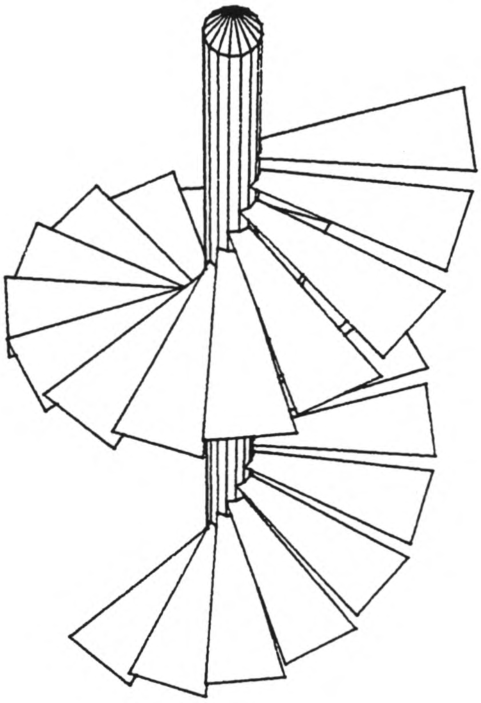
Maths.

université Joseph Fourier - Grenoble 1

Ph.-J. Haug



invitation à la perspective

i.r.e.m. de grenoble

document interne - février 1993

1 - Présentation générale.

La perspective centrale est un procédé de représentation des objets de l'espace sur une surface plane ; elle porte également le nom de perspective conique ; bien souvent, lorsqu'on parle de perspective sans précision supplémentaire, il s'agit encore de ce procédé.

Cette perspective a été inventée en Italie, au cours de la Renaissance (ou réinventée si l'on admet, comme quelques uns le font sur la base d'indices fragiles, qu'elle avait été inventée une première fois dans l'antiquité gréco-romaine) ; elle peut être considérée comme *la* perspective, car elle est souvent considérée comme le système de représentation le plus réaliste. Enfin, le nom de perspective centrale ou conique convient bien puisqu'il s'agit en fait d'une projection conique.

La figure 1 (réalisé avec cette technique) représente une situation qui va permettre de donner quelques définitions.

Le point **O** est l'œil de l'observateur (ou plus brièvement **observateur**). Le plan $\mathcal{T}$ est le **tableau** ; c'est sur le tableau que se trouve le dessin, comme on le voit dans l'exemple ici ; bien souvent, le tableau est vertical (mais le tableau utilisé pour réaliser la figure 1 ne l'est pas). La distance de l'observateur au tableau est la **distance principale,** le projeté orthogonal Ω de l'observateur sur le tableau est le **point principal**.

Le plan $\mathcal{S}$ est le **sol** (ou géométral) ; le sol est nécessairement perpendiculaire au tableau, et en général horizontal lorsque le tableau est vertical. La droite intersection du sol et du tableau est la **ligne de terre**, la parallèle à la ligne de terre qui passe par le point principal est la **ligne d'horizon**.

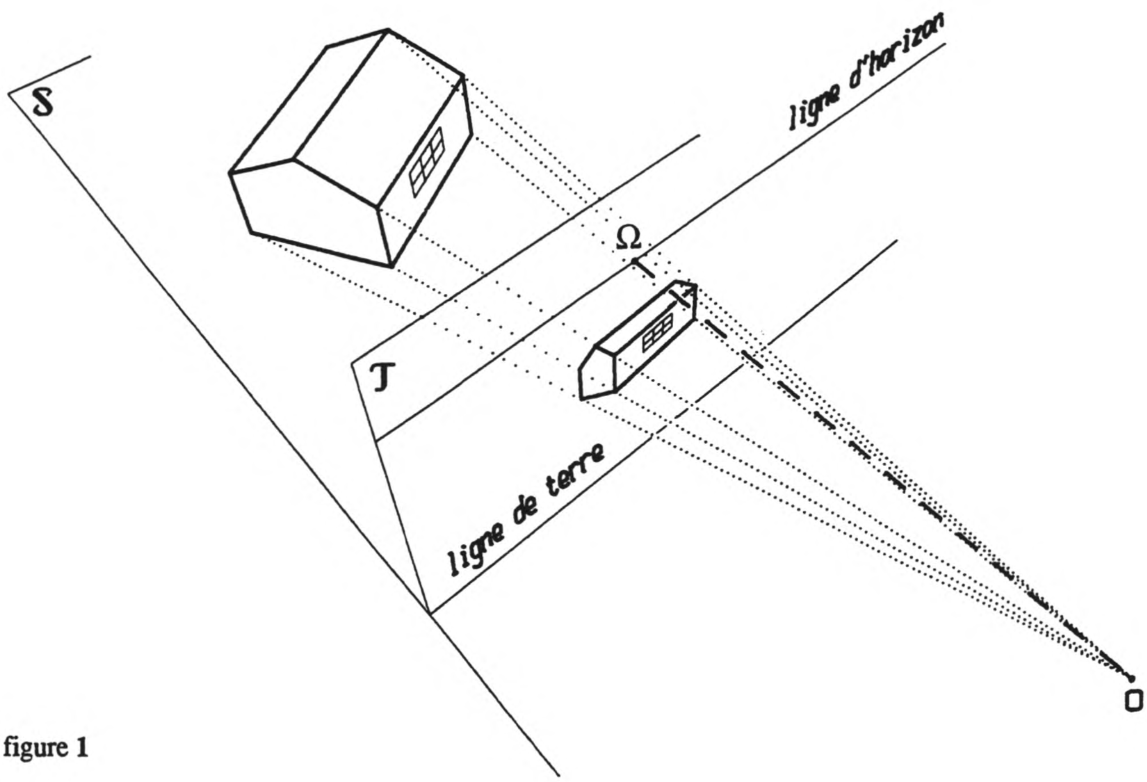


figure 1

La perspective centrale consiste à projeter coniquement les points jugés intéressants de l'espace sur le tableau, le sommet du cône étant l'observateur. Donc l'observateur et le tableau (ou l'observateur et le point principal) déterminent complètement la perspective ; la ligne de terre et la ligne d'horizon aideront à placer les points de l'espace par rapport au système de projection.

En général, l'objet à dessiner et l'observateur sont de part et d'autre du tableau ; on remarquera quand même que les points du plan parallèle au tableau qui contient l'observateur n'ont pas d'image : ce plan est le **plan neutre**.

Remarquons encore que la ligne de terre, la ligne d'horizon et donc le point principal sont dans le tableau et de ce fait sont confondus avec leur représentation (leur projection - le plus souvent, ces éléments sont gommés dans la version définitive du dessin) ; il n'en est pas de même du segment qui joint l'observateur et le point principal ; la distance principale est pourtant essentielle, elle devra figurer sous une forme ou une autre sur le dessin jusqu'à son achèvement.

