Université Joseph Fourier Grenoble I

Dessine-moi un vecteur...

- Raymond CHUZEVILLE
- Sylviane GASQUET

irem
de Grenoble

Raymond Chuzeville et Sylviane Gasquet
ont réalisé ce travail dans le cadre des moyens
donnés à l'I.R.E.M. par la
M.A.F.P.E.N. de Grenoble

PAGES AUTORISEES AUX PROFESSEURS !

ET PRESQUE INTERDITES AUX ELEVES !

Les pages qui suivent parlent vecteurs mais elles ne sont pas un COURS, elles ne se suffisent pas à elles-mêmes. Ce sont essentiellement des réponses aux questions réelles de nos élèves...

De plus ce sont des réponses telles que nous les faisons oralement mais telles qu'aussi nous osons rarement les écrire ! Et voilà pourquoi nos élèves sont muets... d'incompréhension devant la plupart des manuels scolaires.

Le risque est grand de se voir reprocher le manque de rigueur, le laxisme, le nivellement par le bas... **Nous avons souhaité avant tout privilégier la compréhension profonde**, le sens que l'élève peut donner à ce qu'il manipule. Pour nous la rigueur doit venir, mais après. Même de très bons élèves nous ont dit avoir mieux compris après la lecture de certaines fiches. D'autres aussi, il est vrai, n'ont «pas accroché» avec cette manière assez particulière de raconter, d'imaginer les mathématiques. **Mais ces fiches sont faites pour être disponibles, non pour être imposées.** Elles sont à conseiller comme on conseille un médicament homéopathique : si cela vous convient tant mieux, sinon, il faudra chercher autre chose...

Nous voudrions enfin parler des «confusions» que nous acceptons à titre provisoire... Nous n'avons certes pas décidé cela a priori, ce fut même un long cheminement personnel, remis encore en question lorsqu'il fut question de publier !

- La confusion norme - longueur nous a vite paru acceptable, d'autant plus qu'en physique la longueur est souvent notée comme la norme en mathématique.

- La confusion bipoint - vecteur fut elle, plus débattue. Finalement elle nous semble «acceptable» en seconde car elle n'empêche pas l'élève de résoudre des problèmes de math ou de physique avec l'outil vectoriel.

- par contre la confusion norme - vecteur fait, on le sait bien,des dégâts considérables. C'est sur celle-ci qu'il faut concentrer l'énergieprof et l'énergie-élève.

Cela dit, il reste cependant une vraie difficulté que nous avons fait semblant de ne pas voir : celle du lien entre les mathématiques et la physique. Tant que nos élèves n'ont pas vu la notion de champ de forces, il demeure toujours une coupure entre le vecteur en math et le vecteur en physique. Là encore il faut l'accepter et peut-être le dire aux élèves : **le vecteur est un assez bon modèle pour traiter certains problèmes de physique, mais ce n'est pas un modèle parfait.**

A part cela, nous n'avons pas voulu imiter les dentistes «ça ne fera pas mal»... et nous avons délibérément choisi de prévenir les élèves lorsqu'il y a une vraie difficulté. Notre comportement, tel que le perçoivent nos élèves, ne laisse pas assez percevoir que les notions de mathématiques n'offrent pas toutes le même degré de difficulté. Quel effet peut avoir sur l'élève cette égalité d'humeur face à l'inégalité des tâches à accomplir ? Trop souvent un découragement, voire une démission : je ne comprends pas, je commence à «être faible», je vais le devenir... et la réalité confirme souvent le triste pronostic puisque l'élève s'est démobilisé intellectuellement.

****

Nous tenons à remercier ici Oualy Konté et Tiémoko Malé, respectivement Inspecteur général de mathématiques et professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Bamako, pour leur aide efficace et souriante durant leur trop bref séjour grenoblois (trois mois...).

Nous remercions aussi les professeurs de physique du lycée Léonard de Vinci (Villefontaine), en particulier Danièle André, pour sa participation active.

Enfin nous remercions particulièrement Alain Dufresnoy, professeur à l'Université de Grenoble, pour sa participation régulière à nos débats et hésitations en tout genre quant à notre passage à l'écrit. Par ailleurs, les cours qu'il nous faisait, en nous remettant d'un coup au statut d'élève «qui ne comprend pas toujours tout de suite», nous ont aidé à oser écrire comme nous parlons ! Car sans aucun doute c'était les petites remarques du genre «vous voyez c'est ce terme qui nous encombre», «c'est celui-ci qui dérange», «on voudrait bien ceci, alors on va essayer à peu près»... qui nous permet taient d'avoir du recul et de la compréhension face à des cheminements non évidents ! Oui, Alain, nous insistons lourdement car ton arrivée tardive (l'année de l'écriture définitive) t'inquiétait sans cesse : tu n'étais pas «de trop» dans notre travail d'écriture, au contraire !

A la recherche...
du vecteur perdu.

SOMMAIRE

- Présentation du cahier-puzzle 1
- De l'utilité des vecteurs en mathématiques 7
- L'égalité des vecteurs 9
- De la longueur à la norme 13
- Exercices sur l'égalité et la construction de points 17
- L'addition des vecteurs vue par le dessin 21
  avec des exercices : corriger la copie d'un élève 27
- Lorsque l'on fait suivre plusieurs opérations 35
- Lorsque la norme rencontre l'addition des vecteurs 38
- Produit d'un vecteur par un nombre 43
- Où l'on retrouve le théorème de Thalès 57
- La notion de composantes d'un vecteur du plan 67
- De l'utilité des vecteurs en physique 79
- Les forces et les vecteurs 80
  avec des exercices corrigés 87
- Annexe des mathématiques utiles en physique 94
- Exercices concernant l'équilibre d'un solide 105
- Vitesses et vecteurs 112
  avec des exercices corrigés 121
- Vecteurs et quantité de mouvement 131

POURQUOI UN CAHIER - PUZZLE SUR LES VECTEURS ?

*** Voyons d'abord : pourquoi les vecteurs ?**

Nous sommes professeurs en seconde, mais nous avons aussi travaillé en quatrième et troisième. Nous avons observé que beaucoup d'élèves n'aiment pas les vecteurs… On a le droit de ne pas avoir de sympathie pour les vecteurs mais l'ennui est que si on n'apprend pas à les utiliser, c'est l'ORIENTATION en fin de seconde qui est en jeu.

En effet, bon nombre d'élèves aimeraient bien entrer en section scientifique, mais ils vont se trouver bloqués

- par la géométrie pour les mathématiques,
- par la mécanique pour la physique,

et leur «blocage» repose essentiellement sur une allergie aux vecteurs !

Il nous a donc semblé urgent de voir si on pouvait soigner cela…

*** Et pourquoi un cahier-puzzle ?**

Il y a bien des façons de faire un puzzle, et deux personnes différentes ne placeront pas les morceaux dans le même ordre… Bien sûr, on peut observer que presque tout le monde commencera par essayer de «faire le tour»… ce qui n'est pas toujours facile (s'il est blanc par exemple, avec juste des petits bouts de dessin qui apparaissent…).

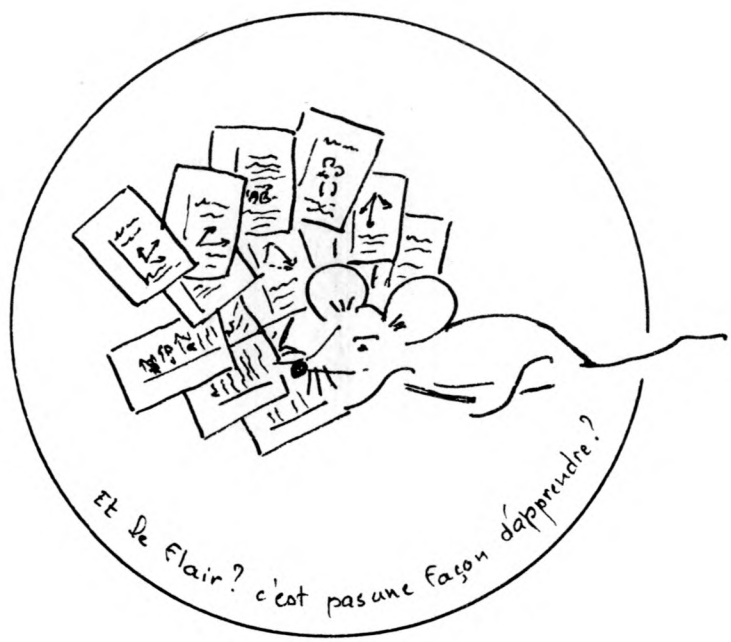
Et bien, il y a aussi beaucoup de façons d'apprendre les mathématiques !

Comme dans un puzzle, on essaie en général de s'aider avec ce que l'on sait déjà (on pourrait dire qu'on fait le tour de ses connaissances), mais parfois c'est difficile aussi…

Comme dans un puzzle encore, il n'y a pas **LA** bonne façon d'apprendre, mais il y a celle qui te convient à toi !

Alors dans ce premier cahier - car sans doute y en aura-t-il d'autres si la formule vous convient - nous te proposons les VECTEURS en pièces détachées. A toi de construire tes connaissances par toi-même, à la façon qui te convient.

Autrement dit nous te proposons de fureter dans les pages, mais surtout pas de les lire toutes de la première à la dernière !



*** Alors comment utiliser un cahier-puzzle ?**

Simplement pour t'aider à voir par où tu peux commencer.

Tu vas d'abord essayer de connaître un peu ta façon d'apprendre :

Lorsque tes parents achètent un nouvel appareil (une chaîne stéréo, une machine à coudre ou une nouvelle voiture…), préfères-tu :

- lire d'abord et bien en détail, toute la notice ? (éventuellement en manipulant un peu…),

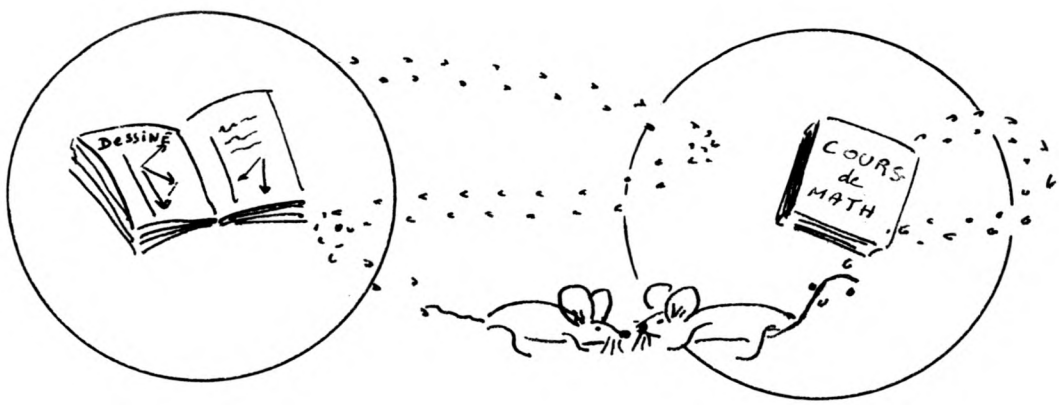
- ou bien faire fonctionner d'abord, peut-être un peu au hasard, et regarder la notice seulement quand tu ne trouves pas ou pour clarifier ce que tu as trouvé ?

Ce sont là deux façons d'apprendre et aucune n'est meilleure que l'autre. Ce qui est gênant c'est lorsqu'on t'impose la façon d'apprendre qui ne te con- vient pas…

Donc à toi de choisir.

- Si tu es du genre à aimer vraiment lire toute la notice avant d'essayer, alors prends tout un chapitre, lis-le en suivant et essaie de faire des exercices qui se rapportent à ce chapitre.

- Si tu préfères essayer, utilise le cahier-puzzle au moment où tu cherches un exercice proposé par ton professeur ou en refaisant des exercices que tu n'avais pas trouvé seul, ou encore en analysant tes erreurs…



*** Ce cahier n'est pas un livre…**

En effet, nos élèves ont participé avec nous à ce travail, puisque toutes les fiches sont nées :

- soit de questions d'élèves,

- soit d'erreurs réellement trouvées et analysées avec la classe,

- soit de séquences de classe où l'on cherchait ensemble, avec un magnétophone qui espionnait !

Comme ce cahier n'est pas un livre… tu n'y trouveras pas les «définitions». Nous avons remarqué que souvent nos élèves connaissent la définition d'un vecteur, mais il ne savent pas utiliser les vecteurs… Alors nous disons clairement :

«Mieux vaut savoir planter un clou que savoir la définition du marteau !».

