parallèle, médiatrice, milieu,
- symétrique d'un point (symétrie axiale et centrale maintenant a priori séparées),
- inverse d'un point par rapport à un cercle,
- compas à pointe sèche pour le report de longueur,

compas "circulaire" pour le report de longueur d'arcs de cercles et de coniques.

Transformations géométriques

Dans Cabri-géomètre I, les transformation géométriques classiques et moins classiques étaient réalisables au moyen de macro-constructions. Cela est toujours le cas avec Cabri II mais, au niveau même de l'interface de manipulation directe, les transformations suivantes, pour des objets de base points, droites, segments, polygones, comme pour des résultats de macro-constructions, sont immédiatement disponibles:

- translation, (manipulation par défaut quand on saisi un objet),
- rotation, quand on saisit un objet en enfonçant de plus la touche 'alternée',
- homothétie, quand on saisit un objet en enfonçant de plus la touche 'contrôle'.

Lieux géométriques

La notion de lieu géométrique ou d'ensemble d'objets géométriques est implémentée dans Cabri-géomètre II de façon entièrement renouvelée. Cabri-géomètre II est le seul logiciel à proposer un tel type d'implémentation :
un lieu de points se comporte maintenant pratiquement comme un objet de Cabri, il reste disponible et n'est pas effacé comme dans la version précédente. Il est même possible de placer des points sur la courbe représentative d'un lieu de points et ensuite de le déplacer sur le lieu comme on déplacerait un point lié à un cercle par exemple.
Concernant les lieux d'objets non ponctuels, on peut afficher les objets constitutifs du lieu et visualiser par exemple l'ensemble des tangentes à une parabole obtenues comme médiatrices des segments ayant une extrémité fixe (le foyer) et l'autre sur une droite (la directrice). Il est de plus possible de demander, que le résultat de la construction soit l'enveloppe ainsi déterminée. On peut ainsi générer des enveloppes de droites, ou encore de cercles ou de coniques.

Objets textuels

Deux types de texte sont disponibles dans Cabri-géomètre II. Tout d'abord des textes susceptibles d'étiqueter un objet quelconque et qui suit les déplacements ou déformations de ce dernier. Dans la plupart des cas il s'agit simplement de la possibilité de donner un nom à un point, à une droite, à une cercle. La nouveauté provient de la possibilité de donner des noms de longueur arbitraire et dont le graphisme soit formatable à souhait (typographie en italique, en gras, variations de police, de taille, possibilité d'indices et d'exposants).

Le second type de texte correspond à une sorte de *texte flottant* de taille arbitraire et déplaçable à volonté pour fournir par exemple l'énoncé d'un problème, le commentaire d'une figure, etc.

Dans les deux cas ces textes peuvent contenir des champs dynamiques qui peuvent afficher le résultat d'un calcul (éventuellement complexe) portant sur des caractéristiques textuelles et/ou numériques d'objets de la figure (mesure de segments, d'arcs, coordonnées, expression analytique des objets concernés, définition géométrique, etc.).

Macro-Constructions

La notion de macro-construction constitue l'une des spécificités de Cabri. Certains logiciels introduisent la possibilité de "rejouer" une séquence de commandes (ce que Cabri fait aussi) un peu dans l'esprit des macros-commandes d'Excel par exemple.
La notion de Macro-construction introduite avec Cabri est beaucoup plus puissante. A n'importe quel moment Cabri-géomètre offre la possibilité d'extraire d'un travail un cours ce qui est nécessaire et suffisant pour voir automatiquement se réappliquer sur un autre jeu d'arguments (d'objet géométriques) une construction enfouie dans une figure quelconque. Cabri-géomètre analyse la cohérence de la demande et produit les objets intermédiaires juste nécessaires à la construction.
Dans Cabri-géomètre II les nouveautés se situent d'un part au niveau de l'interface plus intuitive ainsi qu'à celui de l'enregistrement dans une macro des attributs graphiques des objets produits. Une autre nouveauté vient d'autre part de l'introduction de la notion d'arguments implicites ainsi que de la possibilité d'appliquer automatiquement des macros de façon itérative et même récursive.
Cabri-géomètre I permettait de créer des objet de type fractal, mais la procédure pouvait être pénible, avec Cabri-géomètre II, cela devient automatique et l'environnement peut

apparaître comme un véritable environnement de programmation, pour son apprentissage comme pour sa pratique.

L'aspect cahier de brouillon

Beaucoup d'élèves sont sensibles à la netteté et à la précision des figures qu'on peut obtenir à l'écran ou sur papier avec Cabri-géomètre. Cependant il peut arriver que cela constitue une gène pour une pratique de la preuve ou de la réflexion à propos d'une figure : on aurait aimé pouvoir griffonner sur l'écran, mettre facilement des marques pour signifier l'égalité de deux segments, de deux angles, etc.
De ce point de vue Cabri-géomètre II propose à tout moment une possibilité de marquage et de dessin à main levée à la surface de l'écran. Ces marques restent présentes tant que l'on ne déplace pas d'objet qui leur ferait perdre sens.

Correction des erreurs

Une possibilité très importante pour un logiciel est de permettre l'annulation de la dernière commande (le *pomme Z*, *-Undo* en anglais- de la plupart des logiciels). Dans Cabri-géomètre II l'utilisateur a la possibilité de remonter d'autant de pas que désirés dans sa construction (*Undo* infini).

Communication avec d'autres logiciels

Cabri géomètre II offre la possibilité d'un copier/couper/coller beaucoup plus avancé que celui de Cabri I. Tout ensemble d'objets peut-être sélectionné (les objets géométriques de la sélection courante ont un graphisme qui les rend très visibles, sans pour autant modifier leurs caractéristiques graphiques fondamentales. Une telle sélection peut-être collée dans la même figure ou exportée dans un autre fichier comme un objet graphique selon les principaux standards du domaine. Il est ainsi possible de “reprendre” dans d'autres logiciels les dessins de figures préparées et réalisées dans Cabri-géomètre II.

13. Présentation d'un scénario d'initiation à Cabri-géomètre en formation initiale d'enseignants.

Philippe CLAROU
IUFM de Grenoble

Présentation du scénario d'inititiation proposé dans le cadre de l'université d'été.

Dans le cadre d'une recherche regroupant le laboratoire LSD2, les IUFM de Grenoble et de Lyon et l'INRP, nous avons étudié un scénario permettant à des enseignants en formation (stagiaires PLC2 venant de réussir le Capes de mathématiques) de s'initier à l'utilisation de Cabri et de se faire une idée des utilisations possibles du logiciel dans les classes.

Au cours de l'université d'été, nous avons proposé un atelier sur l'utilisation de Cabri en formation. Ce scénario constitue l'un des exemples que nous avons présenté. De plus, en dehors de l'atelier, nous avons tenu à la disposition des participants qui voulait améliorer leur maîtrise du logiciel, les documents relatifs à la première partie de ce scénario en atelier d'autoformation.