2 - Image d'une droite

Sur la **figure 2** (également réalisée en utilisant la perspective centrale), on a figuré un observateur **O**, un tableau **T**, le plan neutre associé **N**, un sol **S** et quatre droites de l'espace repérées par les lettres **a, b, c** et **d** et leurs images repérées par les lettres **B', c'** et **d'**.

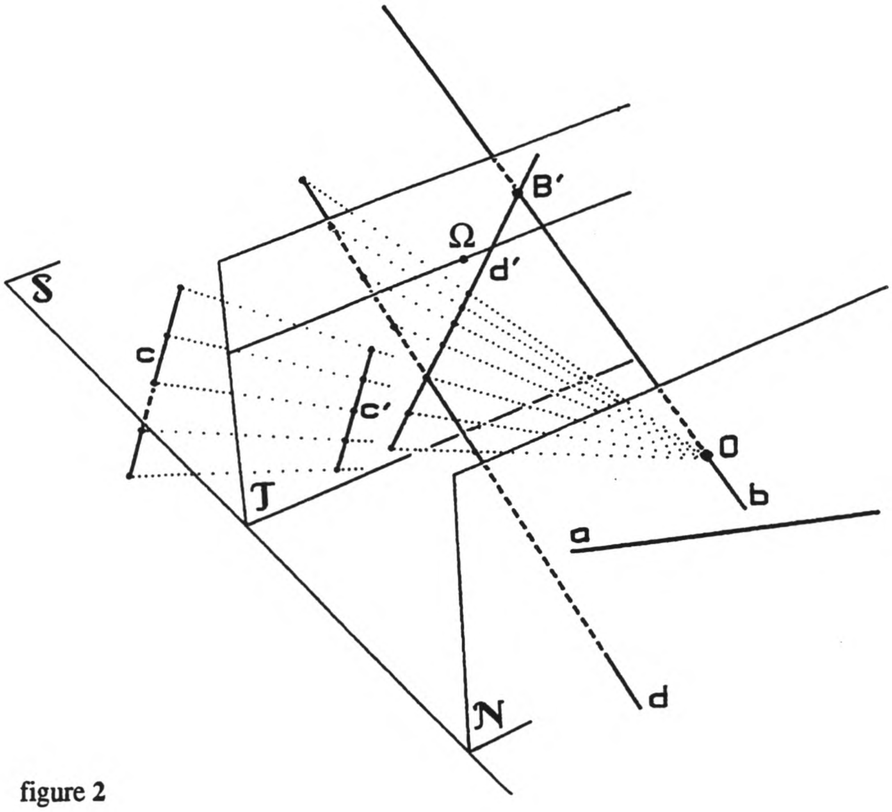


figure 2

Les droites qui sont dans le plan neutre - comme par exemple la droite **a** - n'ont pas d'image (pour être pédant : leur image est l'ensemble vide). Les droites qui passent par l'observateur et qui ne sont pas dans le plan neutre ont évidemment pour image le point où elles coupent le tableau ; ainsi, sur la figure 2, la droite **b** a pour image le point **B'** (le singleton {**B'**}).

Enfin, les droites de l'espace qui ne rentrent pas dans ces cas particuliers se projettent suivant une droite : cette image est l'intersection du tableau et du plan défini par l'observateur et la droite à dessiner. Ici, il faut encore distinguer un cas particulier, celui où la droite à dessiner est parallèle au tableau $\mathcal{T}$, comme la droite **c** (on dit que cette droite est **frontale**, comme pour toute figure contenue dans un plan parallèle au tableau) : son image **c'** est une droite parallèle à **c**, et toutes les droites parallèles à **c** qui ne sont pas dans le plan neutre auront pour image une droite parallèle à **c** (et à **c'**).

On a volontairement choisi les droites **b** et **d** parallèles ; il est facile de comprendre que les droites **b**, **d** et **d'** sont coplanaires, et que la droite **d'** passe par le point commun au tableau et à la droite **d**, et par le point **B'** ; et naturellement, toutes les droites parallèles à **b** ont leur image qui passe par le point **B'** : ce point **B'** est le **point de fuite** de la droite **d**, et de toutes les droites qui lui sont parallèles. Donc, dans ce système de représentation, en règle générale des droites parallèles ont pour images des droites concourantes.

Une remarque importante : si une droite est horizontale (c'est à dire parallèle au sol) et a un point de fuite, ce point de fuite est sur la ligne d'horizon : la parallèle à cette droite qui passe par l'observateur **O** coupe évidemment le tableau $\mathcal{T}$ sur la ligne d'horizon.

3 - Un problème, et un début de solution

Pour mettre en œuvre quelques procédés utilisés en perspective centrale, nous allons nous poser le problème suivant : étant donné le système de projection de la figure 3 (ligne de terre, ligne d'horizon, point principal Ω, distance principale donnée ici par un segment - et l'on suppose désormais que le sol est horizontal, et donc que le tableau est vertical),

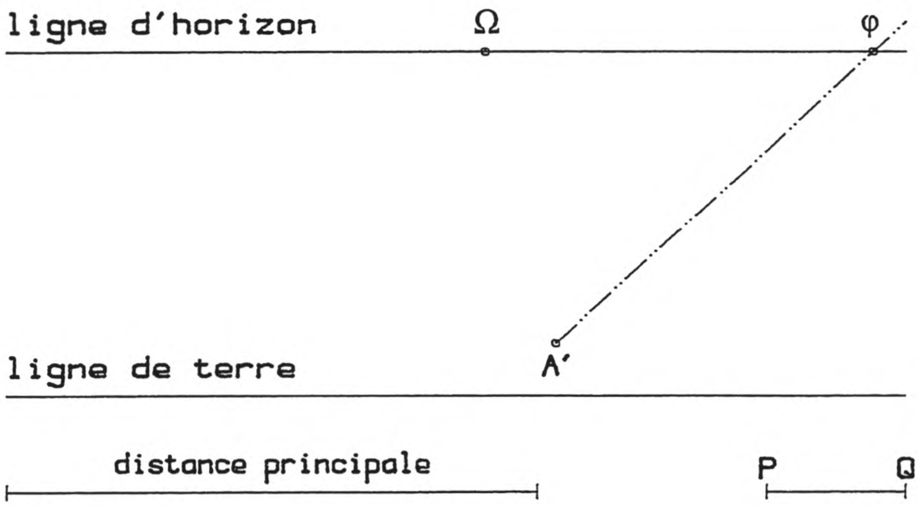


figure 3

il est demandé de dessiner le cube

posé sur le sol,

dont chaque arête a la longueur du segment **PQ**, notée ℓ, dont le sommet le plus proche du tableau a pour image le point **A'**,

et dont l'une des arêtes contenues dans le sol a son image portée par le segment **A'**φ (le point φ est sur la ligne d'horizon, ce qui assure que c'est bien le point de fuite d'une direction horizontale).