Nous ne disons pas que les définitions ne sont pas utiles, nous disons qu'elles viendront plus tard, quand tu auras déjà manipulé des vecteurs. Quand tu seras en section scientifique, tu pourras alors sentir toute la portée de certaines définitions.

Dégustation...
de la définition des vecteurs!

*** Et nous ferons le tri dans les CONFUSIONS…**

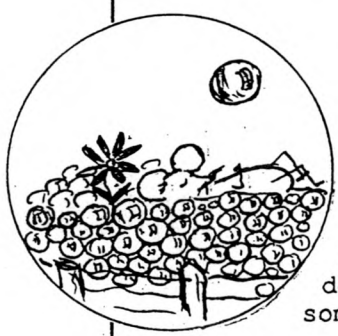
Les vecteurs n'ont pas été inventés d'un seul coup… Comme toutes les notions mathématiques, il a fallu du temps pour dégager un objet mathématique défini avec précision…

Alors nous accepterons aussi que pour un élève la notion de vecteur ne se mette pas en place dans sa tête immédiatement et de manière parfaite… parce que nous souhaitons écrire pour de «vrais» élèves…

Nous te signalerons donc, parmi les confusions que l'on rencontre habituellement :

- celle que l'on peut accepter au début de l'apprentissage, (confondre la norme et la longueur, confondre un vecteur et un bipoint…). Tu éclairciras cela plus tard,

- et les confusions QUE L'ON NE PEUT PAS ACCEPTER, car elles t'empêcheraient d'avancer (comme confondre un vecteur avec sa longueur). Il faudra donc mettre toute ton énergie pour vaincre celles-ci.



***** C'était l'introduction.**

(On dit aussi un préambule, c'est plus joli…).

Pour une meilleure utilisation de ce cahier, la liste des titres figure au début, avec le numéro des pages (c'est le sommaire)

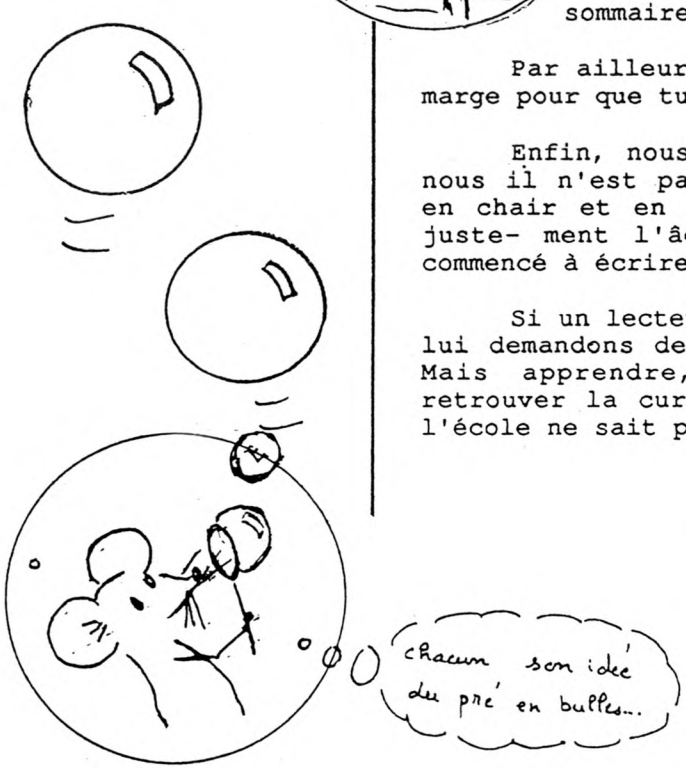
Par ailleurs nous avons laissé une assez grande marge pour que tu puisses écrire aussi !

Enfin, nous tutoyons le lecteur parce que pour nous il n'est pas une abstraction, mais nos élèves, en chair et en rires, ou nos enfants… qui avaient juste- ment l'âge de nos élèves quand nous avons commencé à écrire.

Si un lecteur «moins jeune» nous lit aussi, nous lui demandons de nous excuser de cette familiarité… Mais apprendre, c'est peut-être, à tout âge, retrouver la curiosité de l'enfant que, sans doute, l'école ne sait pas toujours respecter…

Raymond Chuzeville

Sylviane Gasquet



UN OBSTACLE A FRANCHIR : LES VECTEURS

As-tu remarqué que beaucoup d'élèves n'aiment pas les vecteurs ou encore «n'y arrivent pas» ? Et bien il y a une raison toute simple à cela, mais une raison que l'on vous dit rarement : les vecteurs c'est une notion DIFFICILE !

Tu penses peut-être : ce n'est pas très encourageant de nous dire ça !

Mais si on te dit que c'est facile et si on te le laisse croire, que se passe-t-il lorsque tu rencontres tes premières difficultés : tu te dis, ça y est, je suis faible en math, et dans ta tête tu te mets à renoncer… et il y a peu de chance alors que tu arrives à vaincre les vecteurs !

Alors nous préférons te dire que cette notion n'est pas facile pour que tu te prépares dans ta tête à être «combatif». Parce que nous te disons aussi qu'il est **TOUT À FAIT POSSIBLE** de gagner la bataille sur les vecteurs.

(On voit beaucoup de sport à la télévision. On voit souvent des champions aussi techniquement forts l'un que l'autre. Mais il y a aussi tout ce qui se passe dans leur tête qui est très important. Bien sûr la technique est indispensable, mais elle ne suffit pas…).

Dans les fiches qui vont suivre, nous allons essayer de voir avec toi ce qui n'est pas simple (et même parfois comprendre pourquoi c'est difficile !), par exemple à propos de l'égalité des vecteurs ou de leur addition.

Platini = 2 pieds + 1 tête

DE L'UTILITE DES VECTEURS...
...EN MATHEMATIQUES

*** En mathématiques, les vecteurs sont un OUTIL pour prouver, pour démontrer, pour résoudre des problèmes.**

(Encore une différence entre les «profs» de math et de physique : ils n'ont pas la même façon de prouver… Pour mieux comprendre cela, voir page 79).

Au collège, tu as déjà rencontré (même si tu ne sais pas toujours le faire quand tu es seul) des démonstrations utilisant :

- des théorèmes (exemple : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux),
ET
- des déductions pour passer des données à la conclusion souhaitée. (On reconnaît les déductions par les petits mots : puisque, car, donc… Ce sont ces mots qui font tenir entre eux les théorèmes, comme le fil d'un collier fait tenir les perles. D'ailleurs on dit aussi «suivre le fil d'une démonstration» ou «le fil d'un discours»).

Avec les vecteurs, **on te propose un NOUVEL OUTIL pour démontrer.**

Il est assez normal alors que tu te poses des questions en tant que «consommateur». (L'outil vecteur, tu ne le payes pas avec de l'argent, mais avec ton temps de travail de lycéen…) :

- Un nouvel outil pour démontrer, est-ce utile puisqu'on en a déjà un ?
- Est-il meilleur que le précédent ? Est-il plus facile à utiliser ? Plus efficace ?
- Et après avec deux outils… ce sera encore plus compliqué : il faudra choisir !

A titre de comparaison, prenons un exemple de la vie courante.

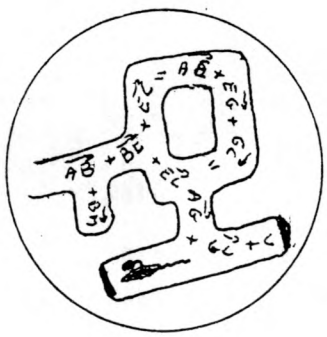
Lorsqu'on est enfant, on apprend à faire du vélo puis vers 18 ans, on apprend à conduire une voiture. On dispose alors de deux moyens de transport. L'idéal est de bien maîtriser vélo et voiture afin de pouvoir

CHOISIR, pour chaque situation, le moyen le plus efficace : une montée à 15 % écarte le choix du vélo, des embouteillages monstres écartent le choix de la voiture. Parfois la situation laisse le choix et alors on est libre de suivre son humeur… Ce qu'il faut bien saisir c'est qu'il n'y a pas de BON moyen de transport puisque cela dépendra de la distance, du temps, du poids d'un objet à ramener, des places de parking…

De même, il n'y a pas une méthode à privilégier pour démontrer, cela dépend du problème envisagé.

IL FAUDRA DONC

- se dire que les vecteurs sont un nouvel outil pour démontrer et que ce serait bête de ne pas voir comme il fonctionne, car plus on aura de choix plus on sera libre… De même qu'on s'habitue à la voiture bien avant de conduire seul, il faut se familiariser avec les vecteurs en observant ces démonstrations faites par d'autres. Peut-être vous a-t-on lâché trop vite pour conduire tout seul au pays des vecteurs ? Il est normal de ne pas savoir utiliser les vecteurs tout de suite comme il faut !

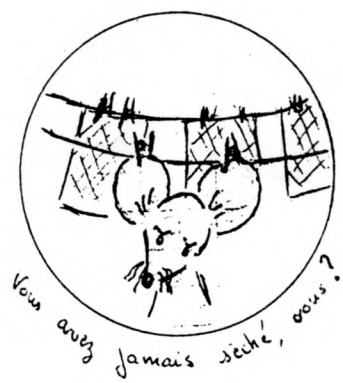


- puis il faut apprendre peu à peu à se diriger seul :

.. il faut apprendre les règles de calcul vectoriel (comme on apprend le code de la route…)

.. essayer d'aller seul des données à la conclusion, sans s'affoler ni se décourager si «on se perd en route» ou si on prend un chemin très long alors que le prof donnera une solution en trois lignes… (tout le monde s'est perdu plusieurs fois dans les labyrinthes de la relation de Chasles !).

- Enfin lorsqu'on se sentira aussi à l'aise avec les vecteurs qu'avec d'autres outils (ou pourquoi pas plus à l'aise avec les vecteurs !), il faudra apprendre à **CHOISIR** entre les divers outils. Et si possible faire le «meilleur choix» avant de chercher trop longtemps, c'est-à-dire dès la lecture du texte.



PREMIERE DIFFICULTE : L'EGALITE DES VECTEURS

*** Tu connais le signe EGAL depuis l'école primaire…**

$1+1 = 2$ ou $6:2 = 3$.

D'un côté l'opération est posée, de l'autre il y a son résultat. On peut considérer que 6:2 est une autre écriture du nombre 3.

$3 \times 2 = 5 + 1$.

Ici on a deux écritures du nombre 6… (deux opérations différentes donnant le même résultat).

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ …

Ce sont des écritures différentes du même nombre décimal 0,5.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

Ce sont des écritures d'un même nombre qui, cette fois, n'est pas un nombre décimal (car la division ne s'arrête pas). On peut appeler ce nombre

le rationnel $\frac{1}{3}$

du nom de la fraction irréductible.

Dans tes premières rencontres avec le signe = celui-ci était donc associé à des nombres.

*** Le mot EGAL s'utilise aussi dans les conversations…**

Lorsqu'on fait l'ourlet d'un pantalon neuf parce qu'il était trop long, on vérifie à plat que les deux jambes sont égales…

Lorsque Mme Spa qui vient d'adopter deux petits chiens en même temps va acheter des laisses neuves, elle cherche des laisses de couleurs différentes mais égales…

Dans un livre de cuisine on peut lire : «mêler une quantité égale de farine et de sucre…»

Dans tous ces exemples le mot EGAL est encore associé à des nombres, souvent à une longueur, parfois à un poids ou un volume… Même si on ne le dit pas entièrement, le mot égal concerne la mesure la plus simple concernant les choses dont on parle (pour une laisse de chien, on pense d'abord à la longueur, mais on pourrait mesurer aussi la solidité…).

*** Pourquoi l'égalité des vecteurs est-elle difficile ?**

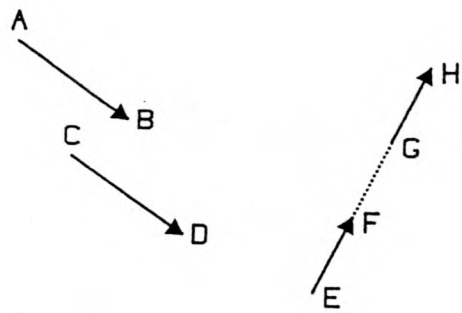
Parce que tes habitudes vont te gêner !