Nous avons pensé que ce travail pouvait intéresser l'ensemble des participants de l'université d'été de deux manières :

- en qualité d'utilisateur pour ceux qui veulent s'initier à l'utilisation du logiciel ou avoir un exemple d'approche de la maîtrise du logiciel ;
- en qualité de formateur pour ceux qui étaient chargés de formation d'enseignants pour l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement, notamment dans le cadre de stage Mafpen.

Objectifs associés au scénario.

Dans cette présentation, nous nous sommes donnés comme objectifs :
- de faire connaître le logiciel Cabri-Géomètre, son fonctionnement et ses principales fonctionnalités,
- de sensibiliser les utilisateurs aux contraintes de la communication avec un dispositif externe pour qu'ils puissent imaginer plus facilement les difficultés que peuvent éprouver les élèves,
- de préciser la nature des objets géométriques mis en oeuvre dans Cabri,
- d'éclairer d'un nouveau point de vue, les contenus de l'enseignement grâce au logiciel Cabri-Géomètre,
- de donner un aperçu de différents possibilités d'utilisation dans l'enseignement.

Organisation du scénario

Le scénario original comporte trois parties.

La première partie permet aux utilisateurs d'aborder le fonctionnement du logiciel avec l'aide des documents. Comme nous avons pu l'expérimenter cette initiation peut se faire de façon assez autonome.

La deuxième partie nécessite une participation plus active de la part du formateur mettant en oeuvre le scénario. Elle comporte :
- une intervention bilan du formateur avec discussion permettant une mise en commun de l'expérience acquise au cours de ce premier contact avec le logiciel
- une intervention du formateur dépassant le seul emploi du logiciel et concernant la géométrie sous jacente à Cabri.
- une introduction à de nouveaux outils ; en particulier il est prévu que le formateur définisse avec une tablette de rétro projection une macro-construction réalisant la

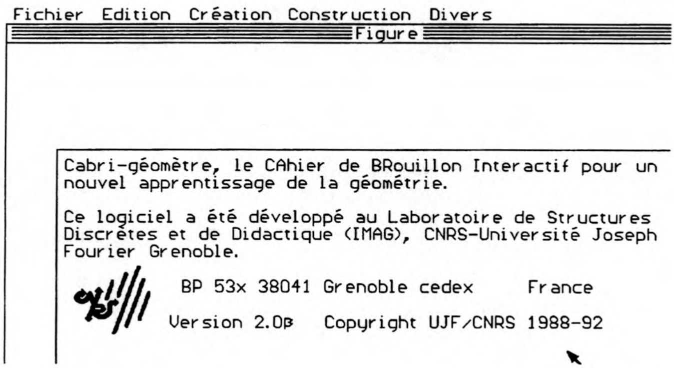
construction du cercle circonscrit à un triangle par simple désignation des sommets du triangle.
Cette deuxième partie est l'occasion :
- d'expliciter les principales caractéristiques des objets manipulés par Cabri (éléments de base, éléments construits),
- de préciser quelques contraintes de la communication avec un dispositif externe (nécessité de construire un point d'intersection, désignation des objets des objets dont on veut construire l'intersection et non de l'emplacement de cette intersection,...).

La troisième partie a pour objectif principal de présenter différents types d'utilisation de Cabri dans l'enseignement au collège et au lycée. On propose à l'utilisateur du scénario de réaliser lui-même les activités élèves. Il continue ainsi à cette occasion d'améliorer sa maîtrise du logiciel, de parfaire l'exploration des commandes des menus, d'approfondir sa prise de conscience des différentes caractéristiques de la géométrie faite avec Cabri.

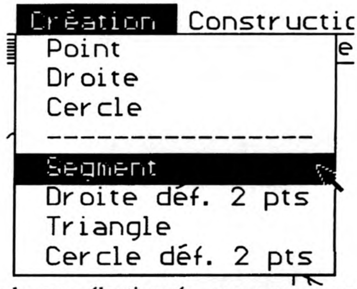
Il est certain que seule la première partie se prête à une travail d'autoformation. Les objectifs des deux dernières parties nécessitent une mise en commun et une confrontation de différents points de vue. Il est important aussi que le formateur puisse faire état de quelques expérimentations et de quelques exemples d'utilisation effective de Cabri dans une classe. Il pourra montrer comment, utilisé avec des élèves, ce logiciel conduit
- à une meilleure distinction entre dessin et figure,
- à une illustration des différentes configurations rencontrées dans l'enseignement secondaire
- à passer d'une propriété perçue à une propriété explicitable
- à une approche de ce que peut être une conjecture en géométrie

I. PREMIÈRE APPROCHE DE CABRI-GÉOMÈTRE

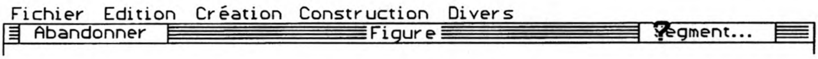
Ouvrir l'application Cabri-Géomètre.



Pour **dérouler** un menu, cliquez (avec la souris) le titre correspondant ; déplacez la souris ; lorsque l'article voulu apparaît en inverse vidéo, cliquez ; la commande correspondante est activée. Sur Mac, pour dérouler un menu, il est nécessaire de déplacer la souris en maintenant le bouton enfoncé jusqu'à ce que l'article choisi apparaisse en inverse vidéo.



Lorsqu'une commande est sélectionnée, son nom apparaît dans le bandeau supérieur. En cas de difficulté, vous pouvez obtenir une explication, à propos de la commande utilisée, en cliquant à l'aide de la souris l'intitulé de la commande situé en haut et à droite de l'écran (avant de cliquer, le curseur prend la forme d'un point d'interrogation).



Il est possible de réutiliser la dernière commande appelée, simplement en appuyant simultanément sur Alt <E> (sur Mac, « ⌘ » <E>).
Il est possible d'annuler la dernière action réalisée à l'aide d'une commande en appuyant simultanément sur Alt <Z> (sur Mac, « ⌘ » <Z>).

A. Menu «Création»

Exploration du menu «**Création**»

Créez un point. Déplacez ce point à l'aide de la souris (approchez le curseur près du point, et lorsque "ce point" s'affiche sur l'écran, déplacez la souris en maintenant enfoncé le bouton de la souris).

Créez une droite. Attention, pour créer une droite, cliquez la souris en maintenant le bouton enfoncé, déplacez la souris pour positionner la droite puis relâchez le bouton une fois que la droite est convenablement placée. Pour déplacer une droite après sa création à l'aide de la souris, approchez le curseur de la droite et lorsque "cette droite" apparaît à l'écran, cliquez et déplacez la souris tout en maintenant le bouton enfoncé. La droite se déplace parallèlement à elle-même. Il est possible de la faire pivoter en appuyant simultanément sur la touche «Alt» (sur Mac, touche «⌥»).

