MODULE EN SECONDE

Tome 2

ISBN 2-903815-29-1
Prix : 65 F

première édition
octobre 1993

En septembre 1992, l'IREM de Grenoble publiait, a priori pourrait-on dire, une brochure proposant des activités de module en classe de seconde. Après un an de fonctionnement des modules (92-93), voici un nouveau fascicule. On pourrait s'attendre à un bilan, ce n'en est pas un.

Forts d'une expérience enrichie, nous restons attachés à quelques idées-clés, réaffirmées à travers de nouvelles activités. En même temps, nous soumettons ici quelques éléments d'un questionnement relatif à notre enseignement des mathématiques, préoccupations qui transparaissent dans le choix des activités.

Les modules sont un lieu privilégié où les élèves peuvent donner sens à l'action, s'interroger sur les moyens de cette action, prendre une certaine distance, même modeste, vis à vis des méthodes utilisées et des buts poursuivis en mathématiques.

Les textes qui suivent proposent, aux enseignants et aux élèves, des moyens concrets au service de ces objectifs.

Ainsi on trouvera :

- des activités amenant l'élève à modifier ou à prendre conscience de sa représentation du statut de la figure en géométrie, des valeurs approchées, ou du statut de l'énoncé général,
- des activités donnant du sens au calcul algébrique utilisé comme moyen de démonstration et de connaissance de certains aspects du réel,
- une activité finalisant certains outils comme la géométrie analytique par exemple,
- une activité permettant la comparaison de méthodes, justifiant le choix de l'une ou le rejet de l'autre,
- une activité différant l'action pour choisir en toute connaissance de cause une stratégie.

Or on sait bien que ces activités ne peuvent se réaliser si les élèves n'ont pas des connaissances mémorisées et disponibles. Toutes les questions ci-dessus aident déjà à la structuration de ces connaissances ; mais il est aussi nécessaire (pas forcément suffisant...) d'insister au cours du bilan de chaque activité, sur les idées, méthodes nouvelles qui sont à garder dans la collectivité-classe. Les fiches-méthodes sont une trace concrète, durable, de ces bilans. Tout ceci, encore une fois, pour que les élèves n'en restent pas au résultat immédiat de l'exercice.

Quant à la constitution des groupes d'élèves, comme on le verra, elle est variable selon l'activité. Les groupes peuvent être homogènes quand un objectif particulier de savoir-faire est poursuivi. Homogènes aussi quand il s'agit de modifier des représentations ou des attitudes que nous avons cru identifier chez des élèves. Mais on peut aussi faire le choix de travailler en groupes hétérogènes si on compte sur le débat - à organiser - entre pairs, pour amener la contradiction et non sur la seule situation mathématique.

Enfin devons-nous dire que ce questionnement, cette prise de distance proposés aux élèves ne sera sans doute efficace que dans la mesure où, à la place d'enseignant que nous occupons, nous nous engageons dans une démarche similaire ? En particulier, nous soulignons le fait qu'il est important de nous interroger sur la cohérence de nos exigences mathématiques et de nos pratiques.

Sommaire

Merci à Annie Bicais pour la composition de ce document.

RECHERCHE DE PROBLEMES DE GEOMETRIE

OBJECTIFS

Les élèves poursuivent un ou plusieurs objectifs de la liste suivante :

- apprendre à «lire» une figure ;
- apprendre à mobiliser ses connaissances ;
- apprendre à chercher une démonstration ;
- apprendre à rédiger une démonstration.

POURQUOI EN MODULE ?

Les heures de module permettent de regrouper les élèves de manière à répondre à leurs besoins en fonction de leurs performances à l'exercice 6 A de l'évaluation de rentrée de 1992. A partir du même exercice, on peut proposer différentes tâches aux élèves, c'est-à-dire différents énoncés :

- pour les élèves n'ayant pas proposé de solution à l'exercice 6.A : énoncé A ;
- pour les élèves ayant mal rédigé la solution qu'ils avaient proposée : énoncé B ;
- pour les élèves ayant réussi l'exercice : énoncé C.

A partir du même exercice, en proposant des tâches différentes aux élèves en fonction de besoins ciblés, il est facile d'exploiter en classe entière la séance car tous les élèves auront travaillé sur le même problème. Notamment, on peut faire en classe entière un bilan des stratégies et des connaissances utilisées.

ENONCE DE LA TACHE

Tous les élèves ont l'énoncé suivant :

ABCD désigne un rectangle.

La médiatrice de [AC] coupe (AB) en E et (BC) en F.

Démontre que les droites (CE) et (AF) sont perpendiculaires.

Et selon leurs performances à l'exercice de rentrée 6.A, ils ont en plus un des énoncés A, B ou C.

Pour les élèves n'ayant pas trouvé de solution à l'exercice 6 A

ENONCE A

Essaie de faire un organigramme d'une démonstration en indiquant la méthode et les connaissances utilisées.

Recherche d'une solution pendant une dizaine de minutes, puis distribution des questions suivantes.

- Comment as-tu tracé la médiatrice de [AC] ?
- As-tu codé la figure ?
- Que sais-tu sur la médiatrice d'un segment ? Ecris-le.
- Quelles sont les méthodes (les stratégies) que tu connais pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires ? Ecris-les.
- Parmi les méthodes que tu viens d'écrire, choisis-en une et essaie de coder la figure en faisant intervenir des éléments qui pourraient être utilisés dans cette méthode.

En fonction des résultats trouvés par les élèves

• Soit pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, on peut montrer que ces deux droites sont deux droites particulières d'une figure.

- Quelles sont les configurations qui contiennent des droites perpendiculaires ?
- Peux-tu faire intervenir les droites (CE) et (AF) dans une figure connue ?
- Peux-tu définir (CE) comme une droite particulière d'une figure ?

• Soit pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, on peut démontrer que ce sont les images par une transformation de deux droites perpendiculaires.

Les droites (CE) et (AF) peuvent-elles être les images de deux droites perpendiculaires dans une transformation (rotation, translation, symétrie centrale, symétrie orthogonale) ?

• Soit pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, on peut démontrer que les droites forment un angle droit. En désignant par M le point d'intersection de (CE) et (AF), comment peux-tu démontrer que l'angle $\widehat{CMA}$ est droit ? que le triangle CMA est rectangle en M ?

Peux-tu démontrer que les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{ACM}$ sont complémentaires ?

Quels sont les angles égaux à $\widehat{MAC}$ et à $\widehat{ACM}$?

On peut demander aux élèves de faire les démonstrations non faites, en exercice à la maison.

Pour les élèves ayant des difficultés pour rédiger une démonstration
ENONCE B

• **1ère tâche**

Avant de rédiger ta démonstration :

énonce la stratégie que tu vas utiliser ;

essaie de faire un organigramme de ta démonstration en notant les données et les propriétés que tu vas utiliser ;

une fois ton organigramme fait, rédige ta démonstration.

• **2ème tâche**

Ensuite, on peut donner à ces élèves les consignes suivantes : rédige les trois démonstrations ci-dessous en indiquant les données et les propriétés utilisées. Dans les rédactions, tu devras commencer par énoncer la stratégie et faire intervenir les éléments indiqués.

• (AB) hauteur issue de A du triangle ACF
(FI) hauteur issue de F du triangle ACF
E orthocentre du triangle ACF
(CE) hauteur issue de C du triangle ACF
(CE) perpendiculaire à (AF)

• Dans la symétrie orthogonale d'axe (EF) :
l'image de A est ... car
l'image de E est ... car
donc ...
l'image de C est ... car
l'image de F est ... car
donc ...
Or (AB) et (CF) sont ...
Les images dans une symétrie orthogonale de ...
Donc (CE) perpendiculaire à (AF).

• $\widehat{ECA} = \widehat{EAC}$
$\widehat{MAC} = \widehat{ACB}$
$\widehat{MAC} + \widehat{ACM} = 90°$
$\widehat{CMA} = 90°$
donc (CE) est perpendiculaire à (AF).

Pour les élèves ayant réussi l'exercice 6A

ENONCE C

Cherche d'autres solutions que celle que tu as donnée dans l'évaluation de rentrée et rédige-les.

Si l'élève n'arrive pas à trouver une nouvelle solution, le mettre sur la voie d'une des stratégies qu'il n'a pas utilisée.

Pour ces élèves, on peut ajouter les questions :

Le triangle ACF peut-il être équilatéral ? Si oui, quelle(s) condition(s) imposer au rectangle ABCD ?

Dans le cas où certains élèves seraient réticents à chercher d'autres solutions à l'exercice ou termineraient leur travail avant la fin de la séance, on peut prévoir un problème à leur donner sur le même thème (par exemple, l'exercice donné en devoir "à la maison" ci-après).

• En fin de séance, on peut demander à tous les élèves de rédiger pour le prochain cours les diverses démonstrations et de chercher quelles conditions doit vérifier le rectangle ABCD pour que le triangle ACF soit équilatéral, rectangle ; ceci afin qu'il soit fait un bilan en classe entière de cette séance de module.

SCENARIO (description du déroulement de l'activité)

Cette activité a été proposée dans une séquence d'enseignement modulaire d'une heure, en travail individuel, après que l'enseignant ait corrigé l'évaluation d'entrée de seconde.

Après avoir distribué les énoncés aux élèves en fonction de leurs performances à l'exercice de rentrée, le rôle de l'enseignant est essentiellement d'observer leurs démarches, de les aider à surmonter les difficultés qu'ils pourraient rencontrer et aussi de vérifier les rédactions des démonstrations.

Certains élèves n'ayant pas trouvé de solution lors de l'évaluation de rentrée sont parvenus à le faire lors de cette séance sans aucune aide *(ils diront : «on n'avait pas pris suffisamment de temps pour chercher»)* ; d'autres ont eu besoin de plus ou moins d'indications.

Les rares élèves ayant réussi l'exercice le jour de l'évaluation de rentrée ont bien voulu chercher d'autres solutions. Très peu en ont trouvé une autre sans aide *(je n'ai pas été amené à proposer un autre exercice).*

La plupart des élèves ont eu des difficultés pour rédiger les démonstrations, notamment celles utilisant les angles et la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [AC]. Ces difficultés ont été en partie surmontées lorsque l'organigramme de la démonstration a été fait ; citer les propriétés utilisées a posé des problèmes aux élèves.

EXPLOITATION EN CLASSE ENTIERE

- bilan des méthodes utilisées ;
- bilan des connaissances utilisées ;
- organigramme d'une démonstration et rédaction (un exemple est mis en annexe) ;
- début d'élaboration d'une fiche : «comment démontrer une orthogonalité».

Lors de l'exploitation en classe entière, j'ai beaucoup insisté sur l'élaboration d'un organigramme d'une démonstration qui peut être utilisé :

- lors de la recherche de la démonstration ;
- lors de la rédaction de la démonstration ;
- pour faire le bilan des connaissances utilisées.

Pour les élèves ayant des difficultés pour rédiger une démonstration, on peut leur fournir :

- soit un organigramme et écrire en face les propriétés utilisées en fonction des données ;

- soit un organigramme et leur demander de rédiger la démonstration correspondante (un exemple d'organigramme est donné ci-dessous) ;

- soit une démonstration et leur demander de faire l'organigramme correspondant, ce qui peut leur permettre de voir ce qui ne va pas dans la démonstration proposée.

Suite à cette activité, j'ai donné aux élèves en devoir "à la maison" l'exercice suivant, pour lequel je leur ai demandé de :

- faire un organigramme de leur démonstration ;
- rédiger leur démonstration.

Voici l'énoncé.

C et D désignent deux points distincts du demi-cercle de diamètre [AB].

C et D sont aussi distincts de A et B.

Les droites (AD) et (BC) se coupent en I, les droites (AC) et (BD) se coupent en J.

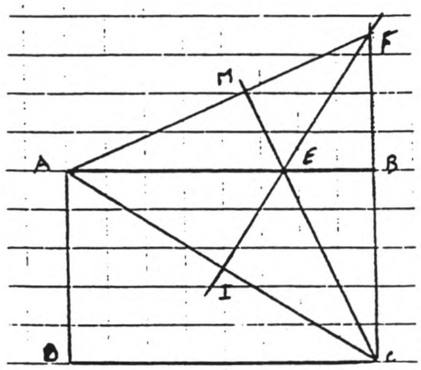
Démontrer que les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

ORGANIGRAMME DE LA DEMONSTRATION UTILISANT LES ANGLES

données :

ABCD rectangle

(IF) médiatrice de [AC]



$\widehat{CAM} = \widehat{ACF}$

$\widehat{ACM} = \widehat{CAB}$

$\widehat{ACF} + \widehat{CAB} = 90°$

$\Downarrow$

$\widehat{CAM} + \widehat{ACM} = 90°$

$\Downarrow$

CMF rectangle en M

$\Downarrow$

$\widehat{CMF} = 90°$

$\Downarrow$

Conclusion : (CE) est perpendiculaire à (AF)

Conclusion tirée par les élèves à la suite de cette activité :

- pour chercher une démonstration, on part de la conclusion, on choisit une stratégie qui correspond à l'étape ci-dessus dans l'organigramme ;

- on utilise les données, en repartant du départ, jusqu'à ce que l'on arrive à rejoindre le bas ;

- pour rédiger une démonstration, on indique la stratégie utilisée (bas de l'organigramme) puis on rédige la stratégie en partant du début de l'organigramme et en indiquant les propriétés utilisées après avoir vérifié qu'elles s'appliquent aux données.

Remarque

Lorsque les élèves disent «on part de la conclusion», ils veulent dire que la lecture de la conclusion va les guider dans la recherche de la stratégie.

POURQUOI LA GEOMETRIE ANALYTIQUE

Pour le professeur, présentation de l'activité

Objectifs

Le principal objectif est de montrer aux élèves que leurs connaissances actuelles, dans les domaines des configurations planes, de la géométrie vectorielle, des transformations planes, ne leur permettent pas de traiter simplement le problème qui leur est proposé, alors que l'introduction d'un repère rend la résolution très simple. Ainsi il s'agit de leur **montrer l'intérêt de la géométrie analytique**.

Voici d'autres objectifs, secondaires pour cette séance, mais qui étaient prioritaires lors de la séance relatée dans le tome 1 de "Module en seconde" (article page 57) :

- apprendre à rattacher un problème à un problème de type connu ;
- montrer l'intérêt de pouvoir passer en revue toutes les méthodes dont on dispose pour traiter ce problème de points alignés ; on peut ainsi en profiter pour faire fabriquer aux élèves une fiche-méthode sur ce sujet (pour plus de précisions à ce sujet, voir l'article du tome 1 mentionné ci-dessus), ou leur faire utiliser s'ils l'ont déjà rédigée (ce qui sera supposé ici) ;
- apprendre à disposer une figure sur une feuille de papier (le point de concours des droites étant "loin" du reste de la figure) ;
- motiver les élèves à prouver leur conjecture, le dessin pouvant faire naître des doutes ;
- habituer les élèves à travailler en groupe et à produire un travail écrit collectif.

Mise en garde

Il est bien évident que le but poursuivi n'est pas de rendre des élèves de seconde autonomes dans le choix d'une méthode relevant de la géométrie analytique pour résoudre un problème, et encore moins dans le choix du meilleur repère ; dans un problème de devoir surveillé, qui nécessite l'emploi d'un repère, celui-ci doit être indiqué.