A propos de l'égalité des vecteurs, tu risques sans le vouloir, de revenir à l'égalité des nombres : par exemple en disant que deux vecteurs sont égaux parce que sur le dessin tu vois deux flèches de même longueur…

Dans ta tête, le mot EGAL ou le signe = fonctionne comme un aimant qui attire l'idée de nombres à cause de nos habitudes…

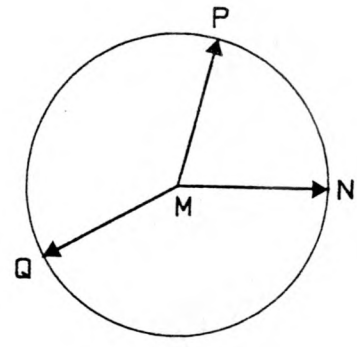
Il faut donc détruire cette association d'idées ÉGALITÉ - NOMBRE. Cela est plus facile à dire… qu'à faire !

D'abord bien regarder les dessins suivants, surtout celui de droite, pour les graver dans ta mémoire visuelle :



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$



$\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{MQ}$ …

*** Pourquoi «analyser ses erreurs» ?**

Mais il arrivera quand même que tu te trompes encore ! Et cela sera «normal»… parce que les habitudes, on les suit justement sans y penser !

Voici une façon de t'aider à détruire l'habitude EGALITÉ - NOMBRE. Lorsque tu constates que tu t'es trompé, tu te le dis avec des mots, tu t'expliques, tu analyses ton erreur…

Analyser son erreur est une façon très normale de faire des progrès, dans tous les domaines…

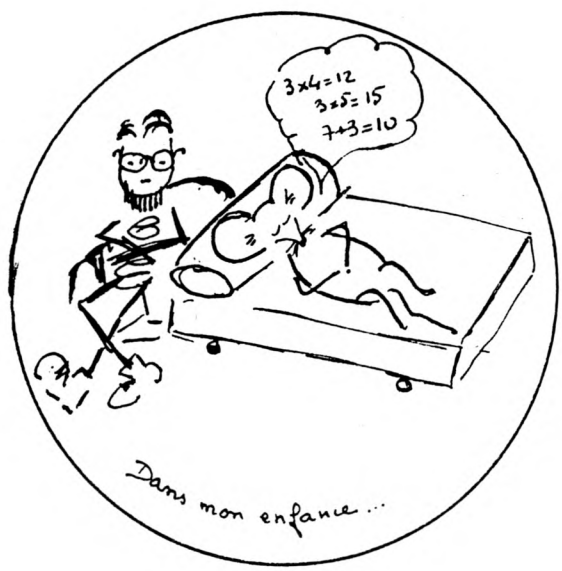
- «Ce gratin est mauvais» dit Jean apprenti cuisinier ! S'il en reste à cette constatation, il n'en fera plus, il se souviendra seulement de son échec.

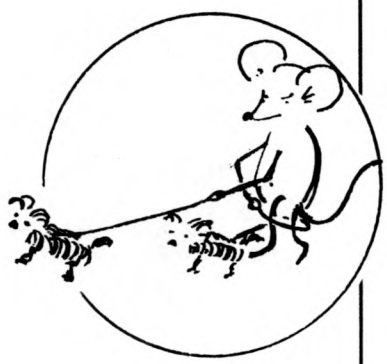
- «Ce gratin est mauvais ! je pense que je n'ai pas mis assez de crème. La prochaine fois…» Ici, ce n'est pas un échec mais une **ETAPE** dans l'apprentissage.

Si tu y réfléchis, que ce soit en bricolant ta mobylette ou bien en essayant de progresser en sport ou en musique, analyser «ce qui ne va pas bien» est une méthode efficace pour avancer.

En mathématiques aussi, tu avanceras plus efficacement en «décortiquant» tes erreurs toi-même (tu demandes de l'aide si tu n'y arrives pas seul, mais il faut que tu finisses par le dire avec tes mots à toi).

Dans le cas d'une erreur sur l'égalité des vecteurs, tu sauras la dire assez facilement. Et en la disant tu finiras par éviter l'habitude…





*** A propos des segments égaux…**

C'est en effet au collège que tu as rencontré pour la première fois la notion d'égalité à propos d'objets qui n'étaient pas des nombres…

Nous allons prendre l'exemple du triangle isocèle.

Il y a ici un grand risque de parler comme dans les conversations ordinaires :

«Un triangle isocèle a deux côtés égaux»…

Les côtés en tant qu'objet, en tant que segments, **NE SONT PAS EGAUX**, ce sont les nombres qui mesurent leur longueur qui sont égaux… (C'est exactement comme pour la laisse des chiens !).

En mathématique, on distingue nettement la longueur du segment qui est un nombre (noté AB) et l'objet segment (noté [AB]).

Dans le triangle isocèle dessiné plus haut :

$$AB = AC \quad \text{mais} \quad [AB] \neq [AB].$$

Il faudrait donc dire : «Un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés de même longueur», ou encore «dans un rectangle, les diagonales ont même longueur».

Mais franchement, il arrive encore, même au professeur, de parler comme dans les conversations ordinaires parce que c'est plus simple et… qu'on se comprend quand même ! La confusion longueur - segment pourra s'effacer un peu plus tard, par exemple quand tu seras en section scientifique si c'est ce que tu souhaites.

Mais la confusion VECTEUR - LONGUEUR a, elle, de graves conséquences. Elle risque de t'empêcher de savoir utiliser l'outil vecteur pour démontrer, elle risque de te bloquer gravement, y compris pour ton orientation… Voilà pourquoi nous insistons lourdement sur cela !

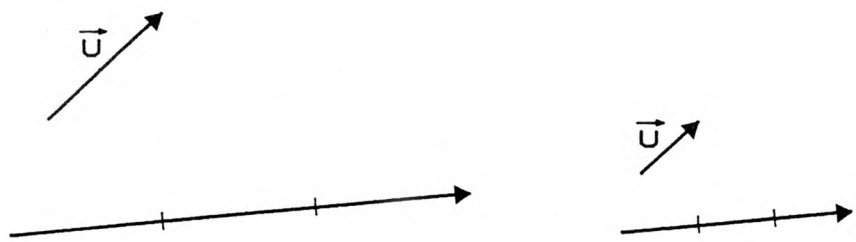
DE LA LONGUEUR A LA NORME...

* Il n'est pas très facile de t'expliquer la différence entre longueur et norme… et si tu confonds encore un peu ces deux notions ce n'est pas encore très très grave (cela le deviendra si tu choisis d'entrer dans une section scientifique, alors il sera temps d'explorer à fond cette distinction !).

Nous dirons seulement qu'il faut distinguer un vecteur et la représentation sous forme de dessin…

Lorsque le professeur dessine au tableau un «vecteur unitaire», tu en dessines un aussi sur ton cahier, mais bien sûr… la flèche que tu dessines n'a pas la même longueur que la flèche dessinée au tableau…

Quand on parle de NORME, on se place au-dessus de cette distinction.



Au tableau sur un cahier

La flèche du vecteur unitaire du tableau mesure peut-être 20 cm, celle de ton cahier 1 cm.

Mais si on représente un vecteur de norme 3, on respectera les proportions :

- au tableau la flèche représentant un vecteur de norme 3 aura une longueur de 60 cm,

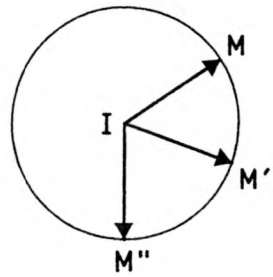
- sur ton cahier, la flèche représentant un vecteur de norme 3 aura une longueur de 3 cm.

La **NORME** permet d'avoir le même langage tout en ayant des dessins de taille différente.

- La longueur est donc un nombre suivi d'une unité.

- La norme est un nombre sans unité. Elle se réfère à une norme unité. On sait que cette norme unité existe, et chacun en fait un dessin à l'échelle qui l'arrange le mieux.

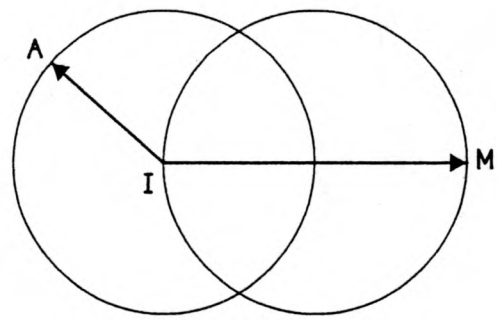
ATTENTION, en géométrie, lorsqu'on te parlera de norme d'un vecteur, c'est que l'on suppose qu'il existe une norme unité, LA MEME dans toutes les directions…



Si M est un point d'un cercle de centre I alors tous les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ (qui sont différents à cause de leurs directions distinctes) ont la même norme.

Cela est tout à fait différent de ce que tu as peut-être rencontré en regardant les représentations graphiques de certaines fonctions, en particulier dans les livres de géographie : l'unité sur l'axe vertical n'est pas la même que sur l'axe horizontal…

NOTATION.



Longueur : IA = 2 cm donc IM = 4 cm.

Norme : $\|\overrightarrow{IA}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{IM}\| = 2$.

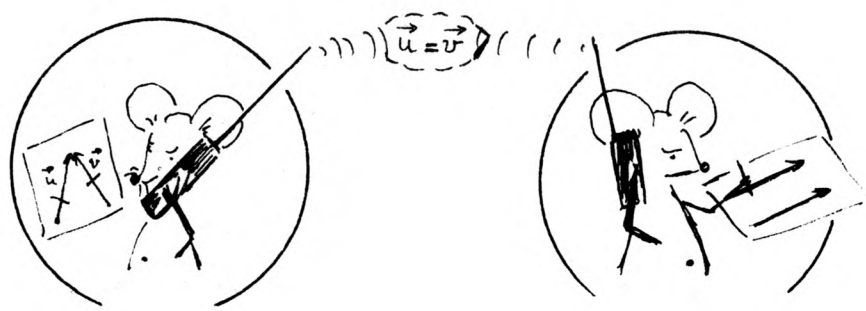
UN PROBLEME DE VOCABULAIRE...

* Lorsque deux segments ont la même longueur, on a vu qu'on était tenté de dire qu'ils étaient égaux, mais cela n'est PAS CORRECT.

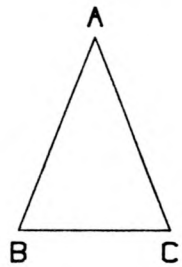
Pour parler de segments ayant la même longueur, on parle parfois de segments «isométriques». (Iso qui veut dire égal, métrique qui veut dire mesure. On a donc fabriqué un mot qui dit très exactement que les deux segments ont la même mesure. Mais comme ce mot n'est pas employé en dehors du cours de math, on se laisse encore influencer par le langage ordinaire et on fait un «abus de langage» : c'est une expression incorrecte mais qui est quand même comprise et qui n'a pas de graves conséquences).

* Lorsque deux vecteurs ont la MEME NORME, il n'y a pas de mot simple pour le dire…

C'est peut-être pour cela qu'on tombe dans le piège et qu'on dit vecteurs égaux. Mais alors… on dit autre chose que ce que l'on voulait dire.



Cette erreur de vocabulaire empêche de se faire comprendre. Et cela conduit à des contradictions dans le calcul vectoriel…



Exemple.

Le triangle ABC étant isocèle, Alfred écrit A TORT :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

Puis il calcule «logiquement» :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0},$$

soit finalement $\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ ce qui est manifestement faux !

Dans un calcul plus compliqué Alfred risque de ne pas s'apercevoir lui-même de son erreur…
C'est là que les profs ont envie d'écrire dans la marge «tu écris n'importe quoi» parce que **confondre norme et vecteur amène toujours de graves contradictions.**

Tu retrouveras ce risque de confusion dans le cours de physique.

Prenons l'exemple du mot vitesse.

