MODULE EN SECONDE

Tome I

ISBN 2 - 90 3815 - 27 - 5
Prix : 50F

première édition : 1992
deuxième édition : 1995

Note au lecteur

Répondre efficacement aux besoins de chaque élève, au moment où ils se présentent, tel est l'objectif à poursuivre au travers des modules.

Mais encore faut-il que ces besoins soient clairement identifiés! Ceci suppose donc des phases d'observation des comportements des élèves, dont la mise en place est facilitée par la liberté accordée au professeur dans la constitution de ses groupes de module.

Outre les réflexions du groupe "modules en seconde" de l'IREM de Grenoble, à propos de l'enseignement modulaire, qui débouchent sur l'évaluation comme moteur de l'apprentissage, ainsi que sur des considérations d'ordre méthodologique, ce premier fascicule contient quelques exemples très divers d'activités à proposer au travers des modules, suivant le projet d'orientation et les besoins de chaque élève.

Si les unes ne sont destinées qu'à quelques élèves, soit qu'ils veuillent aller plus loin dans certains domaines, soit qu'ils se heurtent à des difficultés importantes à propos de savoirs ou savoir-faire élémentaires, les autres peuvent être adaptées, grâce à une gestion différenciée, à une classe toute entière.

Un deuxième tome consacré lui aussi à l'enseignement modulaire en seconde est actuellement en préparation à l'IREM de Grenoble.

N'hésitez pas à prendre votre plume! Toutes vos remarques ou suggestions seront étudiées et pourront servir de base à la poursuite de nos travaux.

Ont travaillé à l'élaboration de ce fascicule :

Raymond CHUZEVILLE
Michèle GANDIT
Michèle GHESQUIERE
Paul MOUCHE

Certaines idées ont été inspirées par d'autres animateurs du groupe Lycée de l'IREM de Grenoble, qui nous ont aidé à évoluer dans notre réflexion:

Françoise MACQUIN et Claude PARISELLE

Merci à Annie BICAIS pour la frappe et la composition de ce document.

Sommaire

REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT MODULAIRE

Nous présentons dans ce document l'état de notre réflexion (en juin 1992) sur ce que pourrait être l'enseignement modulaire en classe de seconde, ainsi que des exemples de pratique dans nos classes.

Il ressort entre autres de l'intervention de M. André Legrand (directeur de la Direction des Lycées et Collèges) à Clermont Ferrand (le 13-11-91) à propos de la réforme des pratiques pédagogiques que si les lycéens ont beaucoup de connaissances, on leur reproche (les universitaires, les entreprises...) de ne pas être autonomes, de ne pas savoir travailler, c'est-à-dire, de ne pas savoir distinguer dans leurs connaissances l'essentiel de l'accessoire, de ne pas savoir dans quel ordre tout cela doit s'organiser. Par ailleurs, M. Legrand insiste sur le caractère continu que doit revêtir le processus d'orientation.

Situation actuelle

Le programme de mathématiques de la classe de seconde est vaste et il n'est pas toujours facile de le terminer en ayant 2h30 de cours et 1h30 de travaux dirigés, surtout lorsque l'établissement est centre d'examen (dans ce cas, l'année scolaire se termine à la mi-juin).

Situation à la rentrée 92

Le programme de mathématiques sera le même, mais l'horaire sera "amputé" d'une demi-heure de travaux dirigés auquel on ajoutera trois quarts d'heure d'enseignement modulaire. L'enseignant devra donc essayer de "boucler" le programme en ayant une demi-heure de travaux dirigés de moins, s'il ne veut pas utiliser l'horaire modulaire pour faire avancer ce dernier.

La question qui se pose est alors : quelles aides apporter aux élèves durant ces heures "modules" de manière à pouvoir quand même, en moins de temps, terminer le programme. Or, aider un élève dans ses apprentissages, suppose au départ, que l'on connaisse ses besoins. D'où la question : comment déceler ces besoins, différents suivant les élèves, et qui évoluent au cours de l'année ?

Dans le groupe de travail sur les modules de seconde à l'IREM de Grenoble, nous avons orienté nos recherches dans sept directions :

1. évaluation et aide à l'apprentissage,
2. "remédiation",
3. apprentissage du raisonnement,
4. travail personnel des élèves,
5. projet de l'élève et son orientation en fin de seconde,
6. aide aux élèves les plus avancés à mener une recherche,
7. aspect organisationnel des modules.

I. EVALUATION ET AIDE A L'APPRENTISSAGE

En ce qui concerne les besoins de l'élève, la solution la plus simple serait qu'il les indique au professeur ainsi que les différentes difficultés qu'il rencontre, ce qui suppose qu'il soit capable de les repérer et de les formuler. Pour cela, il nous semble souhaitable qu'il ait connaissance des savoirs et des savoir-faire qu'il doit maîtriser ainsi que des compétences évaluées. Le fascicule "Utiliser des objectifs de référence en classe de seconde" peut aider les enseignants sur ces derniers points ; en effet, on trouve dans ce dernier, une liste de savoir-faire que les élèves doivent maîtriser en fin de seconde, un exemple de compétences évaluées, ainsi que des exemples d'utilisation de ces différents documents.

Voici un exemple de pratique, celle de Raymond Chuzeville, professeur au lycée Léonard de Vinci, à Villefontaine : il donne aux élèves des points de repère sur ce qu'il leur demande de faire, afin qu'ils puissent plus facilement situer leurs difficultés et lui indiquer leurs besoins.

Dans le document "Evaluation et aide à l'apprentissage" (joint ci-après), il présente, à partir d'un exemple, le schéma "points de repère pour une tâche mathématique", la fiche d'évaluation, qui est utilisée dans ses classes. Le schéma "points de repère" permet aux élèves de prendre conscience de ce qu'ils font dans les différentes activités mathématiques et de situer leurs difficultés éventuelles. La fiche d'évaluation par compétences, utilisée lors des devoirs, a pour objectif d'indiquer, aussi bien aux élèves qu'à lui-même, les différentes compétences maîtrisées ou pas : elle peut ainsi aider à mieux situer les besoins des élèves. Par exemple, à la suite d'une évaluation, le fait de savoir que certains élèves ont des difficultés pour comprendre un énoncé, d'autres pour trouver une stratégie adaptée au *problème posé, d'autres encore pour argumenter, peut permettre de regrouper les élèves ayant les mêmes difficultés dans les heures "modules".*

II. "REMÉDIATION", RE-MEDIATION

Sans connaître les élèves que nous aurons à la rentrée prochaine, mais au vu de ceux de cette année et des précédentes, nous supposons que pour certains élèves, il faudra revenir sur des acquis de base (afin qu'ils ne soient pas complètement perdus et ne se dégoûtent pas des mathématiques) ; alors que d'autres auront des difficultés d'une nature différente (lecture d'énoncé, apprentissage de la démonstration...). De toute manière, lors des heures de "modules", les élèves seront en situation de faire, ce qui nous permettra d'analyser leurs démarches.

Activités de re-médiation en réponse à des difficultés

Les activités proposées doivent aider les élèves à déceler leurs difficultés, et de ce fait, elles doivent proposer une autre approche que les exercices répétitifs habituels.

a) Faire parler les différentes écritures mathématiques :

- écriture des nombres (document à paraître),
- donner du sens :

  aux écritures algébriques, *(cf. : fascicules "Homéopathie mathématique" de S. Gasquet publiés par le CRDP de Grenoble) ;*

  au vecteur, *(cf. : fascicule "Dessine moi un vecteur", IREM de Grenoble).*

b) Travailler sur le mot équation (sens de ce mot) :

- résoudre une équation,
- équation d'une courbe, d'une droite.

c) Faire parler un graphique.

d) Utilisation des pourcentages.

e) Lecture d'un énoncé :

- comprendre la question posée et avoir en tête : "j'aurai répondu à la question lorsque...",

- comment trier les informations données...,
- comment mobiliser ses connaissances pour trouver une stratégie adaptée au problème.

(Mettre les élèves devant des problèmes et analyser leurs démarches).

En quelques mots, donner du sens à ce que l'on fait en mathématiques, que ce soit au niveau des données ou des démarches.

III. APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT

Il est travaillé de toutes façons en dehors des "modules", et est approfondi par certains d'entre nous lors d'activités spécifiques qui abordent :

- le sens du vrai et du faux en mathématiques *(voir : "Cosmonautes" ou les règles du jeu en maths),*
- les notions:
  * d'implication,
  * d'exemple et de contre-exemple,
  * de contraposée,
  * d'équivalence,

  (documents à paraître),
- les difficultés liées à la langue pour expliciter certains raisonnements (exemples : il faut, il suffit, ou,...),
- le problème du sens donné à une propriété, à un théorème, à une formule (voir comment et quand on les utilise).

IV. LE TRAVAIL PERSONNEL DE L'ELEVE

Les heures modules peuvent être des moments où l'on revient sur le travail personnel des élèves, notamment sur :

- l'organisation du travail à la maison,
- apprendre une leçon, comment savoir et vérifier que je sais ma leçon,
- la gestion des savoirs et savoir-faire en mathématiques comme aide à l'organisation de la réflexion *(voir ce document plus loin)*,
- comment utiliser un corrigé :
  * analyser les erreurs commises et essayer de ne plus les faire ;

* faire un bilan d'un exercice ou d'un problème (analyse par objectifs) : que dois-je retenir de cet exercice, de ce problème, quelles sont les méthodes, les outils utilisés, qui sont transférables dans un autre problème (influence du contexte) ?

- prendre des notes lors d'un exercice (pourquoi a-t-on utilisé telle stratégie, tel outil ?)

V. LE PROJET DE L'ELEVE ET SON ORIENTATION EN FIN DE SECONDE

Une autre fonction des modules : aider l'élève à réussir son projet d'orientation

A partir du mois de janvier par exemple, les modules peuvent servir :

- pour certains élèves à voir si leur projet d'orientation correspond à leur goût, leurs capacités (par exemple, pour les élèves désirant aller en première scientifique, se confronter à des problèmes peut leur permettre de se situer par rapport à cette orientation),
- pour d'autres, à amener les élèves à maîtriser les savoir-faire, les compétences "indispensables" à la section de première envisagée. Par exemple, pour les élèves ne désirant pas aller en première scientifique, il n'est peut-être pas utile d'insister sur la résolution de problèmes de géométrie (recherche et démonstration), surtout s'ils ont des lacunes en algèbre (sur les graphiques, les pourcentages...). Par contre, essayer de donner aux élèves désirant aller en première S une plus grande maîtrise de l'outil vectoriel peut être envisagé *(voir : "Dessine moi un vecteur", 2ème partie, IREM de Grenoble).*

(Voir : Utilisation de l'outil vectoriel en seconde, à paraître).

VI. COMMENT AIDER LES ELEVES LES PLUS AVANCES A MENER UNE RECHERCHE

Les objectifs :

- former les élèves à d'autres tâches que celles d'exécutants, en leur donnant des idées pour traiter des problèmes non pré-digérés ;
- leur faire connaître des méthodes susceptibles de dynamiser leurs connaissances, de susciter des associations d'idées, de favoriser des approches pertinentes de divers problèmes ;
- leur faire prendre conscience que la **recherche** ne relève pas seulement de l'intuition géniale, mais que l'approche d'une situation totalement nouvelle résulte souvent de l'expérience acquise dans bien d'autres cas, apparemment dissemblables, mais desquels

il s'agit justement **d'apprendre** à dégager ce qui pourra être réinvesti dans d'autres situations.

(Voir : Une aide à la recherche : la créativité mathématique).

(Autres documents à paraître).

AUTRES ACTIVITÉS QUE L'ON PEUT PROPOSER DANS LES MODULES (notamment pour les élèves qui ont surmonté leurs difficultés).

- histoire des mathématiques,
  histoire des chiffres,
  résolution géométrique des équations du second degré, approximation de π,
  le nombre d'or,
  les solides de Platon,
- recherche de problèmes (du genre rallye mathématiques...),
- recherche d'ensemble de points.

Les exemples d'activités à proposer aux "bons" élèves ne manquent pas, nous ne nous étendrons pas sur ce point.

VII. ASPECT ORGANISATIONNEL DES MODULES

L'organisation de l'emploi du temps concernant l'enseignement modulaire aura sans doute des conséquences sur son contenu. Les trois formes d'organisation possibles favorisent différents types d'apprentissage.

A. Première forme : chaque enseignant gère lui-même son horaire, donc conçoit lui-même son enseignement en fonction de ce qu'il estime être les besoins de ses élèves ; cette forme donne beaucoup de souplesse d'organisation à l'enseignant, elle lui permet notamment d'adapter directement l'enseignement modulaire à ce qu'il fait dans sa classe, aux besoins de ses élèves à un moment donné ; malheureusement, elle ne favorise guère la prise en charge d'objectifs interdisciplinaires (objectifs communs à plusieurs disciplines : l'utilisation des graphiques...) ou pluridisciplinaires (organisation de son travail...).

B. Deuxième forme : gestion en parallèle de plusieurs groupes de disciplines différentes ; cette forme d'organisation demande beaucoup de concertation entre les enseignants pour la constitution des groupes (qui ont peu de raisons d'être complémentaires) ; elle favorise la prise en compte d'objectifs pluri et interdisciplinaires ainsi qu'un suivi des élèves par des enseignants de plusieurs disciplines (en posant toutefois le problème des disciplines où il n'y a pas d'enseignement modulaire).

C. Troisième forme : gestion disciplinaire des modules (un groupe de professeurs gère l'enseignement modulaire sur plusieurs classes) ; cette forme demande évidemment une concertation entre les enseignants, mais permet d'utiliser leur complémentarité, elle diminue les préparations des activités d'enseignement modulaire (un enseignant pouvant être plus à l'aise pour une activité que pour une autre ; par exemple, faire parler les écritures algébriques ou faire chercher des problèmes du type rallye mathématiques) ; un enseignant n'ayant pas forcément les élèves de sa classe, cela peut être un inconvénient, car il ne connaît pas ceux auxquels il s'adresse, mais aussi un avantage car une présentation différente peut les aider à mieux comprendre.

EVALUATION ET AIDE A L'APPRENTISSAGE

Je me suis posé la question suivante : comment aider mes élèves dans leurs apprentissages en mathématiques ; en particulier, comment les aider à résoudre des problèmes.

Pour cela, en partant de la principale activité faite en mathématiques, la résolution de problèmes, j'ai essayé de donner des points de repère à mes élèves, à l'aide d'un "schéma" que nous utilisons, et qui me permet de dialoguer avec eux, surtout lorsqu'ils ont des difficultés devant une tâche mathématique (schéma joint en annexe 1). De plus, ce schéma me permet d'introduire la fiche d'évaluation par compétences que nous utilisons (fiche jointe en annexe).

Afin que mes élèves s'approprient ce schéma, plutôt que d'en discourir, je leur pose un exercice dès le premier jour de la rentrée, exercice qui me permet de mettre en évidence les différents éléments qui le constituent.

Voici le compte rendu des différentes séquences de cours destinées à la présentation et à l'utilisation de ce schéma, qui se sont déroulées au début de l'année scolaire 1991-92.

PREMIÈRE SÉQUENCE

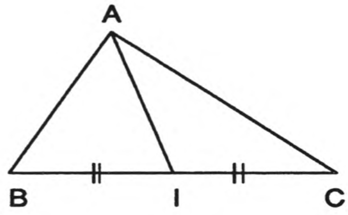
Exercice posé

ABC désigne un triangle quelconque.
Démontre que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

De plus, j'ai donné à mes élèves les consignes suivantes :
- travailler seul (sans l'aide de leurs voisins) ;
- me poser toutes les questions qu'ils désiraient, mais par écrit ;
- m'appeler lorsqu'ils auraient terminé leur démonstration.

Je leur demande de me poser des questions par écrit, pour les obliger à se centrer sur leur problème. D'ailleurs assez souvent, en écrivant leurs questions, ils trouvent seuls la réponse qu'ils cherchent.

Mes élèves ont commencé par faire une figure de la forme suivante, et très vite ils m'ont appelé pour m'indiquer qu'ils avaient terminé.



Quatre d'entre eux ont dessiné un triangle isocèle. Une fois que je leur eus souligné les mots "triangle quelconque" de l'énoncé, ils ont pris conscience qu'ils n'avaient pas tenu compte de cette partie des données.
Deux élèves seulement m'ont demandé ce qu'était une médiane. Mais une fois la question mise par écrit, l'un deux s'est rappelé ce qu'était une médiane (il a alors dessiné une figure semblable à celles de ses camarades) ; quant à l'autre élève, je lui ai dit d'essayer de me dessiner une médiane, ce qu'il est arrivé à faire (peut-être en regardant la figure de son voisin !).

Réponses des élèves à l'exercice : B et C sont équidistants de la médiane issue de A car on a BI = CI puisque [AI] est la médiane issue de A.

J'ai demandé à chacun de comparer sa "démonstration" avec celle de son voisin. Dans certains binômes qui avaient écrit la réponse ci-dessus, après une brève discussion, j'ai entendu : "ça ne doit pas être ça, car le prof nous demande de démontrer alors que l'on a BI=CI puisque [AI] est la médiane".

Ensuite, j'ai demandé à un élève qui soutenait avoir terminé de nous exposer sa solution. Après avoir fait au tableau une figure semblable à celle ci-dessus, il a redonné la réponse : B et C équidistants de la médiane issue de A car BI = CI puisque I est le milieu de [BC], car [AI] est une médiane.

Ses camarades se sont alors manifestés en lui disant : "ça ne doit pas être ça, car tu n'as pas fait de démonstration".

Tous mes élèves ont "senti" que la réponse ne pouvait être celle exposée, mais ils n'ont rien pu proposer d'autre.

Nous avons alors décidé de chercher ensemble une solution à cet exercice. Pour cela, nous avons commencé par "décortiquer" l'énoncé après l'avoir écrit à nouveau au tableau :

ABC désigne un triangle quelconque.

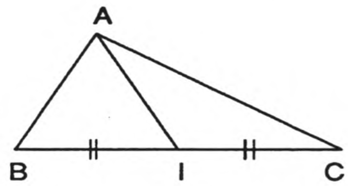
Démontrer que B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

La première ligne n'a posé aucun problème aux élèves. Ils m'ont dit : "il faut dessiner un triangle quelconque pour pouvoir démontrer ce qui nous est demandé". Il en a été de même pour le mot "équidistant". Nous avons remplacé la deuxième ligne de l'énoncé par : "Démontrer que les points B et C sont à égale distance de la médiane issue de A" (*ce qui n'a nullement débloqué la situation).*

J'ai alors demandé de dessiner une médiane dans un triangle quelconque, d'écrire ce qu'elle représentait pour eux, ainsi que ce qu'ils savaient sur les médianes d'un triangle.