Notons

A le sommet du cube qui a pour image **A'**,

B le sommet du cube dont l'image, notée **B'**, est portée par le segment **A'** φ,

C (d'image **C'**) le sommet à la verticale de **B**,

D (d'image **D'**) le sommet à la verticale de **A**.

Puisque la droite **AD** est verticale, elle est frontale (c'est à dire parallèle au tableau) et son image **A'D'** lui est parallèle, donc verticale.

Les droites **AC** et **BD** sont parallèles et horizontales, elles ont le même point de fuite, sur la ligne d'horizon : ce point est φ.

Notons **R** le point où la droite **AB** coupe le tableau ; comme cette droite est dans le sol, le point **R** est sur la ligne de terre. La verticale passant par **R** est contenue dans le tableau ; comme toute figure contenue dans le tableau, elle est sa propre image. Notons **S** l'intersection de cette verticale avec la droite **CD** : les segments **AD** et **RS** sont verticaux, les segments **AR** et **DS** sont horizontaux, donc **ARSD** est un rectangle et le segment **RS** a la longueur de l'arête **AD**, c'est à dire ℓ ; puisque le segment **RS** est dans le tableau, il est sa propre image.

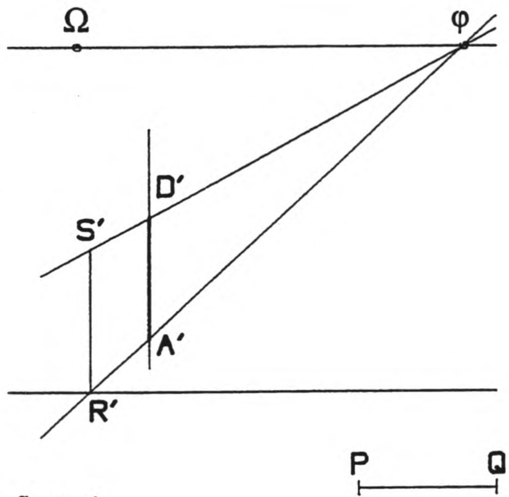


figure 4

D'où la construction de **D'** sur la figure 4 : le point **R** (qui est aussi son image **R'**) est l'intersection de la droite **A'**φ et de la ligne de terre ; le point **S** (qui est aussi son image **S'**) est l'extrémité du segment vertical de longueur ℓ d'origine **R** (au dessus de **R**), le point **D'** est l'intersection de la droite **S'**φ et de la verticale issue de **A'**.

4 - Représenter un segment de longueur donnée

Dans l'étape suivante, nous allons construire le point **B'**, qui se trouve sur la droite **A'**φ, entre **A'** et φ.

La figure 5, *qui n'est pas un dessin perspectif*, est fait dans le plan défini par l'observateur et la ligne d'horizon (appelé **plan d'horizon**) ; on y a figuré la ligne d'horizon, où l'on reconnait le point principal Ω et le point de fuite φ, et l'observateur **O**.

On a noté **M***, **U***, **V** ***et **W*** les images par la projection verticale sur le plan d'horizon de points **M**, **U**, **V** et **W** qui remplissent les conditions suivantes : les points **U**, **V** et **W** sont à une même distance du point **M** (quelconque) ; en outre, les points **U** et **V** sont sur la parallèle à la droite d'horizon qui passe par **M**, et **W** est sur la parallèle à l'arête du cube

AB qui passe par **M**, et donc sur une parallèle à la droite **O**φ ; on voit facilement que les points **M, U, V** et **W** sont dans un même plan horizontal.

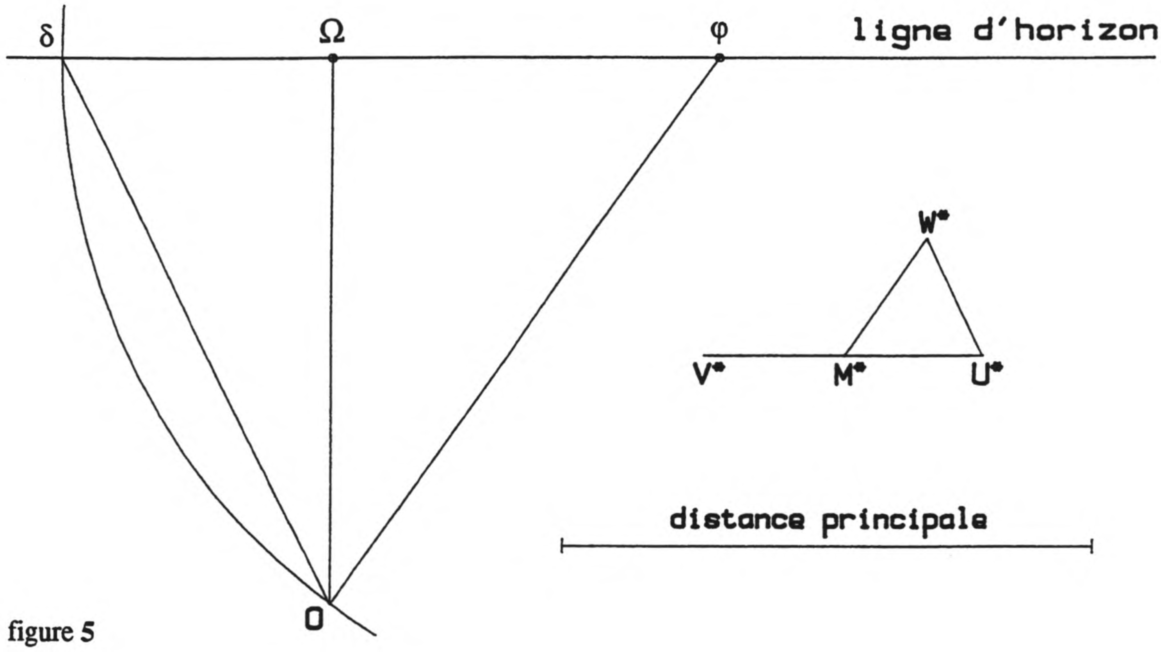


figure 5

Le triangle **MUW** est isocèle, et toutes les droites parallèles à la droite **UW** découpent sur les demi-droites **MU** et **MW** des segments égaux ; étant parallèles, toutes ces droites ont un même point de fuite, appelé **point de distance gauche relatif à** φ ; notons-le δ ; la droite **O**δ est parallèle à la droite **UW**. Les triangles **MUW** et φδ**O** sont semblables (parallélisme des côtés), donc ce dernier est isocèle, et le point δ est l'intersection de la ligne d'horizon et du cercle horizontal de centre φ qui passe par **O** (grâce au point **V**, on construirait de même le point de distance droite relatif à φ).