Dans le langage courant, si on parle d'un accident arrivé au carrefour, on pourra entendre dire que les deux véhicules qui se sont percutés à angle droit, allaient à la «même vitesse»…

Mais en physique on te parlera aussi d'un «Vecteur Vitesse» qu'il ne faudra pas confondre avec la vitesse dont on parlait pour l'accident… La vitesse au sens usuel est un nombre qui a quelque chose à voir avec le «vecteur vitesse», tu verras cela en détail dans la seconde partie, mais ce nombre ne dit rien sur les directions par exemple…

Nous voulons juste insister ici sur la grande importance, pour les mathématiques comme pour la physique, **de ne pas confondre un vecteur et une longueur…**

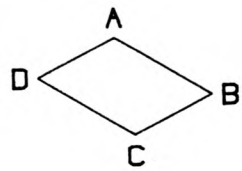
Un vecteur est une notion plus «riche», plus complexe qu'un nombre. Il ne faut pas le résumer par une seule information (sa longueur)…

(…cette façon de résumer par un nombre me fait penser à la naissance d'un bébé… Combien de fois n'entend-on pas ce «résumé» stupide : il pèse 3 kg 400, comme si avec ce nombre on avait tout dit !).

EXERCICES

A PROPOS DE L'EGALITE DES VECTEURS.

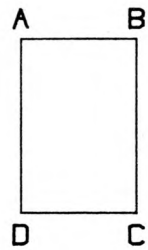
* Dans chaque cas de figure, dire si les égalités écrites sont vraies ou fausses (et si possible pourquoi).



1. ABCD est un parallélogramme :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$?



2. ABCD est un rectangle :

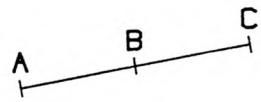
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$?

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$?

CA = BD ?

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$?

AD = CB ?



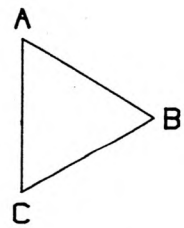
3. B est le milieu de [AC] :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$?

[AB] = [BC] ?

[AB] = [BA] ?

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?



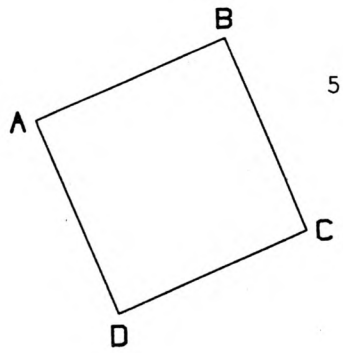
4. ABC est un triangle équilatéral :

AB = AC ?

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$?

[CB] = [CA] ?

CA = CB ?



5. ABCD est un carré :

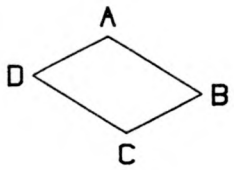
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$?

AC = BD ?

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$?

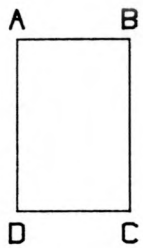
[AB] = [DC] ?

A PROPOS DE L'EGALITE DES VECTEURS.



1. $\overrightarrow{AB}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{CD}$, ils sont de sens contraire.

$\overrightarrow{AD}$ est bien égal à $\overrightarrow{BC}$ d'après la configuration des vecteurs égaux (ici, vrai parallélogramme).

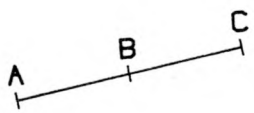


2. $\overrightarrow{AD}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{CB}$, ils sont de sens contraire.

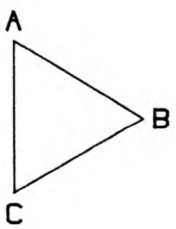
$\overrightarrow{AC}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{BD}$ car leurs directions sont différentes. Seules les longueurs sont égales et on pourrait donc écrire AC = BD ou CA = BD.
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ est vrai car on a bien la configuration des vecteurs égaux.
AD = CB est vrai. Les côtés opposés d'un rectangle ont bien la même longueur.

3. Il est vrai que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Cette égalité est même une définition vectorielle du milieu d'un segment. Elle est utilisée pour montrer qu'un point est le milieu d'un segment donné.
[AB] n'est pas égal à [BC] car les segments sont distincts [AB] = [BA] est vrai. Ce sont deux écritures du même segment.
$\overrightarrow{AB}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{BA}$. Ce sont des vecteurs opposés.



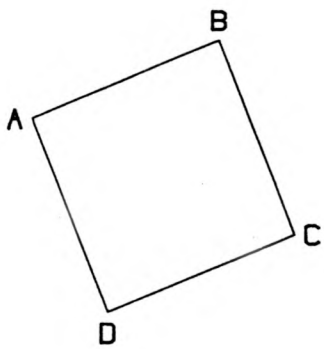
4. AB = AC est vrai puisque les longueurs des côtés sont égales. Mais $\overrightarrow{CB}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{CA}$ car les directions sont différentes.



[CB] ≠ [CA] car les segments sont distincts.

CA = CB est vrai. Dans un triangle équilatéral, les côtés ont la même longueur.

5. $\overrightarrow{BA}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{BC}$ car leurs directions sont différentes.

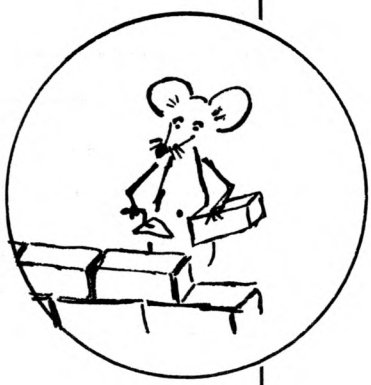


AC = BD est vrai : les diagonales d'un carré ont même longueur.

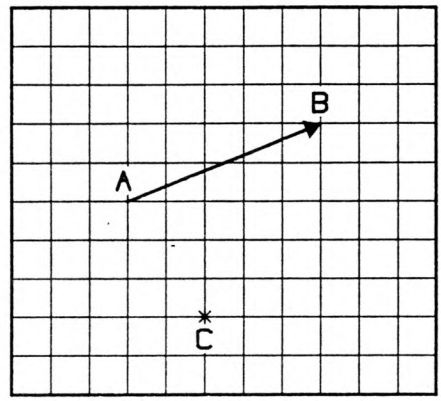
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ est vrai car cela correspond à la configuration des vecteurs égaux.

[AB] n'est pas égal à [DC] car ces segments ne sont pas confondus.
Par contre $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est vrai.

EXERCICES DE CONSTRUCTIONS.

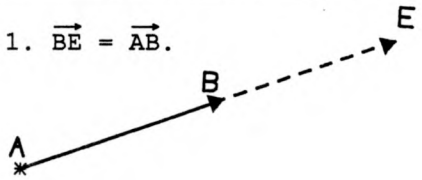


Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné ci-dessous, ainsi que le point C. Effectuer, lorsque cela est possible, les constructions demandées.



1. Construire E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$.
2. Construire F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$.
3. Construire G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$.
4. Construire H tel que $[BH] = [AC]$.
5. Construire M tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$.
6. Construire N tel que $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB}$.
7. Construire P tel que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AB}$.
8. Construire Q tel que $AQ = AB$.
9. Construire S tel que $AS = BS$.

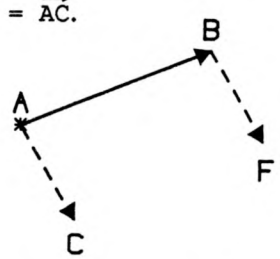
1. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$.



C

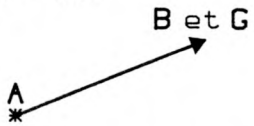
Dessine, en partant de B, un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.

2. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$.



Dessine, en partant de B, un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$.

3. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$.



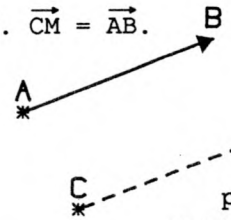
En dessinant, à partir de A, un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$, on obtient le point B. Donc G est confondu avec B.
A retenir : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à G = B.

(Il existe un seul vecteur d'origine donnée, égal à un vecteur connu).

4. [BH] = [AC].

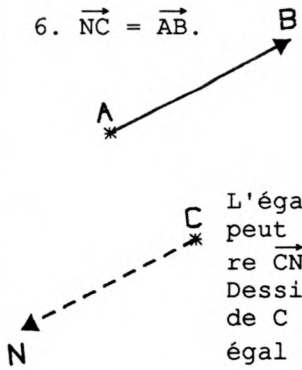
Les segments [BH] et [AC] sont confondus d'après l'égalité. Comme B n'est ni A ni C, on ne peut pas construire H.

5. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$.



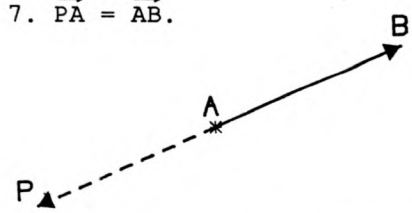
Dessine à partir de C, un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.

6. $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB}$.



L'égalité $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB}$ peut aussi s'écrire $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BA}$.
Dessine à partir de C un vecteur égal à $\overrightarrow{BA}$.

7. $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AB}$.



$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AB}$ peut aussi s'écrire $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$.Donc dessine, à partir de A, un vecteur égal à $\overrightarrow{BA}$.

8. AQ = AB.
Q est à la même distance de A que B. Il y a une infinité de points Q possibles, tous ceux du cercle de centre A et de rayon AB.

9. AS = BS.
Le point S est à égale distance de A et de B. Il y a une infinité de points possibles, tous ceux placés sur la médiatrice du segment [AB].

SECONDE DIFFICULTE : ADDITIONNER DES VECTEURS.

*** Pourquoi est-ce difficile ?**

Les verbes «additionner», «ajouter» sont des mots familiers, mais jusqu'ici tu ne les avais fait fonctionner qu'avec des nombres (nombres entiers, puis décimaux, puis relatifs etc., mais toujours des nombres).

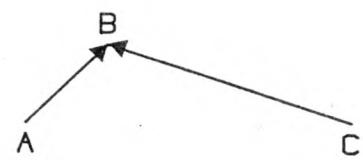
Comme pour le mot égal, ce sont donc des mots qui vont attirer l'idée de nombre dans ta tête… et cela provoque parfois des erreurs.

*** Notre idée pour t'aider :**

- voir rapidement les «dessins» concernant l'addition dans des cas où un élève se trompe rarement ! (Si tu as besoin d'un entraînement supplémentaire, consulte d'autres livres, ou demande à ton professeur),
- s'attarder sur des cas. où un élève se trompe presque toujours !

Par exemple

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

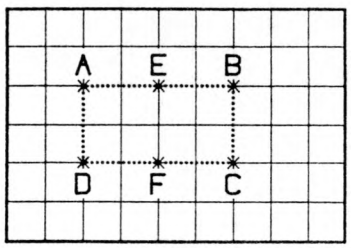


Ce genre d'exemple n'est pas un piège conçu pour égarer les élèves, comme tu pourrais le penser tout d'abord.

Prenons un exemple de la vie courante : on sait vraiment conduire une voiture si on ose aller partout avec, à la campagne, mais aussi dans une grosse circu- lation, dans des rues accidentées (se garer dans une forte pente…). Alors nous souhaitons vous aider à savoir **vraiment** additionner des vecteurs. Parce que lorsque vous aurez compris même les cas bizarres, vous n'aurez même plus à vous souvenir, ou à réapprendre une autre année, vous saurez FAIRE (comme on sait encore nager même si on s'arrête plusieurs années…).

* Personne ne peut te dire combien de temps ni combien d'exercices il te faudra pour savoir faire… C'est à toi de le sentir. Si cela te semble nécessaire ou utile, demande d'autres exemples «biscornus» à ton professeur, ou bien demande à un camarade un exemple qui lui paraît difficile, ou essaie de corriger les erreurs de tes camarades qui se trompent encore.

L'ADDITION DES VECTEURS... VUE PAR DES DESSINS



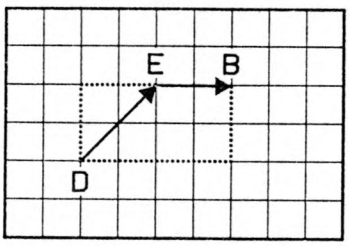
*** Figure de départ.**

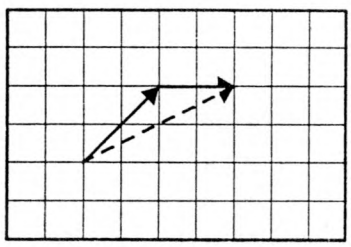
Un rectangle (ABCD) dont la longueur est le double de la largeur. E est le milieu de [AB] et F le milieu de [CD].