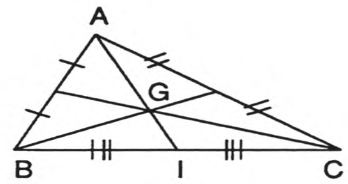
J'ai obtenu :

- une médiane est un segment qui part d'un sommet pour aller au milieu du côté opposé ;

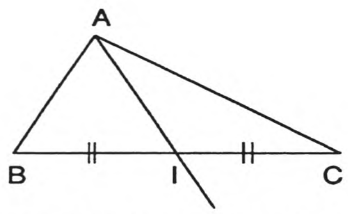


- la médiane est la longueur du segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé ;

- les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point appelé centre de gravité du triangle, point situé aux 2/3 à partir du sommet.



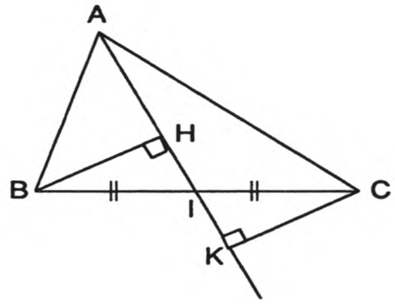
J'ai alors dessiné la figure ci-contre au tableau en leur indiquant que, dans ce problème, le mot médiane était utilisé pour indiquer la demi-droite passant par A et le milieu de [BC].



Pour aider mes élèves à maîtriser les connaissances rencontrées, je leur fais établir des fiches (appelées "figures fondamentales"), qu'ils complètent au fur et à mesure qu'ils rencontrent de nouvelles notions. Ici nous avons commencé à élaborer la fiche "médiane d'un triangle" (voir en annexe).

Une fois revue la notion de médiane, la question posée a été écrite sous la forme :
Démontrer que les points B et C sont à égale distance de la droite (AI).

Pour plus de la moitié des élèves, cela n'a rien changé : démontrer que B et C sont à égale distance de la droite (AI) correspondait toujours à BI = CI. Pour les autres, ils ont tracé les segments [BH] et [CK] perpendiculaires à la droite (AI) et ont pu ainsi essayer de poursuivre leur recherche. *Aucun élève n'est parvenu à trouver la solution.*



Il a donc fallu revoir la notion de distance d'un point à une droite avant de pouvoir écrire la question posée sous la forme :

démontrer que BH = CK

La fin de l'heure ayant sonné, j'ai demandé aux élèves d'analyser cette séquence pour le cours suivant.

DEUXIEME SEANCE

Bilan de l'analyse de la séquence par les élèves

Les élèves ont dit :

- j'ai commencé par faire un triangle isocèle, je n'ai pas fait attention à ce qui était écrit dans l'énoncé ;
- je n'ai pas pensé à tracer la droite (AI) pour médiane ;
- je pensais qu'une médiane était seulement un segment ;
- je me suis trompé dans la distance d'un point à une droite ;
- on ne nous donnait pas dans l'énoncé les segments [BH] et [CK], je ne savais pas qu'il fallait les tracer, je n'ai pas assez réfléchi ;
- vous auriez dû nous dire de tracer [BH] et [CK], puis de démontrer que ces segments étaient égaux .

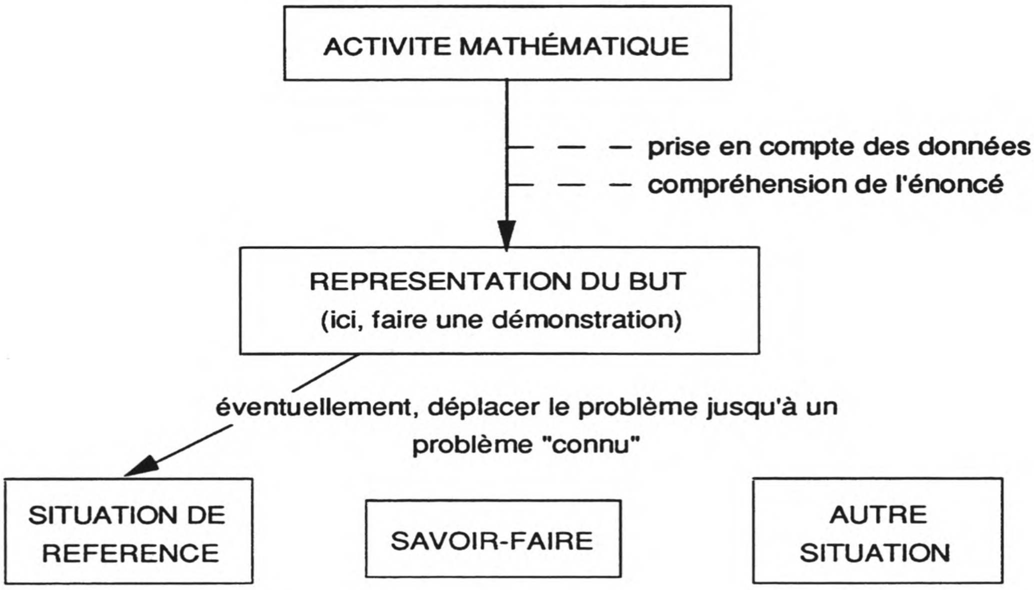
Conclusion de ce bilan fait avec la classe

Dans ce problème, il fallait :

- prendre en compte les données du problème, ne pas faire un triangle particulier ;
- "comprendre et traduire l'énoncé (en langage opérationnel, comme le dira un élève)", c'est-à-dire se ramener à démontrer que BH = CK (problème fréquent en mathématiques : démontrer que deux segments ont même longueur).

La compréhension de tout énoncé d'une tâche mathématique demande de posséder les connaissances intervenant dans les données, ici : médiane, distance d'un point à une droite.

Dans le schéma "points de repère" (annexe 1), cette phase correspond à :



La représentation du but est : "démontrer que deux segments ont même longueur".

Recherche de la "solution" : comment démontrer que BH = CK

La première réaction de mes élèves a été de dire : "on ne sait pas faire, dites-nous comment démarrer".

Nous avons donc abordé la question : comment chercher un problème ? Quelles démarches utiliser ?

Devant un problème, lorsqu'il est ramené à une situation de référence, on se demande de quels outils on dispose ou quelles méthodes on peut utiliser. En géométrie, on peut classer les outils dans quatre boîtes (cadres), à savoir :

- la boîte des configurations (c'est-à-dire des figures) ;
- la boîte du calcul vectoriel ;
- la boîte "géométrie analytique" (que nous pourrons utiliser lorsque nous aurons un repère) ;

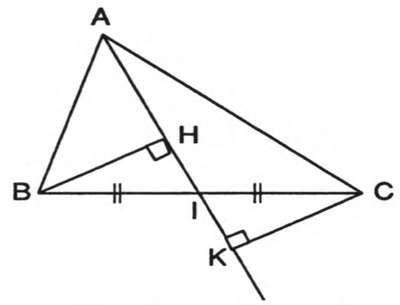
- la boîte des transformations (translations, symétries...).

La première chose à faire, lorsque l'on ne trouve pas tout de suite la solution, c'est de se demander dans quelle boîte on a le plus de chances de trouver un outil adapté au problème posé.

Nous avons éliminé de notre recherche les deux boîtes, calcul vectoriel et géométrie analytique, puis j'ai demandé aux élèves de chercher dans les deux autres boîtes des outils qui pourraient être utilisables.

Les élèves ayant sous les yeux la figure ci-contre, ont proposé pour "outils" :

- configuration de Thalès ;
- théorème de Pythagore ;
- trigonométrie ;
- symétrie de centre I.



J'ai demandé à chacun d'eux d'en choisir un, d'essayer de l'utiliser et de rédiger une démonstration correspondant à cet outil.

Beaucoup d'élèves ont essayé d'utiliser l'outil "théorème de Pythagore" et ont admis que les segments [IH] et [IK] avaient la même longueur. Certains ont écrit qu'il n'était pas utilisable car il n'était pas dit dans l'énoncé que IH = IK.

Un élève voulant au départ appliquer le théorème de Pythagore, a effectivement démontré que les segments [IH] et [IK] avaient la même longueur en utilisant la configuration de Thalès, rédigé sa démonstration, puis il m'a dit qu'il était alors inutile d'utiliser le théorème de Pythagore, qu'il suffisait de voir que le quadrilatère BHCK était un parallélogramme (puisque ses diagonales se coupaient en leur milieu) pour conclure.

Certains ont utilisé l'outil trigonométrie dans les triangles BIH et CIK en écrivant :

$$BH = BI \cos \widehat{IBH} \text{ et } CK = CI \cos \widehat{ICK}.$$

(Aucun élève n'a utilisé le sinus avec les angles opposés en I).

Deux d'entre eux ont essayé d'utiliser l'outil symétrie centrale, mais ils ne sont pas parvenus à aller jusqu'au bout de leur démonstration. *Pendant que mes élèves cherchaient une démonstration, je passais dans les rangs pour voir ce que chacun faisait.*

Nous avons ensuite mis en commun les différentes "solutions" proposées, puis nous sommes revenus sur le schéma "point de repère" pour une activité mathématique.

La compréhension de l'énoncé et sa traduction en "langage mathématique" nous a conduit à : démontrer que BH = CK (situation de référence : deux segments ont même longueur).

Pour démontrer que deux segments ont même longueur, la première chose à faire est de trouver un outil ou une stratégie adaptés au problème posé. Nous avons commencé par chercher dans quel cadre (boîte à outils) nous avions le plus de chances de trouver un outil adapté. Nous avons ainsi éliminé les deux cadres : calcul vectoriel (pas un outil utilisable à l'entrée en seconde), géométrie analytique (car aucun repère n'est donné), pour ne conserver que les cadres : configurations, transformations. Ensuite, dans chaque cadre restant, nous avons essayé de trouver un outil (une stratégie) qui pourrait convenir au problème posé. *Cette phase, qui en général, ne figure pas sur les devoirs, est la* ***phase d'anticipation***.

"Après avoir choisi un outil (une stratégie), vous passez à la ***phase d'exécution*** *(réalisation), ce qui vous amène à utiliser des savoir-faire, par exemple : calculer la longueur d'un segment dans un triangle rectangle en utilisant la trigonométrie, montrer que I est le milieu de [HK] en utilisant la configuration de Thalès".*

La ***phase "(auto)contrôle"*** *est évidemment présente dès la phase d'anticipation, pour choisir la stratégie (l'outil). Par exemple ici, pour utiliser l'outil "Pythagore", je dois "contrôler" ses conditions d'utilisation, ne pas admettre que les segments [IH] et [IK] ont la même longueur (ce que certains d'entre vous ont fait).*

L'autoévaluation *est en quelque sorte un "retour" sur le problème. Elle consiste ici, par exemple, à se dire :*

- je n'ai pas considéré la médiane comme demi-droite ;
- je ne savais pas ce qu'était la distance d'un point à une droite (ou je le savais) ;
- j'ai appliqué le théorème de Pythagore, mais j'ai admis que IH = IK ;
- j'aurais pu aussi utiliser les outils :

configuration de Thalès ;
trigonométrie dans le triangle rectangle ;
symétrie centrale ;
etc.

Faire après chaque exercice un "bilan" des connaissances, des méthodes utilisées vous aidera à les mémoriser et cela vous permettra peut-être de les utiliser dans de nouveaux problèmes".

J'ai demandé ensuite aux élèves de rédiger pour le cours suivant les différentes "solutions" de ce problème avec les différentes méthodes présentées durant le cours.

Lors d'une séance de travaux pratiques, alors que les élèves étaient en groupes de quatre, j'ai distribué à chaque groupe les photocopies de quatre copies (que j'avais choisies) en leur demandant de les étudier, de les comparer et d'essayer de définir les critères d'évaluation d'un devoir et d'une démonstration.

A la suite de ce travail de groupe, nous avons élaboré ensemble ce que j'attendrais d'eux dans leurs futurs devoirs. Nous avons notamment abordé les problèmes de présentation (marge, devoir aéré...), de communication (figure claire et "parlante", phrases en français sans symbole, utilisation du langage mathématique...), de reformulation de la question en langage opérationnel, de savoir si l'on devait énoncer la stratégie utilisée et enfin les problèmes d'argumentation.

Nous avons ensuite rédigé une démonstration répondant aux critères que nous venions de définir, démonstration que les élèves ont pu utiliser pour leurs devoirs, y compris les devoirs surveillés.

A leur demande, j'ai rédigé différentes copies utilisant les outils rencontrés, que je leur ai distribuées au cours suivant, et qu'ils ont pu utiliser lorsqu'ils le désiraient (voir annexe 4).

Je leur ai ensuite donné la fiche d'évaluation que nous allons utiliser cette année, fiche dans laquelle ils ont retrouvé les différentes compétences que nous avions mises en évidence. Puis nous avons parlé de l'utilisation de cette fiche en passant en revue les différentes rubriques (voir annexe 2).

I. CONNAITRE LES RÉSULTATS DU COURS

"Dans votre classeur, vous allez noter les résultats que vous devrez connaître et être en mesure d'utiliser". Toute activité mathématique demande un minimum de connaissances, il vous faudra donc mémoriser ces connaissances pour pouvoir les utiliser.

Lorsque vous ferez un devoir ou un exercice, il faudra prendre conscience des connaissances utilisées et lorsque vous n'aurez pas su répondre à une question, vous devrez noter les connaissances que vous auriez dû utiliser. Par exemple dans cet exercice, certains d'entre vous ne connaissaient pas la distance d'un point à une droite" ; la médiane était employée en terme de demi-droite et non de segment. Si vous faites cela, vous renforcerez vos connaissances ou vous mettrez en place celles que vous ne maîtrisez pas encore.

Dans cet exercice, pour démontrer l'égalité des longueurs des segments [BH] et [CK], vous aviez à votre disposition différents "outils", que vous connaissiez. Le fait de prendre en compte que dans tel contexte, on peut utiliser tel "outil", et pas tel autre, vous permettra de mobiliser vos connaissances (théorème de Pythagore, trigonométrie, configuration de Thalès, symétrie centrale) dans de nouveaux exercices."

II. COMPRENDRE ET TRADUIRE L'ÉNONCÉ

"Dans certains problèmes, comme c'était le cas dans celui que nous venons d'étudier, il faut commencer par comprendre ce que l'on demande de faire, traduire l'énoncé en langage mathématique (ou langage opérationnel) de manière à se ramener à un problème "connu", que l'on a déjà rencontré. En général, on "tombe" sur une situation de référence (ici, égalité de segments, calcul de distances) ou un savoir-faire ou une situation déjà rencontrée qui conduira soit à une situation de référence, soit à un savoir-faire. Je vous donnerai les listes des situations de référence et des savoir-faire.

Devant une situation de référence, nous avons vu que nous avions à notre disposition différentes "boîtes à outils", et qu'il nous fallait aller chercher dans ces "boîtes" un outil adapté à la situation rencontrée. Afin que ces situations de référence vous soient de plus en plus familières, nous prendrons une page par situation de référence, nous noterons les différents outils utilisés avec des renvois à des exercices résolus. Ainsi, si un jour vous êtes "en panne" devant la même situation de référence, vous pourrez aller chercher une aide dans la fiche correspondante ou les exercices résolus, et ceci même en devoir surveillé.

Devant un savoir-faire (par exemple, calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle en utilisant la trigonométrie), le problème est différent, vous n'avez pas à chercher, vous devez (comme son nom l'indique) savoir faire, d'autant plus que nous "décortiquerons" ensemble les différents savoir-faire et que vous aurez à votre disposition des exercices (que nous appellerons exercices de référence) qui montreront les démarches utilisées. Donc devant un savoir-faire, en cas de difficulté, vous n'aurez qu'à vous reporter à un exercice de référence pour avoir la démarche à suivre".

III. TROUVER UNE STRATÉGIE ADAPTÉE AU PROBLÈME POSÉ

"Devant une situation de référence, nous avons vu que nous avions à notre disposition différents outils ou méthodes ; vous devrez clairement indiquer l'outil et/ou la démarche utilisés. (Exemple : pour démontrer que BH = CK, je vais calculer BH et CK en utilisant la trigonométrie dans les triangles rectangles BIH et CIK, puis je comparerai les résultats obtenus). En dehors des questions où il est stipulé de faire une démonstration (dans ce cas, l'indication de la stratégie utilisée est obligatoire), lorsque je désirerai que vous indiquiez la stratégie utilisée, je le mentionnerai explicitement dans l'énoncé."

IV. RÉALISER, EXECUTER

"Une fois que vous avez proposé une stratégie, vous passez à la phase de réalisation (exécution), c'est-à-dire que vous mettez en œuvre la stratégie indiquée.

Devant un savoir-faire, vous n'avez qu'à "exécuter".

En cas d'erreurs, il vous faudra différencier les erreurs de stratégie (stratégie non adaptée au problème posé) et les erreurs de réalisation (notamment les erreurs de calcul, les théorèmes ou propriétés mal employés...)."

V. ARGUMENTER

"Vous avez pu voir, dans les différentes démonstrations que je vous ai données à analyser lorsque nous avons dégagé les critères de réussite d'une démonstration, des erreurs d'argumentation (mauvaises explications, théorèmes faux ou non adaptés, résultats admis...), des argumentations insuffisantes ou absentes.

Argumenter, expliquer ce que l'on fait et pourquoi, en indiquant les propriétés, les théorèmes, les résultats utilisés, n'est pas toujours très facile, tout au moins au début; il vous faudra donc essayer de prendre en compte ce qui est "bon", et aussi ce qui l'est moins, dans ce que vous écrirez (et direz lorsque vous serez interrogés).

De plus, le fait d'expliquer pourquoi vous utilisez telle stratégie, tel théorème ou telle propriété vous aidera à mémoriser ces différentes "notions", leur champ d'application et vous permettra ainsi de pouvoir les utiliser à nouveau à bon escient dans d'autres problèmes.

Pour essayer de progresser dans l'argumentation, vous pourrez étudier les argumentations de vos camarades (en lisant leurs devoirs), vous mettre à plusieurs pour rédiger une démonstration, expliquer à vos camarades votre argumentation, et évidemment étudier celles que nous ferons en cours. De plus, lorsque vous ferez une démonstration, vous pourrez prendre la fiche des critères que nous avons élaborée, ainsi que les exercices corrigés (dans lesquels l'argumentation est commentée) et contrôler si votre démonstration vérifie ces différents critères."

VI. COMMUNIQUER

"Vous avez ici quatre sous-rubriques que nous allons passer en revue.

Figures

Les figures doivent être claires, propres, "parlantes" ; lorsque vous introduirez sur votre figure des éléments nouveaux (points, droites,) qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé, il vous faudra les définir clairement ; par exemple, dans l'exercice, nous avons introduit les points H et K.

Courbes

Cette année, vous apprendrez à tracer des courbes à l'aide de calculatrices programmables ; pour les évaluer, je prendrai la courbe que j'aurai faite sur un transparent, et je la comparerai à la vôtre.

Présentation

Vous devrez présenter vos devoirs :
- en mettant votre nom en haut à gauche ;
- laisser une marge pour la correction ;
- aérer un minimum votre devoir ;
- écrire le plus lisiblement possible ;

- énoncer les questions auxquelles vous répondez ;
etc.

Langages

Vous devrez rédiger vos devoirs en essayant de ne pas faire trop de fautes de français, faire des phrases sans mettre d'abréviation, ni de symbole ; de plus, les notations mathématiques ont un sens précis, il vous faudra donc les employer sans vous tromper (par exemple, les notations suivantes désignent des notions différentes : AB, [AB], (AB), $\overrightarrow{AB}$)."

