

Introduction

La dérivée : une notion fondamentale de l'Analyse

On sait l'importance du premier contact avec une notion. En ce qui concerne la dérivée, c'est en première qu'on l'aborde, la même année que la notion de limite. Voici un fascicule qui prétend seulement à vous donner des idées pour aborder la dérivée, qu'elles soient d'ailleurs en accord ou non avec celles qui sont développées dans ces pages.

Il s'agit, en effet, pour l'enseignant, de faire des choix en tenant compte :

- * de ses élèves, de leur niveau, leur curiosité,

- * du texte officiel du programme :

"acquérir une bonne idée intuitive de la dérivation en un point...Combiner l'expérimentation graphique et numérique et le raisonnement mathématique" ;

- * de l'apport de la didactique :

il y a dans la dérivation une part intuitive, et cependant, c'est l'entrée dans une nouvelle problématique. Il faut une mathématisation capable de "donner du sens" dans le cas général, y compris dans les cas où l'intuition n'est plus efficace.

Voici donc trois textes.

Les deux premiers, l'un de Claude Pariselle et l'autre de Michèle Gandit, présentent, chacun à leur façon, l'introduction de la dérivée. Evidemment, on trouvera des répétitions, dans les objectifs et dans les activités. Mais chaque texte a son originalité, et on peut même dire qu'ils se complètent.

- "**La dérivée en première**", de Michèle Gandit, page 1, a pour premier objectif de développer chez les élèves, grâce aux graphiques, l'image mentale "nombre-dérivé - pente", au travers de deux activités de sensibilisation, destinées chacune à des publics différents (S, STI, d'une part, ES, L, STT, d'autre part). C'est l'aspect approximation affine locale qui est privilégié : il est ensuite procédé à une étude de l'erreur commise lors de cette approximation, avec le recours à la notion de quantité "négligeable devant" une autre.

- "**Du nombre dérivé vers les limites et le second degré**", de Claude Pariselle, page 53, donne non seulement une introduction du nombre-dérivé par l'étude de courbes de remplissage de citernes, mais aussi une organisation complète de l'enseignement des notions fondamentales d'Analyse de la classe de première .

Le troisième texte, "**La dérivée : les choix d'un enseignant en 1^{ère} ES**", de Claire Helmstetter, page 68, montre un exemple de l'influence qu'ont eue les deux premiers articles sur un enseignant de première ES.

La dérivée en première

Michèle Gandit

Introduction

Quelles idées les élèves de terminale (et les étudiants de DEUG) associent-ils à la dérivée ?
 $f'(x)$, tableau de formules, tableau de variations, formule magique pour trouver un extremum..., peut-être, mais c'est plus rare, pente, vitesse, taux...

Mon objectif principal

est donc de faire découvrir aux élèves de première
le concept de dérivée,
de manière à ce qu'ils s'en fabriquent des **images**,
qu'ils garderont au moins jusqu'à la classe de terminale, pour la plupart, et qui pourront éventuellement aider d'autres à entrer dans l'Analyse. Bien sûr, il faut du temps ! Mais, cette notion constituant, à mon sens, un des piliers du cours de première, je pense qu'il vaut la peine de s'y attarder, de la laisser mûrir lentement, et donc d'y travailler dès le début de l'année.

Ces pages, qui sont destinées à des enseignants, présentent une manière d'introduire
la notion de dérivée en classe de première,
en s'appuyant sur un fonctionnement du cours sous forme de "**débat scientifique**" : je ne décrirai pas ici cette façon d'enseigner, je dirai seulement qu'il ne s'agit pas simplement d'un échange d'idées entre le professeur et les élèves, mais d'un cours, d'une gestion très rigoureuse où les élèves sont tenus de s'engager complètement, eux-mêmes responsables du vrai et du faux, jusqu'à ce que le professeur juge du moment où il va institutionnaliser le savoir.

Plan suggéré

- 1) Sans avoir à passer du temps à des "révisions rébarbatives", vous pouvez débiter le cours par **une** des activités d'introduction, choisie en fonction du type de classe :

- la première activité d'introduction, **Etude d'un extremum d'une fonction**, page 4, a été expérimentée dans deux classes de première F₁ (enseignement technique, spécialité mécanique) et dans une classe de première S,

- la deuxième activité d'introduction, **Etude de la rentabilité d'une entreprise**, page 12, a été expérimentée dans une classe de première G (enseignement technique tertiaire) et dans deux classes de première B (enseignement classique, option économique et sociale).

Chacune de ces activités, mettant en jeu quelques notions de seconde, est à mener sur plusieurs heures de cours.

2) Puis **Introduction de la notion de nombre-dérivé** (voir page 24) au travers du

Problème 1 - Construction de l'image mentale "nombre-dérivé - pente" (page 25)

dont il me semble indispensable de traiter la première partie 1A, à savoir, l'étude de la fonction "carré" au voisinage de quelques points. Quant à la partie 1B, traitant des justifications, elle est plus difficile à étudier dans des classes non scientifiques. Suivant le temps passé à la partie 1A, et éventuellement à la partie 1B, ce qui est présenté dans la partie 1C peut faire l'objet d'un travail en dehors des heures de cours.

3) Ensuite **Introduction de la notion de fonction dérivée** (voir page 24), au travers du

Problème 2 - Notion de fonction dérivée (page 39)

indispensable dans chacune des classes, mais dont la partie graphique peut être donnée à faire aux élèves en dehors de la classe.

4) Enfin, un **Résumé** (page 42) me semble nécessaire pour mettre les choses au point et l'**annexe 3** (page 47) permet de faire le lien entre les différentes façons de traduire qu'une fonction est dérivable en un point.

Objectifs précis visés au travers de ce plan

Tout d'abord, amener les élèves à se poser des questions et à se construire des images mentales sur le concept de dérivée

Cet objectif est poursuivi dans les trois parties, au travers de situations décomposées en plusieurs problèmes pour faciliter leur étude sous forme de débat. Les quelques éléments de réponse qui les suivent ne constituent qu'une piste pour le maître, la richesse du débat dépendant essentiellement de la classe : des digressions relatives aux notions primaires contenues dans ces questions peuvent surgir à tout moment, qu'il ne s'agit surtout pas de contrecarrer.

De manière plus détaillée, il s'agit de :

- 1) motiver les élèves à procéder à des études locales de certaines fonctions
 - pour trouver un extremum d'une fonction, celle qui à x associe $3x^3 + \frac{1}{x}$, dont la représentation graphique dans un repère ne permet pas facilement les conjectures (*activité d'introduction destinée plutôt aux classes scientifiques*),
 - pour obtenir précisément les variations du bénéfice réalisé par une entreprise en fonction de la production journalière de voitures (*activité motivante pour les classes des sections économiques*) ;
- 2) sensibiliser à la notion de pente d'une courbe en un point
 - par l'intermédiaire de la calculatrice graphique en ce qui concerne la première activité,
 - en utilisant seulement le graphique-papier au travers de l'étude du bénéfice ;
- 3) construire l'image mentale "nombre-dérivé - pente" au travers de l'étude graphique de fonctions de référence au voisinage de quelques points ;
- 4) amener à la notion de fonction dérivée, toujours en s'appuyant sur le graphique.

Ensuite définir les notions introduites, avec le recours aux échelles de comparaison, la notion de "...négligeable devant...".

C'est l'objet de la dernière partie, où il s'agit de passer à la formulation des définitions en insistant sur l'importance de la notion d'ordre de grandeur.

Remarque

"Mais la dérivée, c'est pas aussi compliqué ! La limite du taux d'accroissement $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, quand h tend vers 0, la sécante (AM) qui pivote autour de A et qui tend vers ..., et c'est terminé ! Ah oui, il y a l'histoire du développement limité d'ordre 1 qui passe mal, mais ils verront plus tard !"

Bien sûr que c'est terminé ! Mais pour qui ?

Ce sont plusieurs années d'insatisfaction après avoir enseigné ainsi la dérivée en première, qui m'ont amenée à réfléchir sur "faire autrement" pour faire passer cette notion aux élèves, persuadée que cela valait la peine, même dans les classes non scientifiques.

Aucune des activités suivantes n'a, à mon avis, à être utilisée telle que je la raconte : elles sont à "démonter" et à "remonter", suivant le goût de chacun. Mon objectif est seulement de donner quelques idées : que vous les partagiez ou que vous vous y opposiez, je serai de toute façon très contente d'en discuter avec vous si vous me faites part de votre opinion.

Première activité d'introduction : étude d'un extremum d'une fonction

Objectifs

- 1) Faire prendre conscience aux élèves de l'insuffisance des moyens dont ils disposent au début de ce cours, pour déterminer le sens de variation d'une fonction donnée, la valeur exacte en laquelle elle a un maximum.
- 2) Introduire la notion d'approximation affine d'une fonction.
- 5) Motiver les élèves à l'**étude locale** d'une fonction : leur montrer l'intérêt de pouvoir remplacer **localement** une courbe par une droite.

Connaissances préalables

- 1) Savoir programmer une calculatrice, si possible graphique (mais la calculatrice graphique n'est pas indispensable ici).
- 2) Avoir vu, au travers d'activités, qu'un tableau de valeurs, est totalement insuffisant pour connaître les variations d'une fonction.
- 3) Connaître les notions de fonction croissante, décroissante, dans un intervalle, et celles de maximum et minimum d'une fonction.
- 4) Avoir vu, au travers de quelques manipulations de fonctions, que la calculatrice graphique ne nous permet pas toujours de déterminer du premier coup d'œil leurs variations : d'après l'écran de la calculatrice, on dirait que la fonction est croissante sur $[a ; b]$ et décroissante sur $[b ; c]$, mais en fait elle ne présente pas de maximum en b , elle...
- 5) Savoir déterminer graphiquement le coefficient directeur (ou pente) d'une droite et savoir tracer une droite dont on connaît un point et le coefficient directeur.

Public auquel elle s'adresse

Essentiellement les classes scientifiques ou techniques.

Forme du travail et durée approximative

Deux heures de cours sans compter le travail nécessaire aux connaissances préalables, et du travail à donner "à faire à la maison".

Première partie : un problème auquel il est difficile de répondre

L'énoncé suivant est donné à la classe

Voici une fonction qui intervient dans un calcul qui nécessite la plus grande précision possible, pour les valeurs de la variable dans $[-1,0[$; il s'agit de la fonction f qui à x associe $3x^3 + \frac{1}{x}$; admet-elle un maximum dans cet intervalle et, le cas échéant, peut-on le déterminer exactement ?

Remarque : le choix de travailler dans $[-1,0[$ est motivé par la volonté de faire travailler les élèves avec des nombres négatifs (cela se discute !), et éventuellement de faire surgir au cours du débat les problèmes qui s'y rattachent. On peut évidemment s'y soustraire en transposant le problème dans $]0,1]$ si on remarque que la fonction à étudier est impaire (le débat permettant peut-être de faire alors le point sur cette notion).

Les élèves sont en activité de recherche, aucune indication ne leur est donnée ; seul un délai d'une dizaine de minutes leur est fixé, au bout duquel leurs idées sont collectées.

Que peut-il ressortir du débat engagé avec les élèves ?

1 - Le calcul d'un très grand nombre de valeurs prises par la fonction entre -1 et 0 est totalement insuffisant, mais il donne tout de même des renseignements intéressants.

2 - La décomposition de f en somme de fonctions élémentaires de sens de variation connu n'est pas utilisable dans ce cas.

3 - L'étude directe comparant les images de deux éléments quelconques de $[-1,0[$ conduit à des calculs trop compliqués.

4 - La courbe donnée par une calculatrice graphique nous renseigne peut-être mieux que le tableau de valeurs, mais rien ne permet d'affirmer que la fonction n'a pas des variations qui échappent à la calculatrice (il est utile qu'aient été étudiés auparavant quelques cas de fonctions où le sens de variation conjecturé à la calculatrice est mis en défaut par le raisonnement : voir "connaissances préalables, page 4).

5 - On s'aperçoit bien (!) que la fonction présente un maximum : mais, après tout, est-on sûr de son existence ? Il est souhaitable de signaler aux élèves que la question porte d'abord sur son existence, ensuite sur sa détermination : il semble très difficile de lire graphiquement la valeur de x pour laquelle il est atteint ; on conjecture seulement qu'elle est voisine de - 0,55 ; mais, après tout, la fonction a peut-être des variations qui nous échappent...

6 - Comment se ramener à la résolution d'un problème plus simple, mais qui permette d'approcher plus finement la question ?

Toutes les idées précédentes ne sont pas nécessairement évoquées par les élèves, surtout s'il a été choisi de traiter de la dérivée dès le début de l'année. Il ne s'agit que de pistes qui peuvent

être suivies, mais comme je l'ai déjà signalé, un cours sous forme "de débat scientifique" peut donner lieu à des échanges très diversifiés entre les élèves, qui permettent justement de mieux cerner les idées.

Lors de mes expérimentations, j'ai constaté que le premier point apparaissait facilement, par contre les points 2 et 3 ne ressortent pas spontanément des débats dans les classes non scientifiques. Quant au point 4, en début d'année de première, certains élèves ne manipulent pas facilement la calculatrice graphique, la courbe semble difficile à obtenir : je finis par donner un cadrage du type suivant : $X_{\min} = -1$; $X_{\max} = 0$; scl = 0,05

$$Y_{\min} = -20 ; Y_{\max} = 0 ; scl = 5$$

Il se peut que les élèves conjecturent la position du maximum, uniquement d'après un tableau de valeurs, balayant d'un pas très serré le voisinage supposé du point correspondant au maximum.

Deuxième partie : vers la notion d'approximation affine locale de la fonction, idée de ligne brisée

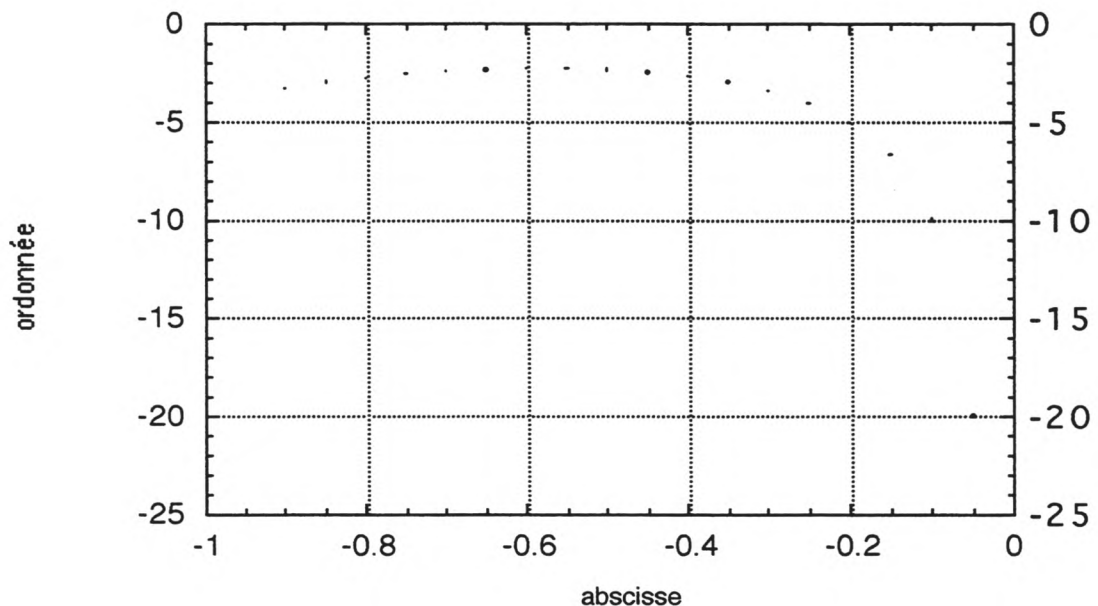
L'idée poursuivie ici (et elle est à dire en partie aux élèves) est de chercher d'autres renseignements sur la fonction, qui pourraient permettre d'affirmer que la fonction est strictement croissante sur un intervalle $[-1 ; a]$ et strictement décroissante sur $[a ; 0]$, ou encore que "la courbe monte, puis descend sur un intervalle, le trait est penché positivement, puis négativement", même s'il semble horizontal sur le dessin, même si la calculatrice donne la même valeur de $f(x)$ pour des valeurs de x différentes : pour mieux approcher cette idée, on va provisoirement laisser de côté la question de la partie précédente (la preuve de la conjecture apparaissant difficile !), pour essayer de quantifier cette idée de "trait penché". C'est donc l'aspect graphique qui va être privilégié dans ce qui suit, justement pour développer cette image mentale du nombre-dérivé - pente.

Graphique

Tous les élèves ne possédant pas nécessairement une calculatrice graphique, on se reporte au graphique-papier : on demande aux élèves de représenter dans un repère les points trouvés grâce à la calculatrice en faisant varier l'abscisse x de 0,05 en 0,05 de -0,9 à -0,05, sur une feuille de papier millimétré : les points d'abscisses -0,6 et -0,5 ont pratiquement la même ordonnée !

On peut alléger le travail des élèves en leur donnant le graphique ci-dessous. Cependant, s'ils ont déjà conjecturé que la fonction avait un maximum pour une valeur de la variable autour de -0,55, il peut être plus intéressant de demander un graphique où l'abscisse varie dans un intervalle beaucoup plus petit autour de cette valeur.

Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=3x^3+1/x$



Question 1 débattue avec la classe : ligne brisée

- 1) Comment joindre les points obtenus ? Que penser du fait de les joindre à la règle ?
- 2) Lire graphiquement le signe du coefficient directeur de chacune des droites utilisées si l'on relie les points consécutifs placés sur le graphique à la règle.
- 3) Par exemple, autour de $x = -0,225$, c'est à dire ici entre $-0,25$ et $-0,2$, la courbe peut-elle être remplacée, **de manière satisfaisante**, par le segment qui a pour extrémités les points d'abscisses $-0,2$ et $-0,25$ placés sur le graphique ?
- 4) La ligne brisée ainsi obtenue est-elle proche de la forme véritable de la courbe qui représente f ou en est-elle très différente ?

Quelques idées qui émergent

- Ce sont les fonctions affines qui sont les plus simples à représenter.
- "Mais ici on sait bien que l'on ne doit pas joindre les points à la règle, le trait doit être arrondi".
- Arrondi comment ? On ne sait pas. Il faudrait que l'on sache comment "le trait est penché en chaque endroit de la courbe".
- Sur le graphique, on distingue bien mal la "courbe" du segment qui a pour extrémités les points d'abscisses $-0,2$ et $-0,25$. C'est la même chose autour de bien d'autres points que celui d'abscisse $-0,225$. Et même, on voit "presque arrondi" le trait constitué d'une succession de segments ayant pour extrémités les points consécutifs placés sur le graphique.

- Il semble assez satisfaisant de remplacer la courbe par une ligne brisée, tout au moins sur toute une partie.
- Les échelles choisies sur les axes sont d'une grande importance : il se pourrait qu'avec d'autres échelles, on ne trouve pas satisfaisant d'approcher la courbe par cette ligne brisée. Peut-être pourrait-on en trouver alors une autre ?

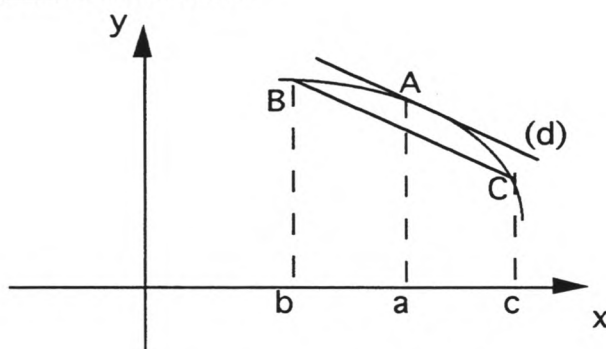
On propose que

s'il est possible de remplacer la courbe "autour d'un point" par une droite (ou plutôt un segment de droite), il sera alors possible d'attacher à ce point le coefficient directeur (ou la pente) de cette droite, si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées du repère. Ce nombre permettant d'évaluer "comment le trait est penché à cet endroit", on appellera ce nombre la **pente de la courbe en ce point**.