Par ailleurs il ne doit pas ressortir de cette activité que le recours à la géométrie analytique est la méthode la plus performante dans tous les cas : certes elle l'est pour ce problème, mais il serait bon de prévoir pour la suite un autre problème où le choix d'un repère ne conduit absolument pas à la meilleure solution.

Gestion

Prévoir deux séances d'une heure ou une d'une heure et demie.

Les connaissances du collège sont suffisantes pour résoudre ce problème. Cependant puisque son intérêt réside dans le débat sur le choix de la méthode, il vaut mieux réaliser cette activité lorsque les élèves ont une "boîte à outils bien garnie" : le débat sera plus riche, ils pourront évoquer des stratégies utilisant les configurations, les vecteurs, les transformations....

La classe (ou la partie qui se retrouve en module) est partagée en groupes de quatre élèves, "assez équilibrés", les compétences des uns complétant celles des autres pour former un groupe qui soit capable de faire un bilan des méthodes, chercher, rédiger. Si la séance a lieu en début d'année scolaire, le professeur peut utiliser les résultats des tests de l'évaluation diagnostique faite à la rentrée.

Trois parties sont à distinguer au cours de cette activité : les consignes sont données aux élèves sur les fiches suivantes, qui sont distribuées dès le début de la séance. Une variante de la première partie est proposée après les deux pages de la fiche-élève.

Fiche - élève : le rectangle et les trois droites

C'est un travail de groupe qui t'est demandé : **chacun** doit rédiger un compte-rendu de la séance et une rédaction au hasard sur les quatre (ou trois) de ton groupe sera relevée pour représenter le travail collectif.

Respecte les consignes de temps imposées et l'alternance des moments de travail collectif et de travail individuel : il est important que tous les groupes achèvent à peu près en même temps la deuxième partie, puiqu'elle doit être suivie d'un bilan avec **toute la classe**.

Première étape : travail individuel

Voici l'énoncé d'un problème ; prends 15 minutes pour :

1) faire une figure et énoncer ta conjecture ;

2) chercher si tu peux te ramener à un type de problème que tu sais traiter, et si oui, lequel ;

3) chercher si, avec les méthodes que l'on connaît, on peut traiter ce problème de droites concourantes ;

4) sélectionner, parmi les méthodes disponibles, celle que tu penses utiliser pour trouver la solution.

Enoncé

ABCD est un rectangle tel que AB = 5 et AD = 3 (l'unité de longueur choisie dans le plan est le centimètre) ; les points E et F sont définis par $\vec{AE} = \frac{3}{5}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AD}$. La parallèle à (AB) menée par F coupe (BC) en G ; la parallèle à (AD) passant par E coupe (DC) en H.
(FH), (AC), (EG) sont-elles des droites concourantes ?

Deuxième étape : travail de groupe (pas plus de 20 mn)

Compare tes réponses avec celles de tes camarades et mets-toi d'accord avec eux pour inscrire les réponses du groupe aux questions ci-dessus, sur l'affiche qui est donnée à chaque groupe.

Troisième étape : bilan pour toute la classe (25 mn)

C'est à cette étape que commencera la rédaction qui sera relevée à la fin de la séance. Prends des notes sur le bilan qui est fait, faisant apparaître très clairement les points suivants :

- les différentes méthodes proposées par tous les groupes ;
- celles qui sont rejetées et les raisons de ce rejet (pas plus d'une ligne pour chaque raison) ;
- la méthode retenue en conclusion du bilan.

Quatrième étape : travail dans ton groupe (pas plus de 30 mn)

Distingue bien ton travail de recherche personnelle et la rédaction de ton groupe. Celle-ci doit contenir :

le dessin et la conjecture ;

la stratégie plus détaillée que ci-dessus ;

le développement de cette stratégie avec tous les calculs.

Explicitation des choix qui ont guidé l'énoncé de la tâche et mises en garde

A propos du temps global de cette activité, voir les commentaires joints à la présentation de l'expérimentation (ci-après).

Première étape : travail individuel

Au moins quinze minutes sont nécessaires pour que chacun puisse faire un dessin correct (les élèves ne prévoient pas en général que le point de concours va être loin de leur rectangle initial et beaucoup recommencent le dessin) et "rentre" ensuite dans le problème. Il n'est pas indispensable que chacun ait produit un travail écrit au bout de ce temps, l'essentiel étant qu'il aborde le travail collectif suivant en sachant exactement de quoi il est question.

Il est bien évident que si les élèves ont déjà fait un bilan des méthodes conduisant à démontrer que des droites sont sécantes, ou mieux encore, que des droites sont concourantes, l'énoncé de la première étape est à reprendre complètement. Ici il est supposé qu'ils aient déjà travaillé sur des problèmes de milieu, de points alignés, de droites parallèles, pas davantage, et on mettra encore une fois en évidence que la première des choses à faire est d'essayer de se ramener à un problème que l'on sait traiter, quitte à reformuler la question posée, en essayant de la voir sous des angles différents : un point qui appartient à une droite (AB), c'est aussi un point qui est aligné avec A et B.

<u>Voici cependant une proposition de remplacement de cette première étape pour le cas où les élèves auraient déjà fait un bilan de méthodes concernant les problèmes de droites sécantes ou de droites concourantes.</u>

Voici l'énoncé d'un problème ; prends <u>15 minutes</u> pour :

1) faire une figure et énoncer ta conjecture ;
2) essayer de la démontrer ; si tu n'y parviens pas, indique, parmi les méthodes que tu connais, celles qui te paraissent inutilisables dans ce problème.

Deuxième étape : travail collectif au groupe

La confrontation indispensable, qui permet au groupe de passer en revue toutes les boîtes à méthodes disponibles avant de produire une réponse rédigée commune prend au moins 20 minutes, car les élèves sont peu habitués au travail collectif. L'utilisation par chaque groupe d'un transparent, ou mieux, dans ce cas, d'une affiche permet une comparaison simultanée des réponses de tous les groupes.

Le professeur intervient essentiellement à la fin de cette étape, sa principale tâche consistant, le reste du temps, à veiller à ce que chaque élève respecte, comme il l'est demandé, ses temps de travail individuel et collectif , et que la production ramassée à la fin de la séance soit effectivement le fruit du travail du groupe.

Troisième étape : bilan pour toute la classe

A la troisième étape, la plus importante, chaque réponse de groupe est ainsi discutée par toute la classe et il est indispensable que chacun prenne des notes au sujet du débat : le professeur insiste pour qu'il n'y ait pas que la méthode retenue qui soit inscrite dans ces notes et montre l'intérêt de retenir les arguments qui permettent de rejeter telle ou telle stratégie.

"On commence toujours par essayer de ramener un problème nouveau, d'un premier abord assez complexe, à un problème plus simple, que l'on sait résoudre." Telle est une des premières idées générales, d'ordre méthodologique, qu'il s'agit de faire ressortir du débat autour des affiches.

Cependant, en ce qui concerne la solution de ce problème, il est indispensable que le maître se contente de gérer le débat au niveau des prises de paroles et notes à prendre, sans du tout chercher à faire "sortir la bonne méthode" : écourter le débat sous prétexte "qu'il faut avancer" serait le meilleur moyen pour que l'activité passe à côté de son objectif principal.

Le **temps de la confrontation** est un atout important dans cette activité.

Aucune des méthodes proposées, faisant appel (suivant le moment de l'année scolaire où elle se situe) aux cadres des configurations (droites concourantes d'un triangle...), de la géométrie vectorielle (colinéarité de vecteurs...), des transformations (utilisation d'une homothétie permettant de prouver que des points sont alignés...) ne semble satisfaisante après plusieurs minutes de réflexion collective : c'est alors qu'apparaît la nécessité d'utiliser autre chose ! Si rien n'est proposé par les élèves, pour redonner un peu d'élan au débat, le professeur peut demander s'il ne reste pas d'autres cadres à évoquer ? "Au collège, avez-vous déjà travaillé dans d'autres domaines ? Quelles autres idées évoquent pour vous les notions de points alignés, de droites (concourantes)...?" Il y a beaucoup à parier qu'alors sera prononcée l'expression "équation de droite".

Il est ainsi à espérer qu'**en conclusion le débat mette en évidence que la meilleure stratégie consiste à utiliser un repère** ; le professeur veille alors à ce que chaque élève l'indique clairement dans son compte-rendu, ainsi que le détail de la méthode :

une fois calculées des équations de chacune des droites, on détermine le point d'intersection de deux d'entre elles par la résolution d'un système d'équations, puis l'on vérifie que les coordonnées de ce point sont solutions de l'équation trouvée pour la troisième droite.

Quatrième étape : à nouveau travail de groupe

Les calculs sont alors simples et posent peu de difficultés à la plupart des élèves qui terminent assez rapidement l'activité. Ils peuvent d'ailleurs l'achever en dehors de la séance, si le bilan a pris plus de temps que prévu.

A ce moment le professeur peut intervenir auprès de certains élèves très faibles, bloqués par des problèmes de calcul ou de résolution de systèmes.

Bilan de deux expérimentations menées en classe

Elles ont été menées le 20 mars 1993, dans une plage horaire de deux heures, l'une dans une classe de 35 élèves, l'autre dans une classe de 32 élèves.

J'ai d'abord demandé à chacun de lire complètement la feuille des instructions à suivre et je l'ai présentée très brièvement : j'ai insisté surtout sur le temps à respecter par tous en expliquant les raisons du choix de ce minutage et sur la nécessité du travail de groupe véritable ("il ne s'agit pas qu'il y ait un membre du groupe qui prenne les choses en main pendant que les autres se reposent : chacun doit se sentir responsable du travail du groupe tout au long de la séance").

Les deux heures ont à chaque fois été utilisées, avec une interruption de 5 minutes, à la suite de la troisième étape : si cette activité a lieu dans une plage horaire d'une heure trente, mieux vaut laisser les élèves terminer leurs calculs de la quatrième étape en dehors de la séance, plutôt que d'écourter le débat ; si elle est prévue pour deux séances d'une heure, l'interruption peut avoir lieu au cours de la troisième étape, après le bilan des méthodes à rejeter, laissant le temps de germer à l'idée de choisir un repère.

La partie du cours déjà traitée était la même dans les deux classes, cependant les réactions ont été complètement différentes. Les élèves avaient déjà manipulé les équations de droites sous la forme vue au collège ; nous avions traité, près de quatre semaines auparavant, des problèmes d'intersection d'ensembles de points caractérisés par une équation dans un repère donné ; ils avaient à rendre pour le jour même un devoir regroupant diverses activités introductives de leur livre portant, d'une part sur les coordonnées de vecteurs et de points du plan, l'autre sur la condition de colinéarité de deux vecteurs, le tout dans un repère donné. Cependant ces activités n'avaient pas été corrigées et aucun cours n'avait eu lieu sur ce thème. Enfin ils ne disposaient pas de fiche-méthode concernant les problèmes de droites sécantes ou concourantes. Cependant des fiches sur "comment démontrer que des points sont alignés, qu'un point est le milieu d'un segment, que des droites sont parallèles" avaient été construites en classe, mais bien peu les ont "sorties" de leurs affaires.

La reconnaissance de la catégorie de problème, à savoir "points alignés" (ou éventuellement "droites sécantes" ou "droites concourantes") a été faite par la majorité des groupes des deux classes ; cependant au moins six groupes de quatre élèves sur les deux classes en sont restés là. Parce qu'ils ne trouvaient rien d'autre, ils ont donné ensuite une stratégie issue des cours précédents ou de ce qu'ils venaient de réviser pour le devoir surveillé qu'ils venaient de faire quelques jours auparavant et qui portait sur les homothéties, ou encore ont proposé d'utiliser la configuration de Thalès. Les tentatives d'explicitation de ces stratégies ont fini par conduire au rejet de ces méthodes.

Toutefois la différence fondamentale entre les deux expérimentations réside dans le fait que l'une des classes (chronologiquement la première) a proposé rapidement, pour environ la moitié, de choisir un repère (d'ailleurs orthonormé), alors que personne dans la seconde classe n'a pensé à cette méthode, malgré la prolongation du débat autour des affiches ; j'ai dû relancer celui-ci comme il est indiqué ci-dessus. Toutefois, dans cette deuxième classe, le débat a été bien plus riche, ayant recours à un inventaire plus large de méthodes : par exemple, repérer des droites particulières de triangles, utiliser des homothéties en introduisant des points supplémentaires...

Avant de parler de repère, au moins un élève dans les deux classes a proposé de démontrer d'abord que deux des droites sur les trois étaient sécantes en un point I, ensuite que l'une de ces deux droites et la troisième étaient sécantes en un point J et enfin de prouver que I et J étaient confondus. J'ai cependant dû réexpliquer plusieurs fois cette méthode pour certains élèves faibles.

Les deux classes, que j'ai un peu "poussées" (mais pas avant que l'utilisation d'un repère n'ait été proposée) afin de pouvoir terminer l'activité dans les deux heures, sont finalement tombées d'accord pour raccourcir cette méthode en cherchant l'intersection de deux des trois droites et montrant seulement que leur point d'intersection appartenait à la troisième.
Le reste des calculs a été fait assez rapidement par la plupart des élèves ; j'ai seulement aidé certains d'entre eux, particulièrement faibles, qui restaient bloqués par des calculs élémentaires, et ne pouvaient plus suivre le travail de leur groupe, affairé à achever le problème.

Pour les deux classes, le bilan fut positif : presque tous les groupes ont achevé leur travail pendant la séance et les comptes-rendus furent très corrects. Au cours suivant, en réponse à mes questions concernant ce qu'ils avaient retenu de cette séance de module, certains élèves ont évoqué l'utilisation d'un repère pour traiter **ce** (c'est moi qui ai souligné le "ce") problème comme une méthode à laquelle il fallait penser et qui était performante. J'ai alors insisté sur le fait que le cadre de la géométrie analytique était à ajouter aux autres cadres qu'ils utilisaient : une voie supplémentaire leur était offerte pour la résolution des problèmes, mais attention à ne pas la privilégier systématiquement !

VALEUR APPROCHEE ET DEMONSTRATION

OBJECTIFS

- Faire prendre conscience aux élèves du statut, du rôle d'une figure.
- Etudier la validité d'une démonstration fondée sur l'utilisation de valeurs approchées.
- Montrer aux élèves différentes démonstrations pour un même problème.
- Travailler sur la cohérence d'une démarche : deux méthodes différentes peuvent-elles conduire à des résultats différents ?
- Amener les élèves à se constituer des fiches aide-méthode (ici : démontrer que trois points sont alignés).

POURQUOI EN MODULE ?

Pour répondre à des besoins ciblés d'élèves :

- élèves qui utilisent des valeurs approchées à la place des valeurs exactes dans un problème ;
- élèves qui ne sont pas critiques devant une démonstration donnée ;
- élèves qui pensent qu'un problème n'a qu'une solution ou qu'il y n'y a qu'une méthode pour démontrer un résultat ;
- élèves qui privilégient un cadre pour chercher des démonstrations et, lorsqu'ils ne trouvent pas, abandonnent.