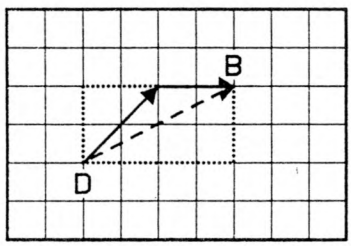
*** Conventions pour dessiner les traits.**

Nous allons ajouter des vecteurs issus de la figure précédente.
- Les vecteurs à ajouter seront en trait plein.
- Le reste de la figure s'estompe : nous dessinerons le rectangle en pointillé ou même nous ne le dessinerons pas.
- Le vecteur somme est dessiné comme ceci : ------►

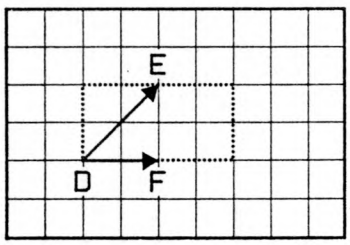
*** Les vecteurs sont «bout à bout» :** $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}$.

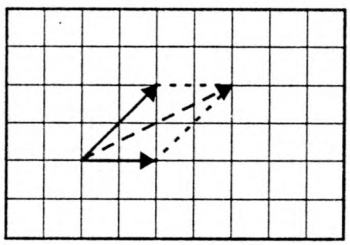


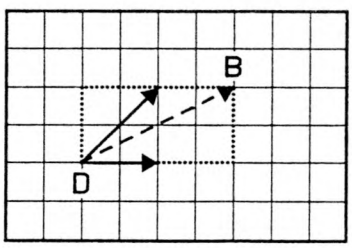




*** Les flèches partent du même point :** $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}$.

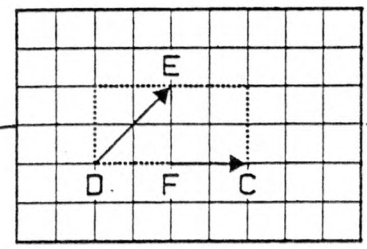






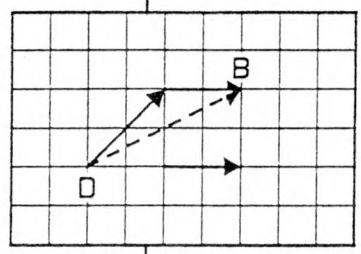
On construit un parallélogramme avec les côtés [DE] et [DF] mais on pourrait dire aussi qu'on met au bout de $\overrightarrow{DE}$ le même vecteur que $\overrightarrow{DF}$... ou bien encore au bout de $\overrightarrow{DF}$ on met le même vecteur que $\overrightarrow{DE}$. Tout cela revient au même sur le dessin.

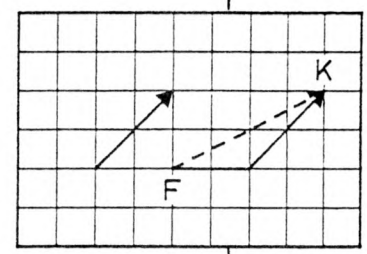
*** Les flèches ne se touchent pas : $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC}$.**

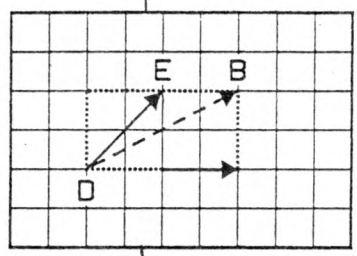


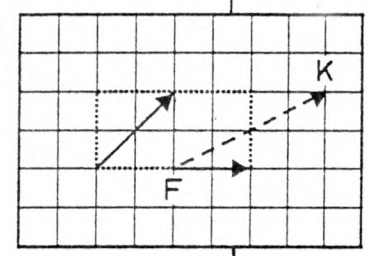
On met au bout de $\overrightarrow{DE}$ le même vecteur que $\overrightarrow{FC}$. On obtient alors la flèche $\overrightarrow{DB}$.

On met au bout de $\overrightarrow{FC}$ le même vecteur que $\overrightarrow{DE}$ On obtient alors $\overrightarrow{FK}$.

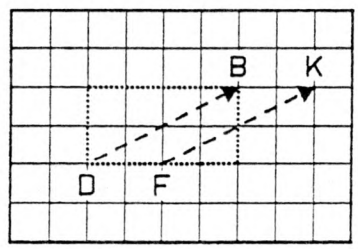


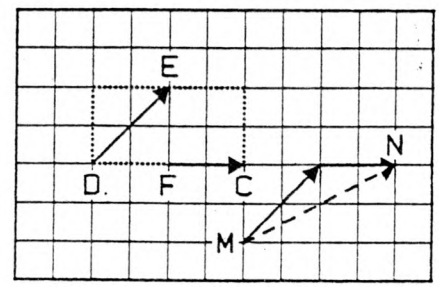






On n'obtient pas la même flèche…

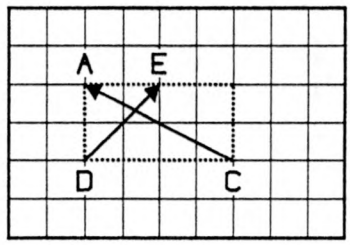




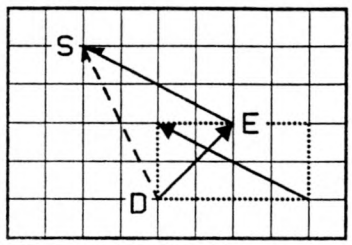
$\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux.

En français, il y a des mots qui signifient la même chose (des synonymes). De même ici, la somme $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC}$ est représentée par $\overrightarrow{DB}$, ou par $\overrightarrow{FK}$, ou par toute autre flèche (comme $\overrightarrow{MN}$) obtenue en mettant «bout à bout» des vecteurs égaux aux vecteurs donnés à partir d'un point quelconque.

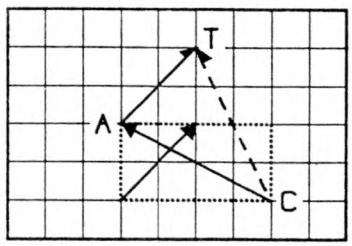
*** Les flèches se croisent ! Exemple $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CA}$.**



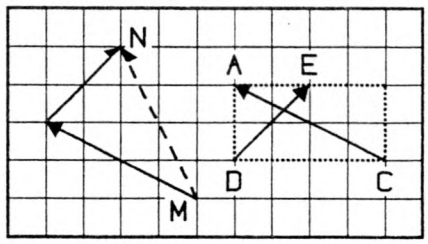
La encore plusieurs façons de faire.



Soit en mettant au bout de $\overrightarrow{DE}$ le même que $\overrightarrow{CA}$, ce qui donne $\overrightarrow{DS}$.



Soit en mettant au bout de $\overrightarrow{CA}$ le même que$\overrightarrow{DE}$ ce qui donne $\overrightarrow{CT}$.

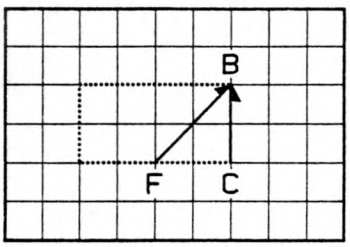


Soit encore à partir d'un point M quelconque, pour ne pas surcharger la figure, ce qui donne ici $\overrightarrow{MN}$.

De toutes façons : les vecteurs sommes obtenus sont égaux :

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{MN}.$$

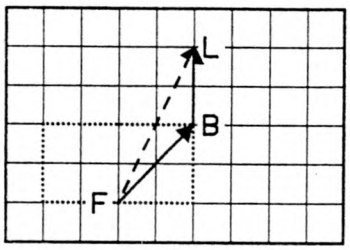
*** Les flèches se touchent à l'extrémité.**

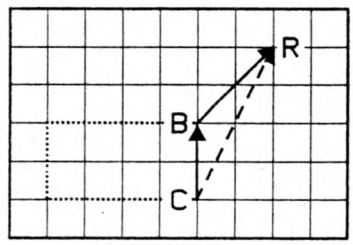


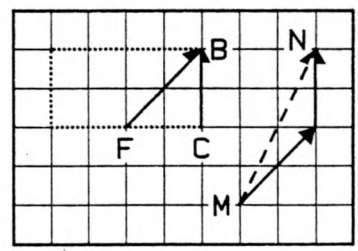
Exemple : $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CB}$.

Ici encore, trois façons de faire, que nous ne détaillerons pas.

On obtient $\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{MN}$.

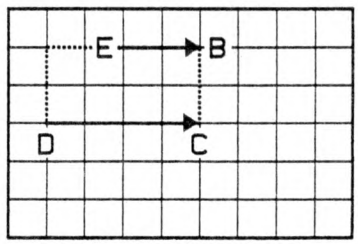






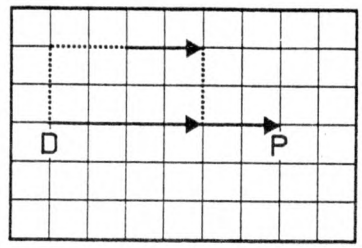
*** Les flèches sont parallèles ou portées par une même droite.**

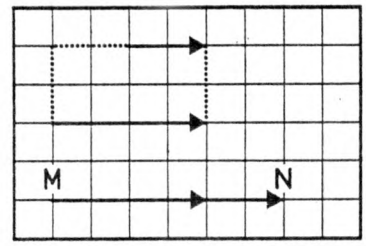
Nous proposons d'observer les figures suivantes.

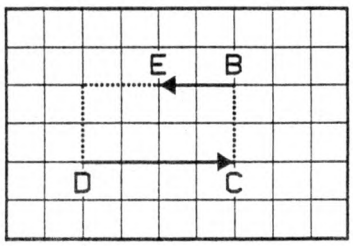


Exemple : $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{EB}$;

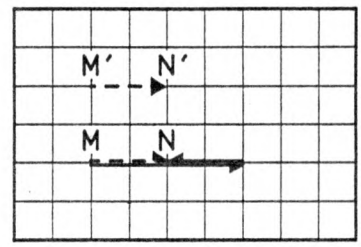
on obtient $\overrightarrow{DP}$ ou $\overrightarrow{MN}$, mais $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{MN}$.

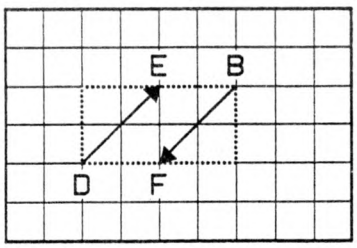






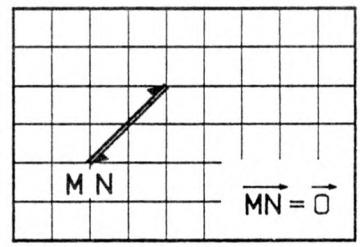
$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BE}$
c'est $\overrightarrow{MN}$ ou $\overrightarrow{M'N'}$;
$\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont de sens contraires.

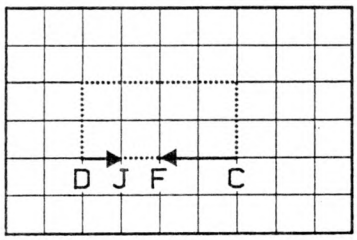




$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BF}$;
M est confondu avec N :
$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BF} = \vec{0}$.

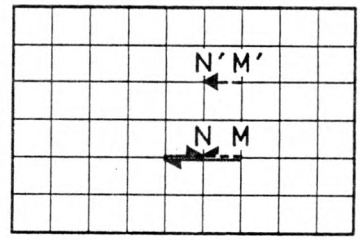
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont opposés.





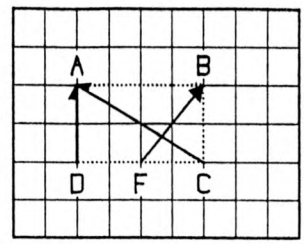
$\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{MN}$ ou $\overrightarrow{M'N'}$;

$\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont de sens contraires.