On remarque que cette construction de δ est faite en utilisant uniquement la ligne d'horizon, l'observateur et le point de fuite φ ; comme elle est indépendante du point **M** choisi, les points de distance gauche et droit relatifs à φ sont les mêmes pour tous les points de l'espace.

D'où la construction du point **B'** sur la figure 6. Nous avons d'abord construit le point de distance δ ; pour cela, nous avons placé sur la perpendiculaire en Ω à la ligne d'horizon un point situé à la distance principale du point principal Ω (nous l'avons noté **O** par abus ; son symétrique

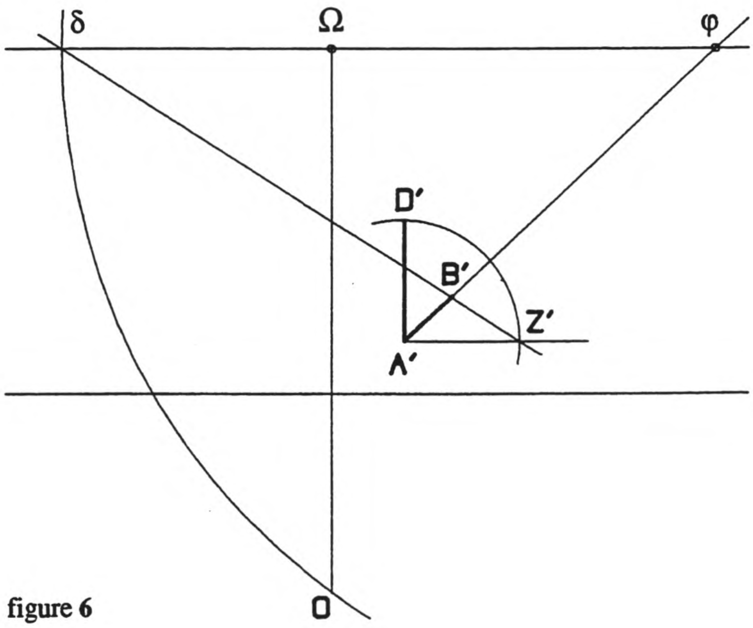


figure 6

par rapport à Ω aurait aussi bien fait l'affaire) ; le point δ est l'intersection de la ligne d'horizon et du cercle de centre φ qui passe par **O**.

Sur la parallèle à la ligne de terre qui passe par **A'**, nous avons placé le point **Z'**, image du point **Z** qui se trouve à la distance ℓ du sommet **A**, sur la parallèle à la ligne de terre, à droite de **A**.

Puisque les points **A**, **Z** et **D** se trouvent dans un même plan frontal (parallèle au tableau), les segments **A'Z'** et **A'D'** ont la même longueur : l'image 𝔉' d'une figure frontale 𝔉 est évidemment homothétique de 𝔉, et puisque les segments **AZ** et **AD** ont la même longueur ...

Le point **B'** est l'intersection des droites **Z'**δ et **A'**φ.

Sur la figure 7, on a facilement complété le dessin de la face du cube **ABCD** : le point **C**, dont l'image **C'** n'était pas encore dessinée, est sur la parallèle à la droite **AB** qui passe par **D** : donc **C'** est sur la droite **D'**φ. Le point **C** est à la verticale de **B**, donc **C'** est à la verticale de **B'**.

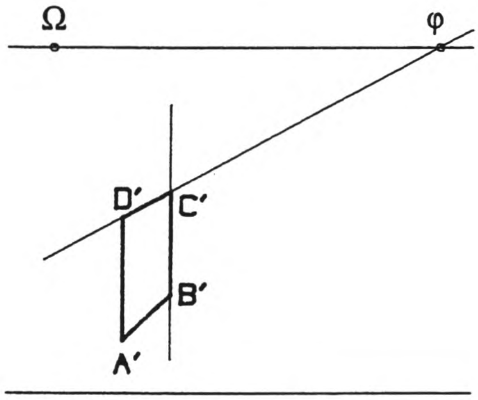


figure 7

5 - Dessiner un angle droit

Le point φ est le point de fuite de la droite **AB** et des droites qui lui sont parallèles.

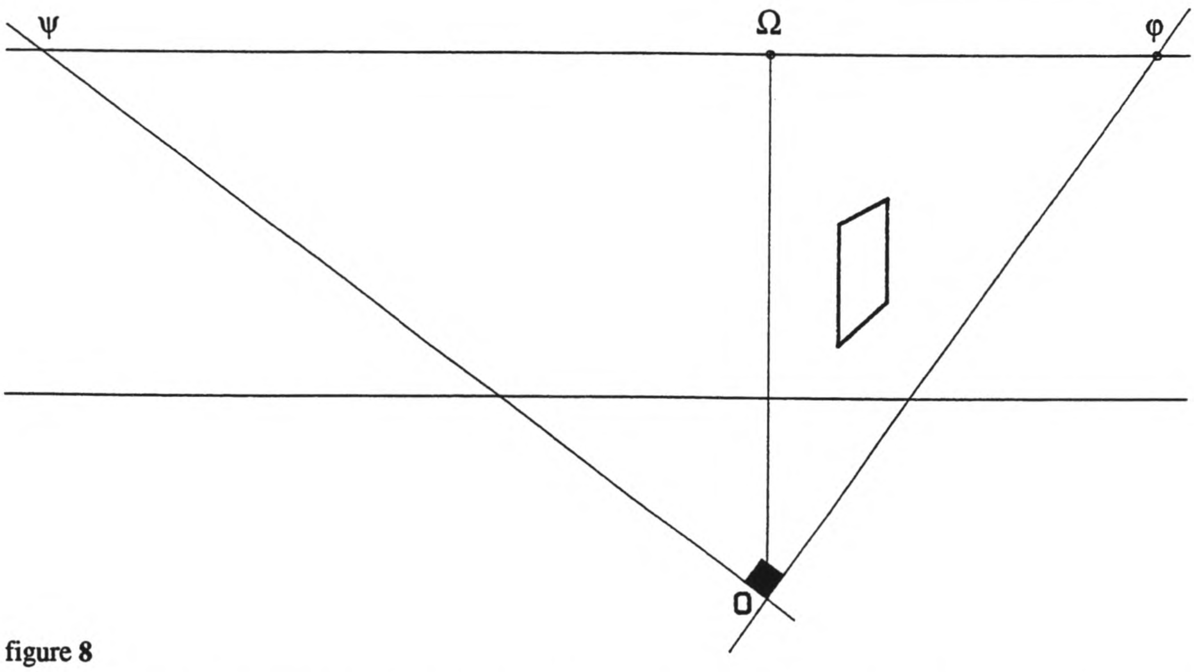


figure 8

Nous allons construire le point de fuite ψ des horizontales qui leur sont perpendiculaires. Ce point de fuite est sur la ligne d'horizon, et dans le plan d'horizon (le plan défini par l'observateur et la ligne d'horizon) les droites **O**φ et **O**ψ sont perpendiculaires. D'où la construction de la figure **8** : on utilise à nouveau le point **O** précédent (point à la distance principale de Ω sur la perpendiculaire au tableau passant par Ω), la droite perpendiculaire à **O**φ qui passe par **O** coupe la droite d'horizon au point ψ cherché. On remarque que pour faire cette construction, nous avons fait un **rabattement** du plan d'horizon sur le tableau autour de la ligne d'horizon.