POSITIONNEMENT PAR RAPPORT AUX APPRENTISSAGES DE SECONDE

- Participe à l'apprentissage de la démonstration.
- Participe à la recherche de démonstrations dans différents cadres.
- Participe au développement de l'esprit critique.
- Permet de réinvestir des connaissances de l'année et des années antérieures.

SITUATION DANS LA PROGRESSION DE LA CLASSE

Cette activité peut être donnée en début d'année de seconde, dès que le professeur connaît ses élèves (utilisations des différentes évaluations pour constituer les groupes) ou à un moment plus avancé dans l'année (un plus grand nombre de méthodes pouvant alors être utilisé).

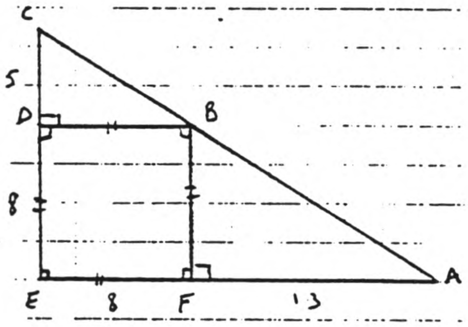
Si cette activité est donnée en début d'année, elle peut être reprise en cours d'année pour illustrer de nouvelles méthodes pour démontrer que des points sont alignés (notamment, utilisation de l'homothétie).

ENONCE DE LA TACHE

Le travail à effectuer va se dérouler en trois temps, les deux premiers en travail individuel et le dernier en travail de groupes de trois ou quatre élèves.

Premier temps de l'activité (document donné aux élèves)

L'énoncé ci-dessous a été donné en devoir dans une classe de 3ème :
BDC et BFA sont des triangles rectangles.
Les dimensions en cm sont indiquées sur la figure.
Que peut-on dire des points A, B et C ?



J'ai reproduit les démonstrations de deux élèves de troisième.

• Copie d'Alfred

Les points A, B et C sont alignés car l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 180°. En effet : $\widehat{ABC} = \widehat{ABF} + 90° + \widehat{CBD}$.

Dans le triangle rectangle ABF, j'ai tan $\widehat{ABF} = \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{13}{8}$ d'où $\widehat{ABF} = 58°$.

Dans le triangle rectangle CBD, j'ai tan $\widehat{CBD} = \dfrac{5}{8}$ d'où $\widehat{CBD} = 32°$

d'où $\widehat{ABC} = 58° + 90° + 32° = 180°$ donc les points A, B et C sont alignés.

• Copie de Nadia

Les points A, B et C sont alignés car AC = AB + BC.

Dans le triangle rectangle ABF, d'après le théorème de Pythagore, j'ai

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 = 169 + 64 = 233 \text{ d'où } AB = 15,26.$$

Dans le triangle rectangle CBD, d'après le théorème de Pythagore, j'ai

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = 441 + 169 = 610 \text{ d'où } AC = 24,69.$$

Comme 24,69 = 15,26 + 9,43, les points A, B et C sont alignés.

Dans le triangle DBC $BC^2 = BD^2 + DC^2 = 64 + 25 = 89$ $BC = 9,43$

Penses-tu comme Alfred et Nadia que les points A, B et C sont alignés ?

Que penses-tu des deux démonstrations proposées par Alfred et Nadia ?

Deuxième temps de l'activité (après que les élèves aient répondu aux questions précédentes)

Essaie de trouver d'autres démonstrations qui montrent que les points A, B et C sont, ou ne sont pas alignés.

(Julie a trouvé deux autres démonstrations différentes, peux-tu faire mieux ?).

Troisième temps de l'activité (ce travail en groupes de 3 ou 4 élèves)

- confrontation des résultats ;
- mise en commun des différentes démonstrations trouvées ainsi que des méthodes de recherche ;
- production dans chaque groupe d'une copie présentant toutes les démonstrations trouvées.

Les groupes sont constitués par l'enseignant de manière que dans chacun d'eux les élèves aient trouvé différentes démonstrations.

CHOIX DE LA TACHE

J'ai choisi de proposer l'énoncé de l'exercice avec deux démonstrations fausses, afin de voir si les élèves étaient critiques par rapport à ces dernières. La première comporte des valeurs approchées au degré près, ce que font souvent les élèves lorsqu'ils donnent la mesure d'un angle. Dans la seconde, les valeurs approchées des longueurs sont données avec des chiffres après la virgule, ce qui est souvent le cas, notamment en physique.

C'est afin de voir leurs réactions devant l'utilisation des valeurs approchées dans une démonstration que je n'ai pas demandé aux élèves de faire l'exercice, puis de critiquer les copies d'Alfred et de Nadia.

Dans la deuxième partie de l'activité, je demande aux élèves de chercher d'autres démonstrations, pour qu'ils reviennent éventuellement sur les réponses données auparavant (dans le cas où ils auraient répondu que les points étaient alignés et que les deux démonstrations données étaient justes).

Le travail en groupe, troisième temps, a pour objectif principal de permettre aux élèves de confronter leurs résultats et de leur montrer différentes démonstrations.

SCENARIO (déroulement de l'activité)

J'ai proposé cette activité à mes élèves en module (séance de deux heures) après deux mois de «cours» (en particulier, le cours sur les vecteurs avait été fait).

Au début de la séance, j'ai distribué aux élèves le document correspondant au premier temps de l'activité, puis j'ai observé leurs démarches, sans intervenir, en me promenant dans la classe. Lorsqu'un élève avait terminé la première partie, je lui demandais de chercher d'autres démonstrations. J'ai écrit au tableau le deuxième temps de l'activité une dizaine de minutes après le début de la séance.

La recherche individuelle (premier et deuxième temps) a duré trois quarts d'heure, temps laissé aux élèves pour statuer sur les deux démonstrations et en trouver d'autres. L'observation du travail des élèves durant la recherche individuelle m'a permis de constituer les groupes en mettant dans chacun d'eux, dans la mesure du possible, des élèves ayant utilisé des démarches différentes et trouvé des démonstrations différentes. J'ai répondu aux questions de certains élèves, questions du genre :

- est-ce qu'on peut choisir un repère ?
- est-ce qu'on peut déterminer les équations des droites ?
- est-ce qu'on peut utiliser les vecteurs ?

Le travail en groupe a duré le reste de la séance. La première partie a été une discussion sur les deux démonstrations proposées et les conclusions obtenues par les élèves. La deuxième partie a consisté à confronter les démonstrations trouvées et à rédiger ces dernières.

J'ai ramassé en fin de séance les productions de chaque groupe et j'ai demandé à chacun d'eux de rédiger pour la semaine suivante les démonstrations qu'ils n'avaient pas eu le temps de rédiger, ainsi que celles qu'ils trouveraient d'ici là.

COMPTE RENDU DE LA SEANCE

Premier temps

Tous les élèves ont pensé au départ que les points étaient alignés, sans doute à cause de la figure, et peut-être aussi, des démonstrations proposées. Pour étudier les démonstrations proposées, ils ont sorti leurs calculatrices et ont refait les calculs proposés par Alfred et Nadia.

Un élève, utilisant sa calculatrice pour vérifier les calculs, trouva tout d'abord la première démonstration juste, puis la seconde fausse (en prenant toutes les décimales affichées sur sa calculatrice), et revint ensuite sur la première : il décida qu'elle était fausse en utilisant des décimales pour les valeurs approchées des angles (ce qu'il n'avait pas fait au départ contrairement aux longueurs).

Pour tous les autres élèves, les démonstrations proposées étaient justes.

Deuxième temps (recherche d'autres démonstrations)

Trois élèves, avant de rechercher d'autres démonstrations, ont fait la figure en vraie grandeur pour vérifier si les points étaient alignés. Deux d'entre eux ont conclu qu'ils ne l'étaient pas et sont revenus sur les démonstrations proposées avant d'en chercher de nouvelles ; cette démarche n'a pas permis au troisième de statuer sur l'alignement des points (il s'est mis alors à chercher d'autres démonstrations).

La plupart des élèves ont commencé par reprendre une méthode semblable à celle d'Alfred en utilisant le sinus (ou le cosinus) pour déterminer des valeurs approchées des angles, après avoir calculé les hypoténuses des triangles rectangles en appliquant le théorème de Pythagore. Beaucoup d'entre eux ont alors conservé des décimales dans les calculs, ce qui les a amenés à conclure que les points n'étaient pas alignés et à revenir aux démonstrations proposées. Deux élèves ont gardé des valeurs entières pour les mesures des angles, ce qui les a confortés dans l'idée que les démonstrations proposées étaient justes. L'un d'entre eux s'aperçut de son erreur après avoir démontré que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étaient pas colinéaires. L'autre, garda sa conviction jusqu'au travail en groupes.

Quelques élèves ont déterminé l'angle en A en utilisant la tangente dans les triangles ABF et ACE.

Beaucoup d'élèves ont montré que les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BA}$ n'étaient pas colinéaires en les exprimant en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EC}$ ou en utilisant un repère orthonormé d'origine E.

Autres démonstrations envisagées :

- configuration de Thalès : si A, B et C étaient alignés, alors nous devrions avoir 13/21 = 8/13 ;
- utilisation du repère orthonormé $(E ; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\overrightarrow{EA} = 21\vec{i}$ et $\overrightarrow{EC} = 13\vec{j}$:

équation de la droite (AC) et position de B par rapport à cette droite ;

comparaison des vecteurs directeurs, des cœfficients directeurs, des droites (BC) et (BA).

Aucun élève n'a utilisé la comparaison des aires : aire du triangle EAC et somme des aires de BDC, BDEF et BFA (cette méthode ne sera pas non plus envisagée par les élèves dans leur recherche à la maison).

Troisième temps

La discussion sur les démonstrations proposées a amené les élèves a constater qu'ils s'étaient fait piéger par les valeurs approchées utilisées sur les copies d'Alfred et de Nadia et que des valeurs approchées différentes permettaient de conclure que les points n'étaient pas alignés. Aucun groupe ne s'est posé la question : «qu'aurait-on pu conclure si les valeurs données par la calculatrice avaient été égales ?».

La mise en commun dans chaque groupe des démarches utilisées et des démonstrations trouvées a permis aux élèves de voir qu'ils n'abordaient pas de la même manière un problème et, de plus, cela a permis à tous les groupes de découvrir de nouvelles démonstrations.

L'élaboration d'une copie par groupe présentant les différentes démonstrations a demandé du temps, et les groupes ne sont pas parvenus à rédiger toutes les démonstrations trouvées ; en fin de séance, ils ont seulement mis les titres de ces dernières sur leur copie et ont terminé les rédactions à la maison.

CAPITALISATION DU TRAVAIL EN CLASSE ENTIERE

En classe entière, nous sommes revenus sur les différentes démarches utilisées par les élèves lors du travail individuel. Je suis revenu sur le statut de la figure en géométrie et l'utilisation des valeurs approchées dans une démonstration. J'ai notamment abordé la question : «les valeurs données par la calculatrice permettent-elles toujours de démontrer un résultat ?».

Nous sommes revenus ensuite sur la rédaction de différentes démonstrations, notamment celles utilisant un raisonnement par l'absurde.

Les différentes démonstrations rencontrées dans cet exercice ont permis aux élèves d'élaborer une fiche d'aide «pour démontrer que trois points sont, ou ne sont pas alignés», fiche dans laquelle les différentes méthodes utilisées ont été classées dans les différents cadres (configuration, analytique, vectoriel).

VALEURS APPROCHEES ET EGALITE

Suite à l'activité «valeur approchée et démonstration»

OBJECTIFS

- Etudier la validité d'une démonstration fondée sur l'utilisation des valeurs approchées ;
- montrer la nécessité d'utiliser des valeurs exactes dans certains problèmes ;
- passer d'un énoncé particulier à un énoncé plus général ;
- mobiliser des connaissances des années antérieures.

POURQUOI EN MODULE ?

Les modules permettent de regrouper les élèves qui ont tendance à utiliser les valeurs approchées à la place des valeurs exactes dans les problèmes.

De plus, ils permettent, de part leur effectif plus réduit que la classe entière :

- d'observer plus facilement les démarches des élèves ;
- de faire travailler les élèves sur des énoncés différents, mais conduisant au même résultat ;
- de débattre à partir de productions différentes.

POSITIONNEMENT PAR RAPPORT AUX APPRENTISSAGES DE SECONDE

Cette activité :

- participe à l'apprentissage de la démonstration ;
- participe au développement de l'esprit critique ;
- permet de réinvestir des connaissances des années antérieures.

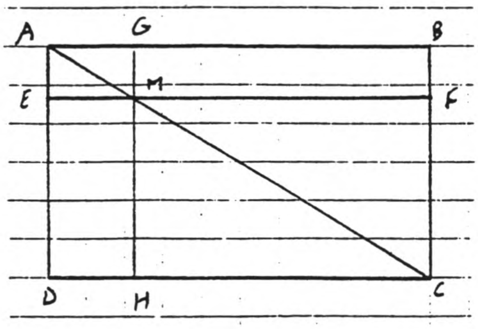
SITUATION DANS LA PROGRESSION DE LA CLASSE

L'activité suivante peut être donnée dès le début de l'année de seconde. Elle permet de mobiliser des connaissances de collège (notamment théorème de Pythagore, théorème de Thalès, radicaux), et aussi de montrer que dans certains problèmes, il est indispensable de conserver des valeurs exactes dans les calculs.

Si elle est donnée à la suite de l'activité «valeur approchée et démonstration», elle permet de revenir sur l'utilisation des valeurs approchées dans un problème.

ENONCE DE LA TACHE

ABCD désigne un rectangle tel que :
AB = 10 et AD = 6.
M est un point de [AC] avec AM donné (une valeur différente par groupe).
La parallèle à (AB) qui passe par M coupe [AD] en E et [BC] en F.
La parallèle à (AD) qui passe par M coupe [AB] en G et [DC] en H.
Compare les aires des rectangles MFBG et MEDH.



Tu vas commencer par chercher une solution pendant un quart d'heure avant de mettre en commun les résultats obtenus avec les camarades de ton groupe.

SCENARIO (description du déroulement de l'activité)

J'ai proposé cette activité à mes élèves dans une séquence d'enseignement modulaire d'une heure en travail de groupes (groupes de trois ou quatre élèves constitués à leur guise) après avoir fait l'activité «valeur approchée et démonstration».

Chaque groupe avait un énoncé différent :

- mêmes dimensions pour le rectangle, mais valeurs de AM différentes (par exemples, AM = 2, AM = 3, AM = 4).

Chaque groupe devait :

a) noter - la (ou les) démarche(s) utilisée(s) ;
- les difficultés éventuelles rencontrées ;

b) préparer une présentation pour la classe du travail du groupe et ses conclusions.

COMPTE RENDU DE LA SEANCE

Pour chaque élève, la stratégie envisagée a été : «pour comparer les aires, il faut les calculer» («puisqu'on nous donne des valeurs numériques», diront certains élèves).

Voici quelques stratégies d'élèves

1 • On fait la figure en vraie grandeur, on mesure les longueurs des côtés, puis on calcule l'aire de chaque rectangle :

DH = 1,7	GB = 8,3
DE = 4,9	GM = 1,1
aire de MEDH = 8,33 cm^2	aire de MFBG = 9,13 cm^2

Les aires ne sont pas égales et l'aire de MEDH est plus petite que celle de MFBG.