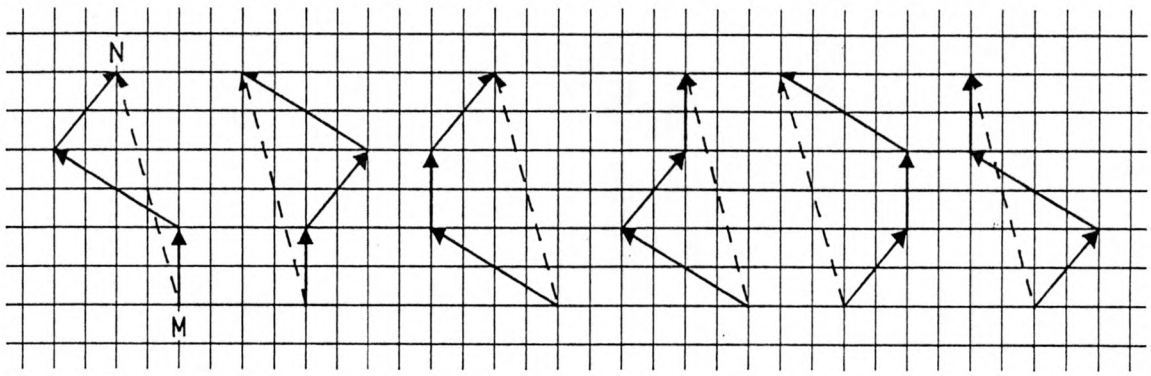


*** Et pour additionner TROIS vecteurs ?**

On met les trois flèches bout à bout.
Exemple : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FB}$.



Voici les diverses constructions possibles à partir d'un point M quelconque.

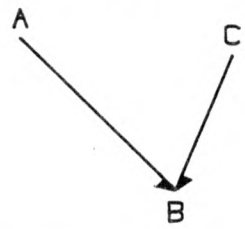
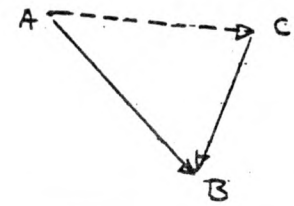
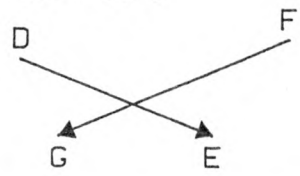
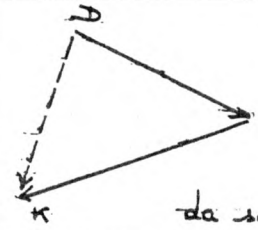
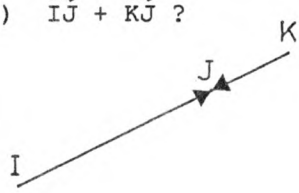
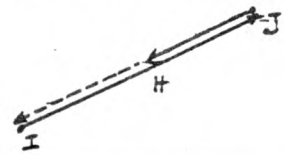
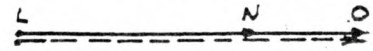
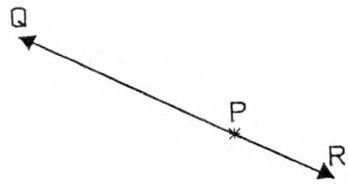
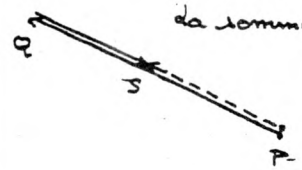
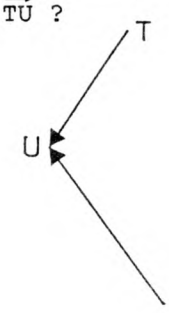
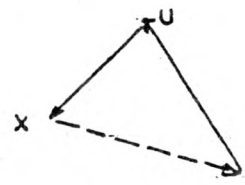


A TOI DE JOUER AU PROF !

Corrige la copie d'Alfred de façon à ce qu'il comprenne les erreurs qu'il a commises.

DEVOIR n° 1

DANS CHACUN DES CAS SUIVANTS, CONSTRUIRE LA SOMME.

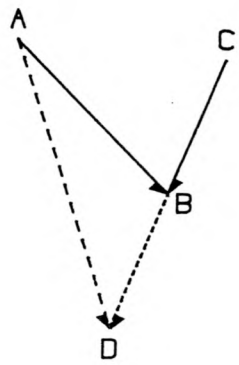
Situation	Situation proposée par Alfred
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$? 	la somme est $\overrightarrow{AC}$ 
2) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG}$? 	 $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{FG}$ la somme est $\overrightarrow{DK}$
3) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KJ}$? 	$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{KJ}$ la somme est $\overrightarrow{HI}$ 
4) $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LN}$?	$\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{LM}$ la somme est $\overrightarrow{LO}$ 
5) $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}$? 	$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ la somme est $\overrightarrow{PS}$ 
6) $\overrightarrow{VU} + \overrightarrow{TU}$? 	$\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{TU}$ la somme est $\overrightarrow{XV}$ 

EXEMPLE POSSIBLE DE CORRIGE DE LA COPIE D'ALFRED !

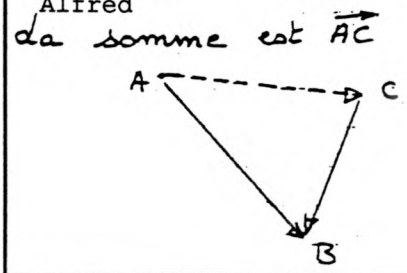
Pour faciliter la lecture, nous avons remis les solutions proposées par Alfred à droite de la feuille.

CORRIGE

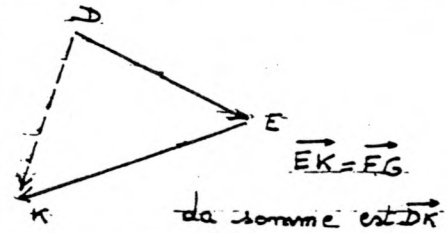
1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas «bout à bout», il fallait construire $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$ pour repartir de B.
La somme est alors $\overrightarrow{AD}$.
En fait, $\overrightarrow{AC}$ que tu as trouvé représente $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ soit $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.



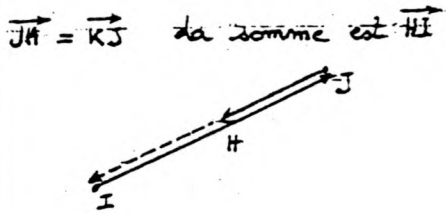
Solution proposée par Alfred



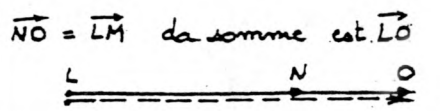
2) Construction exacte.



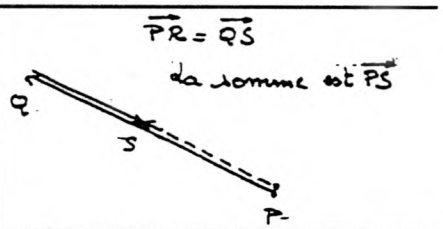
3) Tu as bien dessiné des vecteurs bout à bout : $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JH}$.
Mais ta conclusion est fausse : la somme est $\overrightarrow{IH}$ et non $\overrightarrow{HI}$.
La somme ce n'est pas le vecteur qui ramène au point de départ… mais celui qui propose un **raccourci** partant de I comme $\overrightarrow{IJ}$ pour arriver à H comme $\overrightarrow{JH}$.



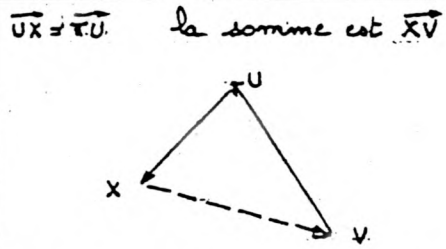
4) Construction exacte.



5) Construction exacte.



6) Tu as refais la même erreur qu'à la question 3. Mais, ici, bien que cette question soit la même que 1, tu as bien su mettre les vecteurs bout à bout.
La somme est $\overrightarrow{VX}$ et non $\overrightarrow{XV}$.

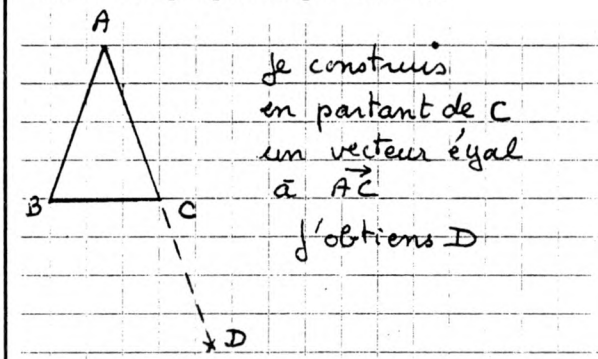
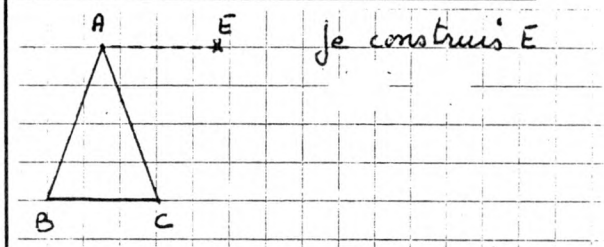
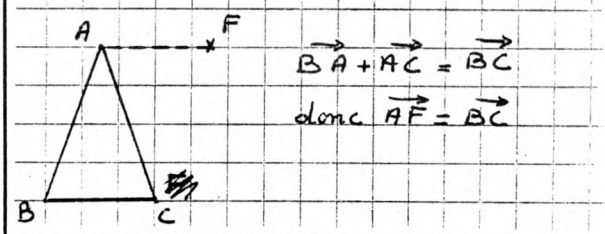
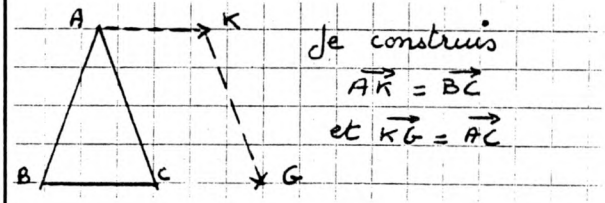
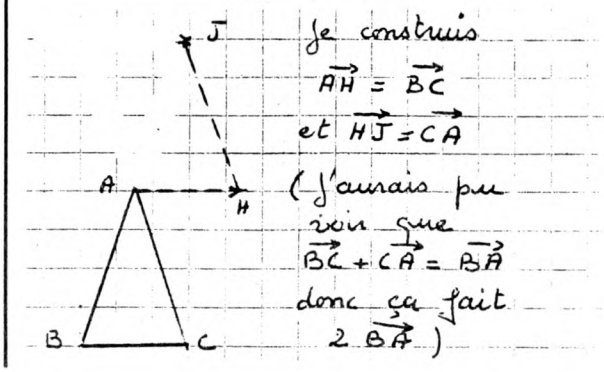


COMMENTAIRE GENERAL. Tu t'es laissé surprendre par la première question, mais le reste du devoir montre que tu sais mettre les vecteurs en position d'addition (bout à bout). Mais **attention au sens du vecteur somme**. Tu sembles encore le faire au hasard (deux erreurs sur cinq).

A TOI DE JOUER AU PROF !

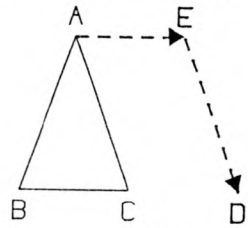
Corrige la copie d'Alfred de façon à l'aider le plus possible dans son apprentissage.

DEVOIR N° 2

Enoncé.	Solution proposée par Alfred
1) Construis le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.	
2) Construis le point E tel que : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.	
3) Construis le point F tel que : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.	
4) Construis le point G tel que : $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.	
5) Construis le point J tel que : $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.	

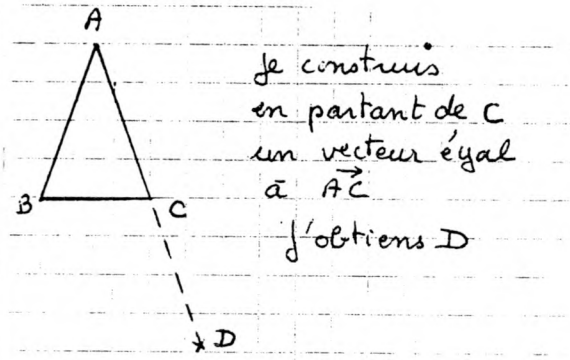
EXEMPLE POSSIBLE DE CORRIGE DE LA COPIE N° 2.

1) D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$?
J'appelle D' le point D que tu as trouvé. $\overrightarrow{BD'}$ représente bien $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$
Mais pour placer D il fallait construire un vecteur égal à $\overrightarrow{BD'}$ **en partant de A.**

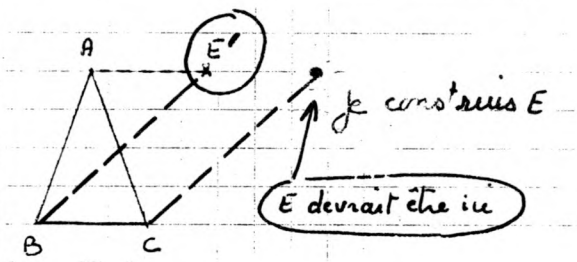


OU BIEN
faire la construction en partant de A : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AC}$.