Le problème de l'existence de la pente d'une courbe représentative d'une fonction dans un repère cartésien est à remettre à plus tard, il me semble.

Remarque

qui sera peut-être évoquée par les élèves au cours du débat précédent, ou plutôt à faire seulement à la fin de cette activité.



Dans ce qui précède, autour de A, dont on ne connaît pas précisément l'ordonnée, la courbe est approchée par [BC]. Ce que l'on appelle la pente de la courbe au point A est donc approché par le coefficient directeur de (BC), qui est aussi celui de (d).

Notons que, d'après un dessin qui laisse apparaître un tel écart entre la courbe et [BC],

l'approximation de la pente de la courbe au point A par le coefficient directeur de (d) ne sera pas jugé satisfaisant.

Questions 2 et 3 : intérêt de connaître la pente localement et lecture de pente

- 1) Quel intérêt peut présenter la connaissance de la pente de la courbe en chacun de ses points pour la détermination du sens de variation de la fonction ?
- 2) Choisir $x = -0,6$ (par exemple, ou bien $-0,5$, ou bien encore $-0,55$, le maximum présumé se trouvant atteint pour x aux environs de ces valeurs) ; comment pourrait-on déterminer la pente de la courbe au point d'abscisse $-0,6$? En recherchant parmi les droites qui passent par A,

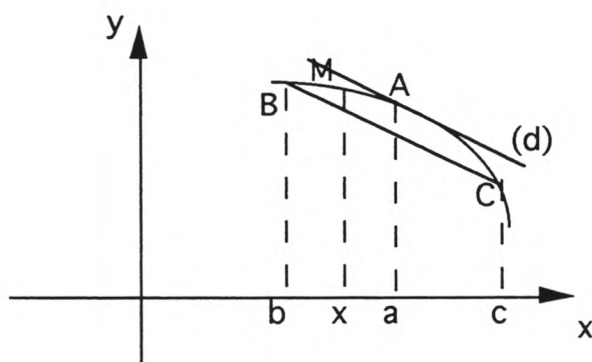
quelle est celle qui épouse le mieux la forme de la courbe au point d'abscisse - 0,6 ? La dessiner sur le graphique précédent.

3) La fonction f présente-t-elle un maximum en - 0,6 ?

Quelques idées qui émergent

Si un travail préparatoire assez poussé a été fait sur la détermination du coefficient directeur d'une droite et sur le lien entre son signe et le tracé de la droite, les élèves évoquent assez facilement la relation entre le signe de la pente de la courbe en chaque point et le sens de variation de la fonction.

A ce point de l'activité, une bonne partie des élèves pense que le travail sur la pente de la courbe va déboucher sur un outil puissant dans l'étude des variations d'une fonction.



Il est peut-être préférable de faire seulement ici la remarque et le dessin évoqués ci-dessus, en y ajoutant qu'on peut aussi avoir une approximation de la pente de la courbe au point A en recherchant "la meilleure" (d) possible, parmi les droites qui passent par A : on évalue le coefficient directeur de (AM), en considérant des points M de la courbe de plus en plus proches de A.

Remarque : sauf si c'est véritablement un problème posé par la classe, on ne cherchera pas à démontrer (dans cette activité d'introduction) que l'on finit par obtenir la (même) pente au point A en déterminant les coefficients directeurs des segments du type [BC], B et C se rapprochant sur la courbe du point A.

Voici par exemple comment on peut utiliser la calculatrice casio fx 7500G pour l'étude au voisinage de - 0,6.

1 - Programmer le tracé	2 - Initialiser le cadrage	3 - Afficher la première courbe	4 - Faire une loupe avec le facteur 2
MODE 2 Prog 0 Graph $Y = 3x^3 + \frac{1}{x}$	Range : $X_{\min} = - 0,65$ $X_{\max} = - 0,55$ $X_{\text{scl}} = 0,01$ $Y_{\min} = - 2,4$ $Y_{\max} = - 2,25$ $Y_{\text{scl}} = 0,05$	Prog 0 EXE	Plot -0,6 , $3(- 0,6)^3 + \frac{1}{- 0,6}$: Factor2 : Prog 0

Le simple appui sur EXE donnera à chaque fois la loupe demandée, le graphique restant centré sur le point A.

Remarque : la loupe est beaucoup plus simple avec les calculatrices fabriquées postérieurement à la casio fx 7500 G (TI 81, TI 82, TI 85, Casio fx 6800 G, Casio fx 7800 G...).

Au bout d'un certain nombre de loupes, que constate-t-on ?

La courbe se confond avec une droite. Pour confirmer cette impression, on peut procéder au tracé d'un segment par-dessus la courbe, à chacun des agrandissements, et noter l'étape à partir de laquelle on ne distingue plus les deux traits ; mais cette activité n'est pas nécessaire, surtout si les élèves ont du mal à utiliser leur calculatrice. Ils s'aperçoivent tout de même qu'à partir d'un certain moment "le trait est tout droit".

Avec la calculatrice graphique, on peut tracer un segment [AM] : en prenant pour M le point le plus éloigné de A sur la courbe qui se trouve à l'écran.

Plot -0,6 , $3(-0,6)^3 + \frac{1}{-0,6}$: Plot -0,6 , $3(-0,6)^3 + \frac{1}{-0,6}$: EXE Trace (déplacer le point clignotant à l'aide des flèches jusqu'au point désiré) Line EXE.

La courbe et la droite (AM) ne se distinguent plus l'une de l'autre.

Lecture graphique de la pente de la courbe au point d'abscisse - 0,6

Par déplacement du curseur grâce aux flèches, la pente qui se lit est :

$$\frac{-2,313961692 - (-2,31471774)}{-0,5984375 - (-0,6)} \approx 0,48$$

Que peut-on tirer d'un tel calcul ?

Pour cette valeur de x, on peut conclure que la pente est strictement positive, ce ne doit donc pas être en - 0,6 que la fonction atteint son maximum. Mais attention ! Si on fait un calcul en un point qui donne pour la pente une valeur voisine de 0 : on ne conclura pas que le maximum n'est pas atteint pour cette valeur. Si on fait un calcul en un point qui donne pour la pente 0 : on ne conclura pas plus que le maximum est atteint pour cette valeur. La calculatrice ne fonctionne qu'avec des valeurs approchées !

Dessin de cette droite sur le graphique-papier : un peu de recul

Il s'agit de compléter le dessin déjà obtenu, de façon à sensibiliser les élèves au dessin de cette droite, qui "était" la courbe elle-même, lors de la dernière loupe de la calculatrice, mais qui s'en distingue tout de même beaucoup dans le repère choisi au départ : on demande aux élèves "d'inverser le zoom", l'idée étant qu'ils reconnaissent que finalement la droite trouvée et la courbe n'ont qu'un point commun. "L'inclinaison" de la droite peut être mise en évidence sur le graphique par la représentation d'un de ses vecteurs directeurs.

Pour finir

Je pense qu'il est inutile de pousser plus avant l'étude de cette fonction, à la recherche de la valeur de x pour laquelle f est maximale, dès lors que les élèves soupçonnent que l'on puisse trouver, pour chaque point de cette courbe, une droite qui soit confondue avec elle au bout d'un certain nombre de loupes, et qu'ils sentent l'importance de la pente de la courbe en un point et son lien avec le sens de variation de la fonction représentée.

Cette activité n'était qu'un support à la construction de cette image du nombre-dérivé (mot qui n'a pas d'ailleurs été prononcé !) comme une pente. Il est fort probable que beaucoup des idées et problèmes (délicats, il est vrai), que j'ai signalés ci-dessus, ne vont pas être évoqués par les élèves (voir, par exemple, la remarque de la page 8, qui se prolonge à la page 9) : ce fut le cas lors de mes expérimentations. Je pense qu'il est absolument inutile (voire néfaste) que le professeur éveille l'attention de la classe sur ces points, lors de cette activité de sensibilisation : ces questions ressortiront nécessairement plus tard, et venant des élèves. Ne répondons pas maintenant à des questions qu'ils ne se sont pas encore posées !

Par contre, à la fin de cette activité, une synthèse est à faire. Il doit être clair pour tous :

- que l'on se ramène à une sorte de linéarisation locale de la fonction (cette grande idée des mathématiques qui consiste à remplacer toujours la résolution d'un problème complexe par celle d'un problème beaucoup plus simple, dont on maîtrise la solution) ;

- que l'on entre dans une partie des mathématiques très subtile, où les stratégies vont être d'un autre ordre que celles que les élèves connaissent jusque là, relatives au calcul algébrique ou à la géométrie (j'ai d'ailleurs entendu un élève formuler lui-même cette idée en début de première S en 1994) ;

- que l'on dispose d'un autre outil pour "mesurer" les variations d'une fonction : les élèves doivent avoir appris comment manipuler leur calculatrice pour lire la pente d'une courbe en un point ;

- que même si l'on confond localement la courbe avec une droite, pour en mesurer la pente, en réalité, la courbe et la droite n'ont qu'un point commun ;

- enfin que le graphique et les calculs des valeurs de la fonction, même ceux qui sont donnés par la calculatrice, sont utiles pour s'initier, mais constituent finalement des supports rudimentaires, compte tenu de la subtilité des idées de l'Analyse : les dessins ne peuvent en fait que se construire par la pensée.

Deuxième activité d'introduction : étude de la rentabilité d'une entreprise

Dans le domaine relatif à l'étude de l'entreprise, avait été admise, jusqu'à ces dernières années, une théorie élaborée dès la fin du siècle précédent, basée sur le modèle dit "classique", se fixant pour objectif la maximisation des bénéfices - différences entre recettes et charges - au moyen de fonctions de recettes et de courbes de coût, la décision étant le résultat de calculs marginaux.

En voici un exemple au travers de l'activité suivante. Il est cependant à noter que le calcul marginal, qui est synonyme de calcul différentiel, est actuellement abandonné, dans les modèles néo-classiques de l'entreprise, au profit de différents algorithmes dits "de recherche opérationnelle".

Objectifs

Cette activité présente donc un aspect du calcul marginal, donnant dès le début **du sens** au calcul du nombre-dérivé et **une interprétation tout à fait concrète** ; elle ne nécessite toutefois **aucune connaissance préalable** des élèves dans ce domaine.

Un autre de ses objectifs est de donner une vision graphique de ce que l'on appellera par la suite **le nombre-dérivé d'une fonction en un point ou encore la fonction dérivée** : ces notions ne seront vues ici que sous le jour de **coût marginal d'une production journalière de voitures ou fonction " coût marginal"**.

Remarque sur la présentation de l'énoncé de l'activité

Pour mettre facilement en relief les objectifs pédagogiques de ce problème et pour permettre le partage de son étude sur plusieurs heures de cours, durant lesquelles le débat peut s'instaurer autour d'une ou plusieurs questions, cet énoncé est fractionné en quatre étapes ; il est cependant essentiel qu'à tout moment l'élève sache ce qu'il est en train d'étudier, ne perdant pas de vue le but initialement fixé. Aussi de fréquentes mises au point sont-elles indispensables, qui sont facilitées par les titres donnés aux différentes parties, ceux-ci n'étant d'ailleurs pas communiqués à la classe au départ, mais plutôt en guise de conclusion. Seuls les énoncés et questions sont donnés aux élèves, ainsi que certains graphiques.

Le public auquel cette activité s'adresse est essentiellement constitué des élèves qui suivent un enseignement d'économie.

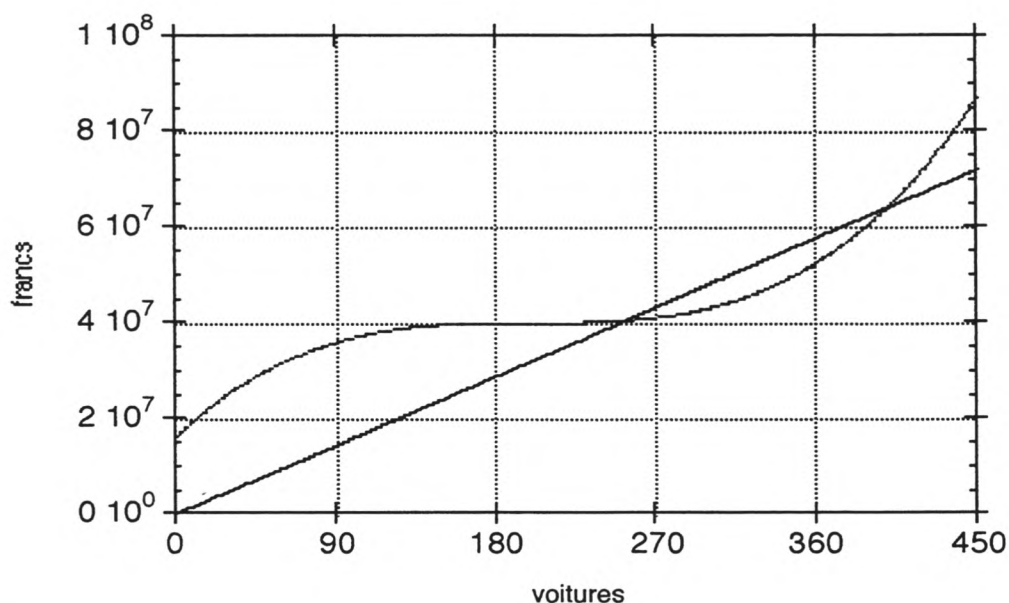
ENONCE

Voici un graphique (*voir ci-dessous*), établi dans une entreprise belge de construction de voitures, que l'on supposera toutes du même type :

- la courbe (C) représente le coût total de la production journalière, en francs, en fonction du nombre de voitures fabriquées, variant de 0 à 450 ;

- la droite (D) représente la recette totale de la production journalière, en francs, en fonction du nombre de voitures fabriquées.

Figure n°1 : courbes de coût et de recette.



L'étude de la rentabilité de l'entreprise consiste à déterminer le nombre de voitures à fabriquer chaque jour pour que le bénéfice de l'entreprise soit maximal.

Etape n°1 : lecture graphique des variations du bénéfice, dont le peu de précision met en évidence la nécessité d'études locales de chaque courbe, en des points précis.

Il est à noter (si les élèves évoquent la question) qu'il s'agit, en toute rigueur, d'une suite, qui est représentée par une courbe continue, mais n'est-ce point légitime ici ?

On pourra en profiter - éventuellement, après coup - pour expliquer ce qu'apportent les mathématiques.

Pour n voitures, on a un bénéfice $b(n)$. Si l'entreprise a une capacité totale de production de N voitures, il faut calculer $b(1)$, $b(2)$, ..., $b(N)$, et déterminer quel est le plus grand.... Si $b(x)$ est une fonction connue, il suffit de chercher les x tels que $b'(x) = 0$ et de raisonner.

C'est un exemple élémentaire (mais non vide) de passage :

concret -----> modèle mathématique -----> concret.

Encore une force des mathématiques : l'abstraction permet de voir que la fonction vraiment significative est la fonction $b(x)$ ci-dessus, différence des fonctions recette et coût, qu'il s'agit d'étudier et/ou de maximiser sur un intervalle (et on pourrait y mettre des paramètres).

Question 1 à la classe

Quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise pour les productions journalières de 90 voitures, de 180 voitures, de 360 voitures et de 400 voitures ?

Quel est le bénéfice réalisé pour 100 voitures ?

Le débat permet d'établir que le bénéfice pour une production donnée de voitures, qui est la différence entre la recette totale et le coût total, pour cette production, peut être strictement positif - et il s'agit réellement d'une rentrée d'argent pour l'entreprise - ou strictement négatif - et c'est alors une perte d'argent- ou alors nul.

Pour une production journalière de 90 voitures, le bénéfice est d'environ -22 600 000 F ; pour 180, il est à peu près égal à -11 000 000 F ; pour 360, il est d'environ 5 000 000 F ; et pour 400, il est nul.

Pour trouver le bénéfice relatif à 100 voitures, le travail supplémentaire sur les échelles me semble intéressant : on trouve environ -21 000 000 F.

Question 2 à la classe

Etudier les variations du bénéfice pour une production journalière de voitures variant de 250 à 400 : plus précisément, pour quelle production de voitures est-il maximal ? Dans quel intervalle de production est-il croissant ? Dans quel intervalle est-il décroissant ? Ces résultats sont-ils précis ?

Le bénéfice maximal est atteint pour une production X où la différence entre la recette totale et le coût total est la plus importante, ce qui correspond à l'écartement le plus grand, mesuré parallèlement à l'axe des ordonnées, entre la courbe du coût et la droite de la recette.

X se situe entre 300 et 350 voitures, sa lecture graphique est très peu précise.

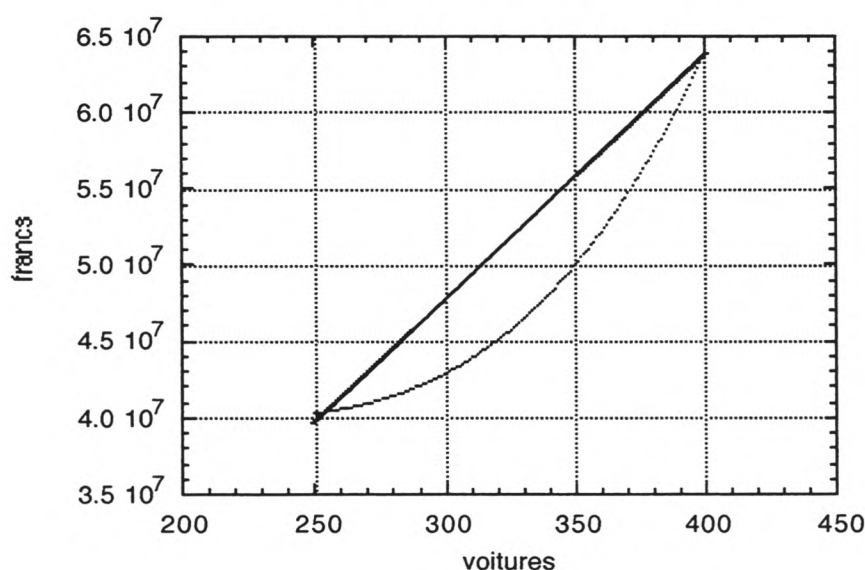
D'un peu plus de 250 à X voitures, l'écartement entre les deux courbes augmente à partir de 0 ; par suite, dans cet intervalle, le bénéfice est croissant.

De X à 400 voitures, l'écartement diminue jusqu'à devenir nul, ce qui correspond à la décroissance du bénéfice.

Telles sont quelques-unes des conclusions qui émergent du débat, ainsi que le peu de précision dans les lectures des valeurs mentionnées.

On peut joindre à l'étude la figure n°2 suivante :

courbes de coût et de recette : la zone de bénéfice.



Question 3 à la classe

L'observation de la courbe de coût total laisse penser que celui-ci n'augmente pas "de la même façon" qu'il diminue, de part et d'autre du point pour lequel le bénéfice est maximal. Expliquer pourquoi, uniquement en examinant le graphique. En est-il de même de la recette ?

Outre l'écartement maximal des courbes de coût et de recette, comment pourrait-on aussi caractériser le point qui correspond au bénéfice maximal ? Quel moyen graphique peut-on envisager pour préciser la lecture de la production quotidienne pour laquelle le bénéfice est maximal ?

Ces questions sont destinées à sensibiliser les élèves à une comparaison des croissances de la recette et du coût, d'après le graphique ; et, pour ce faire, à l'évaluation de "la pente de ces courbes"- cette notion restant alors totalement intuitive, en ce qui concerne la courbe du coût, correspondant seulement à la "manière dont la courbe monte " - Quant à celle de la courbe de la recette, qui, elle, est une droite, elle permet de retrouver une activité connue, dont on pourra peut-être s'inspirer pour le coût. Par suite la comparaison des deux pentes pour une production journalière de voitures donnée suggère de caractériser différemment un point où le bénéfice est maximal : c'est précisément un point où **la pente de la courbe du coût est égale à celle de la recette.**

Evaluer la pente de la courbe (C) **autour du point présumé** (il semble qu'il n'y ait ici qu'un point) pour le maximum du bénéfice, afin de la comparer à celle de la recette, est donc aussi un moyen de déterminer plus précisément ce point.