Cette stratégie a été utilisée par plusieurs élèves durant le travail individuel. Pendant le travail de groupe, ces élèves ont dit à leurs camarades qui leur signalaient qu'ils n'avaient pas le «droit» de mesurer sur la figure : «je ne savais pas faire autrement, alors j'ai mesuré les longueurs. N'empêche, ainsi je peux dire que la première aire est plus petite que la seconde». Cette stratégie n'a été retenue par aucun groupe, mais elle a amené les autres élèves à faire des mesures et, parfois, les résultats obtenus ont été différents.

2• On applique le théorème de Pythagore pour calculer AC, puis le théorème de Thalès pour calculer EM, GM...

Durant le travail individuel, la plupart des élèves ont été conduits à écrire AC sous la forme $\sqrt{136}$) par l'application du théorème de Pythagore, mais beaucoup ont préféré utiliser une valeur approchée dans la suite des calculs.

Avec une approximation de deux chiffres après la virgule pour AC, certains élèves ont déduit que les aires étaient différentes, d'autres qu'elles étaient "sensiblement" égales.

Quant à ceux qui ont utilisé pour AC une approximation de plus de deux chiffres après la virgule, ou bien ils ont conclu que les aires étaient égales, ou bien ils ne se sont pas prononcés.

Un élève seulement a gardé la valeur exacte de AC dans le calcul des longueurs des côtés des rectangles. Il a ensuite déterminé les aires des rectangles en utilisant sa calculatrice et a conclu qu'elles étaient égales (<u>même résultat sur la calculatrice</u>).

Dans la plupart des groupes, la discussion a porté sur «quelle précision prendre pour AC». Certains ont commencé par faire les calculs avec deux chiffres après la virgule, puis quatre et enfin, tous ceux donnés par la calculatrice. Les résultats obtenus sur les calculatrices pour les aires étant voisins mais pas identiques, certains groupes ont conclu que les aires étaient égales, les différences sur le dernier chiffre provenant de la précision des calculatrices. Deux groupes ont calculé les aires à la calculatrice en prenant $\sqrt{136}$, ce qui les a amenés à conclure à l'égalité des aires. Puis un des deux a fait le calcul exact des aires en conservant dans les résultats $\sqrt{136}$.

Un groupe, après avoir calculé des valeurs approchées pour les aires a conclu : «les aires doivent être égales, car les valeurs approchées sont peu différentes», puis a trouvé une démonstration de l'égalité de ces aires (sans utiliser les longueurs données) en procédant par différence à partir des aires de ABC et ADC.

CAPITALISATION DU TRAVAIL EN CLASSE ENTIERE

Lors du bilan en classe entière (qui à mon avis est indispensable après une telle activité), nous sommes revenus sur les différentes démarches utilisées par les élèves et sur ce qu'il fallait retenir de la séance.

Quelle utilisation peut-on faire de la figure ?

- L'action de mesurer sur une figure peut conduire à des résultats faux.

- Une figure donnée en vraie grandeur permet d'orienter le choix d'une décision mais ne constitue pas en soi une preuve.

Par contre, on peut utiliser la figure pour «vérifier» des résultats obtenus par calcul à partir des données (les valeurs approchées obtenues doivent concorder avec les valeurs exactes trouvées).

Puis nous avons abordé le problème de l'égalité de deux nombres.

- Deux valeurs distinctes affichées par une calculatrice permettent-elles de conclure que les nombres sont inégaux ?

- Deux valeurs égales affichées par une calculatrice permettent-elles de conclure que les nombres sont égaux ?

- La nécessité d'avoir des valeurs exactes pour conclure que deux nombres sont égaux.

Nous avons ensuite généralisé le résultat obtenu dans cet exercice, à savoir l'égalité des aires, à des rectangles de dimensions quelconques, puis aux parallélogrammes (cette généralisation a été faite durant le cours, mais on peut évidemment demander aux élèves de la faire en devoir à la maison).

A la fin de ce bilan fait en classe, durant lequel les différentes démarches utilisées par les élèves ont été exposées et commentées, j'ai distribué à chaque élève le corrigé suivant.

J'ai donné aux élèves des exercices à faire à la maison sur la comparaison de deux nombres, certains où la calculatrice permettait de conclure et d'autres pas.

Corrigé (dans le cas AM = 2)

Première méthode

Pour comparer les aires des rectangles, calculons leurs valeurs exactes.

Aire de MFBG = MG × MF

Aire de MEDH = ME × MH

Calcul de MG

(MG) étant parallèle à (BC), on peut utiliser le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

$\frac{MG}{CB} = \frac{AM}{AC}$; $\frac{MG}{6} = \frac{2}{AC}$

On peut calculer AC dans le triangle rectangle ABC en appliquant le théorème de Pythagore.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 136$, d'où $AC = \sqrt{136}$

d'où :

$MG = \frac{12}{AC} = \frac{12}{\sqrt{136}}$

M étant un point de [GH]

$MH = GM - MG = 6 - \frac{12}{\sqrt{136}}$

Calcul de EM

(EM) étant parallèle à (DC), on peut utiliser le théorème de Thalès dans le triangle ADC.

$\frac{EM}{DC} = \frac{AM}{AC}$; $\frac{EM}{10} = \frac{2}{\sqrt{136}}$

$EM = \frac{20}{\sqrt{136}}$

M étant un point de [EF] :

$MF = EF - EM = 10 - \frac{20}{\sqrt{136}}$

Aire de MFBG

$MF \times MG = (10 - \frac{20}{\sqrt{136}}) \times \frac{12}{\sqrt{136}} = \frac{120}{\sqrt{136}} - \frac{240}{136}$

Aire de MEDH

$EM \times \frac{20}{\sqrt{136}} (6 - \frac{12}{\sqrt{136}}) = \frac{120}{\sqrt{136}} - \frac{240}{136}$

Les aires des deux rectangles sont donc égales.

Deuxième méthode

Aire MFBG = aire ABC – aire AGM – aire MFC

Aire MEDH = aire ADC – aire AEM – aire MHC

Or, une diagonale d'un rectangle partage le rectangle en deux triangles de même aire, d'où

aire AGM = $\frac{1}{2}$ aire AGME = aire AEM

Aire MFC = $\frac{1}{2}$ aire MFCH = aire MHC

Donc les aires de MFBG et de MEDH sont égales.

Nota : cette dernière démonstration est encore valable, si au lieu d'avoir un rectangle, on a un parallélogramme.

FORMULER DES PROPRIETES GENERALES

Formuler des propriétés générales n'est pas un objectif explicite de la classe de seconde. Il n'y a rien à exiger sur ce sujet. Cependant, comme on va le voir ci-dessous, c'est une activité qui peut donner sens au travail mathématique, et particulièrement au calcul algébrique.

Dans une première partie, je relaterai dans l'ordre chronologique des faits observés lors de trois séquences de modules dans une classe de seconde. Ce n'est que longtemps après que j'ai rapproché ces observations dispersées dans l'année. Seule la mise en relation a posteriori m'intéresse ici et non point le déroulement effectif de chaque séquence qui ne sera pas décrit. Cette mise en relation s'appuie sur les productions et les réactions de quelques élèves seulement, réussissant assez bien en mathématiques ou, au minimum, marquant un intérêt pour cette discipline. Ce choix peut surprendre. Ces élèves ont eu quelque peine à résoudre les exercices que j'avais proposés et dont l'un des buts, pour le dire grossièrement, était de passer du particulier au général. Or tous les élèves sont sans cesse confrontés à ce problème en mathématiques. Dans le cas d'élèves réussissant moins bien, les difficultés sont souvent multiples et enchevêtrées. Ici, la situation était plus simple, il était impossible par exemple d'attribuer l'échec à des techniques de calcul défaillantes. Ainsi, l'attention est attirée sur un apprentissage difficile qui concerne tous les élèves.

Dans une deuxième partie, des exercices très classiques sont proposés, accompagnés de commentaires qui se nourrissent des observations. Les exercices de la première partie sont repris, ce qui fait que les deux parties peuvent être lues de façon indépendante. Mon objectif est que chacun utilise ce texte à sa guise et se construise de nouvelles situations selon les besoins de sa classe.

PARTIE 1

Le théorème "Cléaumouss"

Lors d'une des toutes premières séquences de modules de l'année, proposée aux élèves sous le titre : "Elaborer une stratégie en géométrie", j'ai donné un exercice qui devait se conclure par l'énoncé d'un théorème. Celui-ci pouvait être immédiatement réinvesti dans un second exercice. La formulation de ce théorème n'était pas l'objectif de la séquence ; il avait, à mes yeux surtout fonction de motivation.

Voici le texte de l'exercice :

TRI est un triangle rectangle en R. M est le milieu de [TR], N celui de [RI]. La hauteur issue de R, coupe [TI] en H. Faire une conjecture sur la nature du triangle MNH. Essayer d'en apporter une preuve, énoncer dans ce cas le théorème que vous venez de démontrer.

Un groupe d'élèves a réussi rapidement le travail demandé et a ensuite commenté sa réalisation avec une fierté évidente : "Pour le deuxième exercice, nous avons utilisé le théorème Cléaumouss". Le dit théorème Cléaumouss, du nom de ses trois auteurs, est correctement énoncé, les hypothèses y figurent, un souci de généralité apparaît avec la suppression des lettres qui désignaient certains points dans le texte de l'exercice :

"Dans un triangle rectangle, si on joint les milieux de deux des côtés au pied de la hauteur du troisième côté, on obtient un triangle rectangle".

Remarquons cependant que, dans cet énoncé, il n'est pas précisé qu'il s'agit de la hauteur relative à l'hypoténuse. Dans la démonstration, seul ce cas a été envisagé. On peut aisément vérifier que la propriété est encore vraie pour les deux autres hauteurs. L'énoncé tel qu'il est, est donc correct ; mais il faut noter que les élèves n'ont pas vu que ces cas particuliers étaient inclus dans l'énoncé.

Les conjectures

Plus tard dans l'année, des élèves travaillaient sur l'implication et l'équivalence. Dans un des exercices, ils devaient énoncer une conjecture sous la forme "si... alors" et la démontrer.

Voici la situation proposée :

a est un nombre positif. Comparer a et son carré.

Cet exercice fut un fiasco complet. Pourtant le sens du "si... alors" était compris, la réussite à de précédents exercices de type numérique aussi le prouvait, mais il s'agissait de comprendre un texte déjà écrit et non d'écrire soi-même.

C'est la même Clémence, co-auteur du théorème Cléaumouss, qui a traduit le découragement général : "C'était trop difficile, sans aide de votre part, on n'aurait pas réussi". Quant à moi, j'ai eu l'impression, à tort donc, que mon aide avait été peu importante : les essais numériques effectués par les élèves à leur propre initiative, conduisaient, à l'évidence me semblait-il, aux conjectures. Evidence non partagée par les élèves puisqu'ils n'ont pas su traduire par un énoncé le résultat de leurs observations. Le fait qu'il faille envisager deux cas explique sans doute leur échec.

Les généralisations

La troisième séquence de module qui m'intéresse ici avait pour objectifs

- de traduire algébriquement des situations, l'usage de la lettre permettant de généraliser le résultat obtenu,
- de mettre les élèves devant des situations familières où le calcul met en défaut l'idée première, ce qui je crois peut être motivant.

Voici deux textes et des productions d'élèves :

<u>Premier texte</u>

Avec un rectangle de papier, on peut fabriquer deux cylindres, soit en le roulant dans le sens de la largeur, soit dans le sens de la longueur.

Comparer leurs volumes. Peut-on écrire une loi générale ou bien les résultats dépendent-ils des dimensions du rectangle ?

Voici le début de la production de Karine, et une partie de celle de Clémence. Il ne s'agit pas de leur recherche mais bien d'un texte rédigé en conclusion.

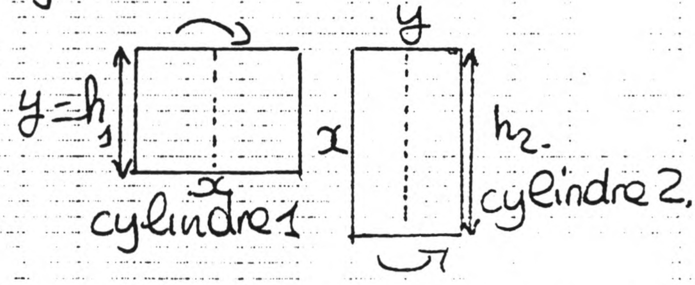
Karine avait fait des essais numériques, elle a choisi de ne pas les faire figurer.

Comparons leurs volumes grâce aux calculs, en ne prenant pas de chiffres comme exemple, mais en prenant x pour la longueur et y pour la largeur. Comme cela on pourra généraliser et énoncer un théorème.

aire du disque $= \pi R^2$

périmètre $= 2\pi R$.

Volume d'un cylindre $= B \times h$.



V_1 = volume du cylindre 1

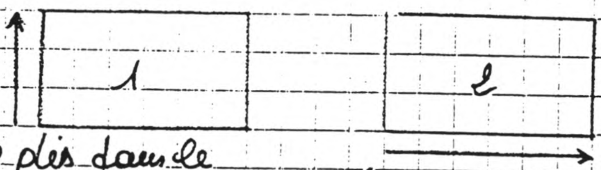
V_2 = volume du " 2.

$V_1 = B_1 \times h_1$ $\qquad B_1 = \pi R^2$.

pour connaître R, il faut résoudre l'équation :

$2\pi R = x$ donc $\dfrac{x}{2\pi} = R$.

<u>Clémence</u> s'en est tenue à un cas particulier. Elle savait qu'elle restait sur le particulier, de plus elle n'a pas de difficulté technique avec les lettres puisqu' elle a gardé la lettre π. Et pourtant elle n'est pas passée au cas général.



Le plis dans le sens de la largeur

Le plis dans le sens de la longueur.

$V_{cylindre}$ = Aire Base × hauteur

$= \pi R^2 \times h$

Le choisis des valeurs $L = 3$ $l = 2$

L = longueur

l = largeur

* Dans le cas 1 -

hauteur = $h = L = 3$

πR^2 je dois tout d'abord trouver R.

Le périmètre du cercle qui se trouve à la base du cylindre :

$2\pi R = p = l = 2$ (voir figure 1) soit

$2\pi R = 2$

$\pi R = 1$ donc $R = \frac{1}{\pi}$

Maintenant que j'ai R je calcule l'aire du cercle = πR^2

$\pi \times \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \pi \times \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$

d'où le volume du cylindre = . . . etc.

Deuxième texte

Dans un pays A, les prix augmentent de 3% puis de 4%. Dans un pays B, les prix augmentent de 5% puis de 2%. Dans un pays C, les prix augmentent de 4% puis de 3%. Dans quel pays augmentent-ils le plus ? Peut-on écrire une propriété générale qui permettrait de faire des prévisions ?

Vanessa avait fait des essais numériques avant d'écrire :

"Mes conjectures :

A + B = C + D   A, B, C, D étant pris comme les pourcentages

Si A - B < C - D alors AB > CD.