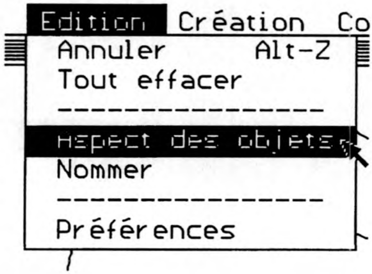
Créez une droite définie par deux points. Déplacez-la à l'aide des points qui ont servi à la définir.

Créez un cercle. Pour cela, cliquez à l'endroit où il faut placer le centre, maintenez le bouton enfoncé et déplacez la souris de façon à obtenir le rayon souhaité. Modifiez la position du cercle suivant le même principe que pour déplacer la droite. Il est possible de changer aussi le rayon en appuyant simultanément sur la touche «Alt» (sur Mac, touche «⌥»).

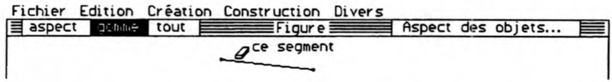
Créez un cercle défini par deux points : son centre et un point quelconque du cercle. Déplacez le cercle et modifier le rayon à l'aide des points marqués.

B. Menu «Edition»

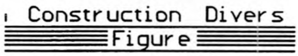
Déroulez le menu «**Edition**». Choisissez l'option «**Nommer**». Il est possible de nommer les objets précédemment créés à l'aide de la souris. Il faut pour cela s'approcher de l'objet, cliquer et taper un ou plusieurs caractères. Il est possible de déplacer avec la souris le nom et de nommer plusieurs objets. Lorsque il n'y a plus d'objet à nommer, il faut cliquer dans la bande supérieure bordant la figure pour sortir de la commande «**Nommer**».



Déroulez le menu «**Edition**». Choisissez l'option «**Aspect des objets**».Il est possible de cacher sans les supprimer



ou de souligner certains objets créés ou construits en utilisant la gomme ou le pinceau représentés dans le bandeau supérieur. Les éléments qui seront cachés apparaissent alors en pointillé.
Pour sortir de cette commande, il suffit de cliquer le bandeau supérieur :



Pour effacer tout, vous pouvez utiliser la commande «**Effacer tout**» du menu «**Edition**».

Dans la plupart des cas, il est possible d'annuler l'opération qui vient d'être effectuée en activant l'article «**Annuler**» du menu «**Edition**».

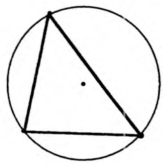
C. Premières figures (pour explorer quelques commandes)

1. Un triangle et une médiane de ce triangle

Dessinez un triangle de base (Ses trois sommets sont des points de base). Construisez le milieu d'un coté. Créez le segment dont les extrémités sont ce milieu et le sommet opposé. Si on déplace un point de base, que se passe-t-il pour la figure ?

2. Un triangle et le centre du cercle circonscrit à ce triangle

Dessinez un triangle de base. Créez un cercle («**cercle défini par deux points**») passant par un des sommets du triangle Déplacez le cercle et modifier son rayon de façon qu'il passe par les trois sommets. Que se passe-t-il si on déplace les sommets du triangle ?
Créez un cercle de base. Placez sur ce cercle trois points («**point sur objet**» menu **Construction**). Créez le triangle défini par ces trois points. Que se passe-t-il si on déplace les points ou si on modifie le cercle ?
Créez un triangle de base. Construisez les médiatrices de deux de ses cotés. Construisez l'intersection de ces médiatrices. Créez le cercle dont le centre est ce point d'intersection et passant par un des sommets du triangle. Cachez les médiatrices. Que se passe-t-il si on déplace les points de base ?
Supprimez un des sommets du triangle (menu **Divers**). Que se passe-t-il ? Effacez tout.



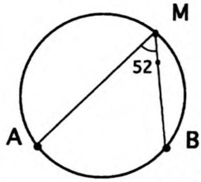
3. Triangle rectangle

Construisez un triangle rectangle. Cachez les traits de construction (menu «**Edition**»). Est-ce que vous pouvez déplacer les trois sommets du triangle ? Vérifiez que votre triangle reste rectangle en déplaçant les sommets.

Donnez deux méthodes de construction permettant d'obtenir un triangle rectangle dont on puisse déplacer les sommets tout en restant rectangle.

4. Angle inscrit ; Un lieu de points

Créez un segment AB et un cercle de centre O passant par A et B. Construisez un point M sur le cercle. Créez les segments MA et MB.



a) Marquez l'angle $\widehat{AMB}$ et mesurez-le (menu **Divers**) ; attention, pour sortir de la commande **mesurer**, cliquez le bandeau supérieur. Déplacez le point M sur le cercle. Que pouvez-vous constater ?

b) Construisez le centre de gravité du triangle AMB. Cachez les traits de construction de ce dernier. Construisez le lieu du centre de gravité (menu **Construction**) quand M se déplace sur le cercle.

5. Droite d'Euler (SI VOUS AVEZ LE TEMPS)

Effacez tout. Créez un triangle ABC. Construisez l'orthocentre H, le centre O du cercle circonscrit et le centre de gravité G. Mettez en gras le triangle. Cachez les droites et ne conservez que le triangle et les trois points H, O et G. Tracez les segments GO et GH et mesurez-les.

Déplacez les sommets du triangle et observez la disposition des points H, O et G ainsi que la mesure des segments.

II. A PROPOS DU LOGICIEL CABRI-GÉOMÈTRE

A. Développement de Cabri-Géomètre

Cabri-Géomètre a été en licence mixte. Il existe en environnement MacIntosh ou PC.

Il a été développé par Y. Baulac, Franck Bellemain et J.M. Laborde au Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique de l'Université J. Fourier de Grenoble (laboratoire associé au CNRS).

Il s'agit d'un **CA**hier de **BR**ouillon **I**nteractif pour un nouvel apprentissage de la géométrie.

B. Que permet Cabri-Géomètre ?

Cabri-Géomètre permet de créer des figures géométriques à partir d'éléments de base : point, segment, droite, cercle,... en utilisant les propriétés usuelles de la géométrie. Ces figures sont reconstruites instantanément si on modifie l'emplacement de tout élément de base en gardant les propriétés utilisées pour la construction.

C. Fonctionnement des menus

Par l'intermédiaire de menu, il est possible donc :

- de créer des objets géométriques (**Création** : **point, droite, cercle, triangle**),

- de construire des éléments (**Construction** : **milieu, médiatrice, droite parallèle, droite perpendiculaire, centre d'un cercle, lieu, point sur objet, symétrique, bissectrice**).
- de modifier la présentation d'une figure (**Edition** : **aspect des objets, nommer, préférences**).

Il est possible de retrouver la construction "pas à pas" d'une figure (**Divers** : **historique**). Les articles des menus ne sont activables que si les conditions d'exécution sont réalisées. Un article non accessible est affiché en grisé.