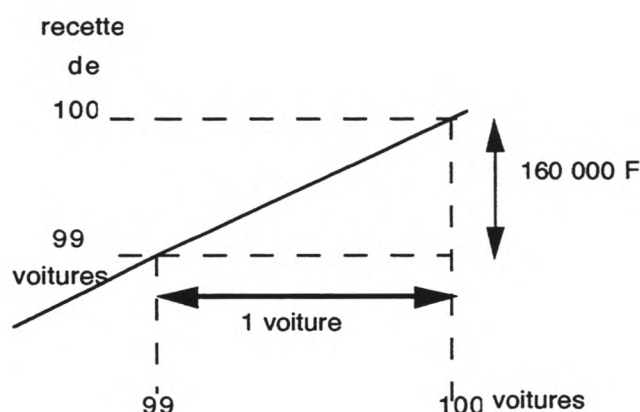
Etape n°2 : lecture graphique des pentes pour un nombre donné de voitures et interprétation économique.

Question1 posée à la classe

Evaluer la pente de la droite qui représente la recette. Comment, d'un point de vue économique, interpréter ce nombre pour une production journalière de 100 voitures, par exemple ?

Le débat remet en place la notion de pente d'une droite.
On trouve une pente de 160 000 . Quelle est l'unité ? Puisqu'il s'agit de francs, cette somme peut être assimilée à une sorte de recette : comment ? Par quel graphique pourrait-on représenter cette somme, en se référant à une production journalière de 100 voitures ? Ces questions peuvent débloquent la situation sur ce problème délicat de l'interprétation économique.

Figure n°3 : **recette marginale d'une production journalière de 100 voitures.**



Ces 160 000 F apparaissent donc comme le supplément de recette dû à la vente d'une voiture de plus après celle des 99 premières : ils constituent **la recette marginale** pour une production journalière de 100 voitures.

Il est à noter que, puisque la recette totale se représente par une droite, la recette marginale reste constante, quel que soit le nombre de voitures produites par jour.

Question 2 posée à la classe

S'inspirer de la définition de la recette marginale pour trouver ce que les économistes appellent **le coût marginal** d'une production quotidienne de 100 voitures. Possède-t-il la même propriété d'invariabilité que la recette marginale ? Pourquoi ?

Le graphique donné permet-il, à lui seul, d'évaluer graphiquement le coût marginal d'une production de 100 voitures ? Quel moyen envisager pour procéder à cette lecture ?

Le **coût marginal** relatif à une production de 100 voitures est la charge due à la production d'une voiture en supplément des 99 premières, ou encore le coût de production de 100 moins celui de 99 voitures.

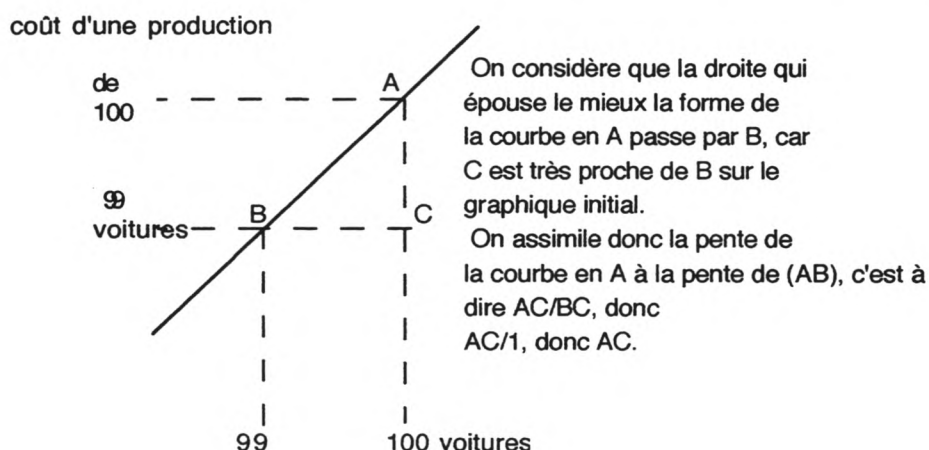
Le débat devrait faire apparaître la nécessité de modifier l'échelle sur l'axe des abscisses, autrement dit celle d'agrandir la courbe autour du point d'abscisse 100, puisque l'on cherche à différencier le coût de la production journalière de 100 voitures et celle de 99 voitures.- problème qui n'est évidemment pas apparu pour la recette marginale, puisqu'il suffisait de choisir un vecteur directeur d'abscisse convenable pour évaluer la pente. La formulation par les élèves eux-mêmes de cette remarque ouvre une piste s'ils n'évoquent pas immédiatement la nécessité de modifier l'échelle.

Or ce grossissement est impossible ici puisque l'on ne dispose que d'un dessin, et non pas de valeurs numériques pour une production proche de 100 voitures. Il importe donc de trouver un

autre moyen. Comment imaginer le graphique si on pouvait le grossir ? Pourquoi la lecture de la recette marginale était-elle plus facile ? Peut-on se ramener à utiliser une droite ?

Eventuellement on demande aux élèves de placer, dans un repère, le point de coordonnées $(100, 37.10^6)$, qui représente le coût de la production journalière de 100 voitures ; puis le point qui représente la production journalière de 99 voitures, ensuite d'imaginer l'allure de la courbe qui passe par ces deux points : il reste à confronter les différentes représentations qui émergent dans la classe.

Figure n°4 : coût marginal d'une production journalière de 100 voitures.



Les élèves finissent par suggérer un trait peu différent d'un segment de droite pour représenter la courbe entre ces deux points. Mais comment dessiner cette droite sur le dessin initial : il est alors nécessaire que le débat s'engage sur les différentes positions de la droite par rapport à la courbe, afin de faire comprendre que l'on remplace ici la courbe entre les points d'abscisse 99 et d'abscisse 100 par une droite, qui est celle qui épouse au mieux la forme de cette courbe pour une production de 100 voitures.

La croissance du coût se mesure à la pente de cette droite ; ou encore le coût marginal d'une production de 100 voitures est le coefficient directeur de cette droite, que l'on peut appeler la pente de la courbe du coût au point d'abscisse 100 voitures.

Comment dessiner une droite "penchée comme la courbe" au point d'abscisse 100 ? Quel nom lui donner ? Il est à remarquer que **cette tangente** dessinée sur le graphique initial et **la sécante** qui joint les points d'abscisses 99 et 100 sont certes, en toute rigueur, distinctes, mais, sur ce graphique, indiscernables, à cause de l'échelle. On trouve un coût marginal approximativement égal à 90 000 F, pour une production journalière de 100 voitures.

Etape n°3 : utilisation de la lecture des pentes pour trouver le point en lequel le bénéfice est maximal.

Question 1 à la classe

Formuler une autre caractérisation du point en lequel le bénéfice est maximal en utilisant ce qui précède et préciser sa position, uniquement d'après le graphique.

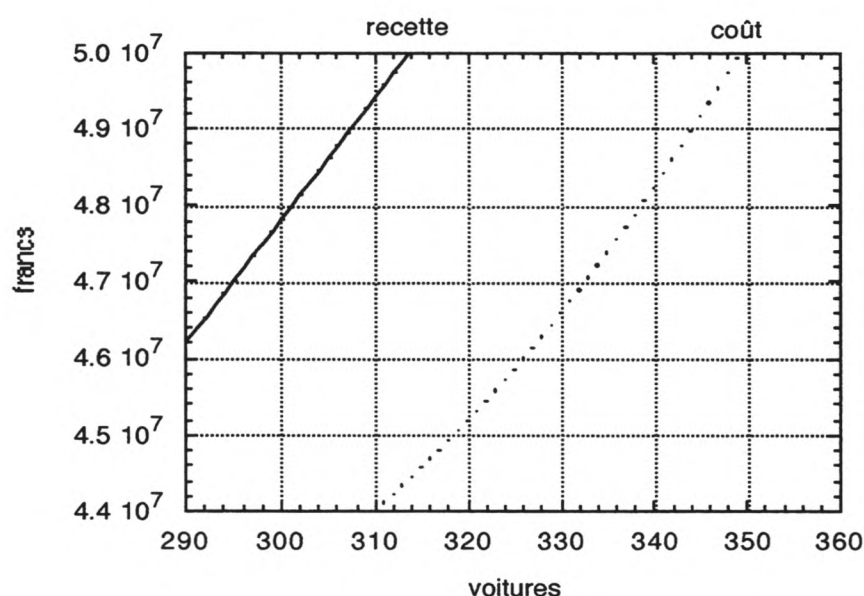
Cette question est destinée à mettre en place le vocabulaire utilisé précédemment : le point en lequel le bénéfice est maximal est caractérisé par l'égalité des pentes des courbes de recette et de coût, ou encore l'égalité de la recette marginale et du coût marginal ; il s'agit donc de trouver en quel point la courbe du coût a une tangente de coefficient directeur 160000.

Si l'on tient à revenir à une interprétation économique, la production journalière de voitures pour laquelle le bénéfice est maximal est telle que **produire plus** ne serait **pas avantageux**, puisque le supplément de recette serait alors inférieur au supplément de coût, occasionnés par cette production supplémentaire.

La deuxième partie de cette question, ne nécessitant que des manipulations graphiques, est le moyen de préciser la notion de tangente à une courbe : chaque élève cherche, en déplaçant sa règle parallèlement à la droite de la recette journalière, le point de la courbe du coût en lequel sa règle épouse au mieux la forme de cette courbe et lit son abscisse (aux alentours de 333 voitures - cette valeur étant trouvée par le calcul, que les élèves n'ont évidemment pas à faire -).

La recherche de la tangente à la courbe du coût est facilitée par la donnée du graphique suivant, qui reste cependant tout à fait facultative, mais dont le quadrillage et la précision permettent de s'approcher plus précisément du point recherché : on localise facilement le carreau traversé par la courbe du coût, pratiquement droite, parallèle à la droite de la recette.

Figure n°5 : la zone de bénéfice entre 290 et 360 voitures.



Il est à noter, d'un point de vue économique, que 333 voitures ou la valeur beaucoup moins précise que l'on détermine sur le graphique, constituent la production journalière pour laquelle le coût marginal est égal à la recette marginale.

Remarque

L'activité peut très bien s'arrêter ici si les objectifs consistent à faire passer, pour une fonction donnée graphiquement, les notions **locales** de tangente à sa courbe et pente de cette courbe, que l'on appellera le nombre-dérivé de la fonction pour la valeur de l'abscisse du point étudié - au lieu de coût marginal pour la fonction de coût précédente -, mais on peut la poursuivre pour introduire, sous un angle graphique et une interprétation économique, la notion de **fonction dérivée**.

Question 2 à la classe

Pour chacun des points de la courbe du coût, il est théoriquement possible de trouver le coût marginal correspondant ; le trouver graphiquement pour les productions journalières de 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400 voitures ; donner les résultats dans un tableau et placer les points obtenus dans un repère.

Quelle interprétation peut-on donner à la courbe obtenue en joignant ces points ?

Sur le même graphique, représenter la fonction "recette marginale".

Peut-on retrouver sur ce dessin la production journalière pour laquelle le bénéfice est maximal ?

Voici deux graphiques que l'on peut utiliser pour débloquer une situation de classe embarrassante.

Figure n°6 : courbes de coût et de recette - quelques tangentes.

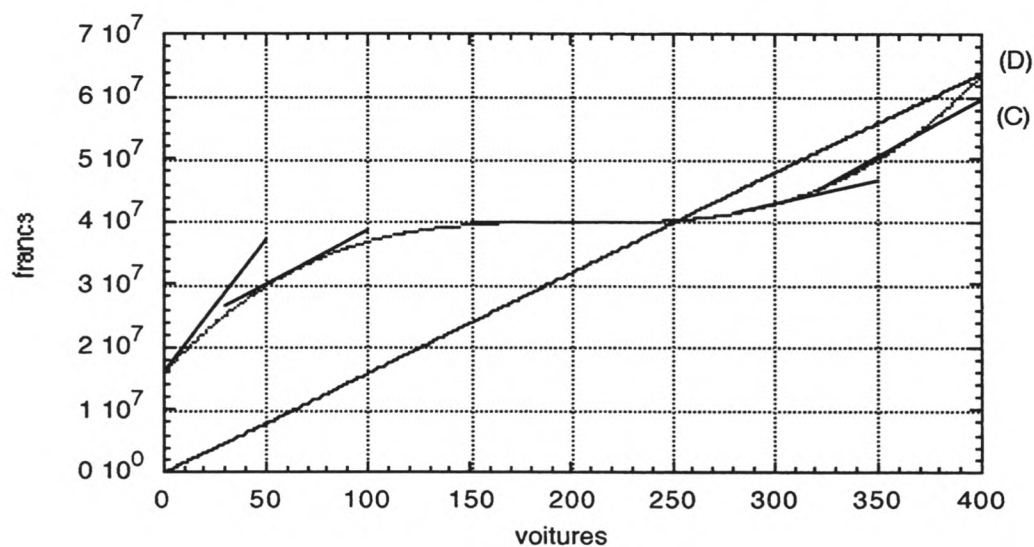
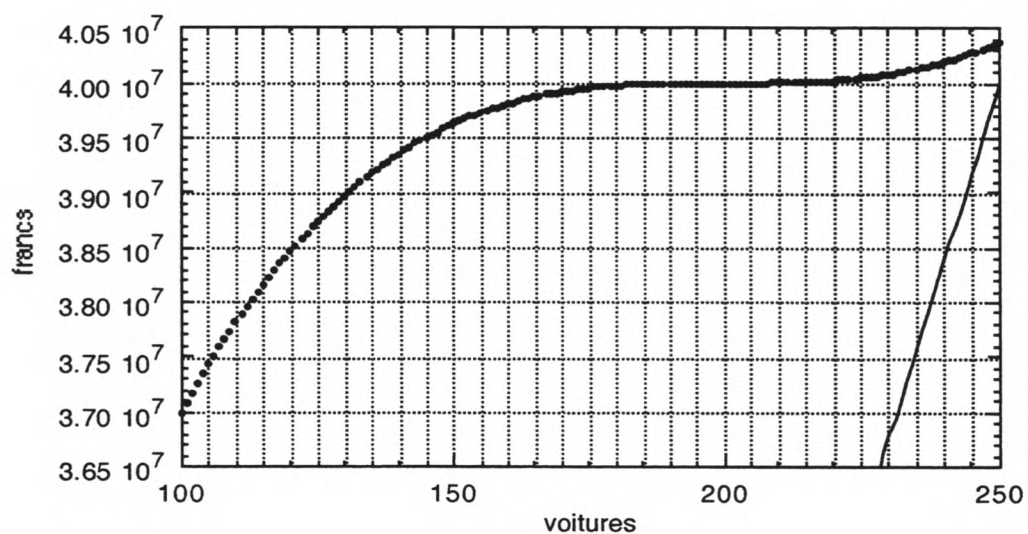


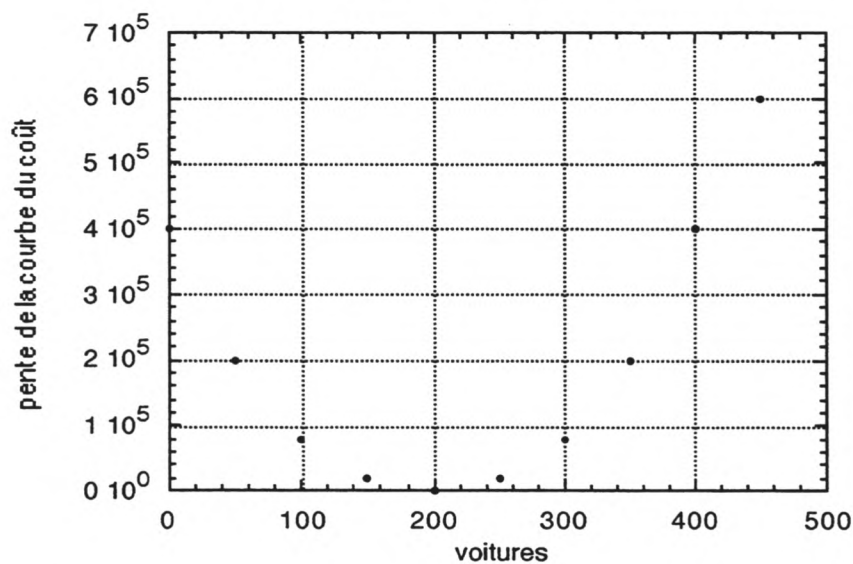
figure n°7 : agrandissement de la courbe de coût pour faciliter la lecture des pentes.



Nombre de voitures produites par jour	Coût total de production en 10^7 francs	Pente de la courbe ou coût marginal en 10^5 francs
0	1,6	4
50	3	2
100	3,7	0,9
150	3,96	0,2
200	4	0
250	4,04	0,2
300	4,3	0,9
350	5,01	2
400	6,4	4
450	8,69	6

Les résultats qui figurent dans le tableau ci-dessus, obtenus uniquement par détermination graphique des pentes, permettent d'obtenir la figure n°8 suivante :

- pente de la courbe du coût



S'il était possible de déterminer les pentes de la courbe du coût en d'autres points, on obtiendrait davantage de points sur le graphique précédent, situés "entre ceux" qui y figurent déjà. On trouve ainsi une partie de la courbe qui représente une **nouvelle fonction du nombre de**

voitures produites chaque jour : la fonction "coût marginal", obtenue à partir de la fonction "coût", initialement donnée. On trace la courbe approximativement.

Quant à la recette marginale, elle se représente par une droite parallèle à l'axe des ordonnées sur le graphique ci-dessus : la droite d'équation $y = 160\,000$.

L'égalité de la recette marginale et du coût marginal, qui permet, dans une zone de bénéfice, de déterminer le point en lequel le bénéfice est maximal, se traduit, sur ce graphique, par deux points communs, dont un seul correspond à la recette supérieure au coût : il s'agit du point de coordonnées $(\approx 333, 160\,000)$; ce qui confirme les résultats précédents.

Etape n°4 : conclusion de l'activité.

Quelles sont les différentes fonctions qui sont intervenues au cours de cette activité ? Quel lien certaines d'entre elles présentent-elles ? En quoi permettent-elles d'étudier la rentabilité de l'entreprise ?

Cette dernière partie est indispensable pour donner une vue d'ensemble de ce qui a été fait et préparer l'activité suivante, où seront plus précisément mentionnés les termes de "nombre-dérivé, fonction dérivée"...

En complément, pour permettre la construction d'autres activités autour de ce thème voici la fonction de coût total utilisée, celle qui au nombre x de voitures associe $3(x - 200)^3 + 40\,000\,000$ francs.

Introduction des notions de nombre-dérivé et de fonction dérivée

Faire le parallèle entre la **tangente en un point à une courbe** et la **meilleure approximation affine locale d'une fonction** d'une part, et entre la **pente d'une courbe en un point** et le **nombre-dérivé d'une fonction pour une valeur de la variable** d'autre part, est l'objectif essentiel de ce cours, basé sur l'interprétation graphique de la notion de dérivée (il a été expérimenté en grande partie dans des classes de première des anciennes sections B, F1, G et dans une première S).

Toutefois le concept de dérivée est indissociable de celui de limite en un point ; nous saisissons donc cette occasion pour aborder cette notion de limite, en réponse au problème de la caractérisation de la meilleure approximation affine locale d'une fonction. Nous tenterons de "faire passer" la notion de " $\varepsilon(h)$ négligeable devant h " (quand h tend vers 0), que l'on peut travailler dans les classes les plus scientifiques.

Ce cadre, dans lequel sera introduit cette notion de limite en un point, semble d'ailleurs beaucoup plus naturel que, par exemple, celui du comportement d'une fonction en un point où elle est définie, qui paraîtrait aux élèves tout à fait artificielle, et dénuée de sens, si l'on commençait par ce cas.

Après une des activités précédentes, les élèves sont peut-être maintenant motivés pour les études locales de fonctions !

Voici donc les deux problèmes, qui leur sont posés, l'un introduisant la notion de nombre-dérivé, l'autre celle de fonction-dérivée.