Si A - B < C - D alors l'augmentation est plus grande avec A et B".

Sophie elle est restée sur le plan numérique, mais, contrairement à Clémence qui savait être en face d'un exemple particulier, cela ne semble pas être son cas. En effet, elle a calculé ce que devient un prix de cent francs qui subit d'abord une augmentation de 4% puis de 3%. Elle a refait ensuite le calcul en inversant les pourcentages et conclut sur l'invariance de l'augmentation. Pour répondre à la deuxième partie de la question, elle s'est contentée de réécrire sa conclusion en faisant intervenir x% et y%. Elle ne s'est pas posé la question des pourcentages dont la somme est constante. Tel qu'il est posé, le texte est trop complexe puisqu'il suppose deux pistes de recherche différentes.

Voici donc les observations qui m'amènent à faire plusieurs remarques.

Dans les trois cas, il s'agissait de formuler et/ou de prouver une propriété générale :

- le théorème en géométrie
- la conjecture sur le nombre et son carré
- une propriété ou une loi générale pour des exercices partant de faits plus proches du "quotidien".

Notons déjà que, dans les consignes que j'ai données, cette propriété générale n'est pas désignée par le même mot. Ces désignations différentes étaient tout à fait involontaires. Les deux mots théorèmes et conjectures convenaient tout à fait puisque dans un cas la démonstration était faite, dans l'autre cas, c'est au vu d'essais numériques que cette conjecture a été énoncée. Dans le troisième cas, pourquoi le mot loi ? Peut-être une réminiscence de physique, compte tenu du fait que la situation fait appel à des actions sur des objets concrets. Ce mot est tout à fait inadéquat ici, puisque le résultat général énoncé ne trouve pas, justement, sa validation dans l'expérience, mais dans une démonstration de type mathématique. Deux élèves réutilisent pour ce troisième cas les mots théorème (Karine) et conjecture (Vannessa). Or celles-ci sont entrées pleinement dans le jeu de la généralité. Les mots utilisés sont donc importants et les représentations implicites de l'enseignant ne sont pas neutres. Pour les élèves de seconde, il vaut donc mieux s'en tenir à un vocabulaire stable, et bien entendu adéquat.

Si dans les trois cas on généralise, cette généralisation ne se fait pas dans le même cadre.

Dans le cadre géométrique, l'usage fait que les théorèmes sont bien identifiés, souvent démontrés en classe et peuvent être cités in extenso dans les productions écrites des élèves s'ils sont utiles dans une démonstration. La première situation, géométrique, avait quelque chose d'habituel pour un élève arrivant en seconde.

Les deuxième et troisième exemples se situent dans le domaine algébrique, domaine où les propriétés générales ne sont pratiquement jamais énoncées. En algèbre, l'élève ne dispose que de règles d'action : "je factorise", "je passe de l'autre côté", "j'enlève le dénominateur", "je sors de la racine carrée",...Ces règles d'action, que nous avons tous maintes fois entendu formuler sous cette forme, n'ont rien à voir avec des théorèmes, en particulier n'apparaît pas le domaine de validité de cette action, qui correspondrait aux hypothèses du théorème. De là vient peut-être la question favorite des élèves : "Est-ce que j'ai le droit de...?". Ces moyens d'action, en n'étant pas identifés à des énoncés généraux, gagnent en magie et les élèves, eux, ne se sentent plus responsables. Pour beaucoup d'entre eux, la démonstration n'existe qu'en géométrie, un calcul n'a pas le statut de preuve. Pour s'en convaincre, il suffit de leur demander une phrase de conclusion à la fin d'un calcul ou de la résolution d'une équation. Une coupure très nette existe entre l'algébrique et le géométrique quant au statut de la preuve. N'ayant pratiquement pas rencontré de propriétés générales en algèbre, les élèves n'ont peut-être pas su énoncer de conjecture concernant la comparaison d'un nombre et de son carré.

A cette absence de familiarité pour cet exercice s'ajoute le fait que la conjecture s'énonce en deux parties. En effet, si dans l'esprit de l'élève la propriété générale est "un truc qui marche tout le temps", il est peu étonnant qu'il ne lui vienne pas à l'idée d'énoncer la propriété en faisant intervenir deux cas : c'est reconnaître que ce qu'on énonce ne "marche" justement pas toujours ! Aussi, il n'est peut-être pas très astucieux de faire ce choix d'exercice pour une première approche, mais il faudra bien que les élèves y soient confrontés dans un deuxième temps.

D'autre part, dans ces deux derniers exemples d'activité de module, la prise d'initiative est aussi plus inhabituelle que dans la situation classique du problème de géométrie où on indique ce qui est à prouver. Ici il s'agissait de choisir des cas particuliers, puis d'énoncer à partir d'eux un invariant des observations, tout ce travail ne permettant d'ailleurs pas d'affirmer que l'énoncé est vrai. Ce travail est néanmoins proprement mathématique.

Vanessa qui n'avait pas réussi l'exercice sur le nombre et son carré, a écrit de façon magistrale ses conjectures dans le cas des pourcentages, après de nombreux tâtonnements qui sont d'ailleurs restés dans le domaine du privé. Elle a ensuite essayé de les démontrer sans succès. Dans le cas de l'exercice du cylindre, des dimensions particulières ont aussi été prises. Mais l'exercice est beaucoup plus facile me semble-t-il. D'une part l'énoncé de la propriété générale peut se faire dans le langage courant, d'autre part, le calcul sur des valeurs particulières donne déjà la trame de la démonstration. Il suffit de prendre des lettres à la place des deux dimensions choisies et de dérouler le même calcul. Entendons-nous, ce "il suffit" n'a que valeur théorique, il cache bien des difficultés pour de nombreux élèves. Dans le cas des pourcentages, les essais ne donnent pas d'indication sur une procédure de démonstration (hormis si l'on garde les pourcentages en ne faisant varier que l'ordre). Ceci peut être un critère pour le choix des exercices.

Une autre question est évidemment de savoir si le calcul littéral convainc l'élève de la validité du résultat général, ce qui n'est peut-être pas évident. Avant cette question d'ailleurs, peut-être faut-il vérifier que l'élève n'est pas déjà convaincu par les essais numériques, ce qui semble être le cas de Sophie. Avant d'entreprendre ce travail de formulation de propriétés générales, il est nécessaire de faire prendre conscience à l'élève que :

- quelques exemples, aussi nombreux soient-ils, n'assurent pas que la propriété est toujours vraie et qu'il n'existe pas de contre-exemples,
- que le vrai en mathématiques n'est pas équivalent au vrai du quotidien.

En somme, Sophie peut être intimement convaincue par ses essais numériques, il n'y a pas à aller contre cette conviction, mais il faut qu'elle sache que ceci ne suffit pas pour que sa proposition soit acceptée par autrui dans le jeu mathématique.

"Formuler une propriété générale" paraît donc un objectif large et complexe. Il semble important de préciser le cadre d'action, les procédures à mettre en oeuvre par les élèves. Le statut que l'on donne à cette propriété dans le contexte scolaire, devra éventuellement être précisé : pourra-t-elle être réutilisée ? Par extension, quel est le statut de résultats obtenus dans des exercices ? Enfin, j'ajouterai que la représentation que l'élève a de la généralité en mathématiques, ne peut être ignorée. L'exercice sur les pourcentages n'a pas fait avancer Sophie car elle ne se place pas comme "mathématicienne" devant la tâche à accomplir. Les décalages qui existent entre les élèves, non pas sur le plan technique, mais au niveau du rapport à l'énoncé général, justifieraient le fait que cet objectif soit traité en module, parallèlement au travail collectif de la classe où les propriétés générales abondent sans qu'elles soient perçues pour réellement ce qu'elles sont.

Précisons encore. Une propriété générale est une propriété commune à une classe d'objets et ce, sans exception, une fois cette classe d'objets bien définie. C'est le "sans exception" qui est important car c'est lui qui conduit à chercher une preuve, un moyen de démonstration, à ne pas se contenter de vérifications sur quelques objets. Entrer dans cette problématique du "sans exception", est une difficulté incontournable. Sophie n'y est pas entrée et l'exercice ne l'y aide pas : la situation est peut-être trop familière, elle l'a traitée maintes fois sur des exemples numériques dans les classes antérieures ; le texte, tel qu'il était posé, lui permettait de se replier sur l'ordre des pourcentages pour lequel elle connaissait peut-être déjà le résultat. Enfin le prix initial de 100 F qu'elle a choisi est pour ainsi dire un exemple générique. Vanessa au contraire, par la formulation des conjectures, et par son aveu d'echec quant à la démonstration, prouve qu'elle est totalement entrée dans la problématique.

Outre cette difficulté du "sans exception", inhérent à cet objectif de formulation de propriétés générales, existent aussi des problèmes spécifiques à ... la formulation. Elle suppose un interlocuteur perçu comme pair en mathématiques, c'est à dire ayant construit le même sens et usant des mêmes codes. Pour exemple, je donnerai cette situation que beaucoup d'entre nous ont vécue : il est demandé à un élève de passer un message à un autre élève, disons pour une construction géométrique. Que se passe-t-il souvent ? La construction est parfaitement réussie, pourtant le message est à nos yeux d'une ambiguïté désespérante, de multiples autres constructions sont possibles ; si nous soulevons le problème, les élèves scandalisés nous répondront : "Mais c'est bien évident que c'est comme ça qu'il fallait faire!". Peut-être avions-nous mal choisi la construction à réaliser, mais peut-être aussi avions-nous sous-estimé l'écart qui existait entre notre projet d'énonciation et celui de l'élève. Pour l'élève, le message a atteint son but puisque Julie ou Joël ont réussi la construction. Pour l'enseignant, le destinataire n'est pas Julie ou Joël, mais un destinataire fictif, multiple me semble-t-il, et le message ne convient pas pour ce destinataire là. Je ne fais que soulever ici une difficulté dont je ne perçois pas bien les contours.

Enfin j'ai parlé plusieurs fois de motivation. Souvent en classe de mathématiques, le professeur a pratiquement le monopole de l'énoncé des propriétés générales. Les exercices proposés dans les livres sont rarement conçus en fonction de cet objectif (souvent il suffirait de les modifier légèrement). Conclure une démonstration par l'énoncé d'un théorème plutôt que par "le triangle est rectangle", demande un retour sur ce que l'on a fait, un contrôle, une démarche réflexive. Réutiliser une propriété générale que l'on a soi-même énoncée et la voir acceptée comme preuve, donne peut-être du pouvoir.

De plus les situations proposées où l'on trouve un résultat en contradiction avec l'intuition première devraient aider à percevoir les mathématiques comme un moyen de connaissance et d'action sur certains aspects du réel (certains seulement, ne faisons pas croire le contraire). C'est une forme de réponse au fameux "A quoi ça sert?".

Aussi si les observations décrites précédemment portent sur des élèves plutôt motivés, il faut penser que ce genre d'activité s'adresse à tous et encore plus peut-être à ceux qui sont en difficulté pour cause de représentation inadéquate des mathématiques. Encore faut-il bien choisir ses exercices en fonction du public, ce qui n'était pas toujours le cas dans les exemples cités. Les difficultés répertoriées ci-dessus, devraient aider à ce choix .

PARTIE 2

Voici quelques textes, fort classiques, qui peuvent permettre de placer les élèves en situation de généraliser. Ils sont accompagnés de commentaires sur les procédures possibles et sur des difficultés prévisibles au vu des observations précédentes. Les textes de la partie 1 sont repris avec éventuellement des modifications. Certains textes marqués d'une astérisque n'ont pas été expérimentés, ils figurent ici car ils apportent des éléments nouveaux.

Pour les textes qui se situent dans le cadre algébrique, il me paraît important d'écrire, de façon très claire, la propriété démontrée et de ne pas se contenter du résultat du calcul. Et ceci pour plusieurs raisons.

D'une part, le passage du résultat à l'énoncé n'est pas toujours évident pour les élèves qui, même s'il ont mené à bien leur calcul, ne sont pas toujours capables d'en tirer une conclusion.

D'autre part, c'est un moyen de prendre confiance dans ses propres initiatives de calcul. En effet l'élève est souvent en situation d'exécution de consignes quand il fait un travail algébrique : "développer", "simplifier", "factoriser", sans que soit associé un but à ces opérations. Dans certains des exercices qui suivent, la transformation du calcul est à l'initiative de l'élève et surtout, même s'il y avait aide de l'enseignant, cette transformation s'effectue, avec tâtonnements peut-être, en fonction d'un but à atteindre, celui-ci n'étant pas de réussir le mieux possible à exécuter une consigne.

Enfin les calculs permettent d'aboutir à une réelle connaissance sur la situation proposée, situation pas trop éloignée des élèves, sur laquelle ils avaient pu déjà facilement avoir une idée ou qui leur avait posé problème. L'énoncé général est une remise en cause de cette idée, ou une réponse aux doutes qui avaient pu s'installer.

Texte I : "Papier"

Avec un rectangle de papier, on peut fabriquer deux cylindres, soit en le roulant dans le sens de la largeur, soit dans le sens de la longueur.

Comparer leurs volumes. Peut-on prévoir à l'avance quel sera le plus grand volume ou bien cela dépend-il des dimensions du rectangle ?

Il est intéressant de demander aux élèves de s'engager sur le résultat de la comparaison avant tout essai. Beaucoup pensent que les volumes seront égaux car construits à partir de la même feuille. D'autres suggèrent que l'un des cylindres est plus haut, mais bien sûr, l'autre est plus large... Certains réalisent les cylindres avec une feuille de papier. Puis ils prennent un exemple de leur propre initiative, cela ne pose aucune difficulté. Tous calculs faits, la mise face à face de l'idée première et du résultat obtenu par calcul s'impose : il y a souvent opposition.

Le calcul lui-même peut poser des difficultés techniques à certains, mais elles ne sont pas insurmontables, on peut suggérer de garder la lettre π. La conjecture est énoncée à ce stade. L'essai numérique donne la trame de la démonstration, le même calcul est à dérouler avec deux variables dont le choix ne pose aucun problème. C'est un exemple où, calcul numérique et démonstration algébrique nous apprennent quelque chose qui contredit souvent l'idée première, et ce, dans une situation simple à appréhender.

<u>Texte II</u> : **"Roues"**

Un cycliste effectue un aller-retour entre deux villes. A l'aller sa vitesse est de 30 km/h en moyenne. Au retour elle est de 20 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

Comme dans le cas précédent, la réponse est en contradiction avec l'idée première. Il faut dire que le texte joue sur le mot moyenne, on a envie de calculer la moyenne pour trouver la vitesse moyenne.

La notion de vitesse est moins familière que celle de volume. Pour certains élèves, un flottement se manifeste pour un traitement correct des relations existant entre vitesse, temps et distance.

Première difficulté exprimée par les élèves pour se lancer dans le calcul de la vitesse moyenne : "On ne connaît pas la distance". Certains prendront une valeur particulière, d'autres peut-être en référence aux équations, choisiront au premier abord une inconnue, mais il y a quelques réticences à se lancer dans un calcul où figurent tant d'indéterminées.