UTILISATION DE LA FICHE D'ÉVALUATION

"Pour chaque devoir surveillé, vous aurez à me remplir cette fiche sur laquelle vous noterez le bilan du devoir. Ce bilan sera fait à partir d'une fiche semblable, détaillée par question que nous ferons ensemble au départ, puis que vous ferez seuls. Pour constituer cette dernière fiche, vous serez amenés à analyser le contenu du devoir. Ces fiches feront partie de votre dossier d'évaluation. Je vous apprendrai à les remplir après le premier devoir surveillé, en même temps que je vous apprendrai à analyser vos erreurs et à corriger vos copies.

Lorsque vous aurez des exercices ou des problèmes à me faire, je n'accepterai pas que vous vous contentiez de me dire : "je ne sais pas faire", vous devrez m'indiquer à quel niveau dans le schéma "points de repère" vous êtes arrêtés.

Si c'est au niveau de la compréhension et traduction de l'énoncé, vous devrez m'écrire toutes les connaissances mises en jeu dans les données (par exemple dans le problème que l'on a vu : médiane, distance d'un point à une droite).

Si c'est au niveau de la situation de référence, vous devrez m'indiquer par écrit toutes les méthodes, tous les outils que l'on a déjà utilisés pour cette situation de référence et me signaler ceux (ou celles) qui parmi ceux-ci (celles-ci) vous semblent non utilisables dans l'exercice (ou le problème).

Devant un savoir-faire, comme nous l'avons vu, vous ne devrez pas être arrêtés, il vous suffira de vous reporter à un exercice de référence.

Je vous signale, que je n'admettrai pas que l'un d'entre vous arrive en cours en me disant : "je n'ai pas su faire mes exercices" alors qu'il n'a pas réellement cherché, c'est-à-dire qu'il n'a pas fait le travail indiqué ci-dessus. Si cela se produisait, sans raison valable à mes yeux, j'en aviserais vos parents (par le carnet de correspondance) ainsi que l'administration, et je vous exclurais de mon cours tant que ce travail ne serait pas fait."

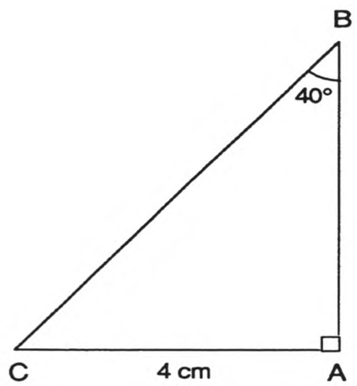
A la suite de ce premier exemple, j'ai donné un exercice à faire à mes élèves de manière à ce qu'ils s'approprient le schéma "points de repère".

Exercice

ABC est un triangle rectangle en A dont le côté [AC] mesure 4 cm et l'angle en B 40°. Calcule les longueurs des deux autres côtés.

Pour cet exercice, les élèves n'ont aucune difficulté à faire une figure correspondant à l'énoncé en utilisant une règle et un rapporteur. Quelques-uns savent répondre à la question, d'autres se contentent de mesurer les longueurs des côtés sur la figure et le reste de la classe est arrêté.

Je demande aux élèves de prendre le schéma "points de repère" et d'essayer de l'utiliser. Pour tous, la représentation du but est "calculer AB et BC", même pour ceux qui ont mesuré ces longueurs sur leur figure. Je demande à ces derniers s'ils pensent avoir répondu à la question. Leur réponse est : "je ne sais pas faire, je ne me rappelle plus comment on peut faire, alors j'ai mesuré".

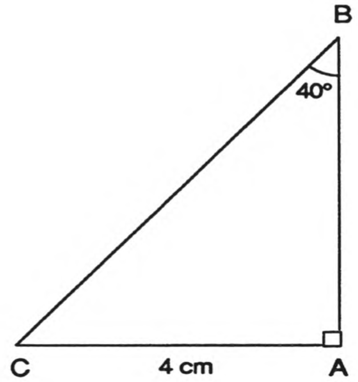


Dans cet exercice, on est ramené à : calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle dont on connaît la longueur d'un côté et la mesure d'un angle aigu. Ceci est un savoir-faire, il suffit de connaître son cours pour obtenir le résultat.

Question d'un élève : "Monsieur, lorsque l'on ne saura pas faire, il faudra écrire tout ce que l'on sait sur le triangle rectangle ?".

Réponse : "oui, tout au moins, toutes les relations qui peuvent permettre de calculer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle ; c'est une solution pour essayer de les mémoriser et voir celles qui peuvent être applicables dans l'exercice donné".

Je demande à cet élève de venir essayer de le faire au tableau. J'obtiens ainsi, après qu'il a dessiné la figure suivante au tableau.



Théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ pas applicable ici, car je ne connais que AC.

Trigonométrie :
$\sin 40° = \frac{AB}{BC}$; $\cos 40° = \frac{AC}{BC}$; $\tan 40° = \frac{AC}{AB}$;

je ne suis pas sûr pour le sinus et le cosinus, je me trompe souvent entre les deux résultats.

Après avoir fait rectifier les relations fausses par la classe, je demande à cet élève, laquelle de ces relations peut permettre de calculer AB :

$$\sin 40° = \frac{AC}{BC}; \quad \cos 40° = \frac{AB}{BC}; \quad \tan 40° = \frac{AC}{AB}.$$

Après avoir éliminé les deux premières (je ne connais pas BC), il choisit la dernière et écrit en utilisant une calculatrice : $0{,}839 = \frac{4}{AB}$, puis il s'arrête en me disant qu'il ne sait plus faire.

Le problème ici est à un autre niveau, calculer AB à partir de cette égalité, ce qui est un autre savoir-faire.

Je lui demande d'essayer de me dire ce qu'il "voit", ce qu'évoque cette écriture pour lui.

"Je vois une égalité, une fraction ; il faut que je calcule AB, c'est comme une équation où le x est en bas, je ne sais jamais faire".

Avec l'aide de la classe, nous lui expliquons comment il peut "s'en sortir", comment on résout une équation de la forme "$a = \frac{b}{x}$ ". Il arrive ainsi à calculer AB, puis sans difficulté, à calculer BC.

Nous avons vu ensuite comment l'on pouvait contrôler les résultats obtenus à l'aide de la figure, puis nous avons fait un bilan de cet exercice.

Bilan de cet exercice

"Dans cet exercice, on demandait de calculer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, connaissant un côté et un angle aigu (représentation du but), ce qui est un savoir-faire (des classes antérieures). Vous deviez donc (théoriquement) savoir faire. Ici, il n'y a pas à indiquer de stratégie, sauf si je vous demande explicitement de le faire, vous n'avez qu'à exécuter, puis contrôler votre résultat.

Si je vous donne un exercice semblable, à faire à la maison ou en classe, il y aura deux possibilités.

1- Vous saurez faire sans aucune aide (tant mieux, ce sera "normal", vous pourrez en déduire que vous connaissez votre cours).

2- Vous ne saurez pas faire, alors il vous faudra dresser la liste des connaissances sur le sujet, écrire les différents outils en rapport avec la question posée, éventuellement chercher un exercice de référence qui correspond à ce savoir-faire. Si vous demandez à un camarade la solution, il vous faudra essayer d'analyser pourquoi vous n'avez pas su faire cet exercice de manière à être en mesure de traiter des exercices semblables. Dans le cas où vous ne trouveriez pas la solution après avoir fait la liste des "connaissances" et trouvé les exercices de référence correspondants, je vous demande de me l'indiquer, afin que je puisse revenir sur le sujet et construire avec vous un ou plusieurs exercices de référence sur ce savoir-faire.

Si je vous donne un exercice semblable en devoir surveillé, il y a encore ici deux possibilités.

1. Vous savez le faire, vous contrôlez votre résultat :

- il est en accord avec les mesures lues sur la figure (tant mieux !), vous n'avez pas à m'indiquer cette vérification sur votre copie, sauf si elle est demandée ;

- il est en désaccord avec la figure, dans ce cas essayez de retrouver votre erreur, si vous n'y parvenez pas ou si vous n'avez pas le temps, écrivez sur votre copie que vous auriez dû trouver tel résultat, que vous jugez votre méthode bonne et que vous avez sans doute fait une erreur de calcul.

2. Vous ne savez pas le faire : essayez avant de passer à un autre exercice de vous remémorer les connaissances que vous pouvez utiliser (n'ayez pas peur d'écrire rapidement au brouillon les "outils" en rapport avec la question posée, cela perd peu de temps, conservez ce brouillon et essayez d'analyser ce qui vous a "manqué" pour trouver la solution). Si je ne l'ai pas interdit pour ce devoir, vous pouvez sortir les différents documents d'aide que vous avez éventuellement constitués (fiche d'aide-mémoire, exercices de référence...), mais pas le cours. *En général, durant les devoirs surveillés, sauf pour les interrogations écrites portant sur la connaissance du cours, je permets à mes élèves d'utiliser les différents documents qu'ils ont élaborés, excepté le classeur.*

Lorsque je vous rendrai vos copies de devoir surveillé, vous devrez :

- d'une part, porter sur la liste des savoir-faire, la date du D.S. avec la mention de votre résultat sous la forme suivante :

* si vous avez fait tout juste ;

\+ si vous avez fait une erreur de calcul ;

\- si vous connaissiez l'outil, mais que vous n'êtes pas arrivés à l'utiliser: par exemple, dans l'exercice traité, un élève qui serait arrivé à $\tan 40° = \frac{AC}{AB}$, d'où $0{,}839 \approx \frac{4}{AB}$ et qui ne serait pas arrivé à conclure ;

0 si vous n'avez pas démarré ou trouvé l'outil adapté ;

- d'autre part, les corriger (vous aurez à votre disposition un corrigé), analyser vos erreurs éventuelles, ainsi que ce que vous aurez fait pendant le devoir surveillé ;

par exemple, pour cet exercice, ce pourrait être :

- tout est juste, je maîtrise ce savoir-faire ;
- j'ai su faire, mais j'ai donné le résultat sous forme de valeur approchée à la place d'une valeur exacte puisque la calculatrice ne me donne qu'une valeur approchée de $\tan 40°$;
- j'ai fait telle erreur de calcul (avec l'indication de l'erreur de calcul) ;
- je connaissais le bon outil, $\tan 40° = \frac{AC}{AB}$, mais je n'ai pas su calculer BC à partir de $0{,}839 \approx \frac{4}{AB}$. Pour calculer AB, il fallait écrire $AB - \frac{4}{0{,}839} - 4{,}77$ cm ; équation du type "$a = \frac{b}{x}$" qui a pour solution $x = \frac{b}{a}$;
- je n'ai pas su faire car je n'ai pas trouvé le bon outil, je n'ai pas écrit les différents outils qui me permettaient de calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle, connaissant un côté et un angle aigu. Les outils que j'ai à ma disposition sont : ... (vous devrez écrire dans l'analyse de votre devoir les différents outils que vous connaissiez ou auriez dû connaître).

Je reviendrai plus loin sur les devoirs surveillés et sur ce que je demande à mes élèves de faire à la suite d'un devoir surveillé afin que ce dernier ne serve pas seulement à mettre une note.

Après ce travail, mes élèves m'ont demandé de "revoir" les connaissances qu'ils auraient dû maîtriser sur le triangle rectangle. C'est ce que nous avons fait ; puis je leur ai donné une liste d'exercices à faire, qui pourraient leur servir d'exercices de référence (voir fiche en annexe 5 : triangle rectangle).

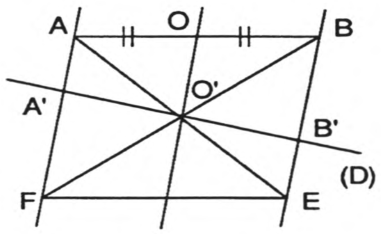
Un élève m'a demandé à quoi correspondait la mention "autre situation" sur le schéma "points de repère". J'ai alors proposé aux élèves de me faire l'exercice suivant pour le prochain cours en essayant d'utiliser ce schéma.

Exercice

[AB] désigne un segment de milieu O, (D) une droite quelconque. Par A, B et O on mène trois droites parallèles, non parallèles à (D), qui coupent (D) en trois points A', B' et O'. Les droites (AO') et (BO') coupent les parallèles menées de B et A respectivement en E et F.

Quelle est la nature de ABEF ? Démontre ta conjecture.

Bilan du travail de mes élèves



La plupart des élèves ont fait une figure semblable au dessin ci-contre et ont trouvé que ABEF était un parallélogramme, mais peu ont su le démontrer. Quelques élèves ont conclu que c'était un rectangle, après avoir fait une figure particulière, les parallèles étant perpendiculaires à la droite (AB) (sans doute à cause du quadrillage de leur feuille). Ils n'ont évidemment pas su le démontrer.

Analyse de l'exercice avec le schéma "points de repères"

"La représentation du but, trouver la nature du quadrilatère ABEF et le démontrer, ne vous pose pas de difficultés lorsque vous prenez en compte les données (ne pas faire une figure particulière, se servir uniquement des résultats, propriétés que l'on peut déduire de l'énoncé).

La compréhension de l'énoncé ne conduit ici ni à une situation de référence (mentionnée dans les objectifs de référence de seconde), ni à un savoir-faire : c'est pourquoi dans le schéma "points de repère", j'ai introduit "autre situation".

Devant ce problème, démontrer que ABEF est un parallélogramme, la première chose à faire est de se poser la question : comment peut-on démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ? Quelles **conditions suffisantes** peut-on utiliser ?"

J'ai abordé avec mes élèves la notion de condition suffisante en leur demandant de m'indiquer, parmi celles qu'ils connaissaient, celles qui pouvaient permettre de démontrer qu'un quadrilatère était un parallélogramme.

Passer en revue dans sa tête ces différentes conditions suffisantes, ou les écrire (ce qui vous sera demandé lorsque vous ne parviendrez pas à faire la démonstration), puis se demander laquelle peut être utilisable, constituent la première démarche à adopter (elle fait partie de la phase d'anticipation sur les stratégies possibles).

Certains élèves ont essayé d'utiliser la condition suffisante : "pour démontrer que ABEF est un parallélogramme, il suffit de démontrer qu'il a ses côtés opposés parallèles deux à deux", stratégie non adaptée à ce problème. Ils m'ont dit avoir essayé cette stratégie car dans l'énoncé on parlait de droites parallèles, et que l'on avait déjà [AF] parallèle à [BE].

D'autres ont essayé pour les mêmes raisons : "pour démontrer que ABEF est un parallélogramme, il suffit de démontrer que ses côtés opposés [AF] et [BE] sont parallèles et de même longueur".

Le fait de faire dire aux élèves comment ils s'y sont pris pour chercher la solution d'un problème, même s'ils ne l'ont pas trouvée, permet de montrer que l'on ne trouve pas toujours directement la bonne stratégie, et aussi de démystifier, chez les élèves qui se disent mauvais en math, la représentation : "si je ne trouve pas tout de suite, je n'y arriverai jamais, ce n'est pas la peine que je cherche".

Un élève qui était parvenu à faire la démonstration, nous a dit y être arrivé, après avoir essayé les deux stratégies précédentes, avant d'essayer de démontrer que les diagonales [AE] et [BF] avaient le même milieu (autre condition suffisante pour démontrer que l'on a un parallélogramme). *(Cette stratégie est apparemment plus coûteuse que les précédentes car elle demande deux démonstrations : O' milieu de [AE] et O' milieu de [BF]).*

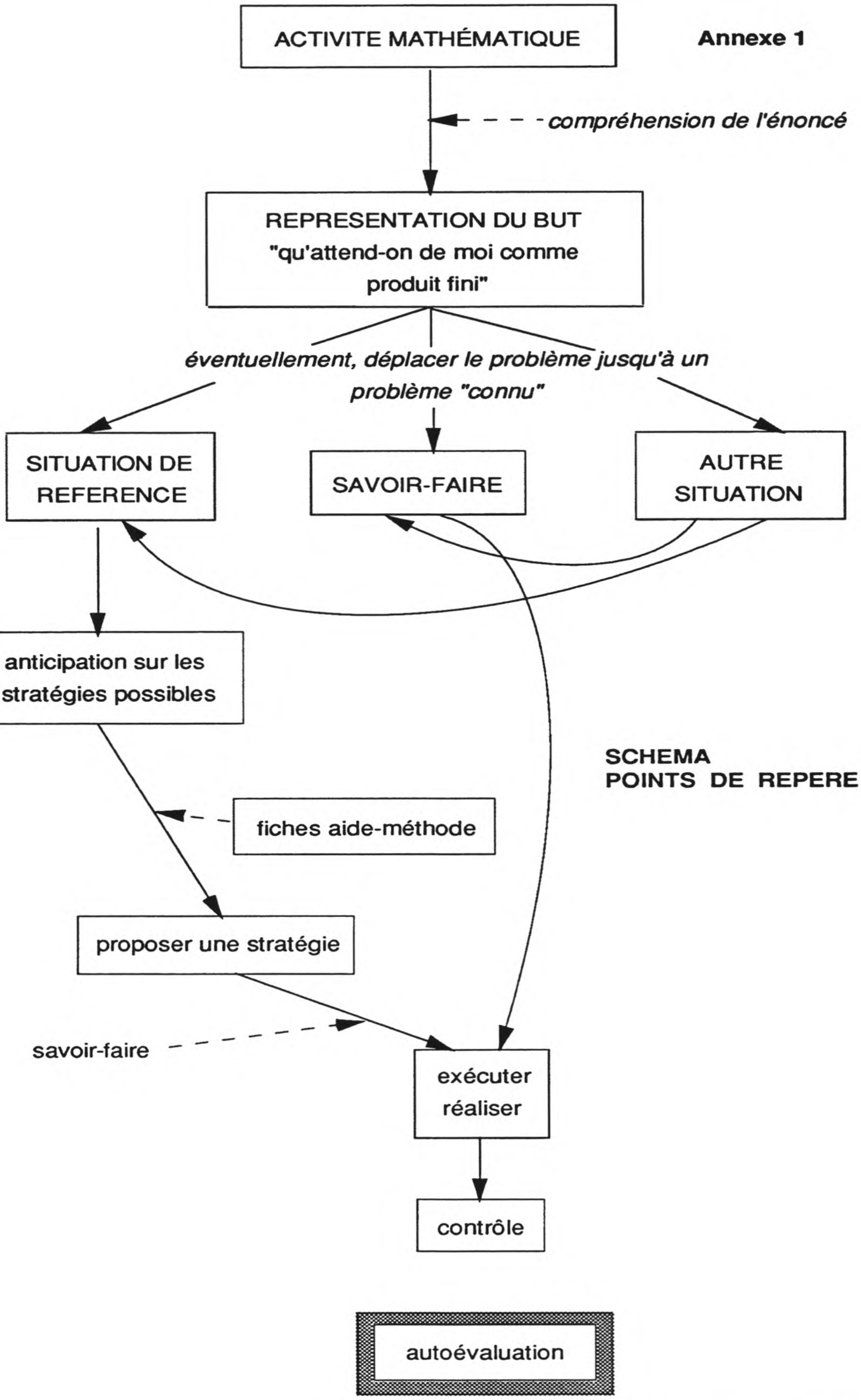
Ce problème conduit donc à trouver une stratégie adaptée, ici démontrer que O' est le milieu de [AE] et de [BF], qui nous ramène à la situation de référence "un point est le milieu d'un segment".