La droite **A'**ψ porte l'image de l'arête horizontale du cube qui est issue de **A** et qui est perpendiculaire à l'arête **AB**.

La figure **9** montre la construction de l'image cette arête, semblable à la construction faite pour **AB** ; nous avons en particulier construit le point de distance droit relatif à ψ, noté ici ε.

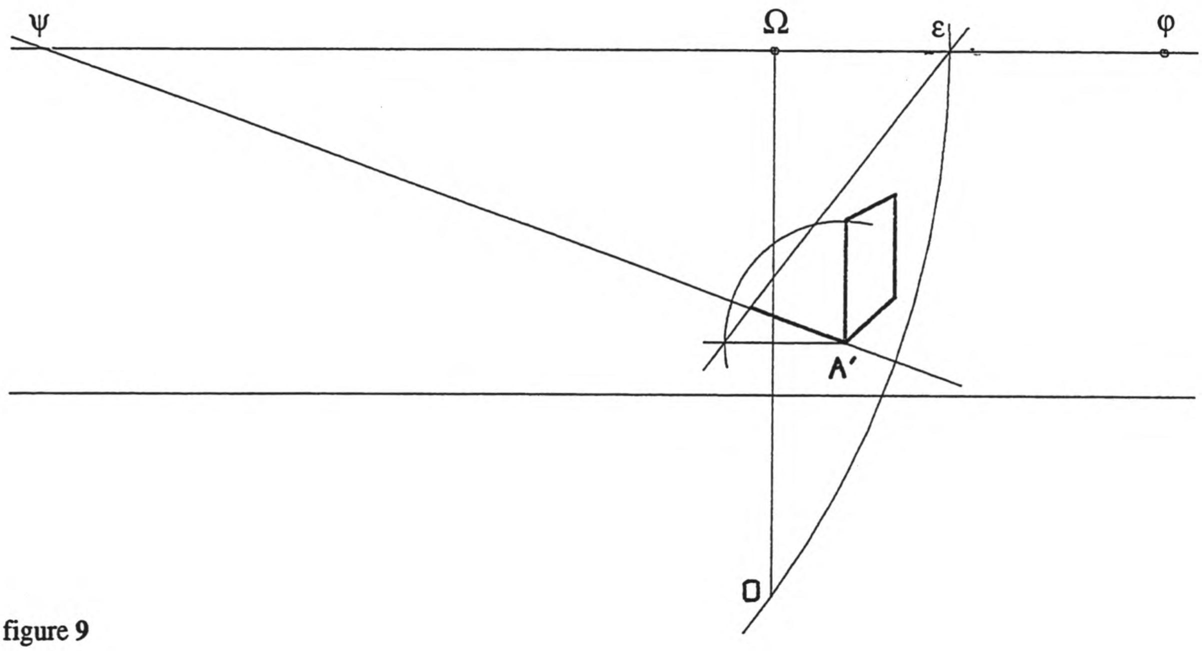


figure 9

La figure **10** montre comment, grâce aux points de fuite φ et ψ, on peut compléter le dessin de la deuxième face verticale qui contient l'arête **AD**, et enfin terminer le dessin du cube.

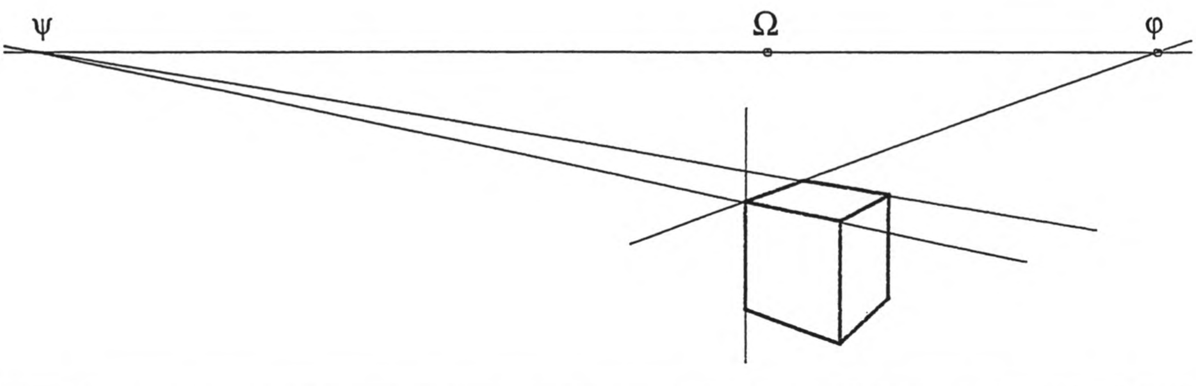


figure 10

6 - Un dessin plus complexe

Voici un objet un peu plus complexe, qui va permettre d'introduire une nouvelle technique : un grand carré, de côté 5ℓ, quadrillé en 25 carrés de côté ℓ, est sur le sol ; le cube que nous venons de dessiner est posé de façon à recouvrir exactement le carré du quadrillage qui forme le coin du grand carré le plus proche du tableau ; à chacun des trois autres coins du grand carré, un cube de même dimension est posé, de la même façon.

Sur la figure **11** les points **Z'**, **Z'$_2$**, **Z'$_3$**, **Z'$_4$** et **Z'$_5$** sont les images de points **Z**, **Z$_2$**, **Z$_3$**, **Z$_4$** et **Z$_5$** placés sur la droite parallèle à la ligne de terre qui passe par **A**, chacun des segments **AZ**, **ZZ$_2$**, ..., **Z$_4$Z$_5$** ayant la même longueur ; les segments images ont la même longueur que le segment **A'Z'**, car tous ces segments sont dans un même plan frontal. Les parallèles à la droite **ZB** qui passent par **Z$_2$**, **Z$_3$**, **Z$_4$**, et **Z$_5$** découpent sur la droite **AB** des segments de longueur ℓ (Thalès). Les images de ces parallèles passent toutes par le même point de fuite, que nous avons noté λ. Les intersections de la droite **A'**φ et des droites **Z'**λ, **Z'$_2$**λ, ... , **Z'$_5$**λ sont les images des nœuds du quadrillage portés par la droite **AB**.