Si les élèves ont pris des valeurs numériques différentes pour la distance, la comparaison de leur résultat leur permettra de conjecturer la permanence de la vitesse moyenne quelle que soit la distance. Dans le cas où les élèves auraient choisi de désigner la distance par une lettre, c'est la "disparition" de cette lettre, au cours du calcul, qui permet d'affirmer que la vitesse ne dépend pas de la distance, situation éminemment étrangère à beaucoup d'élèves de seconde. Peut-être alors peut-on relancer le problème en demandant quelle serait la vitesse moyenne pour telle valeur particulière de la distance. De toutes façons, dans les deux cas, les élèves vont être confrontés à une affirmation qui tire sa justification de la "disparition" de la lettre.

Cet exercice peut être prolongé par la recherche d'une formule permettant de calculer directement la vitesse moyenne à partir des deux vitesses. Pour avoir observé des élèves, il me semble qu'il y a dans cette recherche trois difficultés :

- ils n'ont pas une idée très claire du but à atteindre ;
- la confiance dans le calcul littéral pour atteindre ce but est faible, sans doute parce que les élèves ont peu souvent l'occasion d'écrire des formules, ou du moins des expressions algébriques qui sont déclarées "formules" ; pour eux les formules se trouvent... dans les formulaires ; cependant le calcul se déroule de la même façon que dans la première étape ;
- une fois la formule trouvée, il est difficile de la faire fonctionner comme telle : deux nouvelles vitesses étant données, ils sont très tentés de refaire tous les calculs, comme si la confiance manquait encore une fois, ou comme si le statut de cette formule n'était pas clairement perçu.

Enoncer les propriétés générales que l'on a prouvées dans cet exercice peut aider les élèves sur les points ci-dessus cités. On peut énoncer :

- la vitesse moyenne n'est pas toujours égale à la moyenne des vitesses ;

- la vitesse moyenne ne dépend pas de la distance ;

- si a et b désignent les deux vitesses, la vitesse moyenne sur l'aller et retour est égale à 2ab/(a+b).

Texte III : "Ficelle"

Supposons qu'une très grande ficelle fasse le tour de la terre. Supposons qu'on l'allonge de 1 mètre et qu'on la soulève au-dessus de la terre de la même hauteur partout, de combien se soulèvera-t-elle? Et si on remplaçait la terre par une balle de ping pong ?

Cet exercice est semblable au précédent en ceci que c'est la disparition de la lettre qui permet d'énoncer le résultat. Il est utile de vérifier que les élèves ont bien compris la situation "matérielle" si j'ose dire. Une fois celle-ci comprise, je n'ai pas observé de difficulté pour la traduction numérique, ou algébrique pour les rares élèves qui se lancent dans le calcul en désignant par R le rayon de la terre. Dans cet exercice, même si les rayons ne sont pas donnés numériquement, ils ont une valeur bien déterminée pour les deux objets proposés. Dans le cas de la vitesse, la distance avait pleinement son statut de variable, ce qui introduisait une difficulté au départ, nous l'avons vu.

Il peut se produire quelques écarts entre les réponses si on se contente de valeurs approchées pour π. Enfin si des valeurs numériques ont d'abord été prises pour les rayons, le calcul littéral, en ne cachant pas les opérations, peut non seulement prouver, mais expliquer pourquoi les résultats sont identiques (et même rigoureusement identiques pour le cas où les élèves s'en seraient tenus à des valeurs approchées). De plus il permet d'étendre la conclusion à toute boule.

Le déroulement du calcul, aussi bien numérique que littéral n'est pas si simple, des initiatives sont à prendre.

Texte IV :"Inflation"

Dans un pays A les prix ont augmenté d'abord de 3% puis de 4%. Dans un pays B, ils ont d'abord augmenté de 5% puis de 2%. Dans quel pays ont-ils le plus augmenté ? Peut-on écrire une propriété générale qui permettrait de faire des prévisions dans une situation semblable ?

Cet exercice est difficile à plusieurs niveaux. D'une part, de nombreux essais sont sans doute utiles pour avoir l'idée d'une conjecture, ce qui n'était pas le cas dans les exercices précédents. On peut même avoir plusieurs idées de conjectures, ce qui va peut-être amener à les tester sur d'autres exemples, cet aspect de test peut être intéressant. D'autre part, les essais ne donnent aucune indication sur la démonstration sauf pour une partie où on exprimera les nouveaux prix en fonction des anciens. Mais à partir de là, les difficultés commencent : on a à faire avec une expression où figurent trois lettres, qu'il va falloir transformer pour la mettre en relation avec la conjecture. C'est une attitude non acquise par beaucoup d'élèves et, dans cet exercice, le calcul est trop complexe pour un début.

Texte V (*) : "Fidélité"

Lu sur une carte de fidélité dans un magasin grenoblois :

"Cette carte nominative et personnelle est à présenter obligatoirement au moment de l'achat. Elle sera validée lorsque 8 tickets de caisse correspondant à 8 achats réglés comptant seront agrafés ci-contre. A ce moment , la moyenne de vos 8 achats sera calculée et portée sur cette carte qui deviendra un avoir valable dans nos deux magasins".

Ceci est-il plus ou moins avantageux pour le client, qu'un avoir de 10% sur le total de 8 achats, comme cela se fait dans un autre magasin?

A priori la situation est un peu complexe à comprendre, et il faudra sans doute laisser du temps aux élèves pour cela et pour qu'ils expriment leurs idées premières. S'ils se lancent dans des essais numériques, que choisir ? Seul le total des huit achats importe. Que comparer ? Des pourcentages ou des avoirs ? La comparaison des pourcentages apporte des renseignements supplémentaires. Le calcul algébrique se déroule comme le calcul numérique ; suivant le déroulement du travail, la question se posera peut-être de savoir si on désigne le total des achats ou les huit achats.

Et qu'en serait-il si l'avoir était de 15% sur 10 achats dans l'autre magasin ?

Texte VI : "Triangle"

TRI est un triangle rectangle en R. M est le milieu de [TR] , N celui de [RI]. La hauteur issue de R, coupe [TI] en H. Faire une conjecture sur la nature du triangle MNH. Essayer d'en apporter une preuve, énoncer dans ce cas le théorème que vous venez de démontrer.

-La démonstration présente quelques difficultés car elle demande l'enchaînement de plusieurs pas.

- Il y a plusieurs stratégies possibles.

- Le théorème s'énonce facilement, les élèves sont dans une situation familière de géométrie. Cependant, à cause du fait peut-être que le triangle est rectangle, les élèves oublient que le mot hauteur, seul, désigne n'importe laquelle des trois hauteurs et que dans l'énoncé, soit on précise de quelle hauteur il s'agit, soit on envisage les deux cas particuliers de hauteurs que sont les deux côtés.

- Contrairement aux exercices précédents, il n'y a pas de passage explicite du particulier au général, on est tout de suite dans la généralité.

Texte VI bis

[AB] est un diamètre d'un cercle C. K est un point de C distinct de A et de B et I est le milieu de [KA]. Par I on trace la parallèle à la droite (AB). Elle coupe (KB) en J. H est le projeté orthogonal de K sur (AB). Prouvez que les quatre points K, I, H, J sont cocycliques.

- Le seul but de cet exercice est de réinvestir le théorème précédent et non cette fois, d'énoncer quoi que ce soit de général. La démonstration ne présente aucune difficulté quand on a reconnu à l'intérieur d'une figure complexe, la configuration introduite dans le texte précédent.

- Introduire peut-être un petit décalage dans le temps entre les deux exercices.

Texte VII (*) : "Mini"

ABC est un triangle équilatéral, I est un point à l'intérieur du triangle. P, Q, R, sont les projetés de I sur (AB), (BC), (CA), selon les directions (CA), (AB), (BC). Comment choisir le point I pour que la somme AP+BQ+CR soit la plus petite possible ?

Comme précédemment on est dans un cadre géométrique, mais cette fois il y a fort à parier que les élèves vont faire des essais pour placer le point I. Les mesures ne permettront pas de sortir exactement la constante. De plus si les élèves n'ont pas les mêmes triangles, les sommes vont varier. L'énoncé de conjectures risque donc d'être assez difficile, puisque la généralité porte sur deux objets, le triangle et le point I. Enfin, l'énoncé général qui décrit un invariant des observations, n'est pas dans la "ligne" de la question, car la somme en question est constante. Ce fait risque d'être perçu comme une rupture de contrat par les élèves. Si l'on veut éviter cette difficulté supplémentaire qui retardera peut-être l'énoncé de la conjecture, on peut modifier le texte.

Une démonstration possible consiste à prouver des égalités de segments (introduire le point R' intersection de (RI) et (AB)). Cette démonstration ne pose aucune difficulté, elle n'utilise que des propriétés élémentaires vues en collège. Cependant notons que les essais ne donnent aucune indication sur cette démonstration, peut-être même vont-ils orienter les élèves vers des procédés calculatoires. La démonstration proposée ci-dessus introduit elle aussi une espèce de rupture : nous étions au départ dans un cadre géométrique, par les essais nous passons dans un cadre numérique, la démonstration nous replace dans le cadre géométrique.

Ceci peut être réinvesti dans une représentation graphique à trois axes utilisée en statistiques, par exemple pour comparer des pourcentages correspondants à des réponses à une question ayant trois modalités.

et montrer que $AP + PR' + R'B = AB = AP + BQ + CR$)

Tableau ou pas tableau

OBJECTIFS DE CETTE SEANCE ET SITUATION DANS LA PROGRESSION DE LA CLASSE

Le cours sur la résolution des inéquations a été introduit par le problème suivant.

> Etant donné un nombre, on l'élève au carré, on retranche deux et on multiplie cette différence par le nombre de départ.
>
> 1) Est-il possible de trouver un résultat nul ? Est-il possible de trouver un résultat strictement positif ? Est-il possible de trouver un résultat strictement négatif ?
>
> 2) Quels sont tous les nombres qui donnent un résultat nul ? Quels sont tous les nombres qui donnent un résultat strictement positif ? Quels sont tous les nombres qui donnent un résultat strictement négatif ?

Le débat dans la classe a conduit à la résolution de l'inéquation "$x\ (x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2}) < 0$" en distinguant les différents cas concernant les signes des trois facteurs et en résolvant les systèmes d'inéquations correspondants. Après la rédaction d'une telle résolution, la méthode qui consiste à faire un tableau de signes (que certains élèves connaissaient depuis la troisième !) est apparue comme un outil très rapide et efficace. Puis quelques problèmes de résolution d'inéquations ou d'étude de signes d'expressions ont montré que le tableau de signes n'était pas du tout un passage obligé dans tous les problèmes de ce type. Toutefois aucune séance d'exercices intensifs sur ce genre de problème n'a eu lieu ; cependant il s'avère nécessaire de consacrer du temps à une analyse concernant le choix des méthodes : les modules sont là pour répondre à ce besoin.

Certains élèves qui ont bien compris l'étude du problème d'introduction avec les différents cas de signes des facteurs sont perdus devant la technique du tableau, dans laquelle ils ne mettent pas de sens ; d'autres qui savent parfaitement construire un tableau de signes pour étudier celui du produit de facteurs du premier degré veulent en construire dans tous les problèmes...

Cette séance est donc destinée à remettre un peu d'ordre dans les esprits :

- inciter les élèves <u>à se poser la question</u> du choix de l'outil le mieux adapté pour résoudre un problème ;
- insister sur le fait que le "tableau de signes" n'est pas un but à atteindre, mais simplement un outil pratique dans certains cas ;
- montrer qu'il <u>vaut la peine</u> de réfléchir quelques minutes à ce choix, compte tenu de l'efficacité de certaines méthodes par rapport à d'autres ;
- entraîner les élèves les plus à l'aise à reconnaître rapidement la méthode la plus efficace d'après le type de l'énoncé.

ENONCE ET CONSIGNES DONNES AUX ELEVES

Il serait souhaitable de consacrer deux heures à cette séance, ou au moins une heure et demie ; mais cette activité peut être pratiquée lors de deux séances séparées.

Dans un premier temps, les groupes d'élèves sont totalement libres ; suivant son envie, chacun travaille seul ou avec ses voisins sur les quatre premières parties de la fiche donnée dans les pages suivantes.

Dans un deuxième temps, il est préférable de regrouper les élèves qui auront eu quelques difficultés lors de la première partie et de les aider à faire le bilan et à traiter la partie faisant appel à leur imagination, alors que les autres pourront être laissés complètement autonomes.

MODULE : TABLEAU OU PAS TABLEAU ?

Première partie à traiter en 10 minutes !

Voici 5 énoncés ; après deux minutes de réflexion sur chacun d'eux, indique, en cochant la case correspondante, si, lors de leur résolution, tu penses recourir à un tableau de signes ou non. Attention ! Cette fiche sera ramassée une fois que tu auras traité la quatrième partie de l'activité.

Enoncés	Je fais un tableau de signes	J'utilise une autre méthode	Je ne sais pas
1 - Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $-(x-2)^2 - (x^2+1)$?			
2 - Quels sont tous les nombres réels dont le carré est inférieur au double ?			
3 - Résous dans l'ensemble des nombres réels l'inéquation d'inconnue x suivante : $x^2 + 2(x-4)^2 < 0$			
4 - Quel est l'ensemble de tous les réels t tels que $\frac{(t-1)^2}{t^2+1} < 0$			
5 - Quel est l'ensemble de tous les réels u tels que $(u-1)^2 - (2u+3)^2 = 0$?			

Deuxième partie

Reprends les énoncés pour lesquels tu penses faire un tableau de signes et construis ce tableau. Penses-tu que tu aurais pu te passer du tableau ? Pourquoi ?

Module : tableau ou pas tableau ? *(suite)*

Troisième partie

Résous les problèmes que tu n'as pas encore traités ; modifies-tu ta façon d'aborder le problème ? Pourquoi ?

Quatrième partie : bilan

Ajoute une colonne à ton tableau dans laquelle tu donneras les indices qui te permettent de choisir une des deux premières colonnes.

Cinquième partie : fabrication d'une fiche-méthode

Il s'agit que tu apprennes à écourter le temps de réflexion nécessaire au choix de la méthode à employer pour résoudre une inéquation ou étudier le signe d'une expression. Pour ce faire, tu vas fabriquer une fiche (qui sera ramassée), faisant apparaître la stratégie la plus performante adaptée à différents types d'énoncés, avec une illustration de chacun par un exemple que tu inventeras.

Présente-la en deux colonnes : la colonne de gauche explique la stratégie et celle de droite donne un énoncé pour lequel la stratégie proposée sera la plus performante.

EXPLICITATION DU CHOIX DES ENONCES ET DES CONSIGNES ET ROLE DU PROFESSEUR

Les énoncés inscrits dans le tableau sont destinés, de par leur aspect compliqué à inciter l'élève à réfléchir d'abord, et surtout à combattre l'idée qu'un exercice d'aspect technique "peu encourageant" se résout par des calculs compliqués : priorité doit être donnée à la **réflexion**, la virtuosité technique se travaillera après (s'il reste du temps !).