Pour cette situation de référence, il nous faut trouver un outil adéquat, "la configuration de Thalès" et mettre en œuvre cet outil (savoir-faire).

La phase d'autoévaluation, prise en compte de ce que l'on a fait, serait ici par exemple de se dire : "je n'ai pas pu utiliser telle condition suffisante, j'aurai dû aussi essayer d'utiliser celle-ci car dans l'énoncé on parle de milieu de segment, de droites parallèles, ce qui aurait dû me faire penser à la configuration de Thalès..."

Après chaque activité, je reviens sur le schéma "points de repère" de manière à ce que mes élèves repèrent les connaissances, les démarches utilisées, en essayant de leur montrer ce qu'ils doivent retenir de l'activité que nous venons de faire.

Dans le dernier exercice, par exemple, si la représentation du but se trouve facilement lorsque l'on prend en compte toutes les données, si on ne fait pas une figure particulière (dans ce dernier cas, on ne peut pas démontrer que l'on a un rectangle, comme le laisse supposer la figure car, dans l'énoncé, il n'est pas indiqué que les parallèles tracées sont perpendiculaires à [AB]), par contre la première difficulté est de choisir une condition suffisante adaptée au problème. Le fait d'amener les élèves à passer en revue les différentes conditions suffisantes qui permettent de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, leur permet de les mémoriser. Leur faire comprendre que l'on choisit une condition suffisante en fonction de l'énoncé, que souvent l'on est amené à essayer différentes stratégies avant d'en trouver une adaptée, peuvent développer chez eux une attitude de recherche devant un problème de mathématiques. Il est "bon" que l'élève soit persuadé qu'il est naturel d'avoir essayé les deux premières stratégies (moins coûteuses, une seule "chose" à démontrer) qui ne conduisent pas au résultat avant celle qui convient, et qu'il ne conserve pas le comportement suivant : "j'essaie, cela ne marche pas, j'abandonne, le problème est trop difficile pour moi". Il me semble que l'autoévaluation, retour sur les démarches utilisées, peut aider les élèves dans leurs apprentissages (mémorisation, compréhension, anticipation sur les stratégies...).



juin 92 - Raymond CHUZEVILLE - IREM de Grenoble - Groupe lycée -

Annexe 2

Nom Prénom Classe

Nature des travaux										
date										
note										
1. Connaître les résultats du cours										
activités numériques statistiques, fonctions										
géométrie plane										
géométrie dans l'espace										
2. Comprendre et traduire l'énoncé										
activités numériques statistiques, fonctions										
géométrie plane										
géométrie dans l'espace										
3. Trouver une stratégie adaptée au problème posé										
activités numériques statistiques, fonctions										
géométrie plane										
géométrie dans l'espace										
4. Réaliser, exécuter le plan (la stratégie) proposé(e)										
activités numériques statistiques, fonctions										
géométrie plane										
géométrie dans l'espace										
5. Argumenter										
6. Communiquer										
figures										
courbes										
présentation										
langages										

QUELLES UTILISATIONS POUR LES MODULES

La présentation du schéma "Points de repère" et de la fiche d'évaluation peut être faite dès le début de l'année, en classe entière, en travaux dirigés ou pendant les heures d'enseignement modulaire. Une fois cette présentation faite, on peut profiter des heures d'enseignement modulaire pour proposer des activités utilisant le schéma "Points de repère" ou la fiche d'évaluation (nous présenterons dans le deuxième fascicule diverses utilisations de cette dernière).

Comment peut-on utiliser le schéma "Points de repère" dans les modules ?

Voici quelques suggestions.

- Proposer des activités qui permettent aux élèves de s'approprier ce schéma, les observer et dialoguer avec eux sur son apport. Après un travail individuel sur la recherche d'un problème, on peut constituer des groupes de trois ou quatre élèves et leur demander de discuter sur les diverses démarches qu'ils ont utilisées en prenant en compte les différents éléments du schéma "Points de repère".

- Faire chercher des problèmes, dont la solution n'est pas évidente, et amener les élèves à dire à quel niveau ils sont arrêtés : compréhension de l'énoncé, connaissances non maîtrisées (exemple : la distance d'un point à une droite, dans l'exercice proposé ci-dessus), reconnaissance d'un problème déjà rencontré (situation de référence), outils et stratégies permettant de résoudre un problème de type donné (par exemple, calculer une longueur), etc.

- Faire exposer par un élève la démarche qu'il a utilisée pour résoudre un problème : pour cela, on peut constituer des groupes de trois ou quatre élèves, demander à l'un d'eux de chercher la solution d'un problème en explicitant sa démarche à ses camarades.

- Faire des bilans des connaissances présentées et utilisées durant les autres heures d'enseignement et amener les élèves à se construire des fiches:

  * figures fondamentales (exemple : médiane d'un triangle);
  * fiches outils (triangle rectangle : connaissances à maîtriser dans le

triangle rectangle et utilisations possibles de ces connaissances pour résoudre des problèmes) ;

* fiches "aide-méthode" (comment calculer une distance, comment démontrer que des points sont alignés).

- Pratiquer une pédagogie différenciée par un travail en petits groupes, sur différentes compétences que les élèves ne maîtrisent pas, en réponse aux besoins qu'ils auront formulés à partir du schéma "Points de repère" : durant une même séance d'enseignement modulaire, on peut constituer des petits groupes travaillant sur des tâches différentes, telles que :

- l'apprentissage d'une connaissance ou d'un savoir-faire non maîtrisé, par exemple, la résolution d'une équation du type $a = \frac{b}{x}$;

- la compréhension d'un énoncé et la reconnaissance d'un type de problème ;

- la représentation du but, par exemple, l'appropriation des critères de réussite d'une démonstration ;

- l'analyse en fonction du contexte, des méthodes et outils qui permettent de résoudre un problème, comme celui de démontrer que BH = CK dans l'exercice présenté ci-dessus ;

- la vraisemblance d'un résultat : on peut proposer différentes solutions à un problème et demander aux élèves d'éliminer celles qui ne peuvent convenir.

Annexe 3

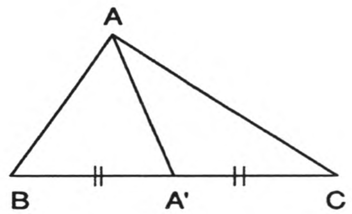
MEDIANE D'UN TRIANGLE

Le mot "médiane" d'un triangle est utilisé pour désigner aussi bien :

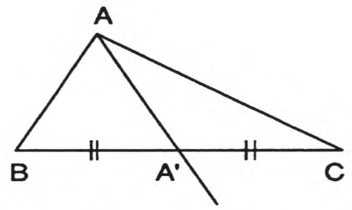
- le segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé (*sens donné par les élèves dans l'exercice) ;*

- la longueur du segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé *(sens employé lorsque l'on dit que les trois médianes se coupent en un même point situé au 2/3 de leur longueur à partir du sommet);*

- la demi-droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

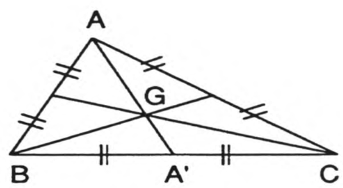


médiane issue de A



médiane issue de A

* Une médiane d'un triangle partage le triangle en deux triangles de même aire *(provenance du mot médiane). (De même la médiane d'une série statistique partage la série en deux séries de même effectif).*



$$AG = \frac{2}{3} AA'$$

* Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en G appelé centre de gravité du triangle.

(Je ferai compléter cette fiche par mes élèves lorsque nous ferons le produit d'un vecteur par un nombre pour écrire les relations vectorielles qui font intervenir le point G et lorsque nous étudierons l'homothétie).

Annexe 4

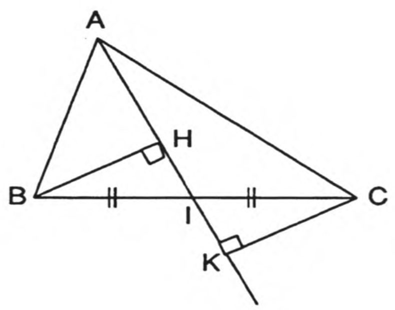
CORRIGE DE L'EXERCICE DE RENTREE

ABC désigne un triangle quelconque.
Démontrer que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

Tout ce qui est écrit en italique ne doit pas figurer dans un devoir, ce ne sont que des points de repère pour vous faire comprendre la démarche utilisée.

Démontrer que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A revient à démontrer que les segments [BH] et [CK] ont la même longueur, où H et K désignent les pieds des perpendiculaires abaissées de B et C à la droite (AI) (médiane issue de A), I désignant le milieu du segment [BC].

(J'ai traduit l'énoncé en langage opérationnel et j'ai introduit les points I, H et K que je vais utiliser).



Première démonstration

Pour démontrer que BH = CK, je vais calculer BH et CK dans les triangles rectangles BIH et CIK en utilisant la trigonométrie, puis je comparerai les résultats obtenus.

(J'ai indiqué ici la stratégie utilisée "comparer les résultats des calculs de BH et CK" et aussi l'outil utilisé pour faire ces calculs "trigonométrie dans les triangles rectangles...").

Calcul de BH.

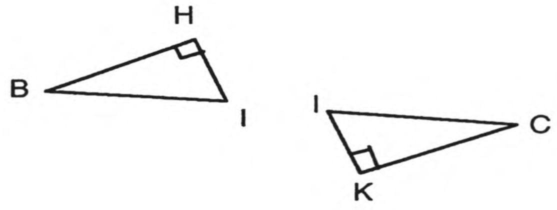
Dans le triangle rectangle BIH j'ai :

$BH = BI \cos \widehat{IBH}$

Calcul de CK.

Dans le triangle rectangle CIK j'ai :

$CK = CI \cos \widehat{ICK}$



Comparaison des résultats de BH et CK :

BI = CI car I est le milieu de [BC] ; $\cos \widehat{IBH} = \cos \widehat{ICK}$ car les angles $\widehat{IBH}$ et $\widehat{ICK}$ sont égaux (angles alternes-internes, les deux droites (BH) et (CK) étant parallèles, puisque toutes deux perpendiculaires à la droite (AI)).

Les seconds membres de BH et CK étant constitués d'éléments égaux, j'ai donc BH = CK, ce qui démontre que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

(Les connaissances utilisées ici sont les angles alternes-internes, la trigonométrie dans le triangle rectangle).

(Vous remarquerez que je conclus ma démonstration par un retour à la question posée).

Démonstration semblable : à la place du cosinus, j'aurais pu utiliser le sinus des angles opposés par le sommet $\widehat{BIH}$ et $\widehat{CIK}$, qui sont égaux. *Essaie, pour t'entraîner à rédiger, d'écrire la démonstration correspondante sans te servir du "modèle" ci-dessus.*

Deuxième démonstration

Pour démontrer que BH = CK, je vais calculer BH^2 et CK^2 dans les triangles rectangles BIH et CIK en utilisant le théorème de Pythagore, puis je comparerai les résultats obtenus.

(Ici la stratégie utilisée est : pour comparer BH et CK, on va comparer leurs carrés, comme ce sont des nombres positifs (puisque ce sont des longueurs), si les carrés sont égaux, ces nombres seront égaux ; l'outil utilisé pour calculer BH^2 et CK^2 est le théorème de Pythagore).

Calcul de BH^2.

Dans le triangle rectangle BIH, d'après le théorème de Pythagore, j'ai :

$$BH^2 = BI^2 - IH^2.$$

Calcul de CK^2.

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle CIK j'ai :

$$CK^2 = CI^2 - IK^2.$$

Comparaison de BH^2 et de CK^2.

Nous avons $BI^2 = CI^2$ puisque BI = CI (I milieu de [BC]).

Il nous reste à démontrer que $IH^2 = IK^2$, ce qui revient à démontrer que IH = IK (car dans l'énoncé ce résultat n'est pas donné). D'après la configuration de Thalès, je peux affirmer que IH = IK car I est le milieu de [BC], les droites (BH) et (CK) étant parallèles (car toutes deux perpendiculaires à la droite (AI)), le point I est aussi le milieu du segment [HK], ce qui démontre que IH = IK.

Des égalités $BH^2 = BI^2 - IH^2$ et $CK^2 = CI^2 - IK^2$,

je déduis, puisque $BI^2 = CI^2$ et $IH^2 = IK^2$, que $BH^2 = CK^2$ et,

comme BH et CK sont tous deux positifs (ce sont des longueurs), que BH = CK (deux nombres qui sont positifs et qui ont le même carré sont égaux) ;

j'ai donc démontré que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

Nous avons utilisé la propriété : deux nombres de même signe qui ont le même carré sont égaux. Nous savons que deux nombres de signes différents qui ont le même carré sont opposés. Lorsque deux nombres ont le même carré, pour pouvoir affirmer qu'ils sont égaux, il faut absolument démontrer qu'ils sont de même signe (et c'est d'ailleurs suffisant).

Troisième démonstration

Pour démontrer que BH = CK, je vais montrer que BHCK est un parallélogramme (les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur), et pour cela je vais montrer que ses diagonales [BC] et [HK] ont le même milieu I.

(Ici, j'ai indiqué uniquement la stratégie que je vais utiliser. Je suis amené à traiter un autre problème, démontrer qu'un point est le milieu d'un segment, qui est une situation de référence).

Pour démontrer que I est le milieu de [HK], je vais utiliser la configuration de Thalès.

(Ici, j'utilise un outil que j'indique : la configuration de Thalès).

Le point I est le milieu de [BC], car (AI) est la médiane issue de A; les droites (BH) et (CK) sont parallèles, car toutes deux perpendiculaires à (AI); donc d'après la configuration de Thalès, j'en déduis que I est le milieu de [HK].

I étant à la fois le milieu de [BC] et de [HK], diagonales du quadrilatère BHCK, ce dernier est un parallélogramme, donc BH = CK, ce qui démontre que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

Quatrième démonstration

Pour démontrer que BH = CK, je vais démontrer que [BH] a pour image [CK] dans la symétrie de centre I.

(Ici, l'outil utilisé est la symétrie de centre I).

Le point B a pour image C dans la symétrie de centre I car I est le milieu de [BC], puisque (AI) est la médiane issue de A.

Je dois maintenant démontrer que H a pour image K dans la symétrie de centre I.

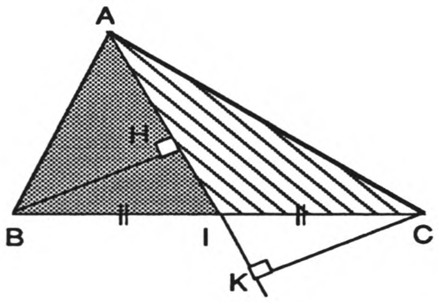
Le point H est l'intersection des droites (AI) et (BH). Dans la symétrie de centre I, la droite (AI) a pour image elle-même (car elle passe par le centre de la symétrie), la droite (BH) a pour image une droite parallèle qui passe par le symétrique de B qui est C ; donc l'image de la droite (BH) est sa parallèle passant par C, c'est donc la droite (CK). Le point H étant l'intersection des droites (BH) et (AI), il a pour image dans la symétrie de centre I le point d'intersection des droites images de (BH) et (AI), c'est-à-dire (CK) et (AI), c'est donc le point K.

Puisque dans la symétrie de centre I, l'image de B est C et l'image de H est K, nous avons BH = CK car dans une symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment de même longueur, ce qui démontre que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

(Pour démontrer que l'image de H est le point K, j'ai considéré H comme étant l'intersection de deux droites, puis j'ai démontré que le point d'intersection des images de ces deux droites est le point K. J'aurais pu démontrer que H avait pour image K en utilisant la définition de la symétrie centrale, c'est-à-dire que I est le milieu du segment [HK]).

Autre démonstration

Pour démontrer que BH = CK, je vais utiliser les aires des triangles AIB et AIC.



Les triangles AIB et AIC ont la même aire car la médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles qui ont la même aire.

Ces deux triangles ont un côté commun [AI], que je prends pour base.

aire de AIB : $\frac{AI \times BH}{2}$

aire de AIC : $\frac{AI \times CK}{2}$

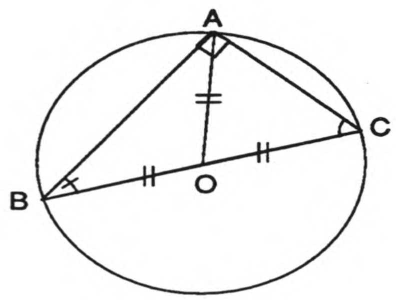
Puisque les triangles AIB et AIC ont la même aire et qu'ils ont la même base AI, les hauteurs correspondantes BH et CK sont égales, ce qui démontre que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A.

Annexe 5

TRIANGLE RECTANGLE

Figure de base

- Dans un triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse.
- Un triangle rectangle est inscrit dans un cercle qui a pour diamètre l'hypoténuse.
- Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires (leur somme fait 90°).



Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, il suffit de montrer qu'il possède l'une ou l'autre des propriétés suivantes:

- il a un angle droit ;
- deux angles sont complémentaires ;
- une médiane est égale à la moitié du côté correspondant ;
- il est inscrit dans un cercle admettant un côté pour diamètre ;
- le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (réciproque du théorème de Pythagore).

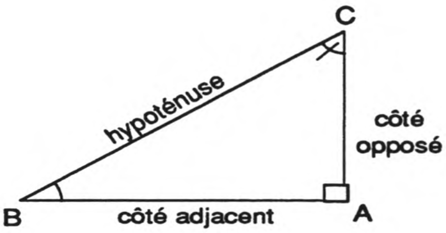
Calcul des longueurs des côtés d'un triangle

** Dans un triangle rectangle, dès que je connais la longueur de deux côtés, je peux calculer la longueur du troisième côté.*

Par application du théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

** Dans un triangle rectangle, dès que je connais un côté et un angle aigu, je peux calculer les longueurs des autres côtés.*

Par application des relations trigonométriques :



sinus = $\dfrac{\text{c. opposé}}{\text{hypoténuse}}$;

ex. $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$

cosinus = $\dfrac{\text{c. adjacent}}{\text{hypoténuse}}$;

ex. $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$

tangente = $\dfrac{\text{c. opposé}}{\text{c. adjacent}}$;

ex. $\tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$

Détermination des angles d'un triangle rectangle

* Dans un triangle rectangle, dès que je connais la mesure d'un angle aigu, je peux déterminer la mesure de l'autre.

* Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle me permettent de déterminer la mesure d'un angle aigu dès que je connais les longueurs de deux des côtés (les résultats donnés par la calculatrice ne sont souvent que des valeurs approchées).