Il est possible de modifier ces menus :
- en supprimant l'accès à certains articles (**Divers** : **choisir les menus**)
- en créant des **macro-constructions** (une macro-construction est une suite de constructions élémentaires enchaînées à partir de certains éléments désignés ; elle est définie par l'utilisateur ; elle peut être enregistrée ou récupérée ; une fois définie ou ouverte, une macro-construction donne lieu à un nouvel article dans le menu Construction).

D. Plusieurs sortes d'éléments de base et d'éléments construits

Les différents éléments manipulés par Cabri-Géomètre :

1. Eléments de base

Point, droite, cercle.

2. Eléments de base construits à partir de deux points désignés ou marqués.

Segment, droite et cercle définis par deux points (pour le cercle définition par centre et point).

3. Eléments construits

Intersection de deux objets, milieu, médiatrice d'un segment, droites parallèles et perpendiculaires, centre d'un cercle, symétrique d'un point, bissectrices.

E. Plusieurs sortes de points

1. Points de base :

Ceux sont les points créés par l'option «point» du menu création ou marqués lors de la création d'un segment, d'un triangle, d'une droite définie par deux points ou d'un cercle définie par son centre et un point du cercle. Ils pourront être "saisis" à l'aide de la souris et déplacés. La figure se réorganisera en fonction de la nouvelle position des points et des propriétés ayant servi à la construction de la figure.

2. Points construits

Ceux sont des points obtenus par une construction comme le milieu d'un segment, le centre d'un cercle, l'intersection de deux objets. On ne peut les déplacer.

3. Points sur objets

Ceux sont les points qui ont été définis comme liés à un objet. On peut les déplacer mais ils resteront sur l'objet auxquels ils sont liés.

Remarque

Les objets de base ont le même aspect graphique que les autres objets.

On peut toutefois les reconnaître puisque, à leur voisinage, le curseur change de forme.

Il est également possible d'identifier ces objets de base en enfonçant le bouton de la souris dans la fenêtre active et en le maintenant enfoncé au moins une seconde : les objets de base se mettent à clignoter jusqu'au relâchement du bouton de la souris.

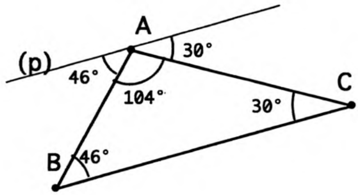
III. DIFFÉRENTS TYPES D'UTILISATION DE CABRI-GÉOMÈTRE

Pour chacune des activités suivantes, précisez, sur les feuilles annexes fournies,
- les objectifs du point de vue géométrique que vous leur assignez
- les types d'utilisation en classe et le type de traitement que vous anticipez de la part des élèves.

A. Pour visualiser une propriété

ANGLES D'UN TRIANGLE

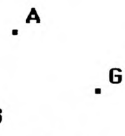
Créez un triangle ABC. Tracer la parallèle (p) au coté BC qui passe par A. Marquez les angles du triangle et ceux déterminés par (p) et les cotés AB et AC. Mesurez-les. Déplacez les sommets du triangle et observez les mesures des angles.



B. Pour poser des problèmes de construction

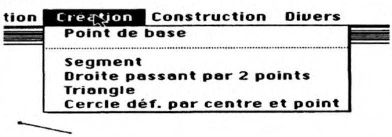
1. Deux sommets et le centre de gravité

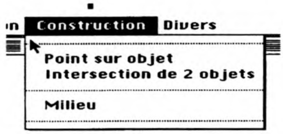
Créez deux points A et B. Créez un point G.



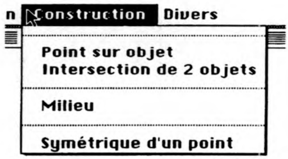
Construisez un triangle ABC dont le centre de gravité soit G en n'utilisant que les commandes figurant dans les menus suivants :

a) Menu 1



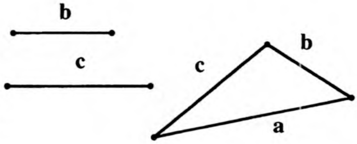


b) Menu 2 :



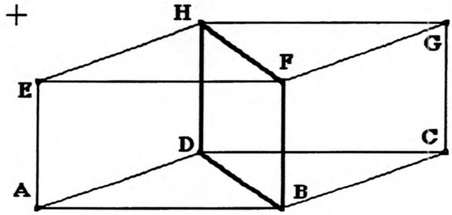
2. Avec un compas

Créez trois segments a, b et c.
Il s'agit de trouver comment construire un triangle dont les côtés ont pour longueur a, b et c. Vous pouvez essayer de réaliser une macro-construction permettant de construire un cercle à partir de la désignation de son centre et des extrémités d'un segment dont la longueur sera le rayon du cercle construit.



3. Section plane d'un pavé droit, en vraie grandeur.

ABCDEFGH représente un parallélépipède rectangle à base carrée en perspective cavalière.
Reproduisez le même dessin avec Cabri.
Représentez à coté, en vraie grandeur, la section BDHF.

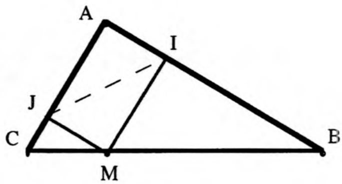


C. Pour conjecturer

MINIMUM

Le triangle ABC est rectangle en A
Un point M du segment [BC] se projette orthogonalement sur les cotés AB et AC respectivement en I et J.

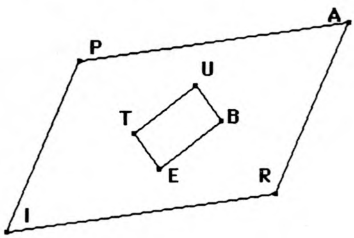
Comment choisir M pour que le segment [IJ] soit minimum ?



D. Pour poser de nouveaux types de problèmes géométriques

boite noire

Retrouvez les caractéristiques du dessin correspondant en déplaçant les points de base. Vous pouvez charger la macro-construction **boitenoire3**[16] pour vérifier si votre construction coïncide.



[16]La macro-construction **boitenoire3** fournit à partir des 4 sommets d'un parallélogramme le quadrilatère formé par ses bissectrices.