Problème 1
Construction de l'image mentale
"nombre-dérivé- pente"

Voici l'énoncé global du problème, que nous étudions avec toute la classe.

Etant donnée une courbe, comment la remplacer **localement, c'est à dire au voisinage d'un point fixé**, par une droite ?

Autrement dit, quelle droite épouse le mieux une courbe au voisinage d'un point ?

Peut-on en déduire un moyen d'évaluer la **pente** de cette courbe en ce point ?

Remarque : le problème de l'existence de cette tangente n'est pas évoqué ici, afin que soit facilitée l'introduction de la notion de "pente d'une courbe". Il sera cependant nécessaire d'y revenir plus tard.

On dirigera les élèves vers des études locales de deux fonctions, la fonction "carré" et la fonction "inverse", la deuxième pouvant être omise si le temps consacré à la première a déjà été assez long.

Par exemple, dans une classe de première G ou de F1, les deux études ont été menées, mais la justification de la fonction dérivée n'a pas été abordée.

Les différentes étapes vers la solution de ce problème contenues dans les pages suivantes.

- 1A - Etude graphique de la fonction "carré" au voisinage du point A (1, 1) :

- mise en évidence d'une droite qui semble épouser la courbe représentative de la fonction "carré" au voisinage de A (question 1) ;
- définition et évaluation de la pente de la courbe en ce point (suite de la question 1) ;
- reprise du travail précédent avec deux autres points (question 2) ;
- un peu de recul en dessinant la courbe représentant la fonction "carré" et les trois tangentes obtenues (question 3) ;
- bilan.

- 1B - Nombre-dérivé de la fonction "carré" et justification :

- récapitulation et premières définitions ;
- le problème de la caractérisation de la tangente à la courbe au point A, étudié en plusieurs étapes :
 - * évaluation de l'erreur commise quand on remplace la courbe autour de A par une droite qui passe par A,
 - * une première étude qui ne permet pas de distinguer la tangente de toutes les autres droites qui passent par A,
 - * une étude plus poussée qui conduit à caractériser la tangente parmi toutes les droites qui passent par A,
 - * la réponse au problème à propos de la fonction "carré".

Remarque sur cette partie 1B : la justification du nombre-dérivé de la fonction "carré" pour la valeur 1 n'est pas abordable dans toutes les classes de première ; elle peut être délaissée au profit de l'étude de la fonction "inverse" mentionnée ci-dessous, qui aidera peut-être mieux certains élèves à s'approprier le concept de nombre-dérivé.

- 1C - Etudes locales de la fonction "inverse" et justifications.

1 A

Etude graphique de la fonction "carré" au voisinage de quelques points

Les objectifs sont de :

- faire apparaître la tangente par agrandissements successifs de la courbe représentative de la fonction "carré" ;
- créer l'image mentale "nombre-dérivé - pente" ;
- faire trouver des équations de tangentes.

Une partie de cette activité a été menée en classe, le reste ayant été à terminer en dehors du cours.

Question 1

C est la courbe qui correspond à $f(x) = x^2$, dans un repère, et A est le point de coordonnées (1,1).

Quelle est donc la droite qui épouse le mieux la courbe C au voisinage de A ? Quelle est la pente de la courbe au point A ? Quel nom donne-t-on à cette droite qui peut remplacer localement la courbe ? Donner une équation de cette droite.

Comment faire apparaître cette droite ?

Le comportement des élèves est variable, suivant qu'ils possèdent ou non une calculatrice graphique.

S'ils disposent d'une calculatrice graphique, ils pensent à la programmer. Peut-être essaieront-ils des grossissements autour du point d'abscisse 1 ? Ou auront-ils envie d'en faire ? Mais comment ?

Par exemple, sur une calculatrice Casio fx 7500G :

Tracer la courbe :

MODE 2 Prog 0

Graph $Y = x^2$

Initialiser le cadrage :

pour afficher la courbe dans [0,2].

MODE 1

Range 0 EXE 2 EXE 0.1 EXE 0 EXE 4 EXE 0.1 EXE

Afficher la première courbe :

Prog 0 EXE

Faire une loupe avec le facteur 2 :

Plot 1,1 : factor 2 : prog 0

Le simple appui sur EXE fera à chaque fois la loupe demandée, le graphique restant centré sur A(1,1).

La courbe obtenue est-elle très proche ou non d'une droite ?

Les élèves constatent rapidement qu'au bout d'un certain nombre d'agrandissements, "le trait est droit"; s'ils n'en sont pas convaincus ou si l'on veut utiliser davantage la calculatrice graphique, ou encore si l'on veut faire apparaître des sécantes successives qui conduisent à la tangente, on peut passer à l'activité suivante.

Tracer un segment [AM] : en prenant pour M le point le plus éloigné de A sur la courbe qui se trouve à l'écran.

Plot 1,1 : Plot 1,1 EXE Trace (déplacer le point clignotant à l'aide des flèches jusqu'au point désiré) Line EXE.

Il est facile de voir que la courbe se confond avec une droite, au bout d'un certain nombre de loupes.

Si les élèves ne disposent pas d'une calculatrice graphique, ils peuvent faire le même travail "à la main" (voir en annexe 3 les agrandissements successifs réalisés par un élève de première G).

Comment évaluer la pente de chaque droite obtenue pour chaque loupe ?

Les élèves connaissent la méthode s'ils ont traité une des activités précédentes. Sinon il suffit de rappeler qu'on considère la droite comme une échelle appuyée à un mur: la pente, c'est la hauteur (la distance du bas du mur au haut de l'échelle) divisée par l'écartement (la distance du pied de l'échelle au mur) ; ensuite on rectifie le signe suivant "la façon dont la droite est penchée".

Chaque élève rédige alors seul son compte-rendu de l'activité, suivant les instructions suivantes.

Pour chaque loupe :

- écrire l'intervalle pour x correspondant à l'écran ou au graphique-papier ;
- lire la pente de la droite (AM), comme indiqué ci-dessus ; noter tous les calculs, à savoir :
 - les coordonnées de M (le point de la courbe le plus éloigné de A sur l'écran ou sur le graphique-papier) ;
 - les valeurs de "l'écartement" et de la "hauteur" qui permettent de calculer la pente ;
 - le calcul de la pente.

Numéroter les loupes en précisant celle pour laquelle la droite se confond avec la courbe.

Se pose ici (pour le professeur, mais probablement pas pour l'élève !) le problème du **nom donné à cette droite** : la **tangente** (le nom est évoqué par quelques-uns, lorsque la question est posée : comment pourrait-on appeler cette droite ?) à **la courbe au point A**, c'est à dire la droite qui est confondue avec la courbe au bout d'un certain nombre d'agrandissements ou encore qui "épouse le mieux la forme de la courbe au voisinage de A". Ce sont là des expressions auxquelles on peut aboutir avec la classe.

Voici la lecture de la dernière pente à l'aide d'une calculatrice Casio fx 7500G :

Plot 1,1 , on déplace le curseur jusqu'à 1,02992013 horizontalement, puis verticalement jusqu'à la droite et on lit l'ordonnée par SHIFT Y , on lit 1,060483871.

D'où la pente ou coefficient directeur de la droite, qui est

$$\frac{1,060483871-1}{1,02992013-1} \approx 2,021510969 \approx 2,02.$$

Conclure en précisant quelle pente peut être considérée comme celle de la courbe au point A ; donner une équation de la tangente.

Les élèves trouvent facilement 2 et l'équation $y = 2x - 1$ (certains découvrent quelque chose lorsque je leur dis d'utiliser le calcul de la pente pour trouver une équation de la droite !).

Si, expérimentalement, ils ont trouvé 2,01 ou 1,99 (ou toute autre valeur "voisine"), je leur demande de conserver cette valeur dans la détermination d'une équation de la tangente, puisqu'il n'y a aucune raison à ce moment de l'activité, que l'on prenne plutôt 2 qu'une autre valeur "voisine".

On peut alléger le travail de rédaction des élèves en n'exigeant pas le calcul des "pentes intermédiaires", mais en leur demandant seulement le coefficient directeur du "trait droit" qu'ils ont obtenu après agrandissements. Néanmoins il me semble indispensable de ne pas faire cette "économie", si l'on désire ensuite **justifier** que la "vraie" pente est 2.

Question 2

Refaire le même travail en prenant deux autres points de la courbe représentative de la fonction carré, par exemple B d'abscisse 0,5 et C d'abscisse 1,5 pour lesquels on pourra se contenter de calculer directement la pente de la courbe, c'est à dire la pente de la droite qui se confond avec la courbe au voisinage du point choisi (le coefficient directeur de la tangente).

Afin que les élèves puissent "situer" les trois droites qu'ils viennent d'obtenir par rapport à la parabole d'équation $y=x^2$, il me semble indispensable de leur demander le travail suivant.

Question 3

Représenter graphiquement, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la fonction "carré" dans l'intervalle $[0,4]$; dessiner les trois tangentes obtenues précédemment, en indiquant sur le dessin les équations de la parabole et des droites.

Voir une réalisation du dessin due à un élève de 1^{ère}G, en annexe 2 .

Bilan

J'ai corrigé chacun des comptes-rendus de cette activité, et ai pu me rendre compte que :

- le calcul de la pente est assez bien compris, ainsi que la manipulation de la calculatrice ;
- quelques élèves n'ont pas utilisé les possibilités graphiques de leur calculatrice, mais ont calculé les pentes en prenant les coordonnées de points "très voisins" de ceux en lesquels ils avaient à calculer la pente de la courbe (par la suite, ces mêmes élèves resteront attachés à ce procédé pour calculer des nombres-dérivés, au lieu d'utiliser les formules !) ;
- la confusion "pente de la courbe" - "coefficient directeur de la tangente", est **très bien passée** ;
- seuls quelques élèves ont tracé des tangentes complètement fausses dans le dernier dessin récapitulatif demandé ;
- certains élèves ont déterminé la tangente en chaque point en procédant à des agrandissements "à la main", comme le montre l'annexe 1 (les dessins ont été réalisés par les élèves d'une classe de 1^{ère}G, qui ne disposaient pas de calculatrice graphique) ;
- la conjecture a été donnée par certains élèves que chaque pente est le double de l'abscisse du point en lequel elle est déterminée (en 1^{ère}F1).

1 B

Nombre-dérivé de la fonction "carré" et justification

Il s'agit d'institutionnaliser ce qui a été vu expérimentalement, et de faire sentir la nécessité de justifier que le nombre-dérivé pour $x=1$ est "exactement" 2 (et non pas 2,01 ou 2,006) et que la droite qui épouse le mieux la courbe au voisinage de A est bien celle qui a pour équation $y=2x-1$!

Nous allons évidemment rencontrer le problème de la limite en zéro de certaines fonctions ! N'est-ce pas alors l'occasion d'introduire ce concept, "par petites touches", tout en conservant le sentiment que l'on ne fera qu'effleurer toutes les difficultés relatives à ce sujet ?

Peut-être pouvons-nous puiser dans les textes classiques quelques aides à ce sujet : par exemple, dans le *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique*, Cauchy écrit : "Lorsque les erreurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus..."

La clé de la justification du fait que le nombre-dérivé de la fonction "carré" pour la valeur $x = 1$ est 2 me semble être de faire comprendre aux élèves la notion **d'erreur négligeable devant...**

"**Négligeable**" n'a de sens que dans un **ordre de grandeur** : c'est une notion qu'il est important de faire passer chez les élèves (elle est très utile en physique par exemple, en géographie..., quand on fait ses courses !) :

- quand on parle de la population d'un pays, 60 millions, il est clair que 60 530 000 a un sens, pas 60 530 001, naissance ou décès intervenant à tout moment ;
- l'erreur classique de la caissière n'est pas de taper 6,16 F au lieu de 6,15 F, mais 61,5 F au lieu de 6,15 F, il suffit donc, si l'on veut contrôler la somme à payer, de s'arrêter aux francs, et même aux dizaines...

C'est le problème des échelles de comparaison. La notion de "négligeable devant" n'a de sens que dans une telle échelle.

Un moyen d'approcher le concept de limite par un vocabulaire "plus parlant", proche de celui qui fut utilisé par les fondateurs du calcul différentiel, serait le recours au calcul infinitésimal, voire à l'Analyse Non Standard (mais nous n'en sommes pas encore là dans nos classes de lycée, c'est peut-être dommage !). J'ai essayé de travailler dans ce sens, mais je me suis rendu compte que cette

simplicité apparente du vocabulaire d'approche ne doit pas laisser penser que l'Analyse Non Standard aplanit toutes les difficultés : même si certains théorèmes d'Analyse Classique se démontrent très simplement grâce à l'Analyse Non Standard, il demeure certaines difficultés dans le fondement même de cette analyse, d'un tout autre ordre que celles qui sont inhérentes au concept de limite.

Loin de moi cependant, l'idée d'éloigner le lecteur de l'Analyse Non Standard ! C'est passionnant, et surtout très dépayasant !

Mais pour nos élèves, le concept de limite reste difficile !

Avec les élèves, récapitulons d'abord ce qui a été vu auparavant et donnons les premières définitions.

"Au voisinage du point A, vous avez trouvé que la courbe représentative de la fonction carré avait pour pente une valeur voisine de 2 - on prouve (la preuve sera abordée par la suite) qu'il s'agit en fait de **2 exactement**-, et qu'elle pouvait être remplacée par la droite d'équation $y = 2x - 1$.

2 est appelé le nombre dérivé de la fonction carré pour $x = 1$ (qui est l'abscisse de A).

La droite d'équation $y = 2x - 1$, qui est la droite qui épouse le mieux la forme de la courbe au voisinage de A, est appelée la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1".

Puis caractérisons la tangente !

Voici le problème que nous allons étudier, successivement au travers des étapes suivantes.

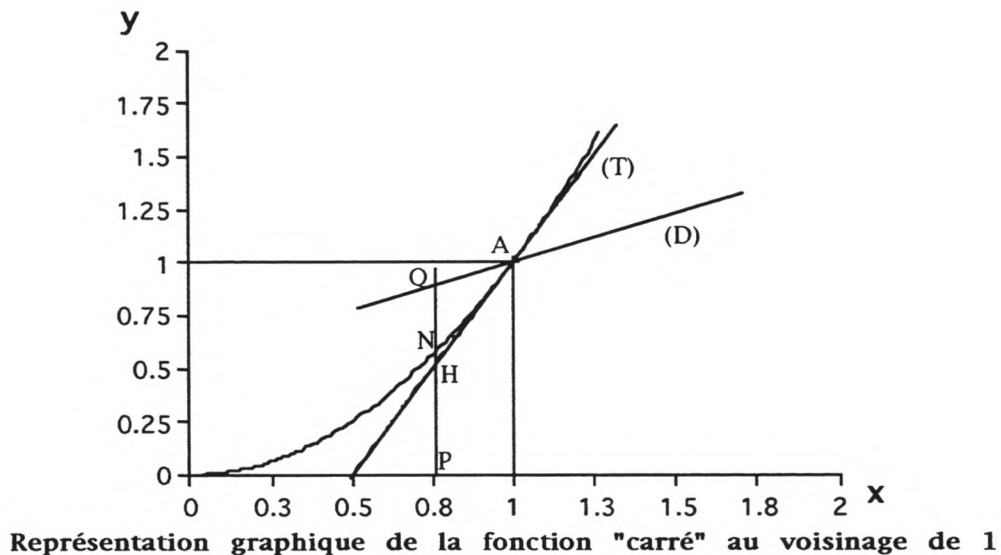
Comment caractériser cette tangente par rapport à toutes les autres droites qui passent par A en tant que "meilleure droite" qui épouse la courbe autour de A ?

Première étape : évaluation d'erreur

Il s'agit alors de suggérer l'**évaluation de l'erreur commise** quand on remplace la courbe autour de A par une droite qui passe par A (les élèves éliminent d'emblée toute droite qui ne passerait pas par A). La droite correspondant à la plus faible erreur sera alors retenue comme la "meilleure" !

- **Tout d'abord un dessin :**

- * dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter la fonction "carré" dans $[0,2]$;
- * placer $A(1,1)$ et dessiner la droite (T) d'équation $y = 2x - 1$;
- * marquer un point N sur la courbe et appeler x son abscisse ; N est un point variable de la courbe ;
- * appeler H le point de la tangente qui a la même abscisse x que N ;
- * tracer une droite (D) qui passe par A ; cette droite est variable, mais les seules conditions qui lui sont imposées est de passer par A et d'avoir un coefficient directeur différent de 2 ;
- * appeler Q le point de cette droite (D) qui a la même abscisse x que N et H ; et P la projection commune de N, H et Q sur l'axe Ox.



- **Au voisinage de A, remplacer la courbe par (T) ou par (D) ?**

a) Quelle est la forme de l'équation réduite de (D), ne faisant intervenir que son coefficient directeur a ?

$$y = a x + 1 - a.$$

b) Que signifie "remplacer la courbe par (T) ou par (D) autour de A" ? Cela consiste à remplacer chaque point N, défini comme sur le dessin, par le point H qui lui est associé (remplacement de la courbe par (T)) ou par Q (remplacement de la courbe par (D))- voir dessin.

c) "Prendre H ou Q à la place de N" introduit une **erreur** ; comment la visualiser sur le graphique ?

par NH ou NQ.

La justification du fait que, pour ce remplacement, la tangente est "meilleure" que toute autre droite qui passe par A, passe par la **comparaison de ces erreurs à mesure que N se rapproche de A**.

d) Comment les exprimer en fonction de la position de N ?

$$NH = e_T = |x^2 - (2x - 1)| = (x - 1)^2$$

$$NQ = e_D = |x^2 - (ax + 1 - a)| = |(x - 1)(x + 1 - a)|$$

Deuxième étape : une première étude qui ne permet pas de distinguer la tangente de toutes les autres droites qui passent par A.

L'idée que les erreurs précédentes s'approchent indéfiniment de 0 quand les points N et Q se rapprochent de A sera évoquée assez facilement par la classe, d'autant plus qu'elles sont nulles lorsque N et Q sont confondus avec A : à ce stade, il serait mal venu de tenter de formaliser cette idée par l'introduction du vocabulaire relatif à la limite nulle d'une fonction en 0. Mieux vaut éviter de répondre à des questions que les élèves ne se posent pas encore !

Contentons-nous d'arriver le plus simplement possible à conclure que le comportement de ces erreurs lorsque N et Q se rapprochent de A ne permet pas de distinguer la tangente par rapport à une autre droite qui passe par A !

Question que l'on pose à la classe (vision graphique) :

pouvez-vous dire ce que deviennent ces erreurs e_D et e_T à mesure que N se rapproche de A ?

Il est souhaitable d'étudier cette question avec les élèves, à la fois sous l'angle graphique et sous l'angle analytique.

Graphiquement, il leur vient assez naturellement la constatation que, quand N se rapproche de A, les erreurs se rapprochent de 0.

Pour une première approche de ce concept de limite, mieux vaut garder une image dynamique : les valeurs successivement prises par l'erreur s'approchent indéfiniment de 0, à mesure que N se rapproche de A, et finissent d'ailleurs par atteindre 0 lorsque N est confondu avec A.

Analytiquement, que signifie cette expression géométrique "à mesure que N se rapproche de A" ? A mesure que x, qui est l'abscisse de N se rapproche de 1, qui est celle de A ; ou encore à

mesure que la différence entre x et 1 se rapproche de 0. Il est intéressant de faire compléter un tableau du type suivant.

x	$1+10^{-1}$	$1+10^{-2}$	$1+10^{-3}$	$1+10^{-4}$	..	.		$1-10^{-1}$	.	.	.
$x - 1$											
$e_T = (x - 1)^2$											
(pour $a = 0,5$) $e_D = (x - 1)(x + 0,5) $											
(pour $a = 1$) $e_D = (x - 1)x $											
(pour $a = 1,5$) $e_D = (x - 1)(x - 0,5) $											
(pour $a = 1,9$) $e_D = (x - 1)(x - 0,9) $											
(pour $a = 2,1$) $e_D = (x - 1)(x - 1,1) $											

Ainsi chacune des deux erreurs se rapproche autant qu'on le souhaite de 0 quand x se rapproche de 1 ou encore quand la différence $x - 1$ se rapproche de 0.