EXERCICES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

1. ABC est un triangle tel que AB = 5, BC = 6 et AC = $2\sqrt{3}$.
Les mesures sont en centimètres.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

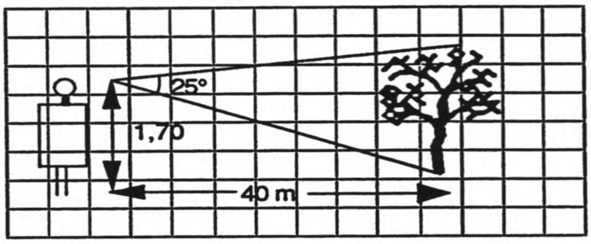
2. ABC désigne un triangle rectangle en A. Les longueurs sont données en centimètres.
a. Calcule BC sachant que AB = 4 et AC = 7.
b. Calcule AC sachant que AB = 4 et BC = 7.

3. Le triangle ABC est rectangle en A et AB = 4, $\widehat{ABC} = 40°$.
Calcule AC, BC.

4. Le triangle ABC est rectangle en A et on a AB = 4 et BC = 5.
Les données sont en centimètres.
Détermine à 10^{-1} près par excès des valeurs approchées (en degrés) des angles aigus du triangle ABC. Calcule l'aire du triangle ABC.

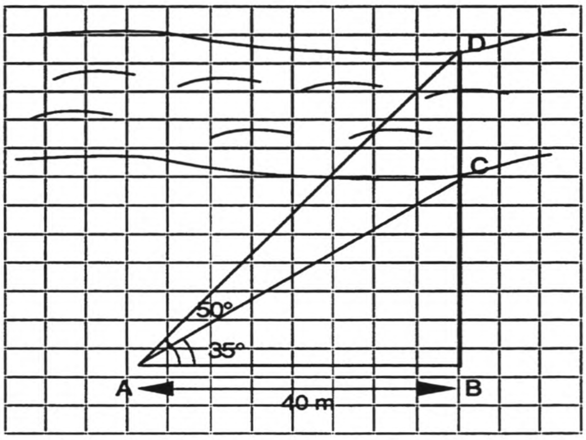
5. Une personne se trouve à 40 m d'un arbre (vertical). Ses yeux sont à 1,70 du sol (supposé horizontal). L'arbre est vu sous un angle de 25°.

Quelle est la hauteur de l'arbre ?



6. La présence d'un marécage rend inaccessible les berges d'une rivière. Les points C et D sont visés à partir des points A et B.

Calcule la largeur de la rivière à partir des mesures indiquées sur la figure.



7. Calcule la longueur de la diagonale d'un carré de côté a. En déduire les valeurs exactes de sin 45°, cos 45° et tan 45°.

8. Détermine la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté a.
En déduire sin 30°, cos 30°, sin 60°, cos 60°.

9. a) L'unité étant le centimètre, construis un triangle ABC rectangle en A, de hauteur [AH], sachant que BC = 5 et AH = 1.

b) Donne l'expression de cos $\widehat{ABC}$ en fonction de AB ;
dans le triangle ABH,
dans le triangle ABC.

c) Déduis du b) la longueur du segment [AB].

d) Généralisation : ABC désigne un triangle rectangle en A, de hauteur [AH], essaie de trouver en utilisant la même méthode que ci-dessus, une relation entre BA^2, BH et BC.

CORRIGES DES EXERCICES

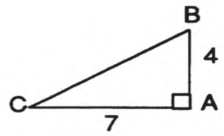
1. *Comme on connaît les longueurs des trois côtés, on va "voir" si ces trois longueurs vérifient la relation de Pythagore.*

$AB^2 = 25$; $BC^2 = 36$ et $AC^2 = 12$.

$AB^2 + AC^2$ est différent de BC^2, donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

Lorsque l'on veut essayer de démontrer qu'un triangle est rectangle en appliquant le théorème de Pythagore, on commence par regarder quel est le plus grand côté, ici BC, avant de calculer la somme des carrés des longueurs de deux côtés et de comparer cette somme au carré de la longueur du plus grand côté.

2. *Comme l'on connaît les longueurs de deux côtés du triangle rectangle, on va calculer la longueur du troisième côté en appliquant le théorème de Pythagore.*



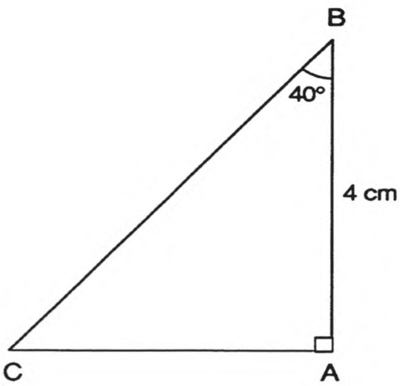
a). $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

$BC^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ d'où $BC = \sqrt{65}$.

b). $AC^2 = BC^2 - AB^2$.

$AC^2 = 7^2 - 4^2 = 33$ d'où $AC = \sqrt{33}$.

3. *Comme l'on connaît un côté et un angle, on peut calculer les longueurs des autres côtés en appliquant les formules de trigonométrie dans le triangle rectangle (après avoir repéré les différents côtés par rapport à B).*

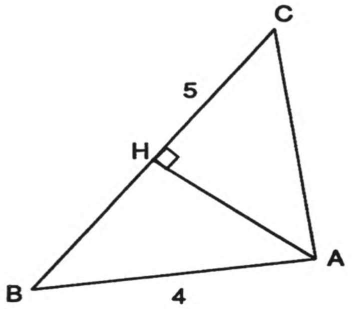


$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{4}$,

d'où $AC = 4 \times \tan 40° \approx 3,36$.

$AB = BC \times \cos 40°$ d'où $BC = \frac{4}{\cos 40°} \approx 5,22$.

4. *La relation trigonométrique faisant intervenir AB et BC est :*



AB = BC x cos $\widehat{B}$ d'où cos $\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$.

$\widehat{B} \approx 36{,}87°$, un encadrement de $\widehat{B}$ est :

$36{,}86° < \widehat{B} < 36{,}87°$.

La valeur décimale approchée par excès à 10^{-1} près de $\widehat{C}$ est 36,9°.

AB = BC x sin $\widehat{C}$ d'où sin $\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$.

$\widehat{C} \approx 53{,}13°$, un encadrement de $\widehat{C}$ est :

$53{,}13° < \widehat{C} < 53{,}14°$.

La valeur décimale approchée par excès à 10^{-1} près de $\widehat{C}$ est 53,2°.

Nota : on aurait pu aussi déterminer cette valeur approchée de l'angle en C à partir de la valeur approchée de l'angle en B (si l'on prend la valeur approchée par excès de l'angle en B, on obtient alors la valeur approchée par défaut de l'angle en C).

L'aire du triangle ABC peut être calculée par $\frac{BC \times AH}{2}$

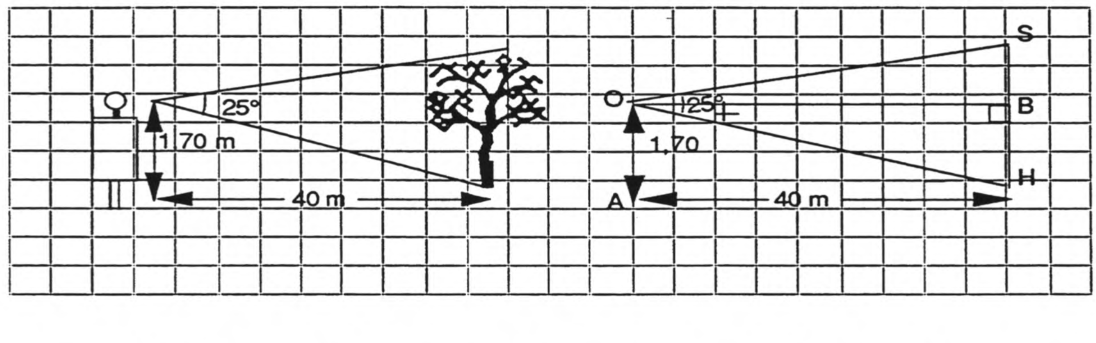
Or AH = AB x sin $\widehat{B}$, d'où :

$$\frac{BC \times AH}{2} = \frac{5 \times 4 \times 0{,}6}{2} = 6.$$

L'aire du triangle ABC est de 6 cm^2.

Remarque : nous aurions pu aussi calculer l'aire du triangle ABC avec la relation $\frac{AB \times AC}{2}$, après avoir calculé AC.

5. Représentons la situation par une figure.



Pour déterminer la hauteur de l'arbre, il suffit de calculer BS. [BS] est un côté du triangle BOS rectangle en B dont on connaît BO et dont on va déterminer l'angle $\widehat{BOS}$, ainsi on calculera BS à partir de la relation tan $\widehat{BOS} = \frac{BS}{BO}$, d'où BS = BO x tan $\widehat{BOS}$.

$$\widehat{BOS} = \widehat{HOS} - \widehat{HOB}.$$

Or $\widehat{HOB} = \widehat{OHA}$ (angles alternes-internes).

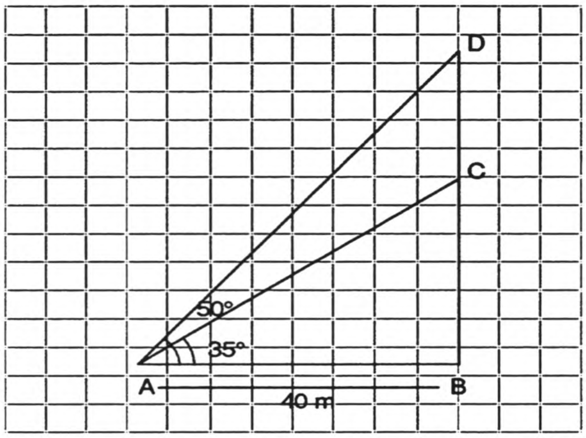
On peut déterminer l'angle $\widehat{OHA}$ dans le triangle OHA rectangle en A dont on connaît deux côtés :

$$\tan \widehat{OHA} = \frac{OA}{AH} = \frac{1,7}{40} \text{ d'où } \widehat{OHA} \approx 2,4336°.$$

D'où $\widehat{BOS} \approx 22,5664°$ et BS = BO x tan $\widehat{BOS} \approx 16,6$ m.

La hauteur approximative de l'arbre est de 18,3 m (1,7 + 16,6).

6. La largeur de la rivière est égale à CD. Pour calculer CD, il suffit de calculer BD et BC car on a : CD = BD - BC.



Calcul de BD dans le triangle rectangle ABD : on connaît l'angle aigu de sommet A, le côté adjacent AB et on cherche le côté opposé BD ; on va donc utiliser la tangente de l'angle en A.

$\tan \widehat{A} = \frac{BD}{AB}$,

d'où BD = AB x tan $\widehat{A}$ = 40 x tan 50°.

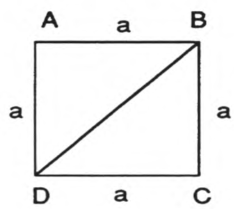
BD ≈ 47,7 m.

On calcule de même BC dans le triangle rectangle ABC :

$$\tan \widehat{A} = \frac{BC}{AB}, \text{ d'où } BC = AB \times \tan \widehat{A} = 40 \times \tan 35° \approx 28 \text{ m}.$$

La largeur de la rivière est voisine de 19,7 m (47,7- 28).

7. Pour calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté a, il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABD.



$BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

d'où $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

La longueur de la diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$.

Dans le triangle rectangle ABD, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ADB}$ ont tous deux pour mesure 45°, on a :

$$\sin \widehat{ABD} = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De même :

$$\cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Résultats à connaître : $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB} = 1.$

Rappel : tangente $= \frac{\text{sinus}}{\text{cosinus}}$.

8. Dans le triangle rectangle ABH, on a :

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

d'où : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\sin \widehat{ABH} = \sin 60° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \widehat{ABH} = \cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$

$\sin \widehat{BAH} = \sin 30° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$

$\cos \widehat{BAH} = \cos 30° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

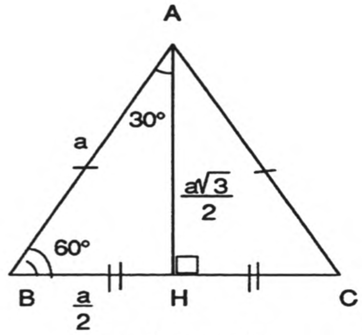


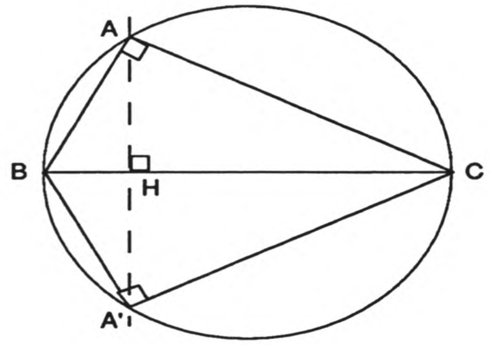
figure à connaître

Résultats à connaître : $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

9. a) Le triangle ABC étant rectangle en A, il est inscrit dans un cercle admettant l'hypoténuse [BC] pour diamètre. Le point A est donc sur le cercle de diamètre [BC].

Pour construire le triangle ABC, je commence par construire un segment [BC] de longueur 5 cm, puis je trace le cercle de diamètre [BC].

H étant le pied de la hauteur issue de A, sommet de l'angle droit, H est un point du segment [BC] situé à 1 cm de B. Je place H élément de [BC] tel que BH = 1, puis je mène la perpendiculaire en H à (BC), j'obtiens ainsi deux points d'intersection avec le cercle de diamètre [BC], ce sont les sommets A et A' des triangles rectangles cherchés.



b) Dans le triangle rectangle ABH, on a : $\cos \widehat{ABH} = \cos \widehat{ABC} = \frac{BH}{AB}$.

Dans le triangle rectangle ABC, on a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$.

c) De la question précédente, on déduit : $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$ d'où $AB^2 = BH \times BC$, relation qui permet de calculer AB.

$AB^2 = 1 \times 5 = 5$ d'où $AB = \sqrt{5}$.

d) En utilisant la figure ci-contre pour calculer $\cos \widehat{ABC}$ dans les triangles rectangles ABH et ABC, on a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{BH}{AB}$ et $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$.

De ces deux égalités, on déduit :

$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$ d'où : $AB^2 = BC \times BH$.

"Cosmonautes" ou les règles du jeu en maths

"40% d'élèves qui aiment les maths et 70% qui aiment l'économie, mais c'est complètement faux, votre énoncé !" s'indigne Alfred.

Objectifs de cette activité

- faire prendre conscience aux élèves de certains dysfonctionnements ;
- servir de référence tout au long de l'année scolaire, à chaque répétition des erreurs dont il est ici question ;
- dégager la nécessité d'avoir des règles en mathématiques et de s'y tenir ;
- montrer des cas où la réponse à une question donnée est "on ne peut pas savoir".

Public élèves en difficulté sur certains points de raisonnement ; d'ailleurs même les meilleurs présentent, à un moment ou à un autre, des ratés comme Alfred.

La trame de l'activité

Une règle générale est énoncée aux élèves.

> Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu au Palais de la Découverte à Paris. Pour soigner leur présentation, les cosmonautes américains ont décidé de s'habiller tous de la même façon : chemise rouge, cravate et pantalon bleus.

Quatre questions sont ensuite posées aux élèves : elles sont des cas particuliers auxquels on pourrait répondre si on "pouvait aller voir" ; mais comme c'est impossible, on est obligé d'utiliser la règle pour répondre, donc de confronter le cas particulier à la règle générale.

Les questions 1 et 3 sont jouables : la règle s'applique. Par contre les questions 2 et 4 ne le sont pas : la règle ne s'applique pas, et l'on ne peut pas aller voir au Palais de la Découverte, donc on ne peut pas répondre.

Question 1 : Dans le hall d'entrée, quelqu'un porte une chemise blanche. Est-il un cosmonaute américain ?
Question 2 : Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?
Question 3 : Dans le hall, on voit un cosmonaute américain en manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?
Question 4 : A côté de lui, quelqu'un porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?

Quelques extraits d'une séance dans une classe de seconde : cette activité, pratiquée plus habituellement au collège, a été expérimentée par Michèle Gandit dans une classe de seconde en 1990 (voir ci-dessous les remarques sur la gestion de la classe au cours de l'activité).

Après la lecture de la règle et de la première question, un temps de réflexion a été laissé à la classe, après lequel chaque élève a inscrit sa réponse sur sa feuille, suivie d'une courte justification. Le professeur a noté au tableau les réponses : 1 OUI ; 26 NON ; 1 AUTRE , puis il interroge l'élève (élève 1) qui a voté "autre" sur la raison de sa réponse.

Elève 1 : "Il peut être américain et avoir une chemise blanche".
Elève 2 : "C'est impossible ! on a une règle générale ; tous doivent être habillés avec une chemise rouge !"
Professeur qui s'adresse à E1 : "Oui, alors pourquoi as-tu répondu autre ?"
Elève 1 : "Il s'en moque de la règle!"
Elève 3 : "Il peut être américain et pas cosmonaute américain !"
Elève 4 : "Cela se passe dans le hall d'entrée, alors il ne s'est pas encore changé !"
Plusieurs élèves : "Il peut être sourd, ou daltonien ; il n'était pas là au moment de la décision ; il n'a pas de chemise rouge !"
Professeur : "Vous avez voté NON et vous argumentez dans une autre direction ?"
Elève 1 : "Même si c'est un cosmonaute américain, il n'a peut-être pas voulu suivre la règle ! C'est pas une obligation !"
Elève 2 : "C'est la règle !"
Un autre élève : "On ne nous dit pas quel jour ça se passe ; c'est peut-être pas le jour de la réunion ! C'est peut-être pas le bon hall d'entrée !
Un autre élève : "Il n'est pas invité à la réunion ; il est juste venu pour voir !"
Elève 2 : "Mais enfin ! C'est logique ! On a une règle : américain-chemise rouge Si on sort de la logique, on doute, on se pose des questions ! On dit qu'il porte une chemise blanche,

tous les cosmonautes américains ont une chemise rouge, donc forcément, c'est pas un cosmonaute américain !"
Un autre élève : "On s'invente plein de règles à côté alors qu'au départ, on avait une règle générale !"

Il est loin d'être clair pour tous les élèves qu'il est indispensable de suivre la règle du jeu, sans en imaginer d'autres !

Au vote de la deuxième question : 2 OUI ; 6 NON ; 20 AUTRE !
Quelques arguments de ceux qui ont voté OUI :

- les Russes peuvent avoir une cravate et un pantalon de la même couleur que les américains ;
- si on suit la règle générale, seulement les américains portent une chemise rouge (*un autre élève répond qu'ils ne le disent pas !)* ;
- les Russes sont censés ne pas suivre la même règle que les Américains.

A partir de la question 3 s'ajoute une quatrième case pour les réponses possibles : c'est ON NE PEUT PAS SAVOIR.

A la question 4, le vote donne : 11 OUI ; 0 NON ; 16 ON NE PEUT PAS SAVOIR ; 2 AUTRE.