ANNEXES

Liste des participants et des intervenants

Concours de scénario

Liste des participants et intervenants de l'Université d'été

ARAGON	Mathilde	Lycée Marie Curie	ECHIROLLES	38130
AUTRAN	Jean-Louis	Collège Félix Pécaut	SALIES DE BEARN	64270
AYME	Nathalie	Lycée Evariste de Parmy	SAINT PAUL- LA REUNION	97460
AZAIS	Jean-Louis	Lycée Polyvalent	AUBUSSON	23200
BELLEMAIN	Franck	LSD2-IMAG BP53	GRENOBLE CEDEX 9	38041
BERGE	Christiane	IUFM de Toulouse	56 Av de l'URSS TOULOUSE	31078
BERGUE	Danièle	IREM	MONT SAINT AIGNAN	76130
BERTOMEU	Pierre	Collège Henri Bosco	LA VALETTE DU VAR	83160
BONNET	Jean-Francois	Collège Vallée du Gapeau	SOLIES PONT	83210
BOUTEILLER	Yves	Lycée Jean Monnet	JOUE LES TOURS	37306
CAPPONI	Bernard	LSD2-IMAG BP53	GRENOBLE CEDEX 9	38041
CARPENTIER	Jacques	IUFM	RENNES CEDEX	35043
CARRAL	Michel	IUFM - Secteur Sciences	TOULOUSE	31062
CECCONI	Serge	Collège Le Vergeron	MOIRANS	38430
CHOPIN	Claude	Collège du Carbet	FORT DE FRANCE	97208
CITRON	Serge	Collège Jean Zay	CHAMBON SUR VOREIZE	23600
CLAROU	Philippe	IUFM	GRENOBLE	38100
COMBRADE	Maryse	Lycée de l'Image et du Son	ANGOULEME	16000
COURIVAUD	Claude	Collège J. Régnier	BRIENNE LE CHATEAU	10500
CUPPENS	Roger	Université Paul Sabatier	TOULOUSE	31650
DEFLAUGERGUES	Marie	Lycée Pablo Néruda	ST MARTIN D'HERES	38200
DELGOULET	Jacques	Lycée René Gosse	CLERMONT L'HERAULT	34800
DESIGAUX	Martine	Collège Jules Flandrin	CORENC	38700
DUBAIL	Françoise	ISM - Université de Lyon 1	VILLEURBANNE	69000
DUPERIER	Michèle	IREM d'Orléans UFR sciences	ORLEANS CEDEX	45023
DUROT	Jacques	Collège d'Escarpe	LE HAVRE	76000
FIDENCI	Alain	Lycée Parc St Anne	RAMONVILLE	31520
GABILLET	Georges	MAFPEN	LILLE	59000
GENEVES	Bernard	Lycée Clément Marot	CAHORS	46000
GENN	Mireille	Lycée	NANTES	44300
GERMONI	Michèle	Collège Reynier	SIX FOURS	83140
GOIFFON	Régis	Collège Aragon	VENISSIEUX	69000
GUILLERMARD	Rirette	IUFM de Nice	NICE	06100
JAMART	Jean-François	Collège Elsa Triolet	SAINT DENIS	93200
JAUMOTTE-BUYSSE	Claire	Institut Notre Dame	BASTOGNE (BELGIQUE)	6600
KLASA	Jacqueline	Collège Vaniet, Saint Laurent	MONTREAL, QUEBEC	CANADA
LABORDE	Colette	LSD2-IMAG BP53	GRENOBLE CEDEX 9	38041
LABORDE	Jean-Marie	LSD2-IMAG BP53	GRENOBLE CEDEX 9	38041
LACHAMBRE	Bernard	Lycée Vietto	MONTBELIARD	25200
LACOU	Pierre	Ecole Saint Exupéry	BRAZZAVILLE	CONGO
LITTLE	Chris	Institute of education, University of London		
		20 Bedford Way, WC1H OAL	LONDRES	G B
LUGON	Serge	Ch. Tour Grise 19	LAUSANNE	SUISSE
MAILLARD	Jean-Pierre	Lycée technique de Yaoundé	YAOUNDE	CAMEROUN
MARTIN	Yves	5 chemin du Mesgnie	Ravine des cabris LA REUNION	97432
MAZAT	Guy	Collège Dargent	LYON	69003
MONOD	Jean-Daniel	Ch. Tour Grise 19	LAUSANNE	1007
MOUNIER	Gilles	IREM	GRENOBLE	38041
PANNETIER	Nicole	Collège Boileau	CHENNEVIERES	94430
PAYAN	Charles	LSD2-IMAG BP53	GRENOBLE CEDEX 9	38041
PETIT JEAN	Alexis	Lycée Stendhal	GRENOBLE	38000
PUISSANT	Claudette	Lycée Ferdinand Buisson	VOIRON CEDEX	38506
PYOT	Jean -Michel	Rectorat de Dijon	DIJON	21000
RAQUIN	Denis	Lycée F. Fays	VILLEURBANNE CEDEX	69615
RINALDI	Hubert	Lycée Général Leclerc	YAOUNDE	CAMEROUN

ROBBE	Françoise	Lycée J.M. Boivin	CHEVIGNY ST SAUVEUR	21800
ROBIN	Anne	Lycée "Parc Chabrières"	OULLINS	69600
ROLET	Christiane	IUFM	LYON	69004
ROUSSELET	Michel	Collège Georges Duhamel	HERBLAY	95220
ROUX	Gilbert	Collège de la Vallée du Gapeau	SOLLIES-PONT	83210
SANT	Jean-Marc	Lycée Molière	LARANJEIRAS-RIO DE JANEIRO	BRESIL
SEIGLE-FERRAND	Marie-Hélène	Collège A. Malraux	VOREPPE	38340
TAILLARD	Bernard	Collège Clairs Soleils	BESANCON	25000
THERET	Bruno	Lycée Blaise Pascal	LIBREVILLE	GABON
THOMAS	René	Collège Jean Daste	SAINT ETIENNE CEDEX	42023
THOUAULT	Jean	Collège Anne de Bretagne	RENNES	35000
VINAY	Monique	Lycée Bonaparte	AUTUN	71400
VIVIER	Gérard	IREM	GRENOBLE	38041
YONNET	Paricia	Lycée H. d'Estienne d'Orves	NICE	06000

Annexe 2

SCENARIO PEDAGOGIQUE

proposé par la "Cabri-élève" de l'Université d'été **Nathalie Aymé** 9-13 juillet 1993

CABRI-sensibilisation évolutive à des sections dans l'espace : compte-rendu d'une expérience vécue en classe de première S

SOMMAIRE DU CABRI-SCENARIO

INTRODUCTION

Avant de parler de ma première expérience pédagogique entièrement réalisée avec CABRI, je présente en deux mots l'historique de ma rencontre avec ce logiciel.

Je l'ai découvert lors d'un stage se déroulant sur six semaines (tous les vendredis après-midis) en octobre-novembre 1992, stage animé par YVES MARTIN qui, bien sûr, a su contaminer quelques participants : j'y ai attrapé le *"Cabri-virus "*.

Emballée par ailleurs par un T.P. de géométrie dans l'espace de l'IREM de STRASBOURG [1], j'ai tout de suite imaginé qu'une réalisation concrète de ce T.P. un peu difficile pourrait être facilitée par l'utilisation de l'*outil informatique* : CABRI.

J'ai donc préparé une séquence sur la géométrie dans l'espace constituée de plusieurs sections de volumes à chercher. Ces sections étaient des exercices à difficulté progressive et conduisaient naturellement aux sections du cube proposées par l'IREM de STRASBOURG.