Les élèves peuvent avoir des difficultés à traiter le deuxième problème si c'est la première fois qu'ils rencontrent ce type d'énoncé : mieux vaut dans ce cas le remplacer par la résolution de l'inéquation de $x^3 \leq 2x$ pour rester dans la ligne des objectifs fixés pour cette séance (et éventuellement reporter l'étude de ce type de problème à une autre séance de module, sur la lecture d'énoncé par exemple).

Le principal but des deuxième et troisième parties est que l'élève parvienne à faire un choix raisonné de la stratégie à employer, et qu'il finisse par aboutir aux conclusions suivantes :

le tableau
- est efficace pour l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient dont le signe des facteurs change suivant les valeurs de la variable ;
- mais est inutile dans certains cas, par exemple, pour une somme dont les termes gardent le même signe suivant les valeurs de la variable ou pour un produit dont les facteurs gardent un signe constant suivant les valeurs de la variable.

L'élève doit parvenir à remplacer sa question, "Je fais un tableau ou pas ?", par les suivantes.

* Est-ce que le problème se ramène à l'étude du signe d'une somme ou d'un produit ?
* Les termes de la somme ou les facteurs du produit ont-ils un signe qui varie ou gardent-ils un signe constant ?
* Quelle règle des signes (règle des signes d'un produit, règle des signes d'une somme) est applicable ici ?
* Si je ne vois aucune règle applicable sur l'expression, comment puis-je transformer celle-ci de manière à pouvoir en appliquer une ?

Dès les premières minutes le professeur doit observer très attentivement les réactions des élèves, mais son rôle doit être totalement différent suivant les cas qui se présentent.

Les élèves qui ne rencontrent aucune difficulté dans ces exercices sont repérés rapidement par le professeur, qui n'intervient pas du tout, sauf pour les inviter à passer à la cinquième partie : le questionnement précédent leur vient naturellement, souvent sans même qu'ils s'en rendent compte. L'explicitation de leur démarche se fera naturellement lors de l'élaboration de la fiche-méthode de la cinquième partie.

L'enseignant n'intervient pas non plus lorsqu'il voit des élèves construire un tableau de signes, alors que celui-ci est inutile : ils pourront s'apercevoir dans la suite de la lourdeur de leur méthode (parties suivantes ou confrontation de leur travail avec celui de leurs voisins).

Par contre, si l'élève (et souvent ses voisins) commettent des erreurs de calcul, le professeur peut lui (ou leur) donner un contre-exemple et les laisser poursuivre. Il en profite pour leur montrer l'intérêt de contrôler constamment leurs calculs.

Le plus important reste le rôle du professeur devant l'élève (et souvent ses voisins) en situation de "blocage" : il va consister alors à poser quelques questions de façon à ce que chacun puisse exprimer ce qu'il "voit" dans ce problème et se constituer un questionnement auquel il pourra recourir dans d'autres situations, tel que celui qui est proposé ci-dessus. S'il le juge nécessaire en fonction, par exemple, de l'importance du groupe de module, le maître peut d'ailleurs avoir préparé par écrit les questions d'aide à ces élèves : il leur distribue alors en totalité ou par morceaux seulement s'il prévoit un déblocage rapide.

Voici quelques suggestions.

*L'énoncé te conduit-il à une résolution d'équations ou d'inéquations ? Si oui, lesquelles ? Est-elle (ou sont-elles) d'un type que tu sais traiter ? Est-il nécessaire de procéder à une étude de signe ?

Je te rappelle qu'étudier le signe d'une expression fonction de x, que l'on peut noter A(x), consiste à résoudre deux inéquations et une équation : lesquelles ?

*Si tu es toujours bloqué, demande-toi comment tu peux te ramener à un problème que tu sais résoudre : une inéquation d'un type connu, une étude de signe que tu sais faire, une équation que tu sais résoudre....

Si l'énoncé se traduit par une inéquation dont les deux membres ne sont pas 0, par exemple $(x - 1)^2 < 1$, la résous-tu en étudiant directement le signe des deux ou de l'un des membres (étudierais-tu le signe de $(x - 1)^2$ pour résoudre l'inéquation donnée en exemple) ?

Si tu penses que oui, fais l'étude de signe et écris ce que tu en conclus (en cas de nouveau blocage, reporte-toi à la question suivante).

Si tu penses que non, comment la transformes-tu de manière équivalente jusqu'à te ramener à l'étude du signe d'une expression A(x) ?

*L'expression A(x) à étudier change-t-elle de signe suivant les valeurs de x ?

Si tu ne sais pas répondre :
- tu peux calculer les valeurs de cette expression pour beaucoup de valeurs de x (utilise alors ta calculatrice programmable !) ;
- tu peux aussi dessiner la courbe qui représente A comme fonction de x, si tu disposes d'une calculatrice graphique.

De ce qui précède, déduis une conjecture correspondant à la question précédente et démontre qu'elle est vraie (si besoin, vois la question suivante).

*Pour prouver ta conjecture précédente, tu dois d'abord **observer l'expression** dont tu étudies le signe pour savoir si elle est écrite :

- comme une somme (ou une différence : je te rappelle que la différence de A et de B est en fait la somme de A et de l'opposé de B) ;

ou bien

- comme un produit (ou un quotient : je te rappelle que le quotient de A par B est le produit de A par l'inverse de B).

Pour le savoir, demande-toi quelle est la dernière opération effectuée lorsque tu calcules sans machine la valeur de l'expression pour une valeur de la lettre :

- si tu termines ton calcul par une addition ou une soustraction, tu peux dire qu'il s'agit d'une somme ;
- si tu termines ton calcul par une multiplication ou une division, tu peux dire qu'il s'agit d'un produit.

Dans le cas où l'expression est une somme, quelle règle connais-tu à propos du signe d'une somme d'après le signe de chaque terme ?

Par exemple, sachant que a est un nombre réel positif et que b est un nombre réel négatif, peux-tu conclure sur le signe de a + b ou sur celui de a - b ?

Dans quels cas de signes de a et de b, peux-tu conclure sur le signe de leur somme ? Sur le signe de leur différence ?

Cette règle s'applique-t-elle ici ?

- Si oui, termine l'exercice !
- Si non, en quoi peux-tu transformer une somme pour pouvoir utiliser une autre règle des signes ?

Pour effectuer cette transformation, pense aux identités remarquables ou à repérer un facteur commun à chaque terme de la somme. Une fois la factorisation faite, quelle règle connais-tu à propos du signe d'un produit d'après le signe de chaque facteur ? Peux-tu l'appliquer ici ? Chacun des facteurs garde-t-il un signe constant pour toutes les valeurs de la lettre ?

Dans le cas où l'expression est un produit, quelle règle connais-tu à propos du signe d'un produit d'après le signe de chaque facteur ? Peux-tu l'appliquer ici ? Chacun des facteurs garde-t-il un signe constant pour toutes les valeurs de la lettre ? Un tableau est-il utile ou non ?

Par exemple, quel intérêt y-a-t-il à faire un tableau de signes pour étudier le signe du produit $x\ (x^2 + 1)$ puisque le facteur $(x^2 + 1)$ est strictement positif pour toutes les valeurs du réel x ?

Est-il judicieux de faire un tableau pour étudier le signe de $(x - 2)^2 (x^2 + 1)$ qui est le produit de deux expressions positives pour tout x réel ?

L'intérêt de faire ajouter une colonne au tableau proposé, avec les éléments importants de la stratégie ou de la technique de calcul que l'élève juge difficile, est de lui faciliter la vision globale du bilan, qu'il réinvestira et complètera dans la fiche-méthode qu'il va fabriquer ensuite.

La cinquième partie propose trois articulations possibles avec le cours en classe entière.

1- La fiche est fabriquée en cours avec toute la classe car tous les élèves en ont besoin : le professeur peut ainsi faire le bilan de l'activité et mettre en avant que la question à se poser n'est pas "je fais un tableau ou pas ?", mais bien plutôt...(voir ci-dessus) ; il est même souhaitable qu'il fasse écrire aux élèves les questions à se poser.

2- La fiche est fabriquée par chaque élève en dehors de la classe, et elle est ensuite contrôlée par le professeur : cette modalité est adaptée surtout lorsque plusieurs élèves l'ont déjà fabriquée pendant la séance et que le professeur est pris par le temps !

3- Le professeur exploite une ou plusieurs fiches fabriquées par les élèves les plus en avance lors de la séance de module, les fait tester par la classe et fait le bilan.

EXPERIMENTATION

Elle a été menée dans deux classes et a fait apparaître une très grande diversité dans les réactions des élèves : certains sont arrivés très rapidement à la cinquième partie, alors que d'autres, les plus nombreux, sont restés bloqués dès le début, souvent par des difficultés d'ordre technique telle que celle de reconnaître des identités remarquables ou de savoir s'il s'agit d'une somme ou d'un produit.

La fiche-méthode de la cinquième partie a posé le plus de problèmes, car les élèves sont peu habitués à fabriquer des exercices. Cependant, il me semble que cette activité, pratiquée avec toute la classe ou un groupe assez important, renseigne beaucoup le professeur sur les représentations des élèves, et qu'elle est essentielle pour atteindre les objectifs fixés ici : il vaut vraiment la peine de ne pas omettre cette dernière partie.

CASSER LES VECTEURS A L'AIDE DE LA RELATION DE CHASLES

"Magiques" n'est-il pas le qualificatif souvent attribué par nos élèves aux solutions des problèmes de points alignés passant par la colinéarité de vecteurs, savamment décomposés et recomposés, où arrive miraculeusement, à la fin, une formule salvatrice du type "$\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AC}$" ?

Objectifs

Il s'agit d'amener les élèves :

1) à mettre au point une stratégie pour démontrer que deux vecteurs sont colinéaires, lorsqu'il s'agit de prouver que trois points sont alignés:

- décomposer un des vecteurs en fonction de deux autres qui ne sont pas colinéaires, en utilisant un point de la figure (appelons-les $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$) ;

- exprimer l'autre vecteur en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: pour cela, on utilise le fait que tout vecteur s'exprime en fonction de tout autre vecteur qui lui est colinéaire ;

et à préciser les limites d'utilisation de cette stratégie ;

2) à être capables d'analyser une figure pour décider de l'opportunité de mettre en œuvre cette méthode et, dans l'affirmative, pour le faire.

Situation dans la progression de la classe, gestion, public

Cette activité est proposée aux élèves à la suite de l'étude de la colinéarité de deux vecteurs et de son utilisation pour démontrer que trois points sont alignés.

Voici une possibilité (parmi d'autres) de présentation de cette activité.

A la suite du cours cité ci-dessus, deux exercices sont donnés à faire "à la maison" et corrigés ensuite en classe. On donne une nouvelle série de trois exercices à chercher "à la maison", que le professeur ne corrige pas immédiatement, mais qu'il utilise pour constituer les groupes après avoir demandé aux élèves s'ils pensent que leur recherche a abouti ou non : il peut leur faire remplir un questionnaire du type suivant :

Numéro de l'exercice	J'ai trouvé la démonstration	je n'ai pas trouvé la démonstration
1		
2		
3		

Les deux groupes

Le groupe 1 est constitué des élèves qui ont beaucoup de difficultés à démontrer la colinéarité de deux vecteurs, qui n'ont pas de méthode et "tournent en rond".

Le groupe 2 est composé de ceux qui réussissent dans ce type de démonstration.

Présentation de l'activité

Elle se déroule à partir de cinq documents-élèves.

Le document-élève 1

Il s'adresse au groupe 1 et propose aux élèves trois énoncés, accompagnés de solutions partiellement rédigées, qui suivent la même stratégie. Au travers de cette présentation, l'objectif que nous poursuivons n'est pas de proposer la "meilleure" solution ou la plus courte, mais que l'élève prenne conscience progressivement, et par la répétition, des invariants de ces stratégies qui, en fait, n'en font qu'une. Le choix de celle-ci est presque nécessaire dans l'exercice 3 ; toutefois il ne l'est pas dans les exercices 1 et 2. Pourquoi alors proposer aux élèves les exercices 1 et 2 ? On aurait évidemment pu leur proposer des énoncés où la stratégie utilisée s'impose. Si nous ne l'avons pas fait, c'est que nous avons pensé qu'il serait plus simple aux élèves de dégager des invariants à partir de solutions plus courtes où l'expression du deuxième vecteur en fonction des vecteurs utilisés dans la décomposition du premier vecteur n'est pas très longue. Nous émettons l'hypothèse qu'ayant utilisé trois fois la même stratégie, l'élève sera alors capable de la dégager. Peut-être est-il nécessaire de lui demander de dégager un plan de résolution de chaque exercice de façon à préparer la généralisation ? Mais à la fin de la première résolution l'élève en est-il capable ?

Par ailleurs, nous proposons aux élèves des solutions "à trous" ; mais pour éviter de réduire leur rôle à celui d'exécutant, nous avons ajouté dans la colonne de droite des questions destinées à les faire réfléchir sur les choix possibles.

Le document-élève 2

Il s'adresse aux élèves du groupe 2. Les objectifs poursuivis sont identiques à ceux qui sont poursuivis au travers du document numéro 1, mais là, dans les énoncés proposés la stratégie évoquée s'impose (ou presque !) sauf dans l'exercice 2. On demande de résoudre trois problèmes. S'ils ne parviennent pas à trouver certaines solutions, on leur proposera une aide sous la forme de solutions à compléter comme dans le document-élève 1. Il leur est ensuite demandé de dégager les stratégies utilisées dans les exercices 3 et 4.

Le document-élève 3

Il est destinée à toute la classe. L'objectif qui est poursuivi est que les élèves parviennent à rédiger la stratégie utilisée dans les exercices des documents 1 ou 2 (les deux derniers exercices). Pour l'exercice 2, qui est commun aux deux documents, mais où la stratégie évoquée ne s'impose pas, on fera apparaître l'inopportunité du choix de la stratégie, si on cherche la solution la plus rapide. Il est en effet nécessaire de faire comprendre que cette stratégie n'est pas la meilleure dans tous les cas : pour certains exercices, elle n'est pas à utiliser car le contexte permet d'arriver au résultat plus rapidement en utilisant une autre démarche, par contre, elle constitue une stratégie "de dépannage à essayer devant la sèche" !

Le document-élève 4

L'objectif poursuivi est que les élèves sachent analyser une figure,

- d'une part pour décider si le choix de la stratégie précédente est pertinent ou non,
- d'autre part, dans le cas où il le serait, pour construire un cheminement permettant d'exprimer le deuxième vecteur en fonction des deux vecteurs qui ont permis d'exprimer le premier.

L'appropriation de ce document nous paraît essentielle sans quoi l'élève risque d'utiliser systématiquement la stratégie précédente, avec le risque de ne pas y arriver.

Document-élève 1 **Exercice 1**

Travail à faire : complète la solution qui t'est proposée pour cet exercice 1 (colonne de gauche) et réponds aux questions de la colonne de droite.

ABC est un triangle ; D est le point défini par $\overrightarrow{AD} = 1{,}5\ \overrightarrow{AB}$

et E est le point défini par $\overrightarrow{DE} = 1{,}5\ \overrightarrow{BC}$.

Prouve que A, C, E sont alignés.