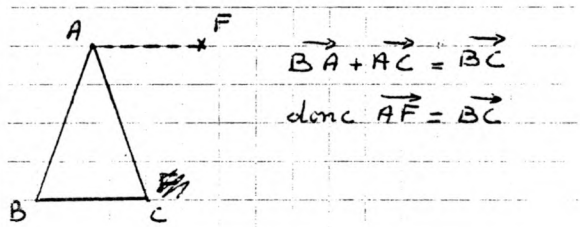
(On peut aussi commencer par $\overrightarrow{AC}$! Plus simple !).



2) E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$?
$\overrightarrow{BE'}$ représente bien $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Mais il faut ensuite dessiner un vecteur égal **en partant de A.**
C'est la même erreur que pour 1.

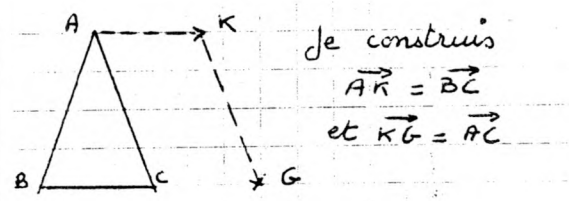


3) F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$?
Ton point F est exact.
(Mais tu as l'air d'avoir hésité en trouvant d'abord F confondu avec C…). En fait tu n'as pas vraiment construit la somme, tu t'es dépanné avec la relation de Chasles, c'est astucieux).

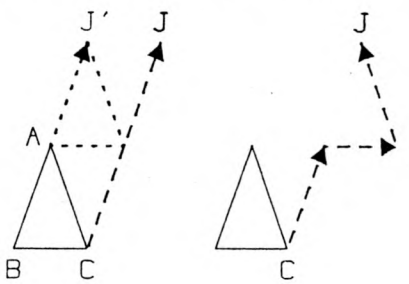


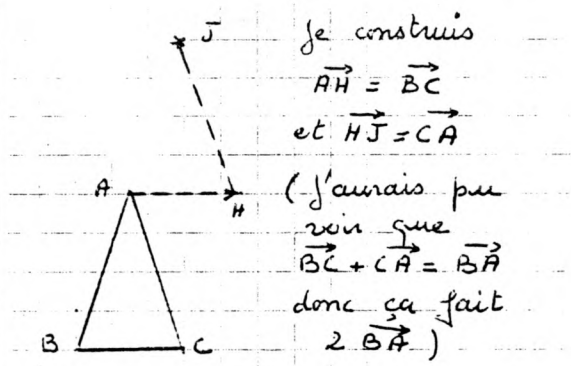
4) G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

Ton point G est exact.
Comme en général tu construis tout à partir du premier vecteur (ici $\overrightarrow{BA}$) e t comme G est aussi donné à partir de B, ton «problème» n'apparaît pas!



5) J tel que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$?
Même erreur qu'en 1 et 2.
$\overrightarrow{BJ'}$ représente bien la somme, mais il faut dessiner un vecteur égal en partant de C.



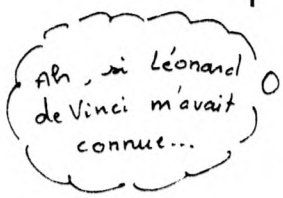


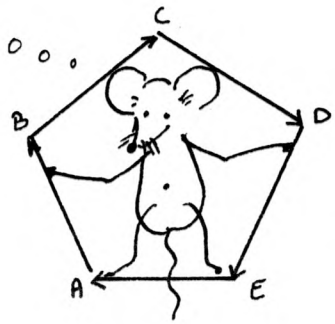
COMMENTAIRE GENERAL : Tu sais additionner deux ou trois vecteurs. Mais tu n'as pas encore bien compris **comment on définit un point** à partir d'un autre point connu et d'un vecteur que l'on peut connaître par construction.

FINALEMENT, QU'EST-CE QUE C'EST LE VECTEUR NUL ?

Lorsque tu mets des vecteurs bout à bout pour les ajouter, en général tu termines en un point différent du point de départ… et en reliant départ et arrivée tu peux représenter le vecteur-somme.

Mais il arrive… que la ligne des vecteurs mis bout à bout se referme exactement : alors la somme est le vecteur nul.





$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}.$

Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$

Mais on ne peut changer l'ordre :

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$

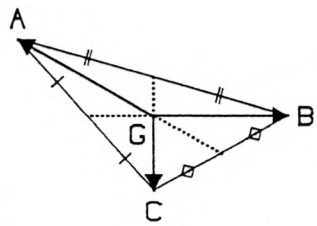
Les relations de Chasles en «boucle fermée» sont utiles à dépister dans les calculs… car cela simplifie en général la suite des calculs.

** Le cas le plus simple de relation de Chasles qui se referme est :

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$$

Tu sais alors que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont dits opposés (comme pour deux nombres dont la somme est nulle).

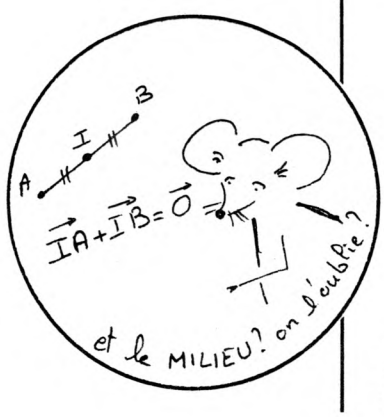
** Il existe des cas intéressants de somme nulle à connaître.



Dans ce cahier, nous ne citerons que le cas d'un triangle ABC avec son centre de gravité G :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

C'est un résultat à retenir.



** Pour en savoir plus sur les sommes nulles :

- voir le barycentre dans l'autre cahier…

- voir aussi ce qui se passe quand la somme de plusieurs forces s'appliquant à un même solide est nulle…

FINALEMENT, L'ADDITION DES VECTEURS C'EST PRESQUE COMME CELLE DES NOMBRES ?

*** Les vecteurs s'ajoutent sur des dessins en les mettant bout à bout…

Et là, aucun rapport avec les nombres !

*** **Mais quand on manipule des écritures, il y a bien des choses qui se ressemblent.**

- On peut changer l'ordre : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, c'est pareil que $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$, comme 3 + 2 est pareil que 2 + 3.

- Pour ajouter trois vecteurs, on en groupe déjà deux puis on ajoute le troisième,
comme pour 17 + 13 + 15, on pense que 17 + 13 font 30 et 30 + 15 font 45…

- Il peut arriver que la somme de deux vecteurs soit nulle comme cela arrive pour la somme de deux nombres.
On parle donc aussi de vecteurs opposés comme on parle de nombres opposés…

Mais il n'y a qu'une façon d'écrire l'opposé de 3 : c'est -3 et DEUX façons d'écrire l'opposé de $\overrightarrow{AB}$: $-\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{BA}$.

- Les égalités se manipulent de la même façon.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AM}$

peut devenir

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{BM}$

$x + 2 = 7$
$x = -2 + 7$
$x = 5$

Ainsi, on ajoute l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ des deux côtés du signe égal (ce qui a pour effet de faire disparaître $\overrightarrow{AB}$ à gauche…) comme on ajoute l'opposé de 2 dans l'égalité numérique écrite à droite…

- De même l'écriture

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{CD}$

devient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EG}$

$5 + x + 13 = 3 + 13$
$5 + x = 3$

*** Toutes ces ressemblances avec les nombres, dans un sens c'est bien pratique : on peut garder ses habitudes de calcul…

Mais c'est aussi pour cela qu'on oublie parfois ce qu'est un vecteur : on est tenté de le confondre avec sa norme (pour retourner complètement chez les nombres…).

*** **Pas de «tables d'addition» à apprendre !**

Peut-être te souviens-tu d'avoir écrit à l'école primaire toutes les additions de nombres entiers qui donnent 7 :

$$6 + 1 \ ; \ 5 + 2 \ ; \ 4 + 3 \ ; \ 7 + 0\ldots$$

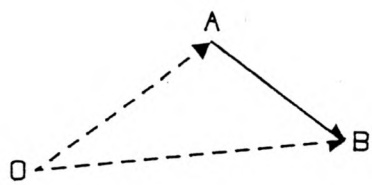
Chez les vecteurs, l'addition a ceci de particulier : si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur donné et I un point quelconque alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$$ (c'est la relation de Chasles).

Mais, lorsque tu as quitté le cours préparatoire tu as vu aussi que 7 peut s'écrire de multiples façons (une infinité !) :

$$7 = 12 - 5 \text{ ou } 7 = 25 - 18\ldots$$

(On choisit au hasard le premier nombre… et on calcule le second : ce qu'il faut ajouter à 7 pour avoir le premier).



De même pour les vecteurs !

O étant un point quelconque :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

($\overrightarrow{AB}$ est ce qu'il faut ajouter à $\overrightarrow{OA}$ pour obtenir $\overrightarrow{OB}$).

ATTENTION, une grosse différence avec les nombres : on ne compare pas deux vecteurs quelconques, cela n'a pas de sens de parler de vecteur «plus grand» qu'un autre… Si on se met à penser ainsi, c'est qu'on est retourné au pays des nombres sans le faire exprès : on pense aux longueurs des flèches…

Je vais tout vous dire!

Là, Raymond et Sylviane, ils savaient pas quoi écrire sur cette page! Mais ils voulaient quand même la remplir...

Parce que c'est une page paire !

Vous ne voyez pas le rapport ?

Et bien quand il y a des exercices, il faut qu'ils arrivent sur une page impaire...pour que la solution soit derrière et pas à coté ! Sinon, votre oeil, il ne résiste pas, il va voir tout de suite la réponse !

N'allez pas leur dire que je vous ai raconté ça!

A PROPOS D'ECRITURE...

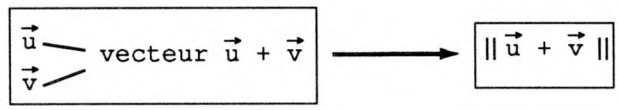
* De même qu'on ne peut pas regarder en même temps à droite et à gauche avant de traverser une rue, de même on ne peut faire en même temps deux actions mathématiques. Expliquons-nous :

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont peut :

a) [ajouter d'abord] PUIS [prendre la norme de ce résultat]

(On reste chez les vecteurs).

(On passe des vecteurs aux nombres).



Lorsqu'on fait ces deux actions dans cet ordre :

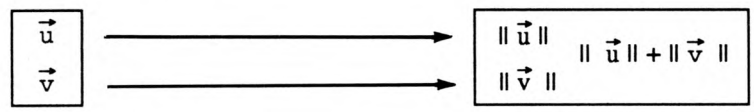
on dit : «faire la norme de la somme» ;
On écrit : $\| \vec{u} + \vec{v} \|$

Mais on pourrait aussi :

b) [prendre la norme de chaque vecteur] PUIS [ajouter]

(On passe tout de suite chez les nombres).

(On reste chez les nombres).



Dans cet ordre :

on dit qu'on fait «la somme des normes» ;
on écrit : $\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$.

C'EST LA FAUTE AU GENITIF !

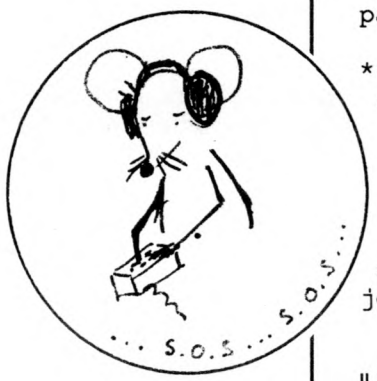
*** Remarque sur le génitif en français.

Lorsqu'on dit de faire «la somme des normes», on commence par prendre la norme, autrement dit, on commence par ce qui est dit en dernier…

Cela est général en français.

Si on dit : «le patron du père de Paul est mort hier» on pense à Paul, puis à son père, puis au patron de ce dernier… Dans les génitifs la pensée doit remonter à l'envers, c'est pour cela qu'on n'y comprend plus rien lorsqu'il y en a trop !