I - PRESENTATION DU SCENARIO - OBJECTIFS

A - OBJECTIFS

Nous avons tout d'abord effectué une approche de type "mise en confiance" des exercices dans l'espace. Pour cela, j'ai d'abord distribué un document résumant les diverses propriétés sur l'espace vues en seconde. Ce rappel sur l'espace a été lu et commenté en cours. Les élèves ont eu à relire le cours en travail à la maison pour la semaine suivante, afin de bien préparer les séances qui allaient se dérouler.

Ce cours sur l'espace avait pour objectif d'arriver très rapidement et efficacement aux sections de solides. La distribution préliminaire du polycope sur l'espace était tout de même indispensable, bien que j'eusse pu considérer ces notions comme acquises en seconde. En effet, certains élèves m'ont dit n'avoir jamais fait ce genre d'exercices.

Je voulais donc que les élèves s'habituent rapidement à effectuer des sections de solides pour passer ensuite à des exercices plus complets et plus diversifiés.

L'intérêt, à mon avis, de faire faire à l'élève un grand nombre de sections, est qu'il intègre ensuite facilement le mécanisme à appliquer. Les sections, malgré des constructions un peu fastidieuses (*), deviennent ensuite machinales.

Toute cette phase de mécanisation a permis ensuite d'utiliser notre savoir-faire pour essayer de résoudre un problème d'optimisation [2] : recherche de la section d'aire maximale d'un cube par un plan perpendiculaire à l'une de ses diagonales. Ce problème d'optimisation dans l'espace est un "joli" problème qui donne lieu à la construction de très belles figures et qui met en oeuvre une fonction du second degré à maximiser : excellente occasion pour vérifier que les acquis du premier trimestre étaient bien assimilés (nous ne disposions pas encore de *"l'outil dérivée "*).

(*) CABRI et les disquettes d'exercices "pré-parées" nous ont permis de gagner un temps fou.

B - PRESENTATION DU SCENARIO

Dans le document distribué, j'insiste sur le fait que l'intersection de deux plans est une droite. Il peut donc être utile de prolonger les arêtes d'un solide pour trouver deux points qui appartiennent simultanément à une face du solide et au plan de section.

a) première phase du scénario : exercices - à difficulté évolutive - de familiarisation avec les sections de solides

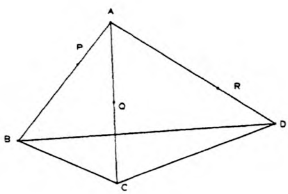
Le professeur doit être intransigeant en ce qui concerne la rédaction de la justification de la construction. Cette justification écrite était condition SINE QUA NON de passage à l'exercice suivant.

α) tétraèdre

La consigne pour tous les exercices suivants est de chercher la section du tétraèdre par le plan PQR.

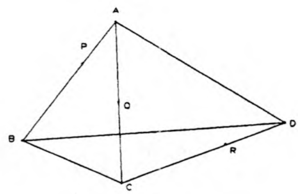
• Exercice 1

Le G éomètre, le CAhier de BRouillon Interactif
29 juillet 1993 - 11 H 10 A:\SCENARIO\SCEN_1\TETRA\EX_1.FIG



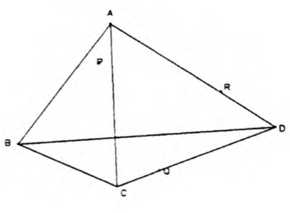
• Exercice 2

Le G éomètre, le CAhier de BRouillon Interactif
29 juillet 1993 - 11 H 12 A:\SCENARIO\SCEN_1\TETRA\EX_2.FIG



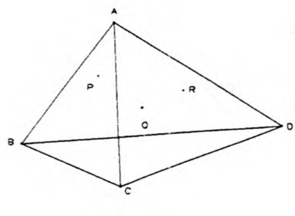
• Exercice 3

Le G éomètre, le CAhier de BRouillon Interactif
6 oo 01 1993 - 16 H 24 A:\SCENARIO\SCEN_1\TETRA\EX_3.FIG



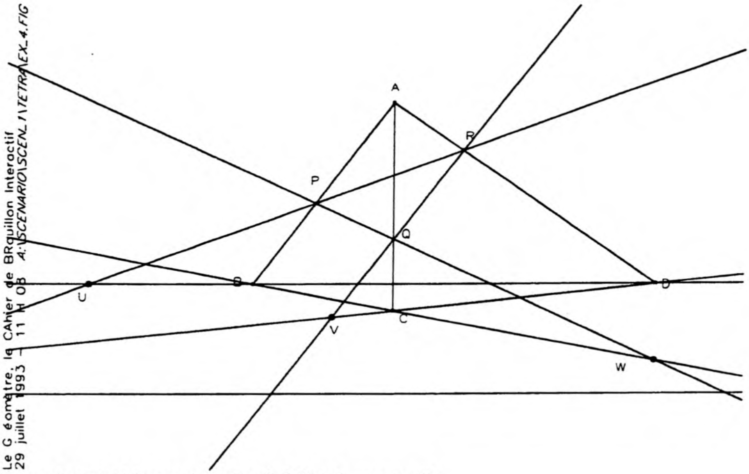
• Exercice 5

Le G éomètre, le CAhier de BRouillon Interactif
29 juillet 1993 - 10 H 59 A:\SCENARIO\SCEN_1\TETRA\EX_5.FIG



R est sur la face ABD, et Q sur la face ACD.

• Exercice 4

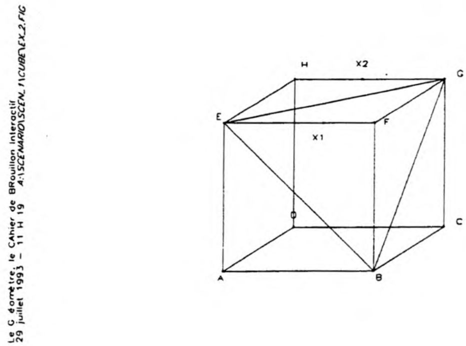


Les points U, V, W sont-ils alignés? Si oui, pourquoi?

β) cube

• Exercice 1
Section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à EBG passant par x_1

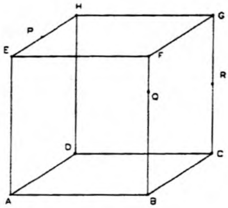
• Exercice 2
Section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à EBG passant par x_2



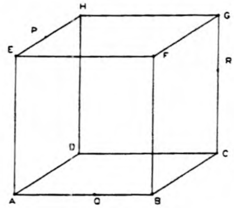
• Exercice 3
Section du cube par le plan PQR

• Exercice 4
même énoncé que l'exercice 3

Le G éomètre, le CAhier de BRouillon interactif
29 juillet 1993 - 11 H 21 A:\SCENARIO\SCEN_1\CUBE\EX_3.FIG



Le G éomètre, le CAhier de BRouillon interactif
29 juillet 1993 - 11 H 23 A:\SCENARIO\SCEN_1\CUBE\EX_4.FIG



γ) évaluation

Dans un devoir de 3 heures consacré à l'analyse et à l'espace, 4 exercices de sections d'un prisme par un plan PQR ont été proposés (notés sur 8 points et pour lesquels il fallait compter 1 heure).