Conclusion que l'on tire avec la classe, tout en introduisant un peu de vocabulaire !

Quand x tend vers 1, les deux erreurs e_D et e_T tendent vers 0 ; mais alors pourquoi la tangente (T) serait-elle meilleure que la droite (D) pour remplacer la courbe au voisinage de A ?.

Troisième étape : examinons la façon dont ces erreurs tendent vers 0, grâce à une échelle de comparaison, celle des puissances de $x - 1$.

Le but poursuivi ici est d'amener la classe à sentir la nécessité d'étudier les quotients $\frac{e_T}{|x - 1|}$ et $\frac{e_D}{|x - 1|}$ lorsque x tend vers 1 (on peut se passer des valeurs absolues si l'on choisit de traiter des erreurs algébriques, ce qui sera fait par la suite ; mais je pense que, à ce stade, la lecture graphique induit plus directement chez les élèves la considération de longueurs, donc de valeurs absolues). Puis de faire cette étude.

Retournons au tableau précédent et demandons aux élèves comment ils peuvent expliquer la différence entre les vitesses de e_D et e_T à se rapprocher de 0, à mesure que la différence $x - 1$ se rapproche elle-même de 0. Lors d'une expérimentation en 1^{es}, les élèves ont émis l'idée que la rapidité à laquelle e_D se rapprochait de 0, à mesure que x se rapprochait de 1, tenait au facteur $|x + 1 - a|$ qui apparaissait dans l'écriture de e_D .

En fait, il s'agit de leur faire remarquer que $|x + 1 - a| = \frac{e_D}{|x - 1|}$ est à comparer avec $\frac{e_T}{|x - 1|}$, qui est égal à $|x - 1|$: ces deux quotients sont constitués d'un numérateur qui tend vers 0 et d'un dénominateur qui tend aussi vers 0, quand x tend vers 1.

Attirons l'attention des élèves sur le fait que le comportement d'un quotient de deux expressions qui tendent vers 0 quand x tend vers 1 semble au premier abord imprévisible :

$x - 1$, $2(x - 1)$ et $(x - 1)^2$ tendent tous les trois vers 0 quand x tend vers 1, pourtant $\frac{(x - 1)^2}{x - 1}$, qui est égal à $x - 1$, tend vers 0, quand x tend vers 1 ;
alors que $\frac{2(x - 1)}{x - 1}$ est toujours égal à 2, quand x tend vers 1 ;
et que, $\frac{x - 1}{(x - 1)^2}$, qui est égal à $\frac{1}{x - 1}$, "1 divisé par une quantité qui devient de plus en plus proche de 0", devient, en valeur absolue, infiniment grand (*ceci n'est pas aussi immédiat pour les élèves qu'il n'y paraît dans ces lignes : il peut être utile d'utiliser des moyens graphiques ou calculatoires*).

Introduisons alors un peu de vocabulaire :

- pour traduire que $\frac{(x - 1)^2}{x - 1}$ tend vers 0, quand x tend vers 1, on dit que $(x - 1)^2$ et $x - 1$ **ne sont pas du même ordre de grandeur quand x tend vers 1**, que $(x - 1)^2$ tend vers 0 **avec un ordre supérieur** à $x - 1$, quand x tend vers 0, ou encore que $(x - 1)^2$ **est négligeable** devant $x - 1$, quand x tend vers 1 ;
- pour traduire que $\frac{2(x - 1)}{x - 1}$ tend vers un nombre autre que 0 (qui est 2), quand x tend vers 1, on dit que $2(x - 1)$ et $x - 1$ **sont du même ordre de grandeur quand x tend vers 1**, (*même si l'un est le double de l'autre !*),
- enfin, dans le fait que $\frac{x - 1}{(x - 1)^2}$ devient, en valeur absolue, infiniment grand quand x tend vers 1, on retrouve que $\frac{(x - 1)^2}{x - 1}$ tend vers 0, quand x tend vers 1, c'est à dire que $(x - 1)^2$ et $x - 1$ **ne sont pas du même ordre de grandeur quand x tend vers 1**.

D'où la question suivante que l'on pose à la classe : **étude comparée des erreurs par rapport à $x - 1$ ou $|x - 1|$, quand x tend vers 1.**

e_D et e_T tendent toutes deux vers 0, quand x tend vers 1, de même que $x - 1$ ou $|x - 1|$, mais avec quel ordre de grandeur par rapport à $x - 1$?

Et d'amener les élèves à la réponse suivante.

$\frac{e_T}{|x - 1|} = |x - 1|$, par suite $\frac{e_T}{|x - 1|}$ tend vers 0, quand x tend vers 1 ; donc e_T et $|x - 1|$ ne sont pas du même ordre de grandeur et **e_T est négligeable devant $|x - 1|$, quand x tend vers 1.**

$\frac{e_D}{|x - 1|} = |x + 1 - a|$ qui se rapproche de $|2 - a|$, quand x tend vers 1. $|2 - a|$ est différent de 0, puisque a est différent de 2, autrement dit, **e_D et $|x - 1|$ sont du même ordre de grandeur, quand x tend vers 1.**

Conclusion

Les deux erreurs e_D et e_T ne se comportent pas de la même façon par rapport à $|x - 1|$, quand x tend vers 1 : e_T est négligeable devant $|x - 1|$; alors que e_D est du même ordre de grandeur que $|x - 1|$.

Remarque : j'ai choisi ici de ne pas introduire la lettre h pour désigner la différence $x - 1$, pour éviter de surcharger les élèves de notations nouvelles, celle-ci n'allégeant les calculs que pour ceux qui savent déjà manipuler les études de limite.

Quatrième étape : la réponse au problème à propos de la fonction "carré"

Il me semble important de faire noter aux élèves ce qui suit.

Parmi toutes les droites qui passent par A, la tangente se distingue par le fait que l'erreur e_T est négligeable devant la distance de x à 1, quand x tend vers 1 ; alors que pour toutes les autres droites, e_D est du même ordre de grandeur que la distance de x à 1, quand x tend vers 1.

(T) est donc la meilleure pour remplacer la courbe au voisinage de A.

La tangente au point A est donc :

- la droite qui épouse le mieux la courbe au voisinage de A ; celle qui permet d'évaluer la pente de la courbe au point A, qui est 2 ;

- la **seule** droite pour laquelle l'**erreur** commise lorsque l'un de ses points H remplace un point N de la courbe (N et H d'abscisse commune x) au voisinage de A, est **négligeable devant** la distance de x à 1, quand x tend vers 1.

La courbe étant la représentation graphique de la fonction "carré", notée f , et la pente de cette courbe au point A, d'abscisse 1, étant égale à 2, on dit aussi que 2 est le nombre-dérivé de la fonction "carré" pour la valeur 1, que l'on note $f'(1)$.

1 C

Etudes locales de la fonction "inverse" et justifications

Afin de répondre au problème en ce qui concerne la fonction "inverse", il s'agit de **refaire le même travail que ci-dessus en prenant la fonction inverse**, que l'on désignera par g , à la place de la fonction carré.

C'est ainsi que l'on peut poser la question à la classe. Le choix de ne pas détailler la démarche oblige justement les élèves à récapituler ses différentes étapes et à construire eux-mêmes un plan comme celui qui suit. D'ailleurs, une fois toutes les instructions élaborées en classe, l'étude peut être menée en dehors du cours.

- 1) Dessiner la courbe représentative de la fonction inverse dans $]0,2]$.
- 2) Choisir le point A d'abscisse 1, de cette courbe, et procéder à des agrandissements successifs centrés sur A, jusqu'à obtenir une droite, dont il s'agit de lire le coefficient directeur.
- 3) Ensuite déterminer une équation de cette droite, dont on donnera le nom.
- 4) Exprimer l'erreur commise quand on remplace un point N de la courbe, d'abscisse x , par le point H de la tangente qui a la même abscisse.
- 5) Faire un dessin où figurent A et des points H et N.
- 6) Montrer que l'erreur ci-dessus tend vers 0 d'une part, et est négligeable devant la distance de x à 1 d'autre part, lorsque x tend vers 1.
- 7) Admettre que cette erreur n'est plus négligeable devant la distance de x à 1, quand x tend vers 1, si, à la place de la tangente, on choisit une autre droite qui passe par A.
- 8) Conclure en mettant en évidence la caractérisation de la tangente en A à la courbe, le nombre dérivé en 1 de la fonction inverse.
- 9) Refaire le même travail en remplaçant A par deux autres points.

Problème 2

Notion de fonction dérivée

Enoncé et remarques

Au travers de ce problème, il s'agit maintenant d'amener les élèves vers la notion de fonction dérivée.

- a) f désignant la fonction "carré", à chaque valeur de x est-il possible d'associer un nombre-dérivé $f'(x)$? Si oui, comment ?
- b) Même question relativement à g qui désigne la fonction "inverse".

Les suggestions sur la façon d'aborder cette étude avec les élèves sont données à chaque étape. Il est cependant déjà à noter que la justification de la fonction dérivée de la fonction "carré", dont il est question dans la suite, n'est pas accessible à toutes les classes de première ; elle sera délaissée dans les classes des sections non scientifiques au profit de la construction point par point de la courbe de la dérivée par lecture graphique de la pente de la courbe de la fonction "carré", ce qui aidera peut-être mieux certains élèves à s'approprier le concept de fonction dérivée.

Fonction "carré"

Reprise de l'étude d'autres nombres-dérivés devant déboucher sur la notion de fonction dérivée

Dans un premier temps, on peut demander aux élèves de refaire la même étude des erreurs en remplaçant le point A, d'une part par le point B d'abscisse 0,5, d'autre part par le point C d'abscisse 1,5 afin de justifier que le nombre-dérivé pour $x = 0,5$ est 1 et pour $x = 1,5$ est 3.

Cette activité a été expérimentée sous forme de problème à travailler en dehors du cours dans une classe de première F1, mais elle est tout à fait facultative, surtout s'il a déjà été consacré beaucoup de temps aux précédentes.

Puis on institutionnalise les trois nombres-dérivés qui ont été prouvés cette fois-ci.

Pour faciliter sa compréhension, le problème gagne à être reformulé de manière graphique, afin de renforcer l'image "pente- nombre-dérivé" :

- peut-on évaluer la pente de la courbe de la fonction "carré" en chacun de ses points ;
- cette courbe admet-elle une tangente en chacun de ses points ;
- est-il possible de donner un résultat exact, même pour les points "graphiquement inaccessibles" ;
- comment éviter de refaire l'étude graphique, qui ne donne que des résultats approchés et qui est impossible pour de multiples points ; comment se passer d'étudier les erreurs commises lors du remplacement de la courbe par sa tangente pour chacun de ses points ?

Le but poursuivi au travers de ces questions est de diriger les élèves vers la nécessité de procéder à l'étude générale du nombre-dérivé de la fonction "carré" pour un réel t quelconque. Il est d'ailleurs facile d'obtenir de la classe la conjecture que ce nombre-dérivé est $2t$.

Démonstration

Elle est évidemment à réserver aux classes les plus motivées. On peut l'amener avec un énoncé du type suivant.

Enoncé

t désigne un réel quelconque, $A(t)$ le point de coordonnées (t, t^2) .

- 1) Donner une équation de la droite (T) qui a pour coefficient directeur $2t$ et qui passe par $A(t)$.
- 2) Donner une équation de toute droite (D) , qui n'est pas (T) , qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et qui passe par $A(t)$.
- 3) Quelle est l'expression de l'erreur e_D commise lorsque l'on remplace le point Q d'abscisse x de la droite (D) par le point N d'abscisse x de la courbe ? Comment se comporte e_D lorsque x tend vers t ?
- 4) Quelle est l'expression de l'erreur e_T commise lorsque l'on remplace le point Q d'abscisse x de la droite (T) par le point N d'abscisse x de la courbe ? Comment se comporte e_T lorsque x tend vers t ?
- 5) Les erreurs e_D et e_T tendent-elles vers 0 avec le même ordre de grandeur que la distance de x à t quand x tend vers t ?

Quelques éléments de réponse

- 1) Une équation de la droite (T) qui a pour coefficient directeur $2t$ et qui passe par $A(t)$ est $y = 2tx - t^2$.

2) On fera d'abord remarquer que les droites se distinguent les unes des autres par leur coefficient directeur, qu'il est nécessaire d'introduire sous la forme d'une lettre, telle que a . Toute droite (D) , qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et qui passe par $A(t)$, a une équation de la forme $y = a(x - t) + t^2$ où a est un réel quelconque, différent de 2.

3) $e_D = |x^2 - a(x - t) - t^2|$, que l'on peut écrire $|(x - t)(x + t - a)|$, qui se rapproche de 0 quand x se rapproche de t (l'idée étant de faire comprendre le résultat de cette limite, mais pas du tout de la faire démontrer rigoureusement).

4) $e_T = |2tx - t^2 - x^2|$, que l'on peut écrire $(x - t)^2$, qui tend vers 0, quand x tend vers t (ceci restant aussi au niveau de la conjecture).

5) $\frac{e_D}{e_T} = \frac{|x + t - a|}{|x - t|}$, qui tend vers $|2t - a|$, différent de 0, puisque $2t \neq a$, quand x tend vers t .
 e_D tend donc vers 0 avec le même ordre de grandeur que $|x - t|$, quand x tend vers t .

Mais $\frac{e_T}{|x - t|}$, qui est égal à $|x - t|$, tend vers 0, quand x tend vers t : e_T est donc négligeable devant $|x - t|$, quand x tend vers t .

Conclusion

Ce qui vient d'être prouvé ne nécessite aucune condition sur le nombre t , autrement dit cette démonstration est valable pour n'importe quel point de la courbe de la fonction "carré", notée f .

Pour n'importe quel réel t , le nombre-dérivé de f est $2t$, on note $f'(t) = 2t$.

En associant ainsi à chaque abscisse t un nombre-dérivé $2t$, on définit une nouvelle fonction, la fonction $t \mapsto 2t$, que l'on appelle la **fonction dérivée** de la fonction "carré" et que l'on note f' ; c'est la fonction qui donne la pente de la courbe en n'importe quel point.

Fonction "inverse"

Suivant le temps que l'on veut lui consacrer, cette étude peut être réalisée en dehors du cours ou simplement omise.

Il est toutefois opportun de demander le **signe** de la fonction dérivée de g , conjecturé à partir du dessin de l'hyperbole.

Remarque à l'issue de ces activités

Il ressort des expériences menées dans diverses classes de première, où la dérivée a été introduite en suivant certaines des activités relatées ci-dessus, que le temps, relativement long, consacré à cette introduction, permet une lente maturation de la notion de "nombre-dérivé- pente", qui facilite ensuite l'assimilation des théorèmes relatifs à l'étude du sens de variation des fonctions, à la détermination d'un extrémum... Mais n'oublions pas que les élèves ont aussi abordé le concept de limite d'une fonction en un point ! Finalement, deux points fondamentaux du programme ont été travaillés en ... peu de temps !

Vient donc à ce stade le moment de faire un bilan-résumé avec les élèves.

Résumé sur la dérivée

f désigne une fonction, définie dans un intervalle I ;

(C) désigne la courbe qui représente f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$;

t désignant un élément de I , le point de (C) d'abscisse t sera noté A .

f est dérivable pour $x = t$ signifie que l'on peut trouver une droite (T) , de coefficient directeur a , qui passe par A et qui épouse au mieux la forme de la courbe au voisinage de A .

C'est cette droite que l'on trouve confondue avec la courbe après un certain nombre d'agrandissements de (C) autour de A .

Cette droite (T) est **caractérisée**, parmi toutes celles qui passent par A , par le fait que l'erreur E commise lorsqu'on remplace un point N de (C) , d'abscisse x , dont la distance à t tend vers 0, par celui de ses points qui a la même abscisse, est **négligeable devant $x - t$, quand x tend vers t** . Elle s'appelle la **tangente à (C) au point A** .

Le coefficient directeur a de (T) , qui est aussi la pente de la courbe au point A , s'appelle le **nombre-dérivé de f pour $x = t$** et se note $f'(t)$.

Dire que l'erreur E est négligeable devant $x - t$, quand x tend vers t , signifie que E et $x - t$ ne sont pas du même ordre de grandeur quand x tend vers t et que $\frac{E}{x - t}$ tend vers 0 quand x tend vers t .

Vient ensuite une question au cours de ce bilan : existe-t-il des fonctions qui ne soient **pas** dérivables en t ?

Quelques dessins sont donc à donner de courbes représentatives de fonctions, présentant par exemples des points anguleux, des points de discontinuité, mettant en évidence des "ruptures de pente" (l'expression est assez évocatrice pour les élèves).

f n'est pas dérivable pour $x = t$ signifie que l'on ne peut pas trouver **une** droite qui ait un coefficient directeur et qui épouse au mieux la courbe au voisinage du point d'abscisse t .

Sont donnés ensuite :

- la définition d'une fonction dérivable sur un intervalle et celle de la fonction dérivée ;
- un formulaire relatif aux fonctions dérivées des fonctions de référence, qui est admis (les élèves devinent d'ailleurs bien les nombres-dérivés pour une fonction constante et pour une fonction affine) ;
- un formulaire, qui n'est pas démontré non plus, concernant les opérations sur les fonctions dérivables.

Quelques remarques en guise de conclusion

1 - Il est certes discutable de faire admettre ainsi toutes les formules concernant les opérations sur les fonctions dérivables. Dans les classes plus scientifiques, plus rapides dans les activités précédentes, il peut être très intéressant de travailler, graphiquement par exemple, sur la dérivée d'une somme. Dans toutes les sections par contre, on peut faire chercher des contre-exemples prouvant que la dérivée de l'inverse d'une fonction n'est pas l'inverse de la dérivée de la fonction, etc. Cependant l'expérimentation de ce mode d'introduction de la dérivée, dans des classes de première B, G et F1 montre qu'il est nécessaire de ne pas consacrer davantage de temps à ces questions et de passer rapidement à l'utilisation de la dérivée dans l'étude des variations des fonctions.

2 - Dans la suite du cours, les théorèmes relatifs au lien "variation d'une fonction - dérivée" sont donnés très rapidement, car ils sont très bien devinés par les élèves. Il suffit par exemple de revenir aux premières activités d'introduction en utilisant cette fois-ci le vocabulaire nouveau.