<u>Rédaction d'une solution.</u>

Nous allons démontrer que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

<u>D'une part</u>, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, d'après

<u>D'autre part</u>, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, d'après

Or $\overrightarrow{AD} = 1{,}5\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = 1{,}5\ \overrightarrow{BC}$ d'après

Donc $\overrightarrow{AE} =$ $\qquad\overrightarrow{AB} +$ $\qquad\overrightarrow{BC}$

Finalement :

$\overrightarrow{AE} =$ $\qquad\qquad = 1{,}5\ \overrightarrow{AC}$

<u>Des questions pour t'aider à dégager la stratégie.</u>

Pouvait-on choisir d'autres vecteurs ? Si oui, cites-en deux autres !

Pourquoi veut-on démontrer que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ?

Pouvait-on choisir un autre point que B ?

Essaie de refaire la démonstration en utilisant le point D :

Dans ce paragraphe, on est parti d'une expression de $\overrightarrow{AE}$ (laquelle ?) pour arriver à une autre expression ;

laquelle ?

En quoi la nouvelle expression est-elle plus intéressante que la première ?

Document-élève 1 Exercice 2

Travail à faire : complète chacune des deux colonnes suivantes, relatives à la solution de **l'exercice 2** dont voici l'énoncé.

ABC est un triangle ; D est défini par $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{CA} + 3\,\overrightarrow{AB}$.

Prouve que B, C, D sont alignés.

<u>Solution</u> : on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires,	Dans quel but ? Pouvait-on choisir d'autres vecteurs ?
D'une part, on peut écrire que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$, d'après la relation de Chasles.	Pourquoi choisit-on de casser $\overrightarrow{CD}$ en faisant intervenir le point A, et pas un autre point ?
D'autre part, on peut aussi écrire que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$, d'après la relation de Chasles.	Pourquoi choisit-on de casser $\overrightarrow{CB}$ en faisant intervenir le point A, et pas un autre point ?
D'après l'hypothèse, $\overrightarrow{AD} =$	
Donc $\overrightarrow{CD} =$	Ecris la nouvelle expression de $\overrightarrow{CD}$ que tu déduis de ce qui précède.
Finalement, $\overrightarrow{CD} =$ $= 3\,\overrightarrow{CB}$	

Document-élève 1 Exercice 3

Travail à faire : complète chacune des deux colonnes suivantes, relatives à la solution de **l'exercice 3** dont voici l'énoncé.

ABC est un triangle ; E est le milieu de [AC], F est le point défini par $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et D est le symétrique de C par rapport à B.

D, E et F sont-ils alignés ? Prouve-le.

<u>Solution</u>

On va démontrer que $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.	
<u>D'une part</u>, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE}$	
<u>D'autre part</u>, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}$	
On va faire "disparaître les écritures $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CE}$ pour faire apparaître les vecteurs et .	Quel intérêt cela présentera-t-il ?
Pour $\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{DC} = 2\ \overrightarrow{BC}$ puisque donc $\overrightarrow{DC} = = 2\ (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ donc $\overrightarrow{DC} = 2\ (\frac{3}{2}\ \overrightarrow{FA} + 2\ \overrightarrow{AE})$, d'après	Pourquoi exprime-t-on $\overrightarrow{BA}$ en fonction de $\overrightarrow{FA}$ et <u>pas</u> de $\overrightarrow{BF}$? De même, pourquoi exprime-t-on $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et <u>pas</u> de $\overrightarrow{EC}$?
Donc $\overrightarrow{DC} = \quad \overrightarrow{FA} + \quad \overrightarrow{AE}$	
Pour $\overrightarrow{CE}$: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$, puisque Donc $\overrightarrow{CE} = -\ \overrightarrow{AE}$	
Finalement, $\overrightarrow{DE} =$	Quelle est la nouvelle expression de $\overrightarrow{DE}$ obtenue, ne faisant intervenir que $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AE}$?
<u>Conclusion</u> : $\overrightarrow{DE} =$	Comment arrive-t-on à montrer que ce vecteur est 3 $\overrightarrow{FE}$?

Document-élève 2

Résous les trois exercices suivants.

Exercice 2

ABC est un triangle ; D est défini par $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{CA} + 3\,\overrightarrow{AB}$.

Prouve que B, C, D sont alignés.

Exercice 3

ABC est un triangle ; E est le milieu de [AC], F est le point défini par $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et D est le symétrique de C par rapport à B.

D, E et F sont-ils alignés ? Prouve-le.

Exercice 4

ABCD est un rectangle ; F est le symétrique de A par rapport à B, E est le point défini par $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D, E, F sont-ils alignés. ? Prouve-le.

Fiche d'aide éventuelle pour le document-élève 2

Pour les exercices 2 et 3, on procèdera comme dans le document-élève 1 (exercices 2 et 3).

Voici l'aide pour l'exercice 4.

Réponds aux questions de la colonne de droite.

On va démontrer que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.	
D'une part, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$.	Compte tenu de l'énoncé, pourrait-on choisir un autre point que A pour "casser" les vecteurs ?
D'autre part, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$.	

Or $\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.	Quelles sont les différentes étapes du raisonnement ci-contre ?
Donc $\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{DC}$	
$= 2\,(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$	
Or $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.	Détaille les "calculs".
donc $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$	
Finalement $\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{DA} + 3\,\overrightarrow{AE}$	
donc	
$\overrightarrow{DF} = 3\,(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) = 3\,\overrightarrow{DE}$	

Document-élève 3

Quel bilan peut-on tirer des trois démonstrations précédentes ?

Dégage la stratégie qu'on peut utiliser, pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés, à partir des trois problèmes précédents en t'aidant des questions suivantes.

1) L'alignement des points se déduit de quelle propriété de vecteurs ? Et de quels vecteurs par exemple ?

2) Comment les utilise-t-on ?

De quelle façon commence-t-on par exprimer chacun d'eux ?

Sauf dans les cas très simples où l'on peut conclure immédiatement, quels vecteurs cherche-t-on à "casser" et quels vecteurs cherche-t-on à garder ? Pourquoi ?

Document-élève 4

Essayons de comprendre comment ça marche !

L'objet du travail qui va suivre est d'approfondir ce qui permet de passer de l'expression d'un vecteur à une autre expression du même vecteur.

Pour faire cette analyse, nous allons abandonner certains détails (coefficients de colinéarité, signes...) pour nous centrer uniquement sur les représentants des vecteurs qui interviennent.

Par exemple, dans le cas où $\vec{AB} = 2\,\vec{AC}$, nous écrirons $\vec{AB}$ -col- $\vec{AC}$ ("col" signifie "colinéaire à ") lorsque nous souhaiterons remplacer $\vec{AB}$ par $2\,\vec{AC}$, ne retenant ainsi que l'idée de colinéarité. qui nous permet de "changer de vecteur".

Nous écrirons "bon" sous un vecteur lorsqu'il s'agit d'un représentant que l'on a choisi de garder. Voici, par exemple, comment on pourrait schématiser la démonstration précédente relative à **l'exercice 3**.

$\vec{FE} = \vec{FA} + \vec{AE}$

$\vec{DE} = \vec{DC} + \vec{CE}$

$\vec{DC}$ | col | $\vec{BC}$ | rel. Chasles ↓ $\{\vec{BA}\ ;\ \vec{AC}\}$

$\vec{BA}$ | col | $\vec{FA}$ bon ; $\vec{AC}$ | col | $\vec{AE}$ bon

$\vec{CE}$ | col | $\vec{AE}$ bon

Il suffit de regarder la figure pour écrire ce schéma de démonstration. On en déduit que l'on est capable, en ajoutant certaines précisions, d'écrire $\vec{DE}$ en fonction de $\vec{FA}$ et de $\vec{AE}$ et que ceci va être utile pour conclure à la colinéarité avec $\vec{FE}$.

Voici de même le début du schéma de la démonstration relative à **l'exercice 2** : complète-le jusqu'à ce que chaque "colonne de décomposition" se termine par "bon".

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB} \quad = \quad \overrightarrow{CA} \quad + \quad \cancel{\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}}\ \overrightarrow{AD}$

<u>**Si tu étais dans le groupe 1**</u>.

1) <u>Ecris toi-même,</u> uniquement en regardant la figure, le schéma de la démonstration relative à **l'exercice 4** que voici.

ABCD est un rectangle ; F est le symétrique de A par rapport à B, E est le point défini par $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Prouve que les points D, E, F sont alignés.

2) <u>Rédige</u> ensuite la démonstration en utilisant ce schéma.

<u>**Si tu étais dans le groupe 2 .**</u>

1) <u>Ecris toi-même,</u> uniquement en regardant la figure, le schéma de la démonstration relative à **l'exercice 4** précédent.

2) S'il te reste du temps, voici un autre exercice que tu peux chercher en utilisant le schéma précédent et rédige la solution.

ABCD est un parallélogramme ; E, F et G sont les points définis par :

E est le symétrique de D par rapport à B, $\overrightarrow{CF} = 5\,\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BG} = 3\,\overrightarrow{AB}$. Prouve que E, F, G sont alignés.

DEMONTRER UNE EGALITE

Lors de stages sur les modules, la démonstration d'égalité est relevée comme étant une difficulté.

Supposons que dans un exercice on demande de prouver que, quel que soit soit x réel

$$x(x-1) = (x-2)(x+1) + 2,$$

sur presque toutes les copies on va trouver

$$x(x-1) = (x-2)(x+1) + 2$$
$$x^2 - x = x^2 - 2x + x - 2 + 2$$
$$x^2 - x = x^2 - x.$$

Que reproche-ton à l'auteur de ce calcul ? D'être parti de la conclusion et/ou de n'avoir pas mentionné des équivalences (évidentes ici). Cette précaution est nécessaire puisque sans elle, on ne pourra pas affirmer que la première proposition est vraie quand la dernière l'est.

Pour tourner la difficulté, il est proposé à l'élève de partir d'un membre de l'égalité et de le transformer pour prouver qu'il est égal à l'autre, ce qui donnerait ici :

quel que soit le réel x

$$\begin{aligned}(x-2)(x+1) + 2 &= x^2 - 2x + x - 2 + 2\\ &= x^2 - x\\ &= x(x-1),\end{aligned}$$

ou bien de transformer chaque membre et de prouver qu'ils sont égaux à une 3ème :

quel que soit x

$$x(x-1) = x^2 - x$$

$$\begin{aligned}(x-2)(x-1) + 2 &= x^2 - 2x + 2 - 2 + 2\\ &= x^2 - x\end{aligned}$$

donc

$$x(x-1) = (x-2)(x-1) + 2.$$

Finalement on propose à l'élève une procédure qui n'utilise pas l'équivalence entre égalités. Pourtant celui-ci est confronté à son usage dans d'autres situations.

La plus classique de ces situations est la résolution d'équations numériques, une équation étant remplacée par une ou plusieurs équations équivalentes. Il peut aussi s'agir d'équations non numériques comme par exemple quand on demande de situer un point à partir d'une relation vectorielle : A et B étant donnés, situer X pour que $\overrightarrow{XA} + 3\overrightarrow{XB} = \vec{0}$. Que fait-on sinon partir de cette égalité pour aboutir à $\overrightarrow{AX} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, et considérer que si cette dernière égalité est vraie, la première l'est aussi ?

Examinons maintenant quelques types d'égalités à démontrer qui ont été proposées lors de stages sur les modules. Ce sont essentiellement des égalités vectorielles ou numériques, l'égalité pouvant être fonctionnelle ou non.

Exemples

1. Egalité vectorielle non fonctionnelle

A, B, U, V sont quatre points tels que $\overrightarrow{AU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BV} = 2\overrightarrow{VU}$

Prouver que $\overrightarrow{UV} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}$

2. Egalité numérique non fonctionnelle

Montrer que

$|3 - \Pi| + |5 - \Pi| = 2$

3. Egalité vectorielle fonctionnelle

I étant le milieu de [AB], prouver que quel que soit M,

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

4. Egalité numérique fonctionnelle

Quel que soit x

(P) $x(x - 1) = (x - 2)(x + 1) + 2$

Que fait l'élève dans ces différentes situations ?

Il est fort possible, quand l'élève résout le problème comme on l'a décrit au début, qu'il le fasse en référence aux équations. Cependant il sait, je crois, qu'il ne résout pas une équation. En effet il ne «transpose» pas d'un membre dans l'autre, d'autre part il s'arrête à $x^2 - x = x^2 - x$. S'il résolvait l'équation, il y a fort à parier qu'il irait jusqu'à $0 = 0$, tant les habitudes sont fortes. Remarquons d'ailleurs qu'on peut très bien, pour prouver la proposition (P), résoudre l'équation $x(x - 1) = (x - 2)(x + 1) + 2$. Si on trouve que l'ensemble de ses solutions est $\mathbb{R}$, la proposition (P) sera bien vraie. C'est une procédure qui n'est pas proposée à l'élève et qui est une variante de la sienne.

Dans les quatre exercices donnés en exemple ci-dessus, l'élève ne réagira sans doute pas de la même façon. Les égalités numériques lui étant plus familières que les égalités vectorielles, il se peut que, pour ces dernières, sa stratégie de transformations successives d'égalités ne soit pas disponible, d'autant plus, si la prise d'initiative est importante (comme pour la transformation de $\overrightarrow{UV}$ dans 1.).

Ainsi, du côté de l'élève il nous est difficile de savoir, sans travail à ce sujet, quelle connaissance il met en jeu dans ce genre d'activité.

Du côté du prof., nous rejetons la stratégie-élève et nous lui proposons des stratégies d'évitement de l'équivalence. En même temps nous enseignons la résolution d'équations par des méthodes qui s'appuient sur l'équivalence.

Il y a là me semble-t-il une contradiction. Peut-être pensons-nous que l'équivalence est une notion difficile, sans doute avons-nous raison. De cette idée, nous tirons la conclusion que chaque fois qu'il est possible de l'éviter, il vaut mieux inciter l'élève à le faire.

Peut-être n'insistons-nous pas assez sur le fait que résoudre une équation, ce n'est pas seulement «trouver la valeur de x» comme disent les élèves, mais aussi faire une véritable démonstration, prouver que l'égalité est vraie si et seulement si l'inconnue est élément d'un certain ensemble. Ce point difficile nous conduirait à penser que l'utilisation de l'équivalence n'est pas suffisamment ancrée dans la résolution d'équation pour en faire usage dans la démonstration d'égalité.

Toutes ces raisons peuvent s'entendre, cependant je crois qu'elles sont en contradiction avec des objectifs plus lointains. Quand nous n'acceptons pas, sans donner d'explications, une stratégie d'élève, pour la remplacer par une autre qui ne lui paraît sans doute ni plus ni moins justifiée, nous contribuons à façonner une image des maths contre laquelle ensuite nous luttons.

Aussi, dans le cas où l'on veut travailler sur ces démonstrations d'égalités, proposons-nous de ne pas rejeter la stratégie-élève, mais de l'examiner et de l'enrichir par d'autres méthodes auxquelles les élèves n'avaient pas pensé. A eux ensuite de faire des choix. Nous y perdrons peut-être en performance dans la démonstration d'égalités, mais nous y gagnerons sûrement à long terme : d'une part pour la compréhension de l'équivalence qui va fonctionner dans un cadre autre que celui de la résolution des équations, d'autre part en favorisant des attitudes que l'on aimerait rencontrer chez l'élève.