Par commodité, nous avons utilisé le point **Z** déjà défini au paragraphe 4, ce qui fait que λ n'est autre que le point de distance δ ; mais ce n'était évidemment pas nécessaire.

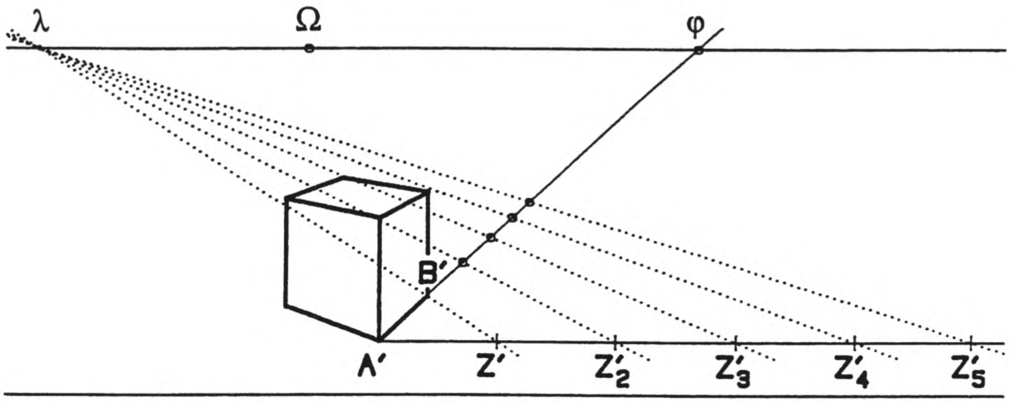


figure **11**

Sur la figure **12**, nous avons procédé de même pour trouver les images des nœuds du quadrillage portés par la perpendiculaire à la droite **AB** qui passe par **A**.

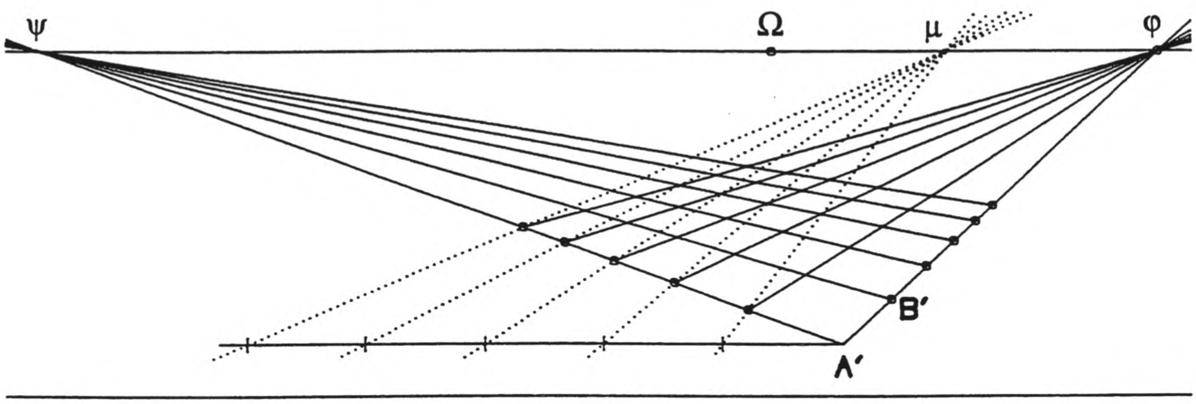


figure **12**

Le point μ, qui n'est autre que le point ε, joue ici le rôle de λ dans la figure 11

Ensuite, nous avons terminé le dessin du quadrillage en utilisant les points de fuite φ et ψ. Pour que la figure soit plus lisible, le cube n'est pas représenté.

Les méthodes déjà utilisées nous ont alors permis de dessiner d'abord les images des deux cubes les plus proches de celui qui était déjà dessiné, puis d'achever le dessin ; c'est ce qu'on voit sur la figure 13 (où nous avons supprimé le quadrillage, bien que certains de ses nœuds - certains de ceux qui sont à la base des cubes - y soient utilisés).

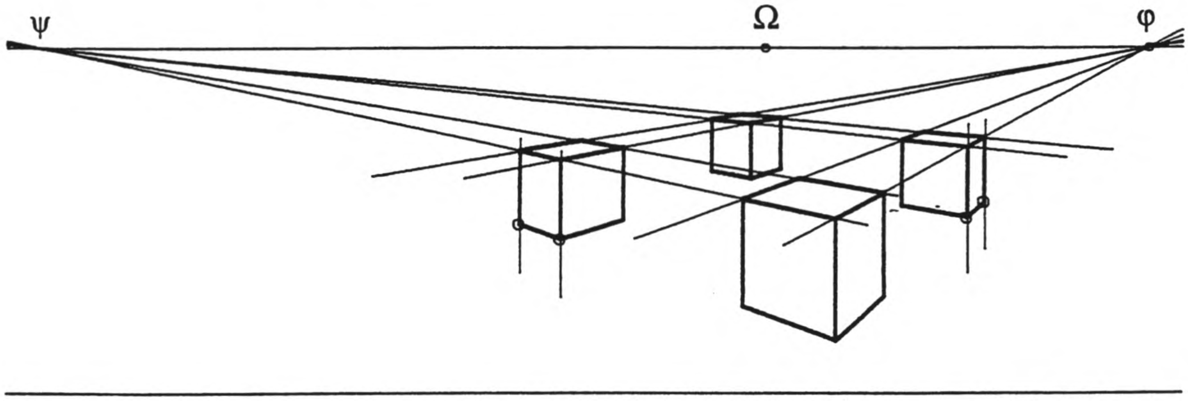


figure 13

La figure 14 est une copie de la figure 13, où l'on a remis le quadrillage et supprimé toutes les lignes ayant servi à la construction.

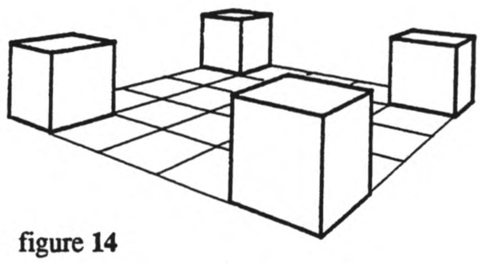


figure 14

7 - Quelques remarques

Les méthodes utilisées ici pour réaliser le dessin demandé ne sont évidemment pas les seules possibles.