Même si cette activité peut sembler naïve à traiter avec certains élèves, elle est loin d'être inutile pour d'autres ; elle est même fondamentale afin de leur faire prendre conscience de leurs dysfonctionnements : beaucoup d'élèves de cette classe de seconde ne s'étaient jamais rendu compte qu'en maths, on fonctionnait avec des règles du jeu, souvent restées implicites. Quelle image pouvaient-ils bien avoir des mathématiques ?

Mais quels sont ces ratés qui relèvent de cette absence de prise de conscience ?

Quelques constats : en direct de nos classes !

- A la lecture d'un énoncé commençant par "étant donné un triangle ABC...", comment réagit bien souvent un élève faible ? Il commence par faire le dessin d'un triangle rectangle, ou isocèle, ou... ! Il se trompe ensuite dans son raisonnement parce qu'il utilise les propriétés particulières de son triangle.

La règle du jeu de l'énoncé lui demandait de travailler avec n'importe quel triangle, et lui, il a raisonné dans un cas particulier. Quel commentaire voit-on alors souvent de son travail : "tu as traité un cas particulier !" C'est tout ! Mais peut-être est-il possible d'en faire une autre analyse ?

- "Dans une classe de première F1, 88% des élèves déclarent aimer la mécanique, 20% les maths et 15% les maths et la mécanique", dit le maître.

"Mais votre énoncé est faux, cela fait plus de 100%", ajoutent aussitôt Ulysse et son voisin, approuvés par une bonne partie de la classe.

Il apparaît ici la nécessité d'une mise au point à propos d'un sous-entendu en mathématiques : alors que dans la vie courante, si on ne dit pas tout, c'est pratiquemment considéré comme un mensonge (c'est le principe du maximum d'information qui fonctionne) ; en maths, lorsqu'on dit que 20% aiment les maths, on ne dit pas si ces 20% aiment aussi la mécanique : peut-être oui pour certains, peut-être non. Il s'agit là d'une règle du jeu implicite.

On peut illustrer cette différence par l'exemple suivant : Alfred a emprunté la voiture de son père et a eu un accident ; lui est sain et sauf, mais la voiture est inutilisable. Alfred va voir son père et lui dit que l'aile avant droite est abîmée : du point de vue de la logique mathématique, c'est VRAI ; mais son père ne va-t-il pas considérer cette affirmation comme un mensonge ?

- En géométrie dans l'espace, combien d'élèves se trompent lorsqu'il s'agit de voir que des droites ne sont pas coplanaires, alors qu'elles "se coupent" sur le dessin en perspective cavalière ?

Encore une fois, c'est la règle "du jeu" qui n'est pas comprise.

- Un dialogue courant à propos de la courbe représentative de la fonction "inverse" dans un repère cartésien du plan :

- "Quand les abscisses augmentent, la courbe se rapproche, en descendant tout le temps, de l'axe des abscisses."
- "Il y a un endroit où elle va couper cet axe ! C'est où, Madame ?"
- "$\frac{1}{x}$ peut-il être nul ?"
- ?
- "1 divisé par un nombre, cela peut-il donner 0 ?"
- "Non", répond Ulysse.
- "C'est pas logique !", s'écrie Alfred.

On pourrait citer bien d'autres cas encore, où les élèves se trompent *parce qu'ils ne savent pas appliquer la règle du jeu*. Certes cette activité ne pourra pas éliminer définitivement les erreurs mentionnées ci-dessus, mais elle servira de référence tout au long de l'année scolaire, chaque fois que la classe remarquera qu'un élève invente de nouvelles règles.

Gestion de cette activité

Les principaux buts fixés ici étant de **faire sortir** les sous-entendus utilisés par les élèves, qui viennent de l'usage courant, et de leur montrer qu'ils sont hors jeu en maths, il est **indispensable** de gérer cette activité sous forme de débat (se référer au livre de M.Legrand intitulé "Enseigner autrement en DEUG A première année "- IREM de Grenoble- qui malgré son titre est tout à fait utilisable pour la pratique du débat scientifique au lycée.)

Simplement une remarque essentielle : au sein de la classe, il doit être reconnu à chaque élève le droit d'avoir une opinion "erronée" et de la faire évoluer au cours du débat, sans qu'il lui soit fait aucune remarque désobligeante.

L'activité "Circuit", pratiquée en classe entière, permet de mettre au point les règles du débat scientifique en cours de maths.

Les questions sont étudiées, l'une après l'autre, de la manière suivante :

pour chacune d'elles, un temps de réflexion est accordé aux élèves, qui doivent se prononcer par écrit : oui, non, autre réponse, avec une phrase de justification. Chacun doit ensuite voter et les résultats du vote sont inscrits au tableau, dans les cases : oui, non, autre. Il s'ensuit un débat, où chacun essaie de convaincre la classe que son vote est le bon. Parfois un nouveau vote est nécessaire ! Le maître n'intervient absolument pas au cours du débat, en tant que "professeur qui sait", il s'occupe seulement de la gestion du débat.

Par contre, il reprend son rôle de spécialiste pour **l'institutionnalisation,** étape indispensable, qui suit ce débat; elle est à faire à deux niveaux :

- au niveau de la réponse à la question posée : certains élèves peuvent se perdre au cours du débat et ne plus savoir quelle est la réponse exacte ; celle-ci doit apparaître clairement, même si elle n'a aucune importance pour l'activité mathématique ;
- au niveau de la règle du JEU SCIENTIFIQUE, qui est l'objectif pousuivi ici, et que les élèves prennent en note.

Ainsi, pour la question 1 :

en maths, il y a toujours des règles, qui servent à prendre des décisions, quand il y a un doute, ou quand on ne peut pas vérifier directement.

pour la question 2 :

on ne se donne pas le droit d'inventer de nouvelles règles (à moins que l'on se soit tous mis d'accord pour changer les règles, mais alors, c'est un autre jeu).

pour la question 3 :

dans une situation donnée, lorsque les hypothèses sont celles de la règle, il n'y a pas d'autre réponse possible que la conclusion dictée par la règle.

Il doit être clair pour les élèves que cette activité n'est qu'un moyen de leur faire comprendre :

- la nécessité de se donner des règles en mathématiques, qui doivent être ou avoir été clairement explicitées : si on ne respecte pas strictement les règles fixées par la communauté scientifique, toute activité mathématique est impossible ; par ailleurs, seules ces règles permettent de décider ou de prévoir lorque l'on ne peut pas vérifier directement sur les objets que l'on étudie ;
- l'existence de cas où certaines règles ne s'appliquent pas : la seule réponse possible est alors "on ne peut pas savoir" ; ainsi on "a le droit" de ne pas savoir répondre à certaines questions et de le dire ;
- que toute modification de ces règles ne peut se faire qu'avec l'accord de la communauté où se situe le débat ;
- la règle du jeu mathématique, qui est celle du respect absolu de l'hypothèse.

GESTION DE SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE EN MATHEMATIQUES COMME AIDE A L'ORGANISATION DE LA REFLEXION

OBJECTIFS

1) Aider les élèves à prendre conscience que les solutions à un problème mathématique ne sont pas réservées à une "élite" et que la recherche de la solution passe par l'organisation des savoirs et des savoir-faire et par la recherche et le choix de méthodes.

2) Aider les élèves à prendre conscience de leurs difficultés à mobiliser leurs connaissances et de la nécessité de les organiser.

3) Présenter une manière d'organiser les savoirs et les savoir-faire de façon à les rendre plus fonctionnels et efficaces.

4) Faire réfléchir les élèves sur la façon de choisir une méthode.

LE CONSTAT

Chez certains élèves les nouvelles connaissances en mathématiques s'organisent presque naturellement par rapport aux anciennes et ils ont peu de problèmes pour les mobiliser.

Chez d'autres élèves les connaissances s'empilent sans qu'ils les situent par rapport aux anciennes. Ils ne voient ni l'unité des différentes parties des mathématiques ni leur spécificité. Aussi, que se passe-t-il lorsqu'ils cherchent la solution à un problème ?

- Certains disent ne pas arriver à démarrer et cela malgré les connaissances qu'ils ont.
- D'autres essayent de mettre en œuvre la méthode qui leur vient en premier à l'esprit et, si ce n'est pas la bonne, ils se découragent et arrêtent de chercher.
- Rares sont ceux qui font une recherche systématique des méthodes qu'ils connaissent pourtant.

En effet, comment procéder ? Ces méthodes sont-elles décrites dans le cahier de cours ? Lequel ? De l'année présente ? Des années antérieures ? Chercher quoi ? Et où le chercher ?

UNE STRATEGIE POUR ATTEINDRE LES OBJECTIFS

- Proposer aux élèves la recherche d'un problème pas trop simple, de façon à ce qu'un maximum d'élèves se sente concerné, qu'il est possible de résoudre à partir de plusieurs méthodes.
- Discuter avec eux de leur façon de mobiliser les connaissances.
- Réfléchir à une organisation possible de leurs savoirs et savoir-faire.

EXEMPLE D'ÉNONCÉ PROPOSÉ A DES ÉLÈVES DE SECONDE n'ayant pas travaillé en analytique :

ABCD est un rectangle tel que :
AB = 5 et AD = 3. Les points E et F sont définis par les égalités :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

La parallèle à (AB), qui passe par F, coupe (BC) en G.
La parallèle à (AD), qui passe par E, coupe (DC) en H.
Les droites (FH), (AC) et (EG) sont-elles concourantes ?

DÉROULEMENT DE LA SÉANCE

Les élèves cherchent d'abord individuellement, puis avec leur voisin, pendant une demi-heure environ.

Ensuite, je leur demande d'écrire comment ils se sont organisés pour chercher.

Ces différentes façons sont exposées à la classe et après avoir précisé les deux questions :

1) que dois-je faire pour résoudre le problème (démontrer que trois droites sont concourantes) ;

2) de quels outils je dispose pour le faire ;

nous dressons la liste des stratégies possibles. Mais la mobilisation des connaissances "droites dans un triangle (médianes - hauteurs - médiatrices)" ne nous permettant pas d'avancer, je propose de reformuler la première question. Nous arrivons à "démontrer que trois points sont alignés (le point d'intersection de deux des trois droites et deux points de la troisième droite)".

Nous recommençons l'inventaire des outils disponibles (angles - transformations - vecteurs colinéaires - analytique).

Au passage nous constatons qu'une reformulation peut ouvrir de nouveaux horizons.

Le choix de l'analytique est fait ; la recherche de la solution sera poursuivie à la maison.

Le reste du temps de cette séance de deux heures est consacré à dégager quelques idées sur une possibilité d'organiser les connaissances en mathématiques.

- Les savoirs et savoir-faire peuvent être organisés en fonction de leur utilisation ultérieure, c'est-à-dire par rapport à des situations qui seront fréquemment rencontrées.

- Il peut être utile que les élèves élaborent eux-mêmes des documents regroupant les outils disponibles en rapport avec une problématique. On peut se demander s'il ne serait pas préférable de leur donner ces documents. Ils seraient mieux présentés, plus complets. Le danger est que les élèves ne se les approprient pas. Posséder une "boîte de méthodes" ne suffit pas. Encore faut-il savoir choisir intelligemment. Je pense que, lorsque l'élève construit son document, la réflexion qui a lieu lui permettra par la suite de l'utiliser plus efficacement. Il aura choisi le vocabulaire qui lui convient. Il notera certaines remarques en fonction de son savoir-faire.

- Ces documents doivent être classés tout au long de la scolarité. Leur rédaction n'est pas définitive. Elle peut évoluer d'année en année. Ils doivent être actualisés en fonction du vécu mathématique. (Par exemple, la résolution d'une équation du second degré en première par rapport à la classe de seconde).

La séance suivante est consacrée à l'écriture du premier document intitulé "Trois points alignés dans le plan"

Je fais remarquer aux élèves qu'on peut :

- d'une part utiliser ce document non seulement pour démontrer l'alignement de trois points, mais aussi pour reformuler l'hypothèse "trois points sont alignés" ;

- d'autre part ajouter quelques remarques facilitant le choix d'une méthode parmi toutes celles figurant dans le document ; par exemple on peut préciser le contexte d'utilisation de chaque méthode, des mots ou des figures particulières, des numéros d'exercices...

Après la rédaction de plusieurs documents (voir en annexe un exemple élaboré en classe: "pour démontrer que des droites sont parallèles"), nous passons un court instant à parler de leur classement dans le classeur (format 21 x 14,8) : index - table des matières - numérotation des documents.

Chaque élève est invité à utiliser ce classeur dès que le besoin s'en fait sentir et à le compléter par des remarques personnelles. Et dans le cas où les contrôles des connaissances sont séparés de ceux portant sur le raisonnement, pourquoi ne pas autoriser les élèves à utiliser leur classeur pendant les devoirs surveillés ?

QUELQUES REMARQUES À PROPOS DU DOCUMENT PROPOSÉ CI-DESSOUS EN ANNEXE

Il a été élaboré dans une classe de seconde au lycée Vaucanson à Grenoble en 1992.

Il ne s'agit que d'un **exemple de présentation**; ce document n'est en aucun cas à recopier par les élèves, d'autant plus qu'il évoque le vécu de la classe dans la colonne de droite.

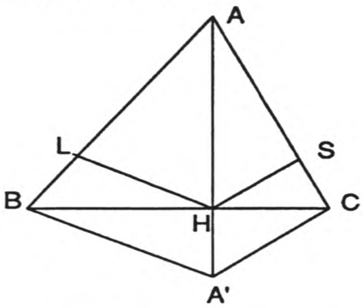
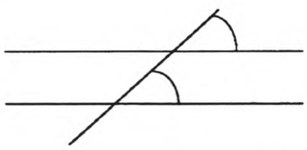
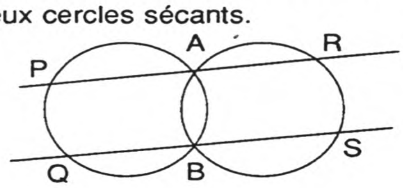
Pour faciliter la constitution de cette fiche, tous les problèmes traités portent un titre, tel que "le problème des cercles sécants", accompagnés du numéro de la séquence de cours à laquelle il se rapporte; lorqu'il s'agit d'un problème de géométrie, le dessin qui s'y rattache est souvent porteur d'informations sur la méthode utilisée lors de sa résolution.

C'est donc à chaque élève à établir cette fiche; elle lui est tout à fait personnelle : les dessins y figureront ou n'y figureront pas, suivant son appréciation (lui apportent-ils ou non quelque chose ?). Il adoptera les tournures de phrases qui lui paraissent les plus évocatrices de la méthode qu'il veut répertorier, même si elles sont un peu lourdes.

Elle sera conservée et complétée, dans la même année scolaire ou dans les classes suivantes : par exemple, la dernière des méthodes sera à compléter lorsqu'auront été étudiées d'autres transformations planes.

Chacune d'elles sera classée et répertoriée, de manière à être rapidement accessible à tout moment.

Annexe : **POUR DÉMONTRER QUE DES DROITES SONT PARALLÈLES**

méthode	Problème vu en cours auquel on peut la rattacher
*Utiliser la réciproque du théorème de Thalès sous forme vectorielle.	***Séquence 1** : le problème des droites parallèles.  pour démontrer que (LS) est parallèle à (BC).
*Identifier un parallélogramme dont deux des côtés sont portés par les droites.	
*Démontrer qu'elles sont perpendiculaires à une même troisième droite.	
*Utiliser la colinéarité de deux vecteurs.	
*Démontrer qu'elles coupent une même troisième droite sous le même angle. 	
*Démontrer qu'elles sont parallèles à une même troisième droite.	
*Démontrer que l'une est l'image de l'autre par une translation ou une symétrie centrale.	***Séquence 1** : le problème des deux cercles sécants.  (PQ) est l'image de (SR) par la symétrie de centre le milieu de [AB].

UNE FAMILLE DE CARRES

OBJECTIFS D'ORDRE METHODOLOGIQUE

On peut proposer l'activité suivante pendant les heures d'enseignement modulaire avec les objectifs suivants :

- observer les comportements des élèves dans leur recherche ;
- leur faire prendre conscience des connaissances et des démarches qu'ils utilisent ;
- leur montrer la nécessité de maîtriser certains savoir-faire pour chercher un problème ;
- les amener à mobiliser leurs connaissances, ou à les retrouver ;
- leur apprendre à faire un bilan d'une question, d'un exercice.

OBJECTIFS DE CONTENU

Utilisée dès le début de l'année scolaire, cette activité permet aux élèves de faire le point sur leur degré de maîtrise de certains savoir-faire, notamment à propos des sujets suivants :

* calculer sur les fractions ;
* déterminer des coordonnées de points ;
* résoudre des équations du premier degré ;
* déterminer des équations de droites ;
* démontrer des alignements de points ;
* résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

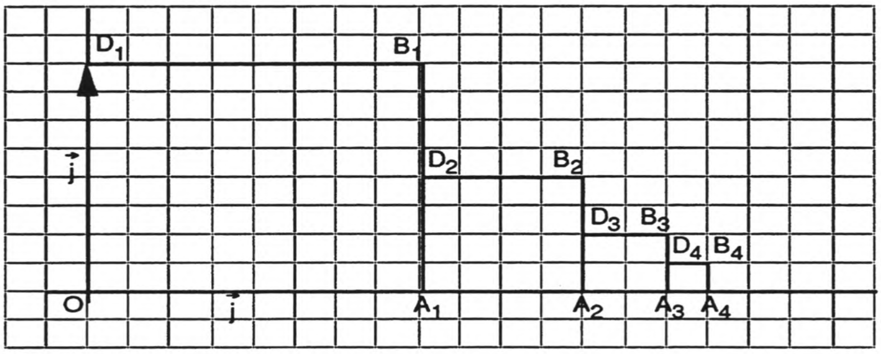
Mais elle peut aussi être utilisée au moment du cours sur l'homothétie.

Les élèves n'ayant pas au départ l'impression du déjà vu, ces révisions ne leur paraissent pas fastidieuses : pour certains, l'activité ravive les connaissances oubliées pendant les vacances, alors que, pour d'autres, elle constitue un moyen de travailler sur des notions non encore maîtrisées.

ENONCE DE L'ACTIVITE

On considère la figure ci-dessous dans laquelle C_1 désigne un carré de côté 1, C_2 un carré de côté $\frac{1}{2}$, C_3 le carré dont le côté est la moitié de celui de C_2, C_4 le carré dont le côté est la moitié de C_3.

Le repère choisi est $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OD_1}$.



1) Dessine la figure précédente à l'échelle 2.

2) Tu donneras les résultats sous forme de fractions irréductibles. Détermine les abscisses des points A_1, A_2, A_3 et A_4.

On désigne par I_1, I_2, I_3 et I_4 les centres respectifs des carré C_1, C_2, C_3 et C_4.

Détermine les coordonnées des centres des quatre carrés précédents.

3) a. Détermine une équation de la droite passant par I_1 et I_2.

b. Démontre que les points I_3 et I_4 sont situés sur cette droite.

4) Détermine les coordonnées des points B_1, B_2, B_3 et B_4.