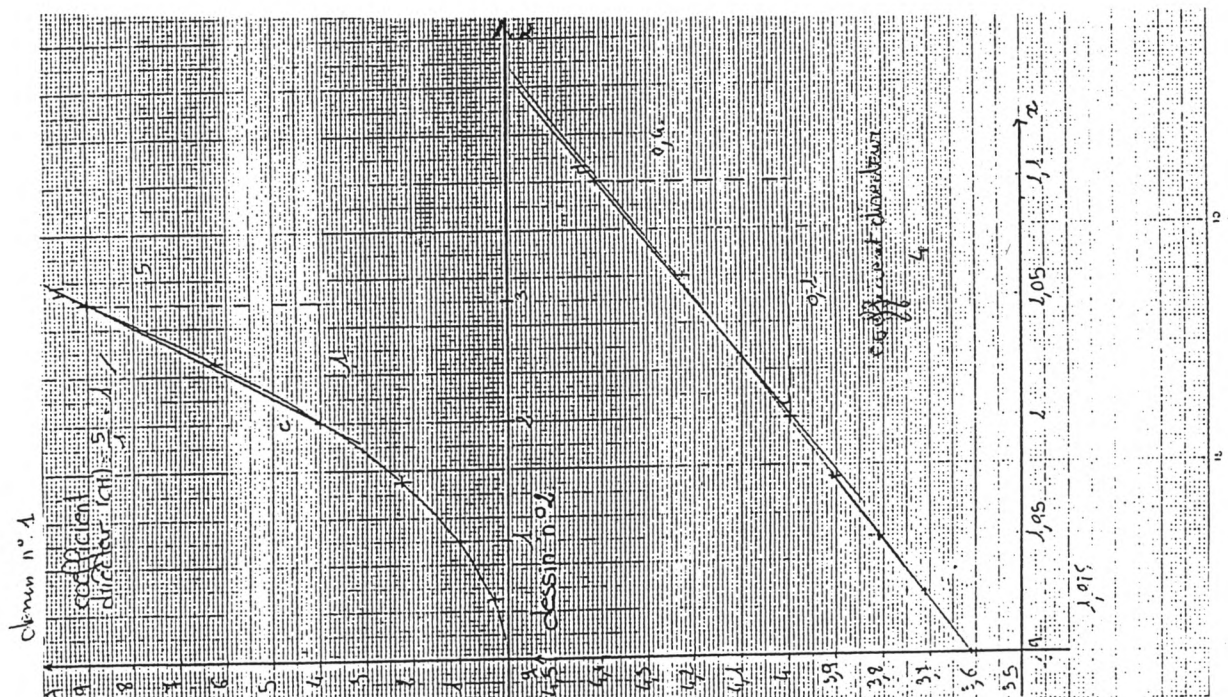
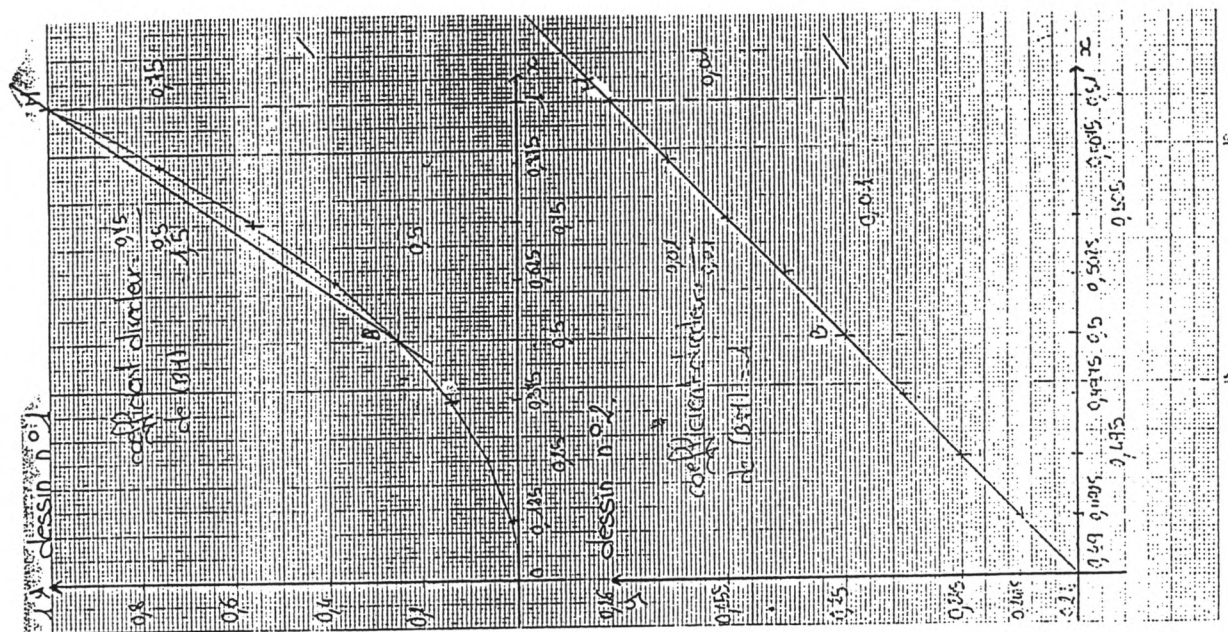
3 - L'un des aspects de la dérivée n'a pas du tout été évoqué : celui de la vitesse instantanée d'un mobile sur une trajectoire rectiligne. Il peut être abordé sous forme d'un problème à traiter en fin de cette séquence : par exemple, l'étude du mouvement d'un parachutiste, dont on représente la distance parcourue pendant la chute en fonction du temps, en demandant aux élèves de "visualiser" sur le graphique plusieurs vitesses moyennes et de faire le lien avec la vitesse instantanée (ce problème a été assez bien compris par des élèves de première F1, par exemple).

4 - Il est souhaitable d'aborder ces questions d'analyse dès le **début de l'année scolaire**, afin de pouvoir étudier de nombreux problèmes "plus concrets" relatifs à la physique, à l'économie... où l'on utilise ces notions.

5 - Le choix a été fait, dans tout ce qui précède, de justifier l'existence du nombre-dérivé d'une fonction f par une étude d'erreur (recours à une échelle de comparaison) ; l'annexe 3 fait le lien avec le nombre-dérivé obtenu d'une part, comme limite du taux d'accroissement de f , et d'autre part, comme coefficient de l'expression affine qui apparaît dans le développement limité de f .

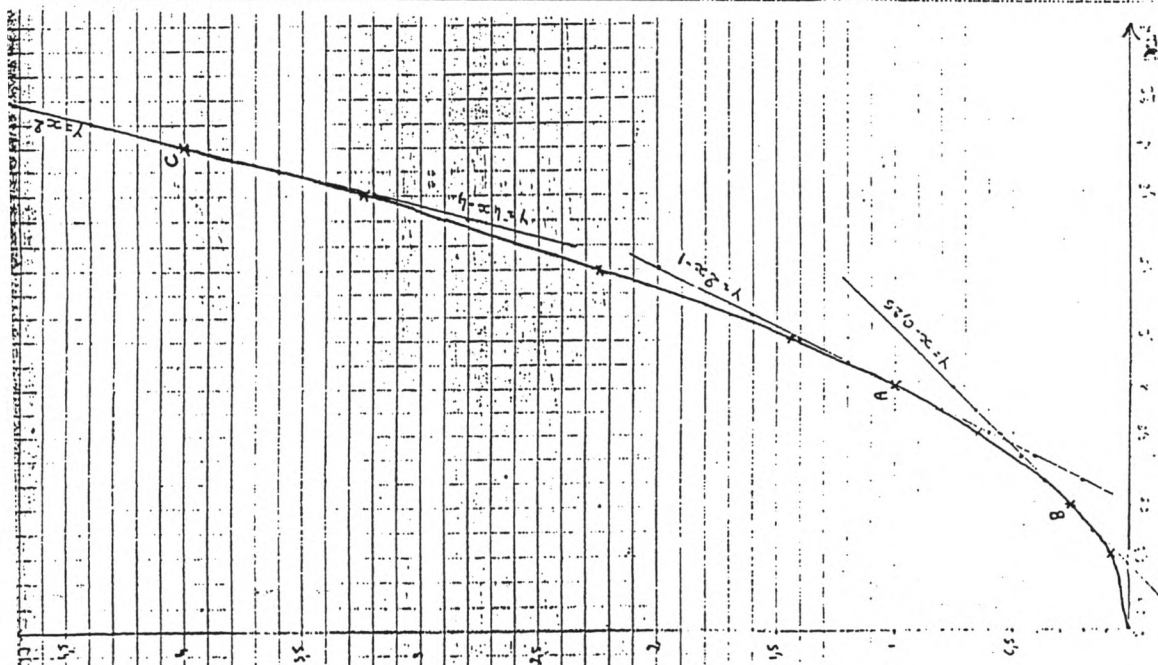
Ces différents aspects sont à travailler dans les classes scientifiques.

fonction $x \mapsto x^2$

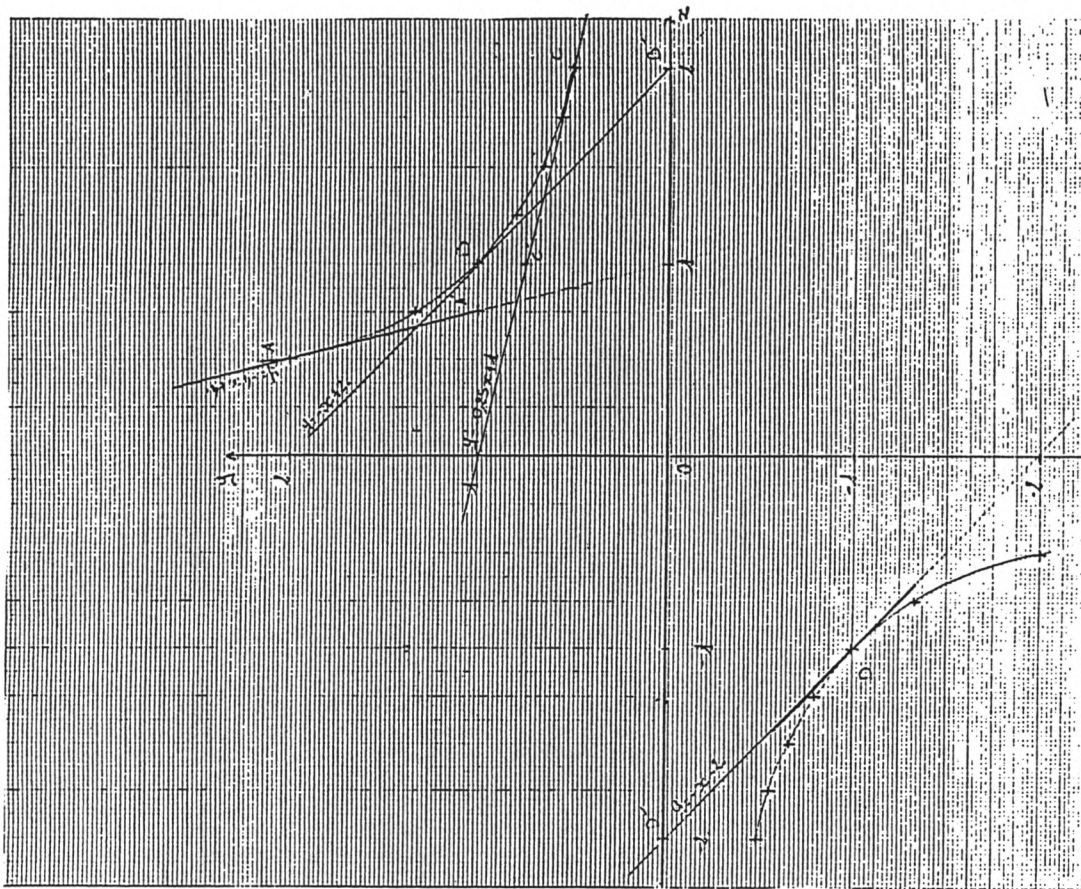


function $x \mapsto x^2$
 C'est la variance de $C(2,4)$

Annexe 2 : travail d'un élève sur courbes et tangentes



"fonction croisée" : bilan des trois tangentes obtenues pour les courbes aux points A, B, C.



Fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$
Tangentes aux points A, B, C, D

Annexe 3 : on y retrouve taux d'accroissement et développement limité

Ce que nous avons vu

f désigne une fonction définie dans un voisinage de t et (C) sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$;

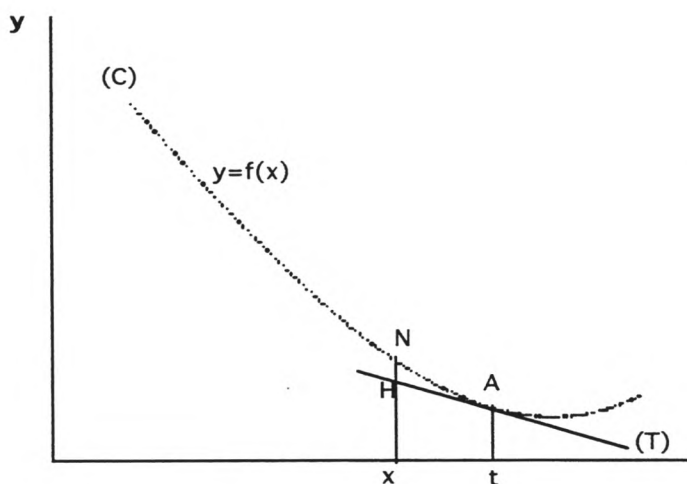
A est le point de (C) , d'abscisse t ;

(T) est la droite qui est confondue avec la courbe au bout d'un certain nombre d'agrandissements autour de A , que l'on a appelée la tangente à (C) au point A ; son coefficient directeur, qui est aussi la pente de (C) au point A ou encore le nombre-dérivé pour $x = t$, est désigné par $f'(t)$;

N est un point de (C) , d'abscisse x , et H est le point de (T) qui a aussi pour abscisse x ;

$e_t(x)$ désigne l'erreur "algébrique" que l'on commet lorsque l'on remplace N par H ; on convient qu'il s'agit de $f(x) - f(t) - f'(t)(x - t)$

Une équation de (T) est de la forme : $y = f(t) + f'(t)(x - t)$



On peut distribuer ce dessin aux élèves en leur demandant de le compléter par les ordonnées des points A , H et N , exprimées d'après le texte précédent.

Etude de l'erreur commise lors du remplacement de N par H, lorsque x tend vers t

1) Que traduit le fait que $e_t(x)$ tend vers 0 quand x tend vers t?

"Lorsque x tend vers t, $e_t(x)$ tend vers 0" : on demande aux élèves s'ils pensent que ceci est réalisé pour n'importe quelle fonction f.

Dire que, lorsque x tend vers t, $e_t(x)$ tend vers 0, traduit simplement la continuité de f au point t ; autrement dit, $e_t(x)$ ne tend vers 0, lorsque x tend vers t, que si f est continue au point t, ce qui n'a d'ailleurs pas été précisé au départ.

2) Que traduit le fait que $e_t(x)$ est négligeable devant x - t, quand x tend vers t ?

$$\frac{e_t(x)}{x-t} = \frac{f(x) - (f(t) + f'(t)(x-t))}{x-t} = \frac{f(x) - f(t) - f'(t)(x-t)}{x-t} ;$$

Une première traduction

Si, quand x tend vers t, cette erreur est négligeable devant x - t, alors :

$$\frac{e_t(x)}{x-t} = \frac{f(x) - f(t)}{x-t} - f'(t) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } t,$$

donc $\frac{f(x) - f(t)}{x-t}$, qui désigne le coefficient directeur de (AN), tend vers $f'(t)$, quand x tend vers t.

Ce coefficient directeur de (AN) s'appelle aussi le taux d'accroissement de f entre x et t.

Ainsi, le taux d'accroissement de f entre x et t tend vers le nombre-dérivé de f pour la valeur t, ce qui s'interprète graphiquement en disant que la sécante (AN) se rapproche, en pivotant autour de A, de la tangente (T), à mesure que la distance de x à t se rapproche de 0.

Réciproquement, si la sécante (AN) se rapproche d'une certaine droite qui passe par A à mesure que la distance de x à t tend vers 0,

c'est à dire si son coefficient directeur $\frac{f(x) - f(t)}{x-t}$, que l'on peut interpréter comme une pente

(dont nous n'avons obtenu que des valeurs approchées aux travers des activités précédentes),

tend vers un certain nombre l quand x tend vers t ,
 alors on en déduit que la différence $\frac{f(x) - f(t)}{x - t} - l$ tend vers 0, quand x tend vers t , donc que $e_t(x)$ est négligeable devant $x - t$ quand x tend vers t .

En conclusion : le fait que $e_t(x)$ soit négligeable devant $x - t$ quand x tend vers t traduit

- d'une part, l'existence d'un nombre dont se rapproche le taux d'accroissement de f entre x et t , quand x tend vers t ; ceci s'exprimera par " **f est dérivable au point t** " et le nombre en question est appelé "**le nombre-dérivé de f pour la valeur t** " ;

- d'autre part, l'existence d'une droite, dont la sécante (AM) se rapproche quand la distance de x à t tend vers 0 ; ceci s'exprimera par "**(C) admet une tangente au point A**", la droite en question est la tangente et son coefficient directeur est aussi la **pente de (C) au point A**.

A propos de limite

On dira aussi qu'une fonction f , de la variable x , définie dans un voisinage de t , est dérivable pour $x = t$ pour exprimer l'existence d'un nombre réel qui est la limite quand x tend vers t du taux d'accroissement de f entre x et t .

Une deuxième traduction

$$\frac{e_t(x)}{x - t} = \frac{f(x) - (f(t) + f'(t)(x - t))}{x - t} = \frac{f(x) - f(t) - f'(t)(x - t)}{x - t} ;$$

Si $e_t(x)$ est négligeable devant $x - t$, quand x tend vers t , alors $\frac{f(x) - f(t) - f'(t)(x - t)}{x - t}$,

qui est une expression en fonction de x que l'on peut noter $\varepsilon(x)$, tend vers 0, quand x tend vers 0 ; c'est à dire que $f(x)$ peut s'écrire comme la somme de $f(t) + f'(t)(x - t)$ et de $(x - t)\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x)$ tend vers 0, quand x tend vers 0.

Réciproquement, si, quand x tend vers t , $f(x)$ peut s'écrire comme la somme de $f(t) + a(x - t)$, où a est un nombre réel, et d'une expression en fonction de x , qui tend vers 0 avec un ordre supérieur à $x - t$ ou encore qui est négligeable devant $x - t$ quand x tend vers t , alors $e_t(x)$ est négligeable devant $x - t$ quand x tend vers t .

En conclusion : le fait que $e_t(x)$ soit négligeable devant $x - t$, quand x tend vers t , traduit l'existence

d'un nombre réel a et d'un infiniment petit d'ordre supérieur à $x - t$, quand x tend vers t , qui permettent d'écrire $f(x)$ comme la somme d'une expression affine de x , $f(t) + a(x - t)$, et de cet infiniment petit. Ceci s'exprime encore par " **f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de t** ", le nombre a , coefficient directeur de l'expression affine qui apparaît dans ce développement limité, est $f'(t)$.

Bibliographie et remerciements

- *Pour une approche de l'enseignement de l'analyse par le calcul infinitésimal*
J.C. Thiénard, IREM de Poitiers.
- *Un exemple d'utilisation des calculatrices graphiques au lycée. Introduction à la dérivation en classe de première*
M.L. Port, bulletin APMEP n°377.
- Chapitre 4 de la brochure "Les fonctions, c'est aussi autre chose" du Groupe d'Enseignement Mathématique de Louvain La Neuve.
- *Encyclopædia Universalis*
- *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*
Maggy Schneider-Gilot - Université catholique de Louvain.

Je remercie Marie Claire-Demongeot, Michèle Ghesquière, Claire Helmstetter, Marie-Claire Remillieux, Pierre Bérard, Raymond Chuzeville et Paul Mouche, pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de l'élaboration de ce document, et Claude Moser, qui m'a permis d'"entrer dans l'Analyse Non Standard".

Du nombre dérivé vers les limites et le second degré

Claude Pariselle

PREMIERE ETAPE : VERS LA NOTION DE NOMBRE DERIVE

La démarche proposée comporte trois parties :

Première partie : faire **parler** les élèves, avec leurs mots, de pente.

Vérifier qu'ils perçoivent bien :

- que, d'une part, à l'exception des fonctions affines, il s'agit d'une notion locale ;
- que, d'autre part, cette notion nous apporte de très forts renseignements dans l'étude d'un phénomène.

Deuxième partie : leur faire ressentir la nécessité, puis mettre en place un moyen de «mesurer» la pente en un point.

Troisième partie : leur faire d'emblée prendre conscience de l'existence de fonctions non dérivables, et pas seulement dans des cas limites comme ceux des fonctions racine carrée et valeur absolue en zéro. Le contre-exemple choisi est destiné à faire ressentir la dérivabilité comme une qualité de certaines «bonnes fonctions».

Cependant il n'est pas facile et il faut prendre garde à ce qu'il ne fasse pas "décrocher" des élèves qui risqueraient alors de perdre le bénéfice des deux premières parties.