Par ailleurs, si le but poursuivi avait été le dessin finalement obtenu, il aurait été plus raisonnable de commencer par dessiner le quadrillage ; mais le but essentiel était la présentation de quelques méthodes fondamentales du dessin perspectif.

Cette technique est employée de façon intensive depuis plusieurs siècles ; c'est dire qu'elle est riche, bien codifiée, et capable de résoudre les problèmes les plus divers.

Ainsi, le dessin à réaliser a été choisi de façon que toutes les constructions puissent tenir dans la feuille ; mais on a pu pressentir que cela n'était pas forcément toujours réalisable. Des méthodes existent pour surmonter cette difficulté. Par exemple pour la construction des points de distance : si celui qu'on veut construire est en dehors des limites du dessin, on pourra toujours construire des points de distance réduite qui seront dans les limites. De même, on sait dessiner une droite passant par deux points dont l'un extérieur au dessin si ce dernier est connu comme intersection de deux droites. Etc.

C'est pour être sûr que toutes les constructions tiendraient dans la feuille que les paramètres du système de projection de la figure 3 ont été choisis. Mais ces paramètres sont assez inhabituels ; en particulier, le rapport de la distance principale à la largeur du dessin (complet) est à peu près 1,15 . D'habitude, on préfère des rapports de l'ordre de 3 à 4.

La figure 15 a été dessinée en utilisant le même procédé que pour la figure 14 ; on a simplement multiplié la distance principale par 4,5.

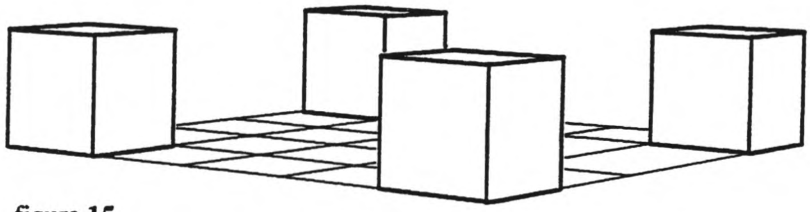


figure 15

Rien d'autre n'a été changé : même tableau, mêmes point principal et ligne d'horizon, même objet placé de la même façon par rapport au sol et au tableau ; ceci a permis d'obtenir un rapport égal à 3.

On pourra comparer les figures 14 et 15 et s'interroger sur certaines différences que l'on peut constater : comment se fait-il que le haut des cubes apparaissent mieux dans le premier dessin que dans le deuxième, que les dessins des arêtes verticales soient plus grands dans le deuxième dessin que dans le premier, que ce deuxième dessin soit tellement plus large que le premier...?

La figure 16 devrait aider à répondre en particulier à la dernière question (cette figure est un plan à l'échelle 0,4 de l'objet dessiné, du tableau et des deux observateurs choisis).

Quand on fait un dessin perspectif, on imagine que le spectateur de ce dessin se mettra à la place de l'observateur (ce qui est manifestement impossible pour la figure 14 : il faudrait se mettre à 6,9 cm de la feuille, et à moins d'une myopie extrêmement sévère... Par contre, ce n'est pas déraisonnable pour la figure 15 puisque pour elle il faudrait se placer à environ 30 cm de la feuille).

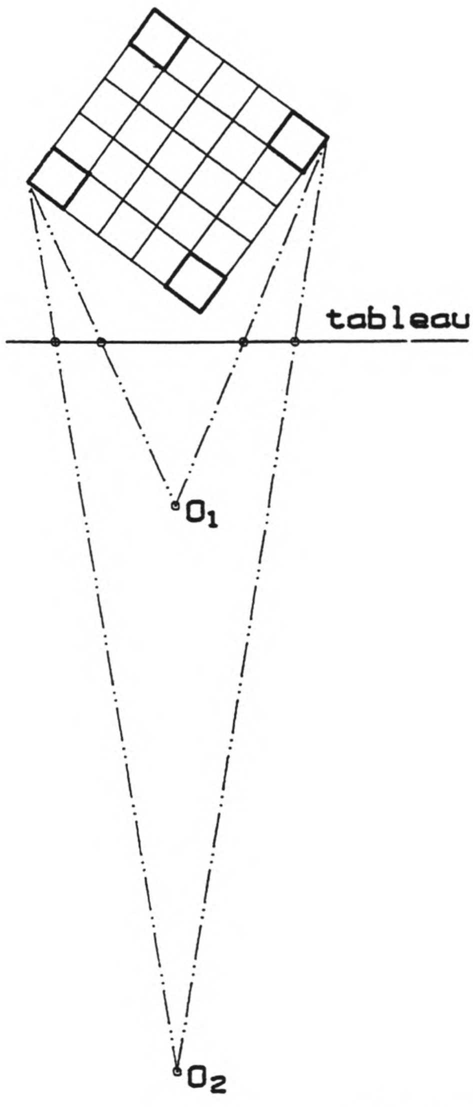


figure 16

Or il se trouve que l'amplitude de la vision nette, en largeur, est de l'ordre de 30° ; et **tan** 15° $\simeq \frac{1}{3,7}$. Donc si la distance principale est comprise entre le triple et le quadruple de la largeur du dessin, le dessin est vu par l'observateur sous un angle d'environ 30° (en largeur).

On pourra constater, par exemple sur la figure **14**, que diminuer sensiblement ce rapport a pour effet d'exagérer l'effet perspectif.

8 - Un tableau de La Hyre

Laurent de La Hyre (1606-1656), actif à Paris au temps de Louis XIII et au début du règne de Louis XIV, est un peintre qui a connu la notoriété de son vivant, et eut de nombreuses commandes ; il prit le plus souvent des thèmes bibliques et mythologiques pour sujet de ses peintures.

Le musée de Grenoble possède et expose deux de ses œuvres, parmi les plus intéressantes ; ces deux toiles ont sensiblement les mêmes dimensions (à quelques centimètres près, 1,60m de haut et 1,75m de large) et ont été réalisées toutes les deux en 1656.

Chacun de ces deux tableaux a un thème pris dans le Nouveau Testament, qui veut donner un témoignage de la résurrection du Christ ; l'une, *Noli me tangere*, montre une femme venue au tombeau du Christ, le Christ ressuscité qui l'empêche de le toucher et, en arrière plan, un ange.

C'est à l'autre tableau reproduit ci-dessous (figure **17**), *les disciples d'Emmaüs*, que nous nous intéresserons ; comme on sait, deux des évangélistes (Luc et, très brièvement, Marc) rapportent que deux des disciples du Christ s'étant arrêtés à Emmaüs, petite bourgade proche de Jérusalem, y rencontrent un inconnu avec lequel ils partagent un repas et dans lequel, finalement, ils reconnaissent le Christ ressuscité ; c'est ce qu'illustre La Hyre.