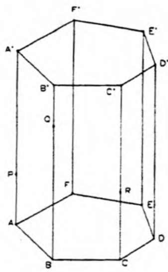
Seul un des quatre exercices devait donner lieu à une justification complète de la construction.

Exercices 1 à 3 : Section du prisme par le plan PQR

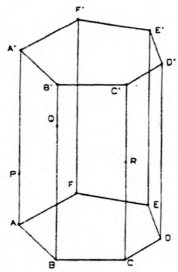
• Exercice 1

• Exercice 2

Le G éomètre, le CAhier de BRouillon interactif
29 juillet 1993 - 11 H 25 A:\SCENARIO\SCEN_1\EVAL\EX_1.FIG



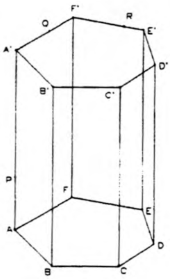
Le G éomètre, le CAhier de BRouillon interactif
29 juillet 1993 - 11 H 27 A:\SCENARIO\SCEN_1\EVAL\EX_2.FIG



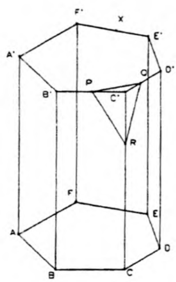
• Exercice 3

• Exercice 4 : Section du prisme par le plan passant par X parallèle à PQR

Le G éomètre, le CAhier de BRouillon interactif
30 juillet 1993 - 18 H 15 A:\SCENARIO\SCEN_1\EVAL\EX_3.FIG



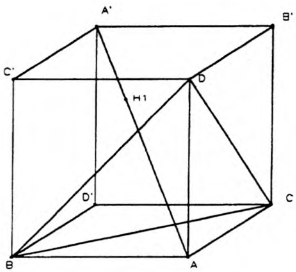
Le G éomètre, le CAhier de BRouillon interactif
29 juillet 1993 - 11 H 29 A:\SCENARIO\SCEN_1\EVAL\EX_4.FIG



b) deuxième phase du scénario : *section d'un cube par un plan perpendiculaire à l'une de ses diagonales*

On cherche à résoudre le problème suivant :

Quelle est la section d'aire maximale d'un cube coupé par un plan perpendiculaire à l'une de ses diagonales?



Un joli TP très détaillé de l'IREM de STRASBOURG guide l'élève vers la solution. J'ai donné ce TP en devoir à la maison. Les élèves l'ont trouvé difficile et ont mis plus de trois semaines à le faire. Ce TP met en oeuvre beaucoup d'autres concepts que les sections de solides : utilisation d'homothéties dans l'espace pour démontrer que des sections sont homothétiques, expression de l'aire de la section à maximiser. Ce TP était pour moi l'occasion de vérifier que les élèves arriveraient à réutiliser *"l'outil algébrique "* pour maximiser une fonction du second degré (avec 3 expressions distinctes) car nous ne disposions pas encore de *"l'outil dérivée "*.

Le TP demandait à l'élève, dans un premier temps, de montrer que (AA') est perpendiculaire au plan BCD. Si on appelle H l'intersection de [AA'] et de BCD et H_1 un point quelconque de la diagonale, il fallait dessiner dans un deuxième temps les diverses sections que l'on obtenait lorsque H_1 varie. La visualisation préliminaire de cette section à l'aide de CABRI m'a permis de leur demander quelle semblait-être la section d'aire maximale.

L'outil CABRI permettait donc d'émettre une conjecture concernant l'optimum. Les élèves étaient ensuite guidés par le TP pour aboutir à l'expression analytique de l'aire S de la section en fonction de la distance d du point A au plan de section (C^1 raccordement de trois paraboles) avec d = AH_1.

Ils devaient ensuite obtenir en utilisant l'outil algébrique le maximum de cette aire (maximisation d'aire à périmètre constant : c'est un problème d'optimisation de type isopérimétrique).

Un prolongement possible du scénario est de montrer aux élèves la section vraie-grandeur obtenue à l'aide de CABRI. Le formidable outil *"lieu de plusieurs points "* permet de reconstituer entièrement la représentation graphique de S(d) et de visualiser l'aire maximale de la section.

II - REALISATION ET MISE EN OEUVRE

A - PARAMETRE "TEMPS" DU SCENARIO

Le déroulement dans le temps du scénario s'est effectué comme suit (j'avais sur cette période alternance analyse-géométrie) :

Semaine 1	1h -	poly commenté rapidement
	2h -	exercices sur le tétraèdre - à terminer en travail personnel
Semaine 2	2h -	exercices sur le cube
Semaine 3	3h -	évaluation - analyse et espace;distribution du devoir maison *"les sections du cube "*
Semaine 4	1h -	correction évaluation partie espace
Semaine 7	1h½ -	correction des sections du cube

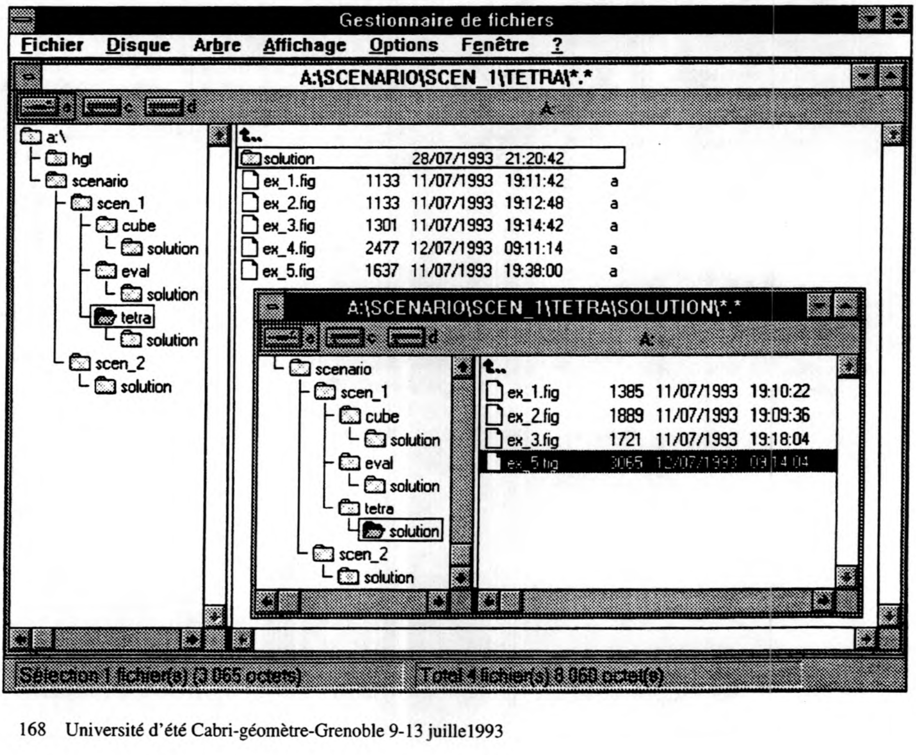
Quant aux séances consacrées aux exercices, elles se déroulaient ainsi :
après un temps moyen de recherche personnelle, environ 10 mn par exercice, les élèves discutaient entre eux et après 10 mn, un élève venait donner la solution sur ordinateur dont l'écran était rétroprojecté. La rédaction de la solution était d'abord formulée oralement puis rédigée au tableau. Cela nous prenait encore environ 10 mn. Tout ce travail représente donc environ 30 mn par exercice.