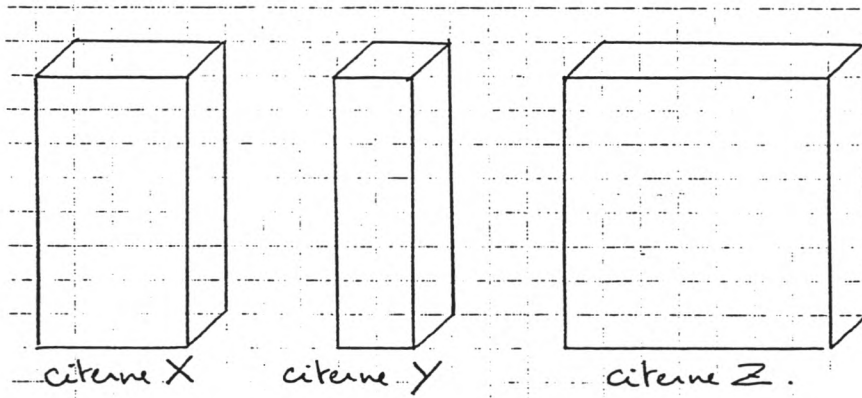
Première partie

Dans toute l'activité qui suit, on considère un robinet ayant un **débit constant**, et on observe le remplissage de différentes citernes.

Ces citernes sont représentées en perspective dans les deux premières figures, puis simplement par une coupe verticale.

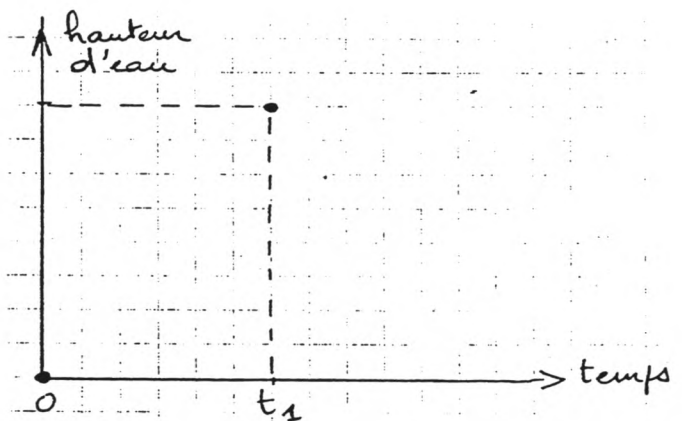
Les plans verticaux qui les limitent à l'avant et à l'arrière sont parallèles et, pour chaque citerne, leur distance est la même. Ainsi le volume est proportionnel à la surface correspondante de la coupe verticale.

1



Dans le graphique ci-contre, le remplissage de X commence au temps 0 et finit au temps t_1 .

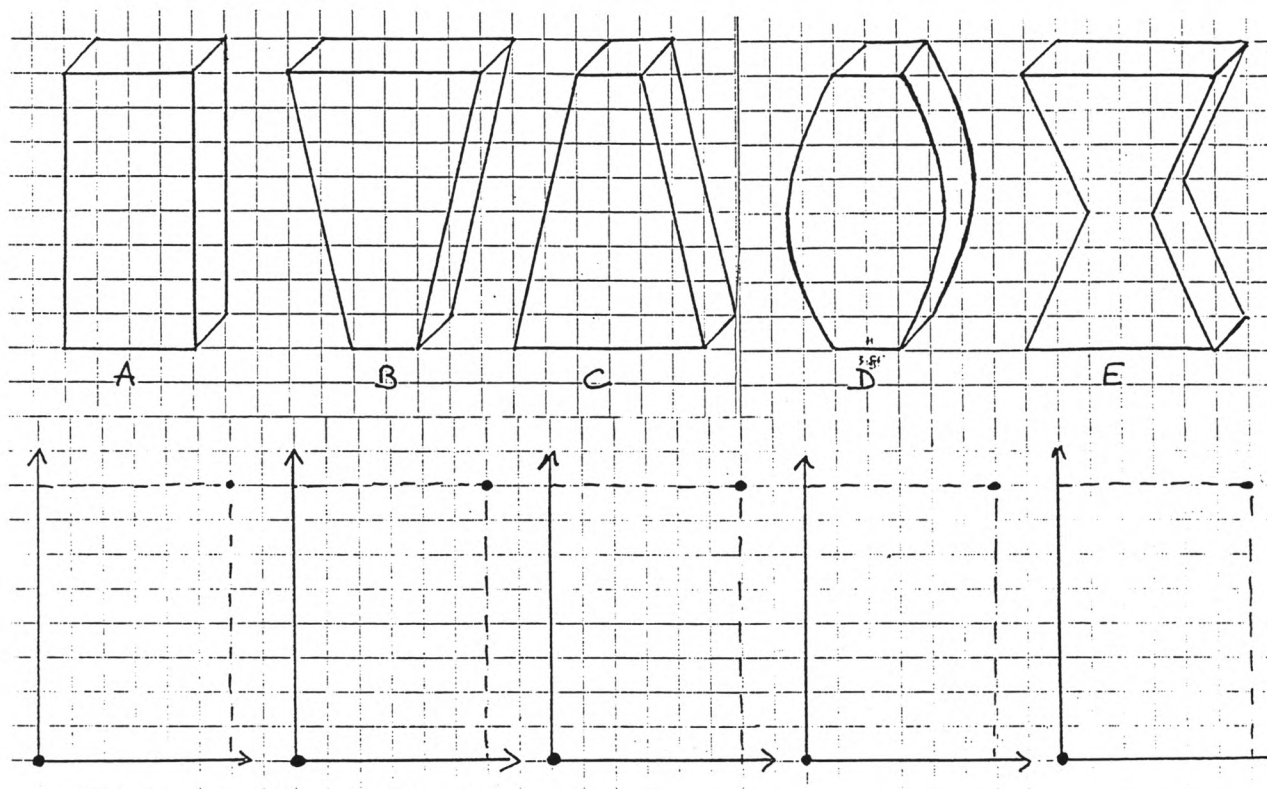
- Peut-on compléter cette courbe de remplissage ? Pourquoi ?
- Construire sur le même graphique les courbes de remplissage de Y et Z.



② Les citernes représentées ci-dessous ont toutes le même volume, et donc la même durée de remplissage.

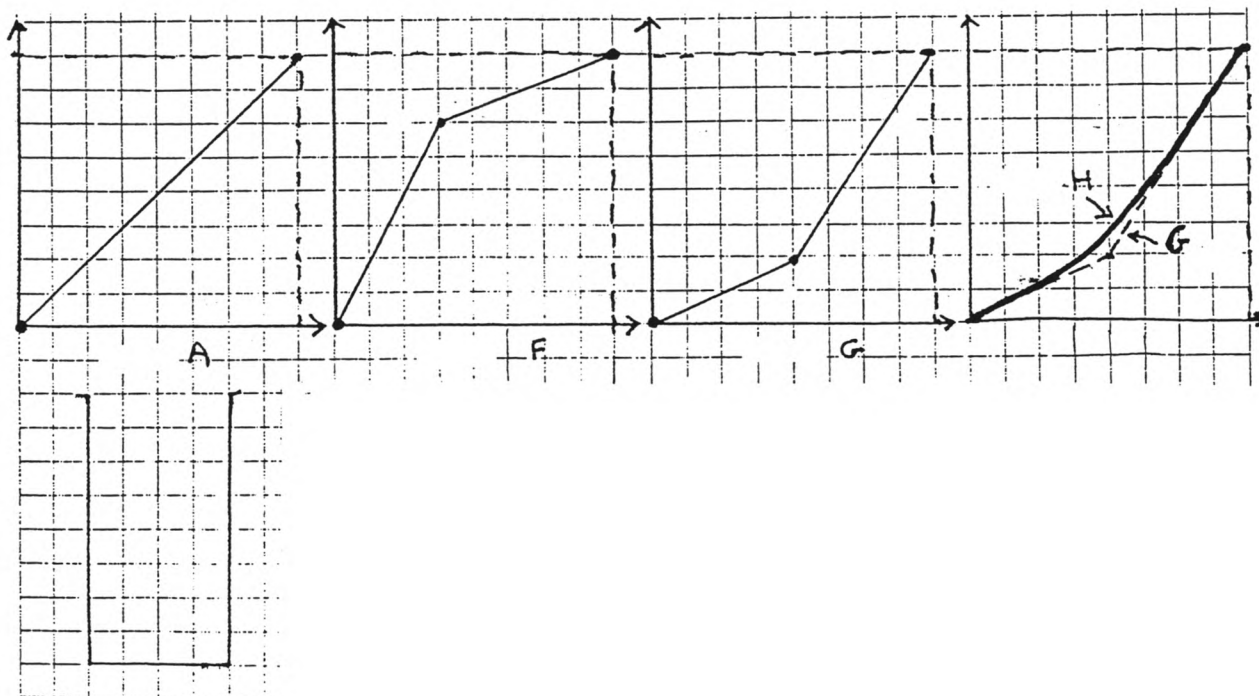
- Indiquer l'allure de la courbe de remplissage de chacune de ces citernes.
- A mi-hauteur pour B et C, au quart et aux trois quarts de la hauteur pour D et E, la section horizontale de la citerne est la même que celle de A.

Comment cela se traduit-il sur les courbes de remplissage ?



③ Dans les graphiques ci-dessous (voir page suivante), on a modifié (de quelle façon ?) le débit du robinet. Mais ce débit est toujours constant.

- Représenter une coupe possible des citernes F, G, H (en calculant précisément les sections pour les citernes F et G).
- La citerne H a-t-elle forcément une forme arrondie ?



❶ Question supplémentaire pour amateurs de calculs : refaire le 3ème en imaginant cette fois-ci que les citernes ont des sections horizontales circulaires. (Rappel du volume d'un cylindre : $\pi R^2 h$).

Deuxième partie

La courbe représentative de la fonction racine carrée a été vue en seconde.

Pourrions-nous, par exemple au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mesurer la «pente» de cette courbe ?

Comment construire une façon de la mesurer, d'une façon assez rigoureuse pour que nous soyons tous d'accord ?

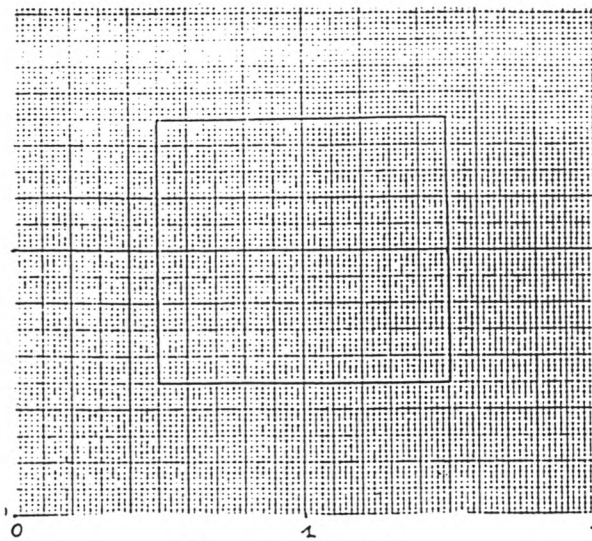
Mais d'abord regardons les choses de plus en plus près en construisant avec précision les graphiques suivants :

Graphique n° 1 : représentation graphique de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 2]$ dans un repère orthonormé d'unité 5 cm. Placer les onze points d'abscisses : 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,6 ; 1,8 ; 2.

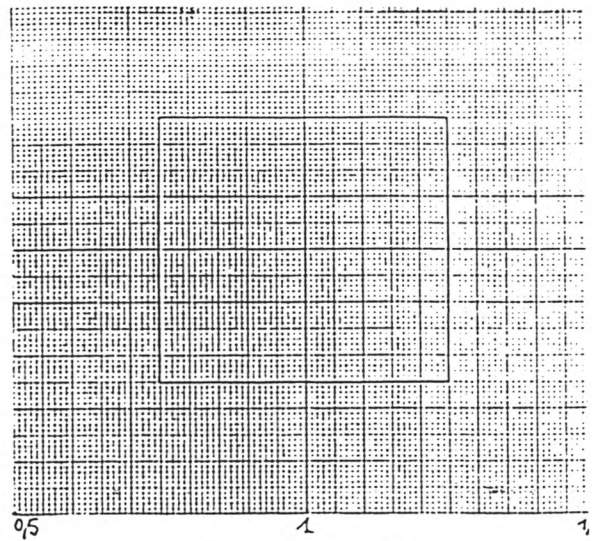
Graphique n° 2 : obtenu à partir du graphique n° 1 en faisant un «zoom» centré en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et doublant les unités.

Placer également onze points d'abscisses régulièrement espacées d'un cm.

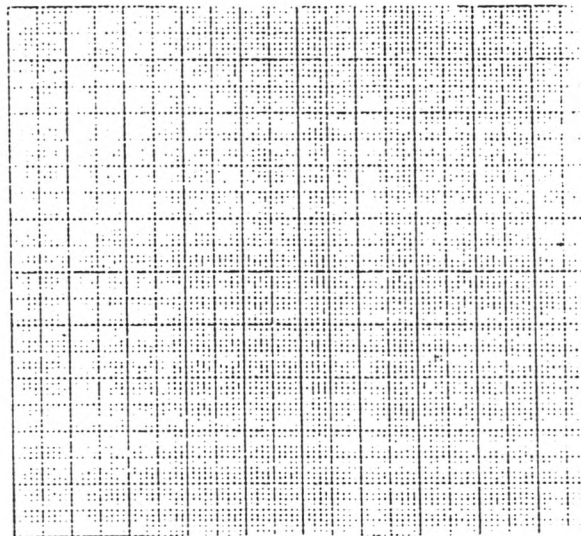
Graphique n° 3 : même consigne de zoom, cette fois à partir du n° 2.



Graphique n° 1



Graphique n° 2



Graphique n° 3

- Pour chaque graphique, tracer la droite joignant le point A au point qui est à l'extrême droite du graphique. Calculer, à 10^{-3} près, le coefficient directeur de cette droite.
- Etant donnés $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} 1,05 \\ \sqrt{1,05} \end{pmatrix}$ et $N \begin{pmatrix} 0,95 \\ \sqrt{0,95} \end{pmatrix}$ calculer, à 10^{-3} près, les coefficients directeurs de (AM) et de (AN).
- Soit P le point de la courbe d'abscisse x.

Nous nous intéressons au cas où x est très peu différent de 1. Il n'est pas très facile de savoir ce que devient le coefficient directeur $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ de la droite (AP), sauf si on pense à multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{x}+1$.

Le coefficient directeur de (AP) s'écrit alors :

$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{\quad}$$

Que devient-il lorsque x est très voisin de 1 ?

Bilan de la deuxième partie

Nous cherchions au départ un moyen de mesurer la «pente» d'une courbe en un point.

Quelle méthode avons-nous mise au point ?

Entraînement : utiliser cette méthode pour mesurer la «pente» de la parabole d'équation $y = x^2$ aux points d'abscisses : 1 ; 2 ; -1.

Mêmes questions pour la courbe d'équation $y = 3x^2 + 5$.

Troisième partie

Quelques difficultés que l'on peut déjà entrevoir :

- que dirions-nous de la «pente» de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ au point d'abscisse 0 ? (Nous pouvons voir ce que donne notre méthode).

- Comment voyons-nous la «pente» au point d'abscisse 0 de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$?

- Commencer à construire la représentation graphique de la fonction affine par intervalles définie comme suit :

$$f(-1) = -1$$

et f est affine sur l'intervalle $[-1, -\frac{1}{2}]$

$$f(-\frac{1}{2}) = +1$$

et f est affine sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$

$$f(-\frac{1}{3}) = -1$$

et f est affine sur l'intervalle $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}]$

$$f(-\frac{1}{4}) = +1$$

⋮
⋮
⋮

$$f\left(-\frac{1}{2p}\right) = +1$$

et f est affine sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2p}, -\frac{1}{2p+1}\right]$

$$f\left(-\frac{1}{2p+1}\right) = -1$$

et f est affine sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2p+1}, -\frac{1}{2p+2}\right]$

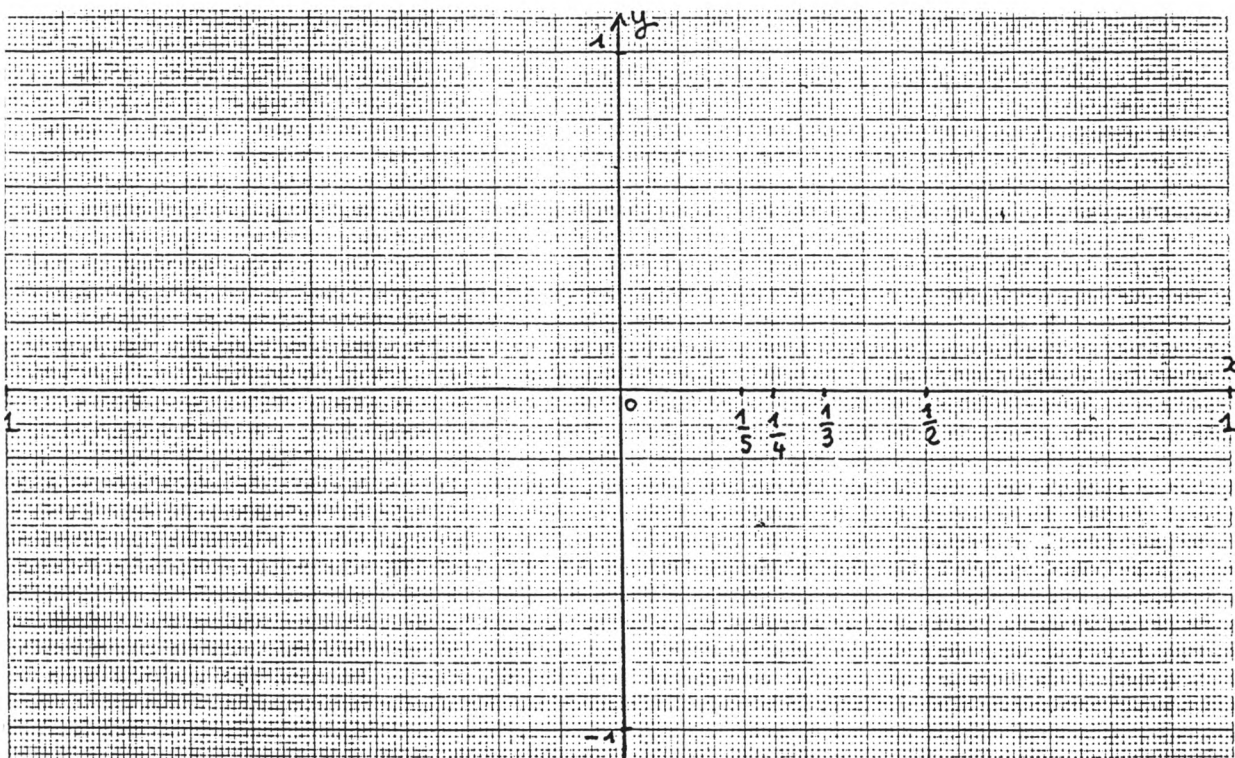
$$f\left(-\frac{1}{2p+2}\right) = +1$$

⋮
⋮
⋮ (p décrit $\mathbb{N}^*$)

De plus on donne les informations suivantes :

$$f(0) = 0$$

f est paire (sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à Oy).



M étant le point de cette représentation graphique ayant pour abscisse x , le coefficient directeur de la droite (OM) est $\frac{f(x)}{x}$.

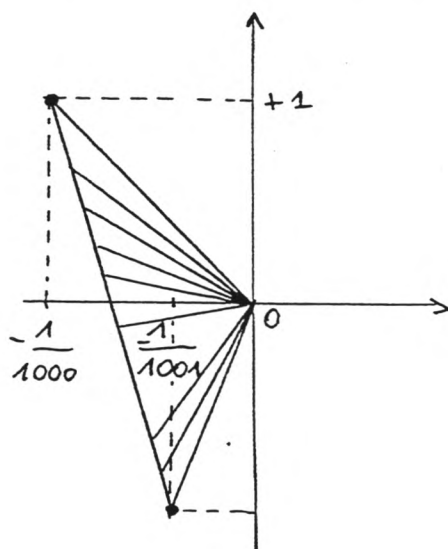
Calculer ce coefficient pour les valeurs suivantes de x :

abscisse de M	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{12}$	...	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{51}$	$-\frac{1}{52}$	...	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{1001}$	...
coeff. dir. de (OM)				...				...			...

Lorsque x décrit l'intervalle $[-\frac{1}{1000}, -\frac{1}{1001}]$, quel est l'ensemble des valeurs prises par le coefficient directeur de (OM) ?