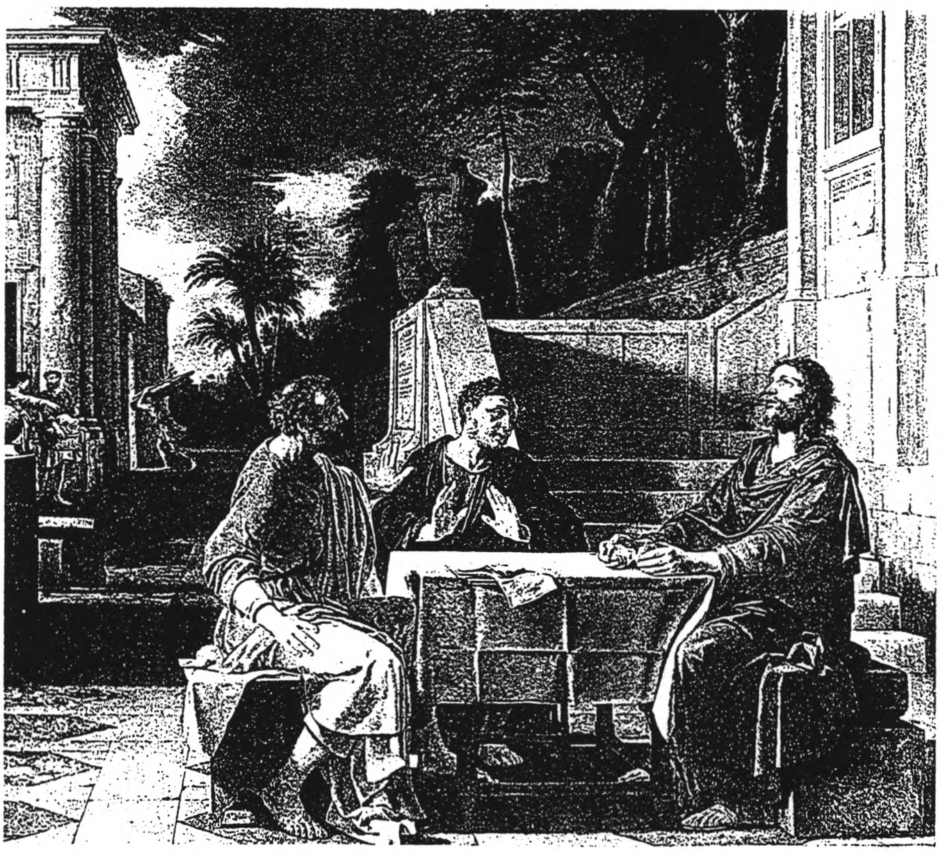


figure **17**

Ce tableau utilise parfaitement l'usage de la perspective.

Sur la figure **18**, nous avons donné une représentation schématique du même tableau, et prolongé certaines lignes représentant à coup sûr des perpendiculaires au tableau ; on voit qu'elles convergent toutes vers un point qui est donc le point principal. On peut par exemple remarquer le toit du bâtiment de gauche : on sera peut-être surpris de voir comme les droites qui dessinent son bord sont relativement proches de la verticale (elles s'en écartent d'environ 20°), alors que dans le tableau, et dans la reproduction non surchargée, elles donnent l'illusion d'être beaucoup plus proches de l'horizontale.

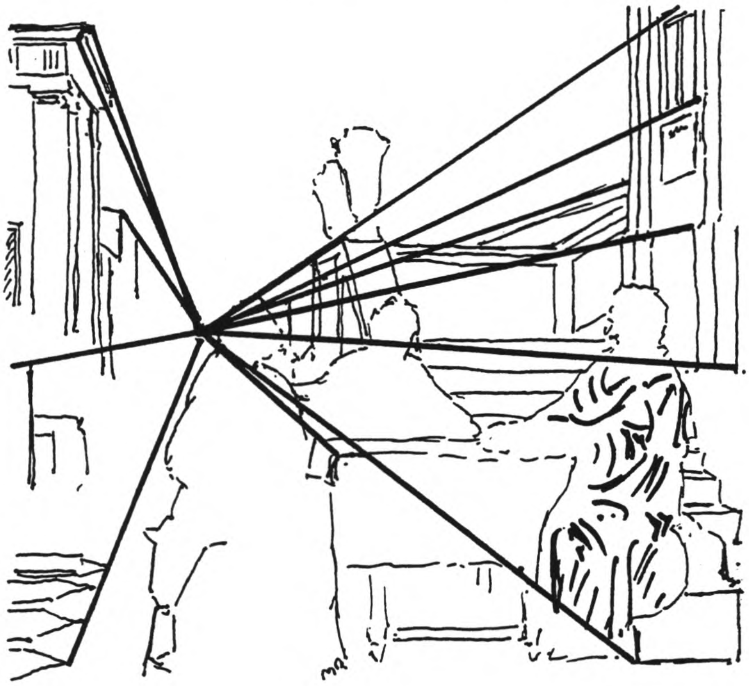


figure **18**

Cette détermination du point principal montre que l'horizon partage le tableau en deux parties égales. Mais le point principal est très loin d'occuper le centre du tableau : il laisse un quart du tableau à sa gauche et les trois quarts restants sur sa droite.

Ce déséquilibre crée une tension, qu'on ne peut vraiment percevoir que devant le tableau lui-même : le paysage, qui est un élément important, tire le regard à gauche, alors que le Christ attire l'attention vers la droite, en particulier par la couleur bleue éclatante de son vêtement. Le peintre, en opposant ainsi deux éléments essentiels de son tableau - structure géométrique et couleur, évite la monotonie qu'auraient peut-être donnée un point principal et un Christ resplendissant tous les deux situés au centre du tableau.

Un examen attentif du tableau montrera bien d'autres détails. On pourra par exemple remarquer que l'un des personnages en arrière-plan, celui qui porte un récipient, a un vêtement bleu qui répond à celui du Christ, mais dans une tonalité beaucoup plus sourde. On observera aussi que les deux personnages en arrière-plan qui conversent sont dans l'ombre, pour ne pas distraire trop l'attention, mais que celui qui est plus loin profite d'une zone de lumière : étant plus loin et occupant donc une petite superficie du tableau, on l'apercevrait à peine s'il était dans l'ombre. L'opposition entre le haut du tableau, sombre et de formes douces (nuages, arbres et vases), et le bas, très lumineux et aux formes dominées par une certaine raideur (bâtiments, nappe) est très marquée. Etc.