B - PARAMETRE "TECHNIQUE" DU SCENARIO

Tout le scénario a été réalisé à l'aide de CABRI ET GEOMETRE.

La mise en oeuvre est donc entièrement informatique et l'intérêt principal d'utiliser CABRI est de pouvoir fournir aux élèves des figures (au sens CABRI) déjà prêtes (le travail long et fastidieux de construction des solides est ainsi évité), ainsi que des fichiers-solution.

Voici la structure arborescente de la disquette accompagnant ce scénario :



C - PARAMETRES "ESPACE" ET "DISPONIBILITE SALLE-INFO" DU SCENARIO

En réalité, compte-tenu de la non-disponibilité de la salle informatique - prise d'assaut par les économistes - et compte-tenu de son encombrement spatial, toutes ces séances ont été réalisées en classe entière sous forme de séances rétroprojectées. Chaque élève disposait d'une sortie-papier du dessin CABRI à terminer, distribuée au fur et à mesure des exercices à traiter et sur laquelle ils écrivaient la preuve de la construction.

III - INTERET DE LA METHODE - RESULTATS - COMMENTAIRES

A - INTERET DE LA METHODE

a) motivation des élèves

Les élèves n'avaient pas l'habitude de ce genre de séances assistées par ordinateur. Ils n'ont pas eu de mal à canaliser leur attention sur ce qui se passait. Certains m'ont dit avoir l'impression d'être au cinéma! CABRI est un formidable outil d'aide à la visualisation et la présentation des sections variables sur l'écran les a émerveillés.

b) gain de temps

Il va sans dire que la préparation des dessins par le maître sur disquettes représente un gain de temps considérable. Tout l'aspect technique et laborieux de constructions de solides est évité (ces constructions ne présentent plus grand intérêt au niveau lycée). L'élève va pouvoir se consacrer de manière efficace à la résolution de l'exercice, le terminer plus rapidement, et en fin de compte, il aura effectué un plus grand nombre de sections en classe.

c) aspect ludique

Préparer à l'avance les dessins de base des exercices sur une feuille de papier est équivalent à utiliser CABRI dès lors que l'on omet l'aspect dynamique du logiciel. En effet, on pourra faire observer à l'élève l'effet produit par le déplacement d'un des points du plan de section sur la section : prolongement possible de ce genre d'exercices (il faudra alors penser à tous les cas de figure).

CABRI permet donc de manière efficace et ludique une animation dynamique des figures.

B - RESULTATS - COMMENTAIRES

Les élèves ont eu certains exercices à terminer sur feuille à la maison. Ils ont dans l'ensemble éprouvé beaucoup de difficultés à finir les premières sections sauf quelques uns qui "voyaient" bien dans l'espace (en général des garçons...). La justification des constructions n'était en général pas écrite, sauf exceptions.

Les évaluations

• devoir à la maison sur les sections du cube

Les élèves, préalablement bien imprégnés d'espace, ont été passionnés par le devoir sur les sections du cube. Certains m'ont rendu un devoir plus que conséquent : un devoir a été numéroté jusqu'à la page 51 avec de superbes dessins dans l'espace, construits à la règle et au compas (les traits de construction étaient encore apparents).

Dans l'ensemble, les sections étaient mises en évidence, par coloriage ou par hachures.

La justification de la section hexagonale n'a pas toujours été donnée, bien que j'aie insisté sur son caractère indispensable. Les élèves moins persévérants n'ont pas terminé le devoir. Ceux qui sont allés jusqu'à la recherche analytique de l'expression de l'aire de la section en fonction de la distance d du point A au plan de section (distance d = AH_1), en ont donné une expression correcte et ont bien obtenu que la section était d'aire maximale lorsque le plan de section passait par le centre du cube.

Certaines copies d'élèves méritaient d'être conservées. Une élève a pensé à effectuer une synthèse du problème dans un tableau dans lequel elle résume tous les cas de figure et les sections correspondantes.

La cabri-démonstration de la solution a beaucoup plu aux élèves.

Ce problème a débouché sur une activité de *"culture mathématique"* puisque nous avons commenté la solution donnée par BERGSON au concours général de philosophie en 1876 (auquel il a été classé 1er).

• devoir sur table

Des élèves ont très bien assimilé le scénario 1 : ils ont eu entre 6 et 8. Mais d'autres absolument pas, car visiblement ils ont construit n'importe quoi. Il n'y a a pas eu de juste milieu. Les élèves ont eu à refaire les sections à la maison.

CONCLUSION

Je n'ai pas assez d'expérience pour savoir si les élèves aiment ou n'aiment pas la géométrie dans l'espace en général. Mais j'ai nettement ressenti une appréhension de leur part lorsque nous avons abordé les sections, voire même un rejet épidermique, notamment de la part des filles.

Et comme je les comprenais! Avant de rencontrer mon ami CABRI, je détestais l'espace. J'éprouvais beaucoup de difficultés à dessiner une section quelle qu'elle soit, et j'y aboutissais au prix de gros efforts intellectuels. L'aspect ludique de CABRI m'a poussée à faire d'autres sections. Je me suis amusée à bouger les *"points sur objet"* et à généraliser les sections dans tous les cas de figure. Petit à petit, cette gymnastique de l'esprit que je m'étais imposée a commencé à porter ses fruits et j'ai fini par chercher moins longtemps la solution de ce genre d'exercices.

Je crois sincèrement que c'est le sentiment perçu par certains de mes élèves à la fin de ce scénario ou au moins après quelques mois, avec du recul.

Merci CABRI.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Géométrie 1es. IREM de STRASBOURG . ISTRA 1989.
[2] *"Intérêt d'une sensibilisation à des problèmes d'optimisation en lycée "*. Mémoire de CAPES pratique. Nathalie AYME 1991.
[3] Copie de BERGSON. Concours général de Philosophie .1876.

et bien sûr...
[4] "CABRI ET GEOMETRE" version 1.7 PC . LSD2-IMAG. GRENOBLE 1993.

ANNEXES

A1 / Sections du cube
A2 / La copie de BERGSON