Penser à la portion de représentation graphique représentée ici en modifiant les unités.

Peut-on définir une «pente» au point d'abscisse 0 pour la représentation graphique de f ?



DEUXIEME ETAPE : REFLEXION SUR LA NOTION DE LIMITE

(motivée par la fin de la première étape).

La démarche suivante a été choisie :

Introduction

Une petite réflexion sur l'infiniment grand et l'infiniment petit (activité préparée à partir du livre «Les puissances de dix» édité par Belin, et présentation de ce livre).

I. Que mettons-nous, les uns et les autres, derrière la phrase : «la fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque la variable tend vers $+\infty$?

Deux heures de discussion à partir de :

❶ **Questions** (une fonction croissante a-t-elle forcément pour limite $+\infty$ en $+\infty$?

Une fonction qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ est-elle forcément croissante ?).

❷ **Exemples et contre-exemples** présentés aux élèves à l'aide d'une **calculatrice rétroprojectable**.

($x \mapsto 5 - \frac{1}{x}$; $x \mapsto x + 2\sin x$) ; quelques exemples illustrant diverses façons d'avoir pour limite $+\infty$ en $+\infty$: $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; etc.).

Tout ceci débouche sur une explication de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

Plus rapidement, mise au clair de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty \dots$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f = +\infty \dots$

II. Les limites des fonctions de base

III. Comment justifier une affirmation de limite ?

A - Par comparaison

- * Fonction «poussée» par une autre vers $+\infty$.
- * Fonction «poussée» par une autre vers $-\infty$.
- * Fonction «prise en sandwich» entre deux autres qui tendent toutes deux vers l.

Exemples

1. $x \sin x$; $x + 5 \sin x$; $5 + \sin x$; $\frac{\sin x}{x}$.

A partir des graphiques, étudier la limite en $+\infty$.

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin x) = -\infty$.

3. Sachant que, pour tout réel x , $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$,

quelle inégalité prouve que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$? Que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$?

B. Par «décorticage» de f et utilisation des énoncés sur la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

- 2 tableaux à remplir (voir page suivante)
- Retenir les formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

• Situations classiques, à savoir étudier :

- dénominateur qui tend vers 0 sans que le numérateur tende vers 0 ;
- limite en $\pm \infty$ d'un polynôme, d'un quotient rationnel.

OPERATIONS ET LIMITES

a peut être soit $+\infty$, soit $-\infty$, soit un réel. l et l' sont des réels.

1. Somme

Compléter le tableau suivant en indiquant, dans chaque cas où on peut la prévoir, la limite de la fonction $f + g$ en a. Dans les cas où on ne peut faire de prévision, mettre ?.

Après correction, les résultats seront admis.

$\lim_a f$ $\lim_a g$	$-\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$			
l'			
$+\infty$			

Exercice

Etudier dans chaque cas la limite éventuelle de $f + g$ en $+\infty$.

1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^3$
3. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 5$
4. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + \cos x$

A quelles cases du tableau ci-contre renvoie cet exercice ?

2. Produit

Même question avec $f \times g$.

$\lim_a f$ $\lim_a g$	$-\infty$	l < 0	0	l > 0	$+\infty$
$-\infty$					
l' < 0					
0					
l' > 0					
$+\infty$					

Exercice

Etudier dans chaque cas la limite éventuelle de $f \times g$ en $+\infty$.

1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$
3. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{\cos x}{x^2}$
4. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x^3}$

Quel est le rapport avec le tableau ci-contre ?

(Travail analogue avec le quotient).

TROISIEME ETAPE RETOUR A LA DERIVATION

Deux volets doivent être très nettement distingués.

A - Les différents intérêts du nombre dérivé

- Rappel de la démarche de la première étape et de son aboutissement : mesurer localement la «pente» d'une courbe en A par la limite du coefficient directeur d'une sécante (AM) lorsque M tend vers A.

- Définition du nombre dérivé de f en a.
- Travail avec les élèves pour aboutir à la formulation équivalente.

f dérivable en a, de nombre dérivé d	revient à dire	$f(a + h) = f(a) + h \times d + h \times \varphi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$
---	----------------	--

Divers exemples, dont un exercice révélateur, auquel je tiens :

Sachant que $f(2 + h) = f(2) + 3h + h(1 + h^2)$, quel est le nombre dérivé de f en $a = 2$?

- Interprétation graphique des quantités $f(a)$, $h \times d$, $h \times \varphi(h)$ qui débouche sur l'intérêt du nombre dérivé pour calculer des valeurs approchées.
- Autres intérêts : équations de tangentes, cinématique (sans oublier de rappeler que l'intérêt fondamental qui a motivé tout ce travail était : «mesurer» la pente d'une courbe pour «étudier de près» la variation locale d'une fonction).

Introduction au 2ème volet : le nombre dérivé semble être un outil important (et de fait sa mise en forme par Newton et Leibniz a joué un rôle fondamental dans l'histoire des maths et des sciences).

Mais pour l'instant il est difficile de l'obtenir, aussi bien par la limite d'un taux de variation, que par développement. En somme c'est un gros outil, mais qui «coûte trop cher». Notre objectif est maintenant d'en faire baisser le prix.

B - Recherche de techniques de dérivation

1. Exercice : pour $f(x) = 3x^2 - x - 1$, déterminer le nombre dérivé en $a = 2$; $a = -1$; $a = \frac{5}{3}$; $a = \frac{2\sqrt{5}}{3\pi}$; ...

Les calculs de développements, de plus en plus pénibles - surtout pour des élèves qui n'apprécient guère ce genre de réjouissances - sont destinés à leur donner envie d'essayer de «chercher une formule pour calculer le nombre dérivé en a».

Après avoir constaté qu'il était aussi facile de développer $f(a + h)$ que $f(2 + h)$ et avoir rempli le tableau :

valeur de a	2	-1	5/3	$\frac{2\sqrt{5}}{3\pi}$
nombre dérivé de f en a (6a - 1)				

Les élèves arrivent **tout seuls** à parler de **fonction dérivée**. D'entrée le calcul de **fonctions dérivées apparaît donc comme un outil pour obtenir plus facilement des nombres dérivés**.

2. La question maintenant est de trouver des moyens pour **déterminer rapidement une fonction dérivée**.

(Si possible plus rapidement qu'en développant $f(a + h)$ ou en calculant $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$).

Or une fonction numérique peut être comparée à une recette de calcul dont les «ingrédients» sont....., ces ingrédients étant combinés en faisant des d'où l'espoir que :

a. Si nous savons, une fois pour toutes, dériver les fonctions de base,

b. Si nous avons la chance de trouver que les opérations sur les fonctions se traduisent systématiquement par des opérations sur les dérivées de ces fonctions (donc si nous réussissons à établir des formules de dérivation de fonctions sommes, produits, etc.).

nous tiendrons un outil très puissant de calcul de fonctions dérivées et par suite de nombres dérivés.

Dans un premier temps, on ne traite qu'une partie du b : dérivée d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par une constante.

✪ Cela permet, avec les polynômes (la dérivée de x^n étant provisoirement admise) de disposer d'un matériel déjà intéressant pour donner lieu à bon nombre de problèmes de variations, d'optimisation,...

✪ Cela laisse espérer qu'en isolant la linéarité de la dérivation on la met mieux en relief, ce qui est la moindre des choses vu le rôle fondamental que joue cette linéarité (par exemple dans le calcul intégral abordé en terminale),

✪ Cependant le problème posé par la dérivée d'un produit peut déjà être évoqué avec la fonction carré : $f(x) = x^2 = x \cdot x$, dont la dérivée n'est manifestement pas

$f'(x) = 1 \cdot x = x$ car la parabole n'a sûrement pas une «pente» constante !

QUATRIEME ETAPE : LE SECOND DEGRE

On peut tirer quelques marrons du feu : **Etude des trinômes $ax^2 + bx + c$** (a réel non nul, b et c réels quelconques)

A - Objectifs

Annulation(s) éventuelle(s)

Indiquer le signe selon les valeurs de x.

B - Partons de ce que nous savons déjà faire

- Dans l'activité décrite à la page suivante, quels sont les polynômes du 2ème degré dont nous pouvons facilement dire quand ils s'annulent, et quel est leur signe selon les valeurs de x ?

- Pour ceux qui restent, que pourrions-nous faire ?

Une étude des variations (à suggérer au besoin)

Activité : Parmi les polynômes, trinômes du 2ème degré suivants, quels sont ceux pour lesquels tu saurais facilement

- trouver quand ils s'annulent
- déterminer leur signe selon les valeurs de x ?

1. $-\frac{1}{2}x^2 + x - 3$

2. $(2x - 1)(3 - x)$

3. $3x^2 + 7x$

4. $x(x - 1) + 3$

5. $5x^2 - 4$

6. $x^2 + 9$

7. $(x + 2)(x - 3) - 9$

8. $-2(x - 3)^2 - 5$

9. $3(x + 5)^2 - 6$

C - Quels renseignements peut-on tirer du tableau de variations ?

a. de $-\frac{1}{2}x^2 + x - 3$

b. de $x^2 - x + 3$

c. de $x^2 - x - 15$

D - Généralisation

Deux tableaux de variations possibles pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ (car $f'(x) = 2ax + b$ a deux tableaux de signe possibles) :

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
$2ax + b$	-	0	+
$ax^2 + bx + c$	$+\infty$	$f(-b/2a)$	$+\infty$

si $a > 0$

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
$2ax + b$	+	0	-
$ax^2 + bx + c$	$-\infty$	$f(-b/2a)$	$-\infty$

si $a < 0$

Calculons la valeur de l'extremum :

$$E = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

- Nous aurons un trinôme qui ne s'annule jamais et qui est toujours du même signe que a
soit si $a > 0$ et $E > 0$ soit si $a < 0$ et $E < 0$,

c'est-à-dire si E est du même signe que a .

c'est-à-dire si le numérateur de E est positif.

c'est-à-dire si $b^2 - 4ac < 0$.

- Nous aurons un trinôme qui ne s'annule qu'une fois, pour $x = -\frac{b}{2a}$, et qui le reste du temps est toujours du signe de a si $b^2 - 4ac = 0$ (donc $E = 0$).

- Nous aurons un trinôme qui s'annule deux fois, en étant du signe de a à l'extérieur des valeurs d'annulation si $b^2 - 4ac > 0$.

Reste à savoir calculer les valeurs d'annulation.

Exemples et généralisation de la forme canonique.

La dérivée: les choix d'un enseignant en 1ère ES

Enseignant en 1ère ES cette année, j'ai relu les textes sur la dérivée de C.Pariselle et M.Gandit avant de préparer mon cours sur la dérivée. Je me demande ici quelles ont été les retombées de ces articles sur la présentation de la dérivée que j'ai faite dans cette classe.

J'expose en 1ère partie la présentation choisie (objectifs, activités).

Je m'interroge sur l'influence qu'ont eu ces textes en 2ème partie.

1ère partie : mes choix pour cette classe de 1ère ES

Le choix du temps

1/ Le début de l'année avait été consacré à l'information chiffrée. En novembre, après un travail sur "courbes, repères, équations", j'introduis :

-tangente à une courbe, "pente" d'une courbe

allant jusqu'à:

-définition du nombre dérivé,

-fonction dérivée

2/ je reprends, au printemps,

- fonction dérivée

-opérations sur les fonctions dérivables

-utilisation du signe de la dérivée dans l'étude du sens de variation.

Par la suite, je parle seulement de la 1ère période.

Le choix des "objectifs-enseignant"

1/ Construire l'image mentale de tangente, "pente" d'une courbe, nombre dérivé

2/ Illustrer, par un travail graphique et numérique, le fait que la tangente représente une "bonne" approximation affine de la fonction au voisinage de x_0 , en soulignant qu'on a besoin d'une échelle pour évaluer la proximité entre deux nombres ou entre deux points (l'œil nu, la loupe, le microscope ...).

3/Donner la définition mathématique, du nombre dérivé de f en x_0 .pour ceci, "parler de limite".

4/ Introduire la fonction dérivée et l'utiliser tout de suite pour déterminer le sommet d'une parabole.

Le choix des activités

1/ Des activités d'introduction

-Après un travail sur les équations de droite, on construit

les droites d'équation: $y = nx - n^2$ pour $0 \leq n \leq 10$ et la parabole d'équation: $y = \frac{x^2}{4}$

et on observe leur position. Des élèves parlent de "tangente"....L'idée est lancée : comme la tangente à un cercle est proche du cercle au voisinage du point de contact, chacune de ces droites est proche de la parabole au voisinage de son point commun avec la parabole. Et ces droites semblent donner une "information" sur la fonction.

-Une séance de travail avec calculatrices TI.81 :recherche du minimum de la fonction:

$$x \mapsto 3x^3 + \frac{1}{x} \quad \text{pour } 0 < x \leq 1$$

zoom et observations.

-Débat sur le sens à donner au schéma

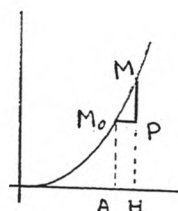
croissance ralentie	croissance accélérée	croissance proportionnelle ou régulière

Remarque :en 1ère ES, les élèves entendent parler de "croissance" en mathématiques et en économie . Il s'agit ici de la croissance au sens du mathématicien et non au sens d'un économiste . Pour un économiste, c'est la fonction exponentielle qui a une croissance constante .

2/ Vers la définition du nombre dérivé et de la tangente

Après le bilan des premières observations, vient le travail local sur la parabole représentative de

$x \rightarrow x^2$ au voisinage du point $(1, 1)$.



- Comment s'accorder sur la pente de la courbe en M_0 ?

Pour un point M de C , voisin de M_0 , distinct de M_0 , à droite de M_0 le coefficient directeur de (M_0M) est PM / PM_0 .

On choisit une suite de positions particulières de M sur C . Le tableau donne les valeurs de PM_0 , PM et PM / PM_0 . La position de M est repérée par h : la distance AH ou PM_0 .

x	1	1,1	1,01	1,001	1,0001
x^2	1	1,21	1,0201	1,002001	1,00020001
$PM_0 = h = x - 1$	0	0,1	0,01	0,001	0,0001
$PM = x^2 - 1$	0	0,21	0,0201	0,002001	0,00020001
$PM / PM_0 =$		2,1	2,01	2,001	2,0001

On sent qu'on peut trouver en répétant ce procédé un point M tel que PM / PM_0 soit aussi proche qu'on veut de 2 . Pour $h = 0.0000001$, la calculatrice donne $PM / PM_0 = 2$. Discussion...On regarde ensuite ce qu'apporte le calcul général :

$$PM / PM_0 = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$$

Y a-t-il un point M de C tel que PM / PM_0 soit égal à 2 ?

Non .

Mais si quelqu'un demande un point M tel que :

$$PM / PM_0 - 2 < 10^{-10}$$

on peut le satisfaire en prenant $PM_0 < 10^{-10}$

On dit que PM / PM_0 tend vers 2 quand PM_0 tend vers zéro.

On dit que 2 est la pente de C en M_0 .

Aucune des droites (M_0M) n'a exactement le coefficient directeur 2. On introduit la droite passant par M_0 , de coefficient directeur 2. On l'appelle la tangente en M_0 à C . Lorsqu'on la trace, elle illustre bien notre idée géométrique induite par celle de tangente à un cercle.

- On n'a pas examiné, ici, la droite (M_0M) quand M est à gauche de M_0 , pour alléger.

- Mieux vaut ne pas s'en tenir à l'exemple "fétiche" de la fonction $f(x) = x^2$, en 1.

- Il faut examiner, ici, d'autres positions de M_0 sur cette courbe :

Par exemple : $x_0 = \frac{8}{7} \approx 1,142857$

x	8/7	1,242857	1,152857	1,143857	1,142957
PM / PM_0		2,385714	2,301457	2,286714	2,285814

Est-ce que PM / PM_0 a une limite quand x tend vers $8/7$?...La calculatrice cache la valeur exacte. On a besoin du calcul littéral pour aller plus loin.

-Examiner une situation analogue sur une autre courbe :

Par exemple : $f(x) = -\frac{1}{x}$ $x_0 = \frac{8}{7}$

x	8/7	1,242857	1,152857	1,143857	1,142957
PM / PM_0		0,704023	0,758984	0,764956	0,765553

Dans le cas général, pour une fonction f en x_0 , la démarche serait :

- Examiner les valeurs de PM / PM_0 , pour les points M d'abscisse $x_0 + 0,1$, $x_0 + 0,01$, $x_0 + 0,001$, $x_0 + 0,0001$...

ou directement pour $x = x_0 + h$:

$$PM / PM_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

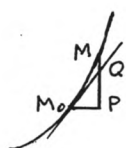
- " Deviner " la limite de PM / PM_0 quand h tend vers 0 .

Ici, les élèves s'inquiètent : " au devoir surveillé, que faudra-t-il faire " ?

Ma réponse :

-ce passage est traité par les mathématiciens avec le langage des limites . En attendant des théorèmes efficaces pour trouver et démontrer cette limite, je peux vous fournir cette limite dans les énoncés d'exercices .

C'est ce nombre qui est la pente de la courbe de f en M_0 , officiellement nommé " nombre dérivé de f en x_0 "



C'est la droite passant par M_0 , ayant comme coefficient directeur ce nombre, qu'on appelle la tangente à C en M_0 .

- La tangente en M_0 paraît très proche de la courbe au voisinage de M_0 .

Comment examiner cette proximité ?

Soit Q le point d'abscisse x sur la tangente en M_0 .

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
h	0,1	0,01	0,001	0,0001
QM	0,01	0,0001	0,000001	0,00000001

Ici QM est le carré de PM_0

3/ Après le cours

Les exercices correspondent aux "objectifs élèves" ci-dessous:

- a/ construire une courbe représentative d'une fonction,
- construire, intuitivement, sa tangente en un point,
- déterminer graphiquement son coefficient directeur
- b/ le nombre dérivé, a , de f en x_0 étant fourni par l'énoncé, comparer sur un tableau de valeurs $f(x)$ et $f(x_0) + ah$ (l'étude reste qualitative : la différence $f(x) - f(x_0 + ah)$ devient plus petite que h)
- c/ connaître la fonction dérivée des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$; la fonction dérivée de kf et $f + g$ pour pouvoir former la dérivée de toute fonction du 2nd degré
- d/ transférer le savoir faire de l'objectif a/ dans le domaine économique: évaluer le coût marginal, rechercher graphiquement le maximum d'une fonction bénéfice.

2ème partie : quelle a été l'influence des textes du groupe lycée de l'IREM ?

1/ J'ai adopté le point de vue de C.Pariselle sur le découpage en deux périodes dans l'acquisition de la dérivée, convaincue qu'il faut du temps pour assimiler la notion de tangente, pente d'une courbe, que le retour, en mars, donnera l'occasion de cerner ce qui a été acquis.

2/ J'ai donné aux élèves l'occasion de "voir la tangente" avec des calculatrices graphiques, idée présente dans les deux textes de l'IREM.

3/ J'ai voulu, avec les élèves :

- signaler la difficulté de la limite
- montrer la nécessité d'un langage précis
- marquer la frontière de notre programme.

Je trouve intéressant de faire observer les valeurs de la différence : fonction - fonction tangente pour observer que cette différence varie ici comme le carré de $x - x_0$, en général "plus vite" que $x - x_0$. Je ne prouve pas que la tangente donne la meilleure approximation affine de f au voisinage de x . C'est un objectif essentiel du texte de M.Gandit. La présentation est intéressante mais le prix à payer est lourd.

4/ J'ai choisi comme activité à traiter ensemble, en classe (2 heures) le thème "coût, recette, bénéfice" présenté par M. Gandit. Cette activité a été traitée après les fonctions du 2nd degré : au moment où les élèves venaient de s'installer dans la technique du calcul de la dérivée pour trouver le sommet d'une parabole, ce travail graphique sur une courbe différente d'une parabole a été un salutaire retour au sens.

5/ Je n'ai pas suggéré, pour l'instant, qu'il existait des fonctions non dérivables et des courbes sans tangente. Peut-être ceci ne se présentera-t-il qu'en classe terminale. •