Démontre que ces quatre points sont situés sur une même droite (δ) dont tu détermineras une équation.

5) Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (I_1I_2) et (δ).

6) Fais un bilan des connaissances et des méthodes que tu as employées ou que tu aurais pu employer.

Commentaires pour les professeurs pour les différentes questions

1) L'objectif est double :

- faire dessiner une figure à une échelle donnée (le rapport simple 2 a été choisi afin que les élèves maîtrisant les connaissances sur la notion d'échelle n'aient aucune difficulté pour faire la figure) ;
- faire que les élèves s'approprient la figure.

2) L'objectif est essentiellement de revoir le calcul sur les fractions. On peut aussi attirer l'attention des élèves sur le fait qu'il est bon de vérifier les résultats obtenus, surtout lorsque ceux-ci vont être réutilisés dans la suite du problème.

3) On pourra modifier cette question de manière à faire chercher une méthode de résolution par les élèves : "démontrer que les quatre points I_1, I_2, I_3 et I_4 sont alignés".

4) Réinvestissement de la méthode exposée dans la question précédente.

5) Résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues et vérification graphique de la solution obtenue.

Remarque : Cette activité peut permettre d'introduire différentes méthodes de résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.

GESTION DE L'ACTIVITE

Une gestion différenciée de la classe, presque individualisée, est tout à fait possible au travers de cette activité grâce au corrigé joint en annexe et aux documents d'aide, qui peuvent être donnés sur des feuilles différentes, afin de débloquer chaque élève précisément là où il se heurte à une difficulté.

On peut donner aux élèves les consignes suivantes :

- travailler seul (si l'on veut observer le comportement de chaque élève) ;
- en cas de difficulté devant une question, écrire les connaissances que l'on possède en rapport avec la question ;
- poser par écrit les questions au professeur ;
- noter les connaissances, les démarches utilisées ;
- vérifier, si l'on peut, les résultats (par exemple, graphiquement).

Pour les élèves en difficulté devant certaines questions, on peut "démultiplier" ces dernières ou leur donner des documents d'aide à l'apprentissage (documents leur permettant de revoir les connaissances qu'ils ne maîtrisent pas).

Pour la question 1.

Que signifie un dessin, une figure à une échelle donnée ?

Sur la carte au 1/100 000ème, que représente une distance de 1 cm sur la carte ?

Comment est représentée sur la carte une distance entre deux villages de 5 km ?

As-tu déjà vu des dessins faits à une échelle plus grande que 1 ?

Lorsque tu fais un dessin à l'échelle 2, comment représentes-tu la longueur d'un segment ?

Pour la question 2.

Comment détermine-t-on l'abscisse d'un point situé sur un axe ?

Détermine les abscisses des points A_1, A_2, A_3, et A_4 ; exprime les réslutats en nombres décimaux et en nombres fractionnaires.

Sur quelles droites est situé le centre d'un carré ?

Quelles sont les coordonnées des sommets d'un carré qu'il suffit de connaître pour déterminer les coordonnées de son centre ?

Quelles sont les relations qui relient les coordonnées du centre d'un carré aux coordonnées des différents sommets ?

Détermine les coordonnées de I_1, I_2, I_3, I_4 et essaie de vérifier à l'aide de la figure les résultats que tu viens d'obtenir.

Pour la question 3.

Comment peut-on déterminer une équation d'une droite définie par deux points ?

Quelle forme aura l'équation réduite de la droite (I_1, I_2) ?

Que te suffit-il de déterminer pour obtenir une équation de la droite (I_1, I_2) ?

Par quelle relation traduit-on qu'un point de coordonnées données est situé sur une droite d'équation donnée ?

Comment détermine-t-on le coefficient directeur d'une droite passant par deux points donnés ?

Comment détermine-t-on une équation d'une droite de coefficient directeur donné et passant par un point donné ?

Comment peut-on vérifier une équation d'une droite ?

Pour la question 4.

Après avoir vérifié graphiquement les coordonnées des points B_1, B_2, B_3 et B_4, détermine une équation de la droite (δ) en utilisant, par exemple, les points B_1 et B_2.

Avant de passer à la question suivante, vérifie l'équation que tu as obtenue pour la droite (δ).

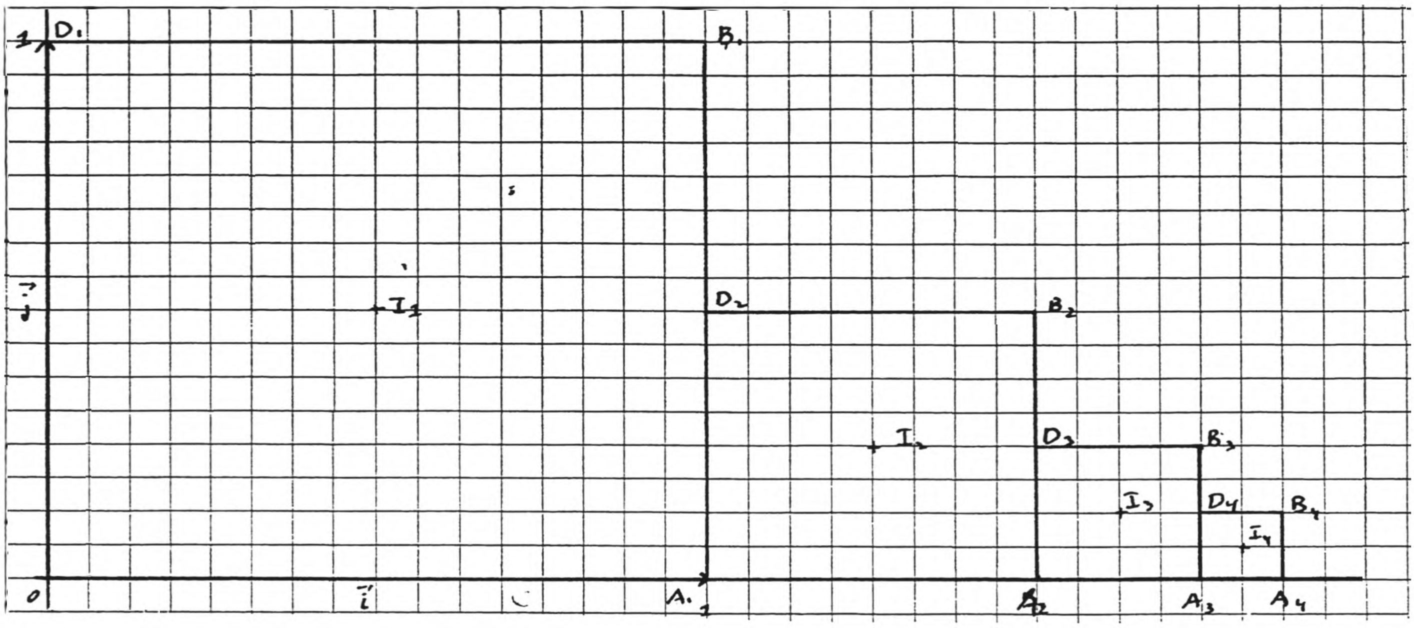
Pour la question 5.

Quelles relations vérifient les coordonnées d'un point commun à deux droites ?

Quelles sont les méthodes que tu connais pour résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues ?

CORRIGE

1) *Faire un dessin à une échelle donnée, cela revient à multiplier toutes les dimensions par le "rapport" de l'échelle (ici 2), en conservant les "formes" (parallélisme, angles).*



2) Abscisse de A_1 est 1.

Abscisse de A_2 est $1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Abscisse de A_3 est $\frac{3}{2} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Abscisse A_4 est $\frac{7}{4} + (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{14}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

Coordonnées de I_1 : $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$

Coordonnées de I_2 : l'ordonnée de I_2 est la moitié de celle de I_1, donc celle de I_1 multipliée par $\frac{1}{2}$, d'où :

$$y_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

L'abscisse de I_2 est égale à l'abscisse de A_1 plus l'ordonnée de I_2

$x_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$I_2 (\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

Coordonnées de I_3 :

L'ordonnée de I_3 est la moitié de celle de I_2, d'où :

$$y_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

L'abscisse de I_3 est égale à celle de A_2 augmentée de l'ordonnée de I_3

$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{12}{8} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$

$I_3 (\frac{13}{8}, \frac{1}{8})$

Coordonnée de I_4 :

$y_4 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$x_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{16} = \frac{28}{16} + \frac{1}{16} = \frac{29}{16}$

$I_4 (\frac{29}{16}, \frac{1}{16})$

3) a. Equation de la droite passant par (I_1I_2) :

La droite (I_1I_2) n'étant pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $y = m.x + p$. Il faut déterminer m et p.

1ère méthode : on écrit que les coordonnées de I_1 et I_2 vérifient l'équation de la droite, puis on résout le système formé par les deux équations ainsi obtenues.

$I_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ sur la droite : $\frac{1}{2}=m\frac{1}{2}+p$, d'où : $\frac{1}{2}m+p=\frac{1}{2}$

$I_2\left(\frac{5}{4}\ \frac{1}{4}\right)$ sur la droite : $\frac{1}{4}=m\frac{5}{4}+p$, d'où : $\frac{5}{4}m+p=\frac{1}{4}$

Résolution du système d'inconnue (m, p) dont on sait qu'il a une solution unique

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m+p=\frac{1}{2}\\ \frac{5}{4}m+p=\frac{1}{4}\end{cases}$$

En multipliant les deux membres de la première équation par 2, et ceux de la seconde par 4 (pour supprimer les fractions), on obtient :

$$\begin{cases}2(\frac{1}{2}m+p)=2\times\frac{1}{2}\\ 4(\frac{5}{4}m+p)=4\times\frac{1}{4}\end{cases}\qquad\begin{cases}m+2.p=1\\ 5.m+4.p=1\end{cases}$$

En utilisant la méthode de substitution, on obtient :

$$\begin{cases}m=1-2.p\\ 5.(1-2.p)+4.p=1\end{cases}\qquad\begin{cases}m=1-2.p\\ 5-10.p+4.p=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=1-2.p\\ 5-6.p=1\end{cases}\qquad\begin{cases}m=1-2.p\\ -6.p=1-5\end{cases}\qquad\begin{cases}m=1-2.p\\ p=\frac{-4}{-6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=1-2\times\frac{2}{3}=1-\frac{4}{3}=\frac{3}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}\\ p=\frac{-4}{-6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Une équation de la droite (I_1I_2) est : $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

2ème méthode : on commence par déterminer le cœfficient directeur m de la droite, puis on détermine p en écrivant que les coordonnées de l'un des points vérifient l'équation de la droite *(ici, on ne peut pas lire l'ordonnée à l'origine p).*

cœfficient directeur $m=\dfrac{\text{accroissement de l'ordonnée}}{\text{accroissement de l'abscisse}}=\dfrac{y_2-y_2}{x_2-x_1}$

$$m=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{4}}{\frac{5}{4}\ \frac{2}{4}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{-1}{3}$$

(On a multiplié le numérateur et le dénominateur de l'avant dernière fraction par 4).

A savoir : $\dfrac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{C}} = \dfrac{A}{B}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par C.

Ecrivons que les coordonnées de $I_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vérifient l'équation de la droite $y = -\frac{1}{3}x + p$,

d'où :

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + p \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} + p, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = p, \qquad \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = p, \qquad p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Une équation de la droite $(I_1\ I_2)$ est $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Pour démontrer que les points I_3 et I_4 sont situés sur la droite $(I_1\ I_2)$, il suffit de vérifier que leurs coordonnées satisfont à l'équation de cette droite.

$I_3\left(\frac{13}{8}, \frac{1}{8}\right)$: $\qquad \frac{1}{8}$ est-il égal à $-\frac{1}{3}\left(\frac{13}{8}\right) + \frac{2}{3}$?

Dans la suite, "est-il égal à" sera symbolisé par "$\overset{?}{=}$" : $\frac{1}{8} \overset{?}{=} -\frac{1}{3}\left(\frac{13}{8}\right) + \frac{2}{3}$ Calculons le second membre :

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{13}{8}\right) + \frac{2}{3} = -\frac{13}{24} + \frac{2}{3} = -\frac{13}{24} + \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = -\frac{13}{24} + \frac{16}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$I_4\left(\frac{29}{16}; \frac{1}{16}\right)$: $\qquad \frac{1}{16} \overset{?}{=} -\frac{1}{3}\left(\frac{29}{16}\right) + \frac{2}{3}$ Calculons le second membre :

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{29}{16}\right) + \frac{2}{3} = -\frac{29}{3 \times 16} + \frac{2 \times 16}{3 \times 16} = \frac{-29 + 32}{3 \times 16} = \frac{3}{3 \times 16} = \frac{1}{16}$$

4) $B_1\ (1\ ;\ 1)$; $B_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $B_3\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ et $B_4\left(\frac{15}{8}; \frac{1}{8}\right)$

Equation de la droite (δ) passant par B_1 et B_2 :

cœfficient directeur $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$

$I_1\ (1\ ;\ 1)$ est sur (δ) d'équation $y = -1x + p$ ou $y = -x + p$, d'où :

$1 = -1 + p$; $1 + 1 = p$; $p = 2$.

Une équation de (δ) est $y = -x + 2$.

Remarque : on peut vérifier par lecture graphique la valeur de p.

Pour vérifier que les points B_3 et B_4 sont situés sur la droite (δ), il suffit de vérifier que les coordonnées de ces points satisfont à l'équation de la droite (δ).

$B_3\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right)$: $\frac{1}{4} \overset{?}{=} -\left(\frac{7}{4}\right)+2$ Calculons le second membre :

$-\left(\frac{7}{4}\right)+2 = -\frac{7}{4}+2 = -\frac{7}{4}+\frac{8}{4} =$ F(1;4)

$B_4\left(\frac{15}{8};\frac{1}{8}\right)$: $\frac{1}{8} \overset{?}{=} -\frac{15}{8}+2$ Calculons le second membre :

$-\frac{15}{8}+2 = -\frac{15}{8}+\frac{16}{8} = \frac{1}{8}$

5) Coordonnées du point d'intersection de (I_1 I_2) et (δ) .

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites sont données par la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\ y = -x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} = -x+2 \\ y = -x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} = 2-\frac{2}{3} \\ y = -x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{3}x-\frac{1}{3} = \frac{6}{3}-\frac{2}{3} \\ y = -x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} \\ y = -x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{3}\times\frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y = -2+2 = 0 \end{cases}$$

Le point d'intersection des deux droites (I_1 I_2) et (δ) a pour coordonnées (2 ; 0).

UNE AIDE A LA RECHERCHE : la créativité mathématique

Peut-on apprendre à avoir des idées en mathématiques ? L'imagination n'est-elle pas trop souvent délaissée dans le cours de maths ?

THEME ET OBJECTIF

Comment **aider les élèves** à utiliser toute la puissance de leur imagination, même en mathématiques ?

Il s'agit plus particulièrement ici d'étudier une approche de certains problèmes par le biais d'un **enrichissement de la situation**, qui consiste en l'introduction d'éléments nouveaux par rapport aux hypothèses initiales, pour permettre un traitement plus facile du problème posé.

Attention ! Il ne s'agit absolument pas de traiter des questions du programme de première. L'objectif poursuivi au travers de cette activité est seulement de faire sentir aux élèves que l'on peut **apprendre** à "avoir des idées" en les sensibilisant à une méthode de recherche.

PUBLIC

Il ne faut pas rêver ! Cette activité ne peut pas s'adresser à tous les élèves d'une classe de seconde: certes tous doivent apprendre à chercher des problèmes, mais certains s'y exerceront sur des sujets plus modestes. Grâce à l'organisation modulaire, quelques élèves - dont on s'occupait peut-être trop peu auparavant- peuvent être poussés plus avant dans la recherche de problèmes délicats.

Il s'agit des élèves capables de :

- s'approprier un énoncé ;
- reconnaître une situation déjà rencontrée ;

- traiter ensuite le problème en utilisant correctement un répertoire mental de méthodes connues.

COMMENT ABORDER CETTE METHODE AVEC LES ELEVES

Cette méthode d'enrichissement d'une situation pour la rendre plus facilement exploitable est progressivement amenée à l'éléve : chacune des trois parties est à lui distribuer dans l'ordre de leur numérotation et l'une ne doit pas être abordée tant que la précédente n'est pas achevée. En effet la réponse à certaines questions est rappelée dans la partie suivante.

La première partie contient la rédaction d'une recherche où cette méthode d'enrichissement d'une situation est utilisée : l'élève y est sensilbilisé au travers des pensées d'Ulysse qui donne libre cours à son imagination.

La deuxième partie est plus ouverte : l'élève identifie lui-même l'élément qui enrichit la situation, la recherche est toutefois donnée presque complètement. De plus on lui demande d'identifier le point commun à la méthode de recherche des deux premiers problèmes, qui traitent de sujets très différents.

Dans la troisième partie,on lui suggère d'enrichir lui-même une situation pour traiter un problème de factorisation. Ensuite trois problèmes lui sont proposés, accompagnés d'indications ; puis un quatrième où l'indication est très légère. Le but des indications est d'amener l'élève à utiliser justement la méthode d'enrichissement, alors qu'il est possible de traiter les problèmes suivant d'autres stratégies.

Une présentation plus détaillée est donnée à la suite du document proposé aux élèves.

Comment l'enrichissement d'une situation peut-il faire naître des idées

Document-élève. **Première partie** : page 1/3

L'objectif poursuivi est de te faire identifier, au travers de plusieurs types de problèmes, une méthode de recherche susceptible de te donner des idées pour étudier d'autres situations.

Voici l'énoncé d'un problème, suivi de la narration de la recherche d'Ulysse.

Premier travail demandé : laisse-toi guider par les idées qui germent petit à petit dans la tête d'Ulysse. Les instructions ou les questions écrites en italique ne viennent pas d'Ulysse, mais te sont destinées.

1- Camping et baignade

Enoncé : Ce n'est qu'à une bonne distance de la mer qu'Ulysse a trouvé un endroit ombragé pour y camper sa tente, à quelques kilomètres de la maison de sa copine. Mais il ne pourra lui rendre visite que le lendemain. A la lumière de sa torche électrique, il fait le point sur sa carte et dresse son emploi du temps du lendemain : il a envie de se baigner avant sa visite. A quel endoit de l'immense plage va-t-il se rendre de manière à perdre le moins de temps possible dans les trajets ?

- "Je vais faire un dessin : je dessine le bord de la mer comme une droite, que j'appelle b, le bord de mer est d'ailleurs presque rectiligne ici ; je place le point T pour ma tente et le point G pour la maison de Gaëlle ; je cherche donc un point M de la droite b de façon que MT+MG soit la plus petite possible." *Construis une figure toi aussi.*

- "S'il y a un point M de la droite b qui réalise le plus court chemin de T à G en passant par b...(pour l'instant je vais en placer un sur b ; j'élimine cette demi-droite et celle-ci ; M ne peut pas s'y trouver)" *Quelles demi-droites Ulysse élimine-t-il ?*

- "Tiens ! S'il y avait eu une île ombragée où j'aurais pu camper ma tente dans la mer, le plus court chemin jusqu'à la maison de Gaëlle aurait été facile à trouver : tout droit évidemment !" *Complète ton dessin en plaçant un point I dans la mer pour représenter l'île et construis le point du bord de mer, que tu appelleras D, aligné avec I et G !*

- "Mais il y a aussi un autre endroit, pas dans la mer, qui donne la même longueur de chemin à parcourir !" *Vois-tu lequel ?*

- **"C'est le symétrique de I par rapport à b. Oui, mais ma tente n'est pas à cet endroit !**

- **Mais oui, ça y est ! J'ai une idée : je vais imaginer qu'il y a une île qui me donnerait exactement la même longueur de chemin à parcourir pour aller chez Gaëlle."**

As-tu compris l'idée d'Ulysse ? Si oui, poursuis ta recherche sans regarder la suite !

- **"Je vais donc construire le symétrique de T par rapport à b (*il s'agit d'une symétrie orthogonale*) ; je l'appelle T'.**
- **Je reprends ; s'il y a un point M de la droite b qui réalise le plus court chemin de T à G en passant par b, alors M réalise aussi le plus court chemin de T' à G en passant par b ; il n'y a donc que cette possibilité pour un tel point : tout droit de T' à G, ce qui me donne ce point de la droite b."** *Dessine-le toi aussi.*

Deuxième travail demandé : réponds aux questions suivantes !

1- Quel est l'élément-clé de la recherche d'Ulysse, qui le guide vers la solution ?

2- Un petit peu de raisonnement :

On peut résumer la dernière réplique d'Ulysse en disant qu'il prouve que, **s'**il y a un point qui répond au problème, **alors** c'est forcément le point d'intersection de (T'G) et de b.

Dans ces quatre lignes peut-on lire la preuve qu'**il y a effectivement** un point M qui répond au problème posé ; ou bien qu'il **ne peut pas y avoir plus** d'un point M qui soit solution ; ou bien les deux en même temps ?

Es-tu toi-même convaincu(e) que ce problème a :
- au moins une solution (il y a bien toujours un point M, mais il peut y en avoir plusieurs qui réalisent le plus court trajet de la tente à la mer, puis de la mer à la maison) ;
- au plus une solution (il se peut que pour certaines positions de la tente et de la maison, du même côté de la mer, il n'y ait pas de solution au problème, mais, lorsqu'il y en a une, elle est unique) ;
- a une solution unique ?

Voici un deuxième problème, traitant de géométrie dans l'espace, qui est presque résolu.

Premier travail demandé : Réponds aux questions et complète le dessin.

2- Une section d'un pavé droit

Enoncé : ABCDA'B'C'D' est un pavé droit. L, M, N sont trois points de trois faces contiguës : sur la figure ci-dessous, L appartient à la face ABCD, M à la face ADD'A' et N à la face CDD'C'.

L'objet du problème est la détermination de la section du pavé droit par le plan (LMN) ; mais voici quelques indications sur la figure ci-dessous concernant l'intersection de la face CDD'C' et du plan (LMN).

1) Explique la construction en répondant aux questions suivantes :

*Explique la construction des points E et F.

*(EF) est la droite d'intersection de quels plans ?

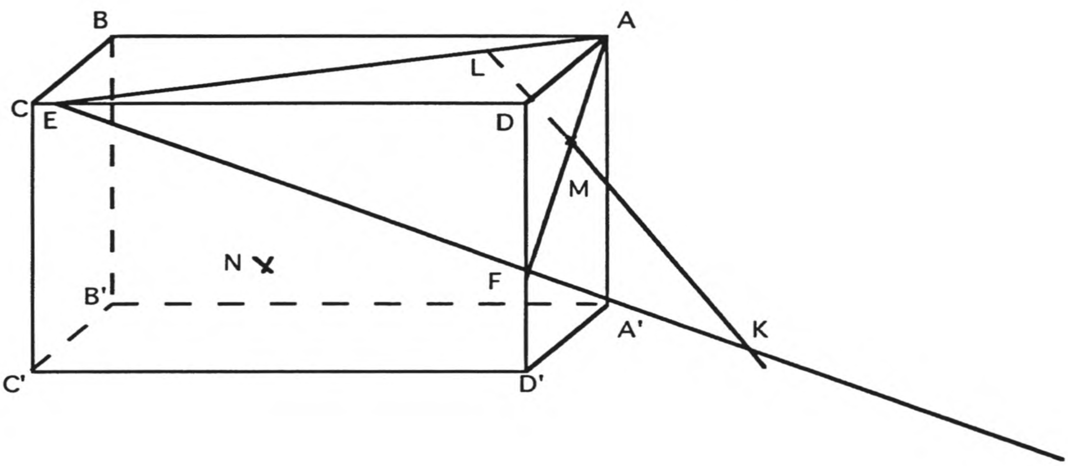
*Comment est construit le point K ?

*K appartient-il au plan (LMN) ? Pourquoi ?

*K appartient-il au plan (CDD') ? Pourquoi ?

*Trace la droite d'intersection de la face CDD'C' et du plan (LMN) et repasse en rouge le segment de la section cherchée.

2) Termine la construction de la section du pavé droit par le plan (LMN).



Deuxième travail demandé : **réponds aux questions suivantes !**

1) Identifie le point commun à la recherche de ces deux problèmes : en quoi le point de départ de la construction ressemble-t-il à celui de la recherche de la première partie ?

2) Cherche à enrichir la situation de départ par l'introduction d'un autre plan et retrouve la même section.

Tu as remarqué que le "truc" qui a permis de résoudre chacun des deux problèmes précédents consiste à enrichir la situation de départ en introduisant un ou plusieurs éléments nouveaux : un point dans le premier problème et un plan dans le deuxième.

Voici maintenant un problème de factorisation ; le "truc" de départ sera le même : il t'est indiqué

3- La richesse du double-produit

Enoncé: Factorise $x^4 + 16$.

Recherche: *$x^4 + 16$ "ressemble" beaucoup à $a^2 + b^2$;

*mais il manque un 2ab pour que la factorisation sous la forme d'un carré soit faisable ;

*enrichissons donc la situation par l'introduction d'un double-produit que l'on retranchera aussitôt !

Travail demandé : 1- Poursuis la recherche de ce problème jusqu'à l'obtention de la factorisation demandée.

2- Cherche ensuite les quatre problèmes ci-dessous en suivant l'idée d'enrichir la situation de départ de manière à se ramener à des problèmes plus simples.

4- Alignés ou pas alignés ?

ABC désigne un triangle ; les points E, F, I sont déterminés par :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$

Les points E, I, C sont-ils alignés ?

Question à se poser : n'y aurait-il pas un point intéressant à introduire, de manière à utiliser une homothétie qui permette de prouver très rapidement la réponse ?

5- Une somme de carrés

1) Ecris l'expression $x^2 + 2x + 7$ comme une somme de deux carrés.

2) Quel est le signe de cette expresion suivant les valeurs de x ?

Remarques à se faire : *$x^2 + 2x$ ressemble à $a^2 + 2ab$;
*que peut-on introduire pour avoir un carré, mais sans modifier l'expression ?

6- En partant d'un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A ; M est le milieu de [BC] ; [AH] est une hauteur ; N est le projeté orthogonal de H sur [AB] et L est le projeté orthogonal de H sur [AC]. Les droites (NL) et (AM) sont-elles orthogonales ?

Questions à se poser : *comment enrichir une situation à base d'un triangle rectangle ?
*peut-on enfermer le triangle rectangle dans une figure plus symétrique ?

7- Une section d'un cube

ABCDEFGH est un cube. Représente-le en perspective cavalière, dont tu appelleras ADEF la face avant et ABCD la face de dessus. S et T sont les centres des faces d'arête commune [AD] (faces avant et de dessus) et U est un point quelconque de la face HEDC (face de droite).

1) Les droites (EC) et (ST) sont-elles parallèles ?

2) Trace la section du cube par le plan (STU).

Question à se poser : le parallélisme de (EC) et (ST) ne permet-il pas l'introduction d'un plan ?

PRESENTATION PLUS DETAILLEE

Première partie : 1-Camping et baignade

L'énoncé est suivi d'un scénario racontant les idées qui viennent à l'esprit d'Ulysse, dont les divagations débouchent sur l'idée d'introduire un nouveau point, le symétrique de T par rapport à la droite b ; ce qui permet de trouver très facilement la solution du problème.

Cependant l'idée d'enrichir la situation de départ par l'introduction de ce point ne lui vient pas tout à fait par hasard : on voit comment elle se construit peu à peu.

Le but pousuivi au travers de cette narration est que l'élève puisse se reconnaître des points communs avec Ulysse afin d'en conclure qu'il aurait pu trouver lui-même cette idée, ou tout du moins, qu'il pourrait apprendre à utiliser son imagination pour inventer ces "trucs". On est loin de la fréquente indication, "on pourra utiliser le ..." ou "on pourra introduire le point ...", qui ne manque jamais d'apparaître dans les énoncés de problèmes un peu complexes et que les élèves ressentent comme un "truc génial", qu'ils auraient été incapables de trouver tout seuls.

Aucune figure n'a été donnée afin que les élèves, obligés d'en construire une, suivent plus facilement les idées d'Ulysse, et se laissent prendre eux aussi par son histoire.

Ils auront d'ailleurs peut-être l'idée de faire des figures particulières, telles que (TG) parallèle ou perpendiculaire à la droite b, ce qu'il sera très intéressant d'exploiter par une confrontation avec les autres figures obtenues dans la classe : y aura-t-il toujours un point M solution ? Se peut-il qu'il y en ait plusieurs ?

L'objet de cette partie étant de montrer la naissance d'une idée pour mener une recherche, ainsi que l'intérêt d'enrichir la situation de départ, il n'est pas utile de passer à la rédaction de la preuve de l'existence et de l'unicité du point M de la droite b qui réalise le chemin le plus court de T à G en "passant par b". Les quelques questions, placées à la fin de cette partie, peuvent éventuellement servir à montrer aux élèves que la démonstration n'a pas été rédigée complètement au travers des pensées d'Ulysse, et à leur faire prendre conscience que toute recherche doit être suivie d'un travail important de mise en forme. Ces questions permettent aussi de déboucher sur une activité basée sur le raisonnement.

Deuxième partie : 2-Une section d'un pavé droit

Ce problème étant difficile à traiter pour un élève de seconde, la résolution en est presque donnée sur le dessin. La présentation, légèrement différente de celle du problème précédent, permet à l'élève d'identifier l'enrichissement de la situation de départ par l'introduction du plan (ALM).

Une fois que l'idée de départ est trouvée, le reste de la section est facile à déterminer.

Quant au deuxième travail demandé, il oblige l'élève à prendre du recul pour reconnaître le point commun aux deux stratégies mises en œuvre dans ces deux premiers problèmes, celui d'Ulysse et cette section.

On peut tout aussi bien choisir d'introduire un autre plan ; par exemple (INM) où I est un point de l'arête [DD'] et chercher l'intersection du plan (INM) et du plan (ABC).

Troisième partie : 3-La richesse du double-produit

Cette fois-ci, seule l'indication de départ est donnée. La situation s'enrichit de manière analogue dans le problème 5 qui est intitulé "une somme de carrés".

Pour ce qui est du problème 4, "alignés ou pas alignés", l'introduction du point G tel que $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donne une démonstration très rapide par l'intermédiaire des homothéties. Il est à noter que l'on peut démontrer l'alignement des trois points de bien d'autres manières.

Quant au problème 6, "en partant d'un triangle rectangle", son approche par enrichissement de la situation est moins immédiate - elle n'est d'ailleurs pas non plus la seule méthode possible, puisqu'on peut aussi raisonner avec les angles ou passer par la géométrie analytique - : l'enrichissement consiste à symétriser la figure par rapport à (BA).

En appelant respectivement F, K, E les symétriques de H, C, L orthogonalement par rapport à (BA), on montre que ALNF est un parallélogramme ; que (AM) est parallèle à (BK) ; que (AF) est perpendiculaire à (BK) ; par suite (AM) est perpendiculaire à (AF), donc (AM) est perpendiculaire à (NL).

On peut faire remarquer aux élèves que la symétrisation d'un triangle rectangle en un triangle isocèle ou bien en un rectangle est une méthode souvent très efficace et plus simple que les autres.

Pour le nouveau problème de section, cette fois-ci d'un cube par un plan, très peu d'indications sont données ! Il permet aux élèves de réinvestir la méthode qui consiste à introduire un plan, ici le plan qui est suggéré fortement par les deux droites parallèles, et d'en chercher l'intersection avec la face HEDC, puis d'en déduire la droite d'intersection de cette face et du plan (STU).

UN PEU DE RAISONNEMENT ET DE DESSIN POUR S'EXPRIMER

L'enseignement modulaire en seconde permettant de diviser la classe en groupes de besoins, voici la présentation d'une activité qui s'adresse à deux catégories d'élèves (voir ci-dessous "public") : pour répondre aux mêmes objectifs, l'aide du professeur sera différente suivant le public auquel elle s'adresse.

Elle a été expérimentée dans une classe complète de seconde à option technologique, de niveau assez faible, le 5 mai 1992, par Michèle Gandit (le programme de géométrie dans l'espace, sauf l'orthogonalité, avait déjà été traité auparavant) : moins de 45 minutes de cours y ont été consacrées, ce qui était trop peu ; les élèves ont eu à terminer leur travail en dehors du cours pour la séance suivante, où les copies ont été relevées (voir bilan à la fin du document).

Objectifs poursuivis dans cette activité

1) Certains sont d'ordre méthodologique :

*faire travailler les élèves à partir d'un document ;

*apprendre à l'élève à montrer clairement ce qu'il a compris, ici c'est la communication par le dessin qui est privilégiée.

2) D'autres concernent l'apprentissage du raisonnement, ils portent sur :

*les notions d'hypothèse et de conclusion d'un théorème ou d'une conjecture, qui ont déjà été travaillées, notamment dans l'activité "Circuit" ;

*le sens de "condition suffisante" ;

*la réciproque d'une implication ;

*la preuve qu'une conjecture est fausse par la donnée d'un contre-exemple (admis sous forme d'un dessin).

3) Enfin certains sont relatifs au contenu mathématique, puisque les théorèmes et définitions se rapportent à la notion d'orthogonalité dans l'espace.

Public

Cette activité s'adresse à deux types d'élèves :

- ceux qui ont des difficultés d'expression écrite ; c'est l'occasion de leur montrer qu'ils peuvent réussir en mathématiques par une autre forme de communication, le dessin ;
- ceux qui ont des difficultés de vision, dans l'espace, mais surtout de dessin en perspective.

Document proposé aux élèves. **Un peu de raisonnement et de dessin**

page 1/2

L'objectif de cette séance est triple :

1) apprendre à travailler à partir d'un document ;
2) apprendre des notions nouvelles de géométrie dans l'espace ;
3) travailler le raisonnement (et montrer clairement qu'on a compris).

Lis attentivement la consigne !

Ce document contient quelques compléments de géométrie dans l'espace et voici le travail qui t'est demandé :

1- Dessine un cube en perspective cavalière et utilise-le pour donner un exemple pour chacune des définitions D1, D3 et D4.

2- Il est difficile d'illustrer directement la définition D2, car tu ne peux pas "voir" qu'une droite est orthogonale à **toutes** les droites d'un plan. Aussi a-t-on besoin d'un autre outil pour reconnaître qu'une droite est perpendiculaire à un plan. Lequel parmi les théorèmes cités te donne une **condition suffisante** pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan ? Utilise-le pour montrer une droite perpendiculaire à un plan à partir de ton cube.

3- Pour chacun des théorèmes T1 à T6, fais un dessin en perspective où tu représenteras en bleu les éléments de l'hypothèse et en rouge ceux de la conclusion (sur le dessin ou bien sous la forme d'une phrase si tu juges que c'est plus clair).

4- Quelle est la réciproque du théorème T2 ? Est-elle vraie ?

5- Voici une conjecture d'Alfred ; est-elle vraie ou bien fausse ?Justifie.

"Etant donnés un plan P et un point A de l'espace, il existe une seule droite parallèle à P qui passe par A".

Deux définitions

D1- Dire que **deux droites de l'espace sont orthogonales** signifie que les parallèles à ces droites menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

D2- Dire qu'une **droite D est perpendiculaire à un plan** (ou qu'un plan est perpendiculaire à une droite D) signifie que la droite D est orthogonale à toutes les droites du plan.

Des théorèmes : ce sont des conjectures qui ont été prouvées vraies et que tu peux utiliser dans tes démonstrations.

T1- Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.

T2- Si une droite D est orthogonale à une droite Δ, alors Δ est incluse dans un plan perpendiculaire à D.

T3 Etant donnés un plan P et un point A de l'espace, il existe une seule droite perpendiculaire à P qui passe par A.

T4- Etant donnés une droite D et un point B de l'espace, il existe un seul plan perpendiculaire à D qui passe par B.

T5- Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

T6 Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Deux autres définitions

D3- A et B désignant deux points de l'espace, on appelle **plan médiateur de [AB]** l'ensemble des points équidistants de A et de B (c'est aussi le plan perpendiculaire à la droite (AB), qui passe par le milieu du segment [AB]).

D4- Etant donné un plan P ; à chaque point M de l'espace, on associe le point m du plan P de la manière suivante : on construit la droite D orthogonale à P qui passe par M, l'intersection de D et de P est le point m.

On définit ainsi **la projection orthogonale sur le plan P :** le point m image de M par cette projection s'appelle **le projeté orthogonal de M sur P ;** la longueur mM s'appelle **la distance de M au plan P.**

Bilan : classe de seconde 2T4 - lycée Vaucanson- Grenoble - mai 1992 -

Beaucoup d'élèves ont d'abord eu du mal à "rentrer" dans le document : les uns ne saisissant pas ce qui était demandé (difficulté de lecture de consignes), les autres ne comprenant pas bien les notions de géométrie dans l'espace. Ensuite, certains d'entre eux, qui d'habitude, ne réussissent pas en mathématiques, se sont aperçu petit à petit qu'ils allaient pouvoir s'exprimer cette fois-ci, grâce au dessin ! La majeure partie de la classe a semblé attirée par cette forme de travail.

Les travaux qui ont été ramassés montrent finalement une assez bonne réussite de ceux qui ont travaillé.

Quelques difficultés tout de même dans le raisonnement, qui méritent d'être travaillées d'une façon plus approfondie **dans le cadre d'un groupe restreint.** Si une bonne moitié des élèves a bien distingué l'hypothèse de la conclusion dans les théorèmes, une partie d'entre eux s'est trompée dans l'énoncé de la réciproque (alors que cette activité se situe au troisième trimestre !).

Toutefois ceux qui ont traité la conjecture d'Alfred se sont rendu compte qu'elle était fausse et ont donné leur contre-exemple sous la forme d'un dessin.

Au cours de la séance et dans la correction des travaux, l'accent a été mis sur la qualité de l'expression : chacun devait s'attacher à montrer clairement au lecteur ce qu'il avait compris, le choix du mode d'expression étant laissé libre (dessin uniquement ou combinaison de phrases et de dessins).