Si on dit «le père du patron de Paul», ce n'est pas pareil…



*** La difficulté en math vient **de la nécessité de traduire cela par une «écriture»** dont on ne prend pas bien le temps de vous expliquer le «code».

Dès que l'on fait agir deux choses… l'écriture se complique, en tous cas cela devient souvent une source de gêne bien qu'un élève ne sache pas toujours le dire…

Parce que tu connais séparément les signe + et $\| \|$, tu ne perçois pas toujours que l'écriture de leur association n'est pas évidente…

*** Remarquons aussi, dans l'exemple sur les vecteurs, que l'on utilise le même mot (la somme) et le même signe (+) pour parler en fait de **deux opérations** qui se ressemblent certes, mais qui ne sont pas les mêmes: l'une est l'addition des nombres que l'on connaît depuis l'école primaire, l'autre est l'addition des vecteurs que l'on découvre en fin de collège…

L'écriture montre cela :

dans $\| \vec{u} + \vec{v} \|$	le signe + est directement en contact avec des vecteurs : c'est l'addition des vecteurs;
dans $\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$	le signe + est en contact direct avec les barres des normes : on ajoute des nombre.

***** Les deux actions que l'on fait suivre :**

- ajouter ;
- prendre la norme.

Ne sont pas du tout de même nature.

• Dans l'addition : «on prend deux (2 vecteurs ou 2 nombres) pour en fabriquer un troisième de même espèce ! (Un vecteur si on part de deux vecteurs, un nombre si on part de deux nombres).

• Prendre la norme d'un vecteur, c'est prendre UN vecteur pour lui associer UN nombre (positif).
On parle dans ce cas «d'application».

L'exemple de la norme est clair, car l'application nous fait passer d'un objet géométrique (le vecteur) à un nombre.

*** Tu as déjà rencontré des associations d'opérations et d'application… et justement parfois tu ne sens pas ce que veut dire l'écriture…

• Exemple :

ajouter 2 positifs	PUIS	prendre la racine carrée…

S'écrit $\sqrt{a+b}$; se dit «la racine de la somme».

Ce n'est pas pareil que

prendre la racine de chaque nombre	PUIS	ajouter

S'écrit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; se dit «la somme des racines».

• Un autre exemple sur lequel tu peux réfléchir seul :

«le carré d'une somme», qui s'écrit $(a+b)^2$;

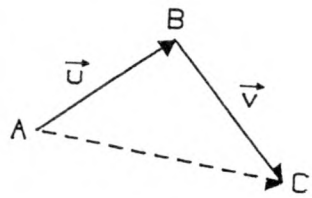
«la somme des carrés» qui s'écrit a^2+b^2.

Réfléchis bien à l'ordre dans lequel on fait les deux actions «ajouter» et «prendre le carré».

LA NORME ET L'ADDITION... SONT DES NOTIONS QUI NE SYMPATHISENT GUERE !

*** Que peut-on dire de la norme d'une somme de vecteurs ?**

Même une cervelle d'oiseau sait que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre…



Autrement dit, en général, la flèche qui représente $\vec{u}+\vec{v}$ sera plus courte que si on faisait la somme des longueurs des flèches représentant $\vec{u}$ et $\vec{v}$…

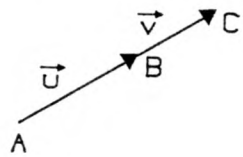
longueur AC < long AB + long BC.

En utilisant l'écriture des normes :

$$\| \vec{u}+\vec{v} \| < \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|.$$

*** Le seul cas d'exception…**

Lorsque les vecteurs mis bout à bout sont dans la même direction ET dans le même sens, alors il n'y a qu'un chemin sans zigzag pour aller de A à C.



Dans ce cas précis on aura

long AC = long AB + long BC

ou $\| \vec{u}+\vec{v} \| = \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$.

*** Pour englober le cas d'exception**, on utilise le signe «inférieur ou égal».

Dans tous les cas, on pourra donc dire que
$\| \vec{u}+\vec{v} \| \leq \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$

Cela n'a l'air de rien, mais le fait que ce ne soit pas EGAL mais «inférieur ou égal», va nous empêcher de garder certaines de nos habitudes… (ou plus exactement, si on les garde quand même, on fera une erreur…).

Ce sont ces erreurs dues au prolongement d'habitudes de calcul que nous allons voir sur des exemples.

REPONDRE PAR UN DESSIN…

Nous allons te poser ici des questions de DEDUCTION.

Par exemple :

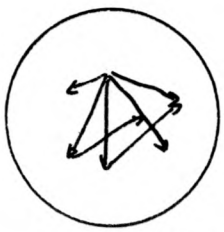
1) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs de même norme, et $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Peut-on en déduire que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{w}\| \ ?$$

Autrement dit: est-ce que

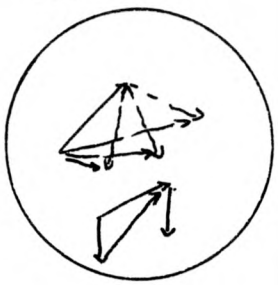
$$\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{w}\|$$

est une implication vraie ?



En mathématiques, l'idée de déduction est très stricte. Peut-on affirmer à coup sûr, dans tous les cas de figures possibles, sans exception, que

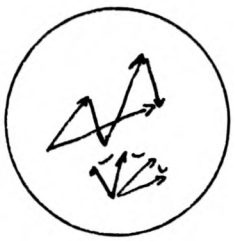
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{w}\| \ ?$$



Il s'agit donc de crayonner des petits dessins pour voir s'il n'y a pas une exception qui INFIRME la déduction… (Infirmer : montrer que c'est faux). Si tu trouves un dessin où «ça ne marche pas», cela montre que la déduction est incorrecte et donc qu'on ne peut pas l'utiliser au cours d'un calcul…

2) Sachant que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|$, peut-on en déduire que $\|\vec{v}\| = \vec{0}$?

3) Sachant que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$, peut-on en déduire que le vecteur $\vec{v}$ est nul ($\vec{v} = \vec{0}$) ?



4) Sachant que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifient l'égalité numérique (c'est-à-dire chez les nombres) : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{w}\|$, peut-on en déduire que $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$?

5) Sachant que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vérifient l'égalité vectorielle :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w},$$

peut-on en déduire que $\vec{v} = \vec{w}$?

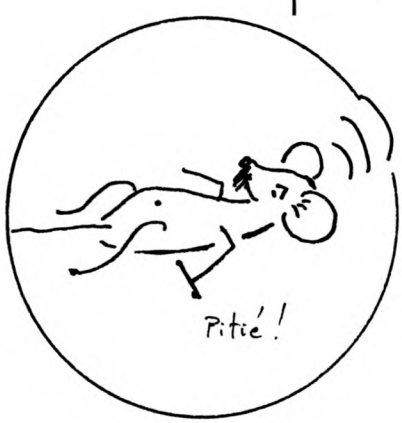
6) On sait que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vérifient les DEUX égalités suivantes :

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$$

et

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{w}\|$$

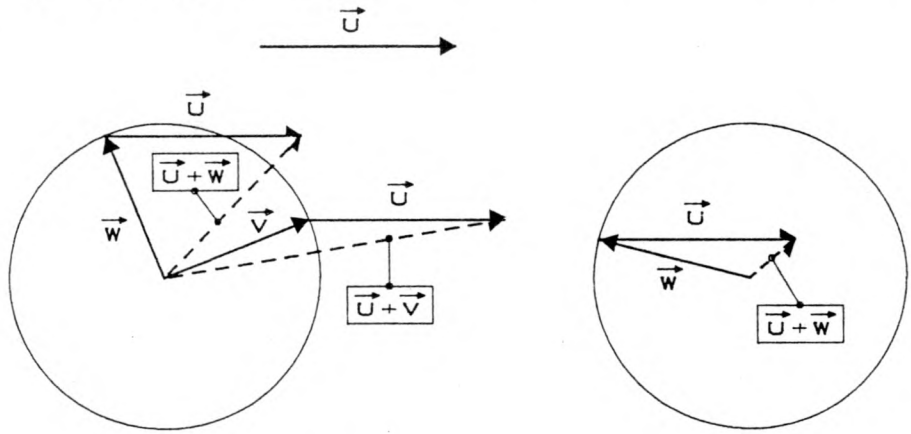
peut-on en déduire que $\vec{v} = \vec{w}$?



1) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs de même norme, et $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Peut-on en déduire que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{w}\|$?

Deux vecteurs de même norme : on peut les imaginer issus du centre d'un même cercle, pour mieux voir qu'ils ont la même norme…

Si l'un des vecteurs a «presque» la même direction que $\vec{u}$, mettre les vecteurs bout à bout donne une ligne brisée presque droite, et la somme sera représentée par une longue flèche… Ce qui n'est pas du tout le cas si les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont presque orthogonaux… (C'est même encore pire si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont presque opposés !).



Donc $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ n'implique pas $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{w}\|$.

Par contre $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ entraîne bien

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{w}\|$$

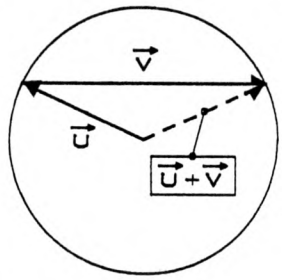
car ce sont ici des nombres ($x + 2 = y + 2$ entraîne $x = y$) et en vecteurs $\vec{v} = \vec{w}$ entraîne bien $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

car l'addition des vecteurs ressemblent tout à fait à celles des nombres (on dit qu'elle a les mêmes propriétés).

2) Sachant que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{v}\|$, peut-on en déduire que $\|\vec{v}\| = 0$?

Est-ce que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u}$ peuvent être dessinés comme deux rayons d'un même cercle ?

Voyons-le sur un dessin.



$\| \vec{v} \|$ n'a aucune raison d'être nul !

Donc

$\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} \|$ n'implique pas $\| \vec{v} \| = 0$.

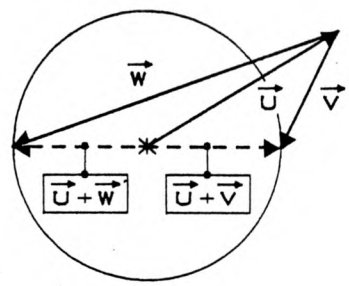
3) Sachant que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$, peut-on en déduire que le vecteur $\vec{v}$ est nul ($\vec{v} = \vec{0}$) ?

Ici le vecteur $\vec{u}$ ayant un opposé $(-\vec{u})$, si on l'ajoute aux deux membres de l'égalité :
$(-\vec{u}) + \vec{u} + \vec{v} = (-\vec{u}) + \vec{u}$ et comme $(-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ et que l'on a aussi $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$, cela fait $\vec{v} = \vec{0}$.

En vecteurs, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$ implique bien $\vec{v} = \vec{0}$.

4) Sachant que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifient l'égalité numérique (c'est-à-dire chez les nombres) :
$\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} + \vec{w} \|$,
peut-on en déduire que $\| \vec{v} \| = \| \vec{w} \|$?

Peut-on disposer $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{w}$ comme rayons d'un même cercle sans que les flèches de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$ aient les mêmes longueurs ?



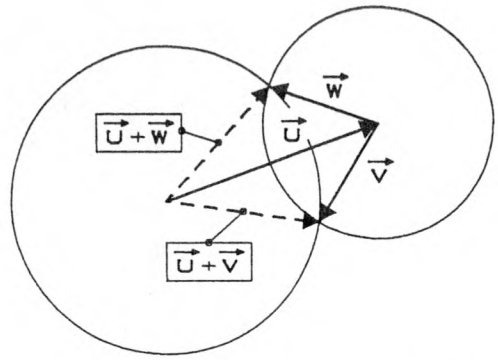
Donc $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} + \vec{w} \|$ n'implique pas $\| \vec{v} \| = \| \vec{w} \|$.

5) Sachant que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vérifient l'égalité vectorielle :
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, peut-on en déduire que $\vec{v} = \vec{w}$?

Oui, en vecteurs $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ implique bien $\vec{v} = \vec{w}$. (Il suffit d'ajouter $(-\vec{v})$ de chaque côté).

Dans les égalités de sommes vectorielles, comme dans les égalités de sommes de nombres, on peut «simplifier».

6) On sait que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vérifient les DEUX égalités suivantes :
$\| \vec{v} \| = \| \vec{w} \|$ *et* $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} + \vec{w} \|$
peut-on en déduire que $\vec{v} = \vec{w}$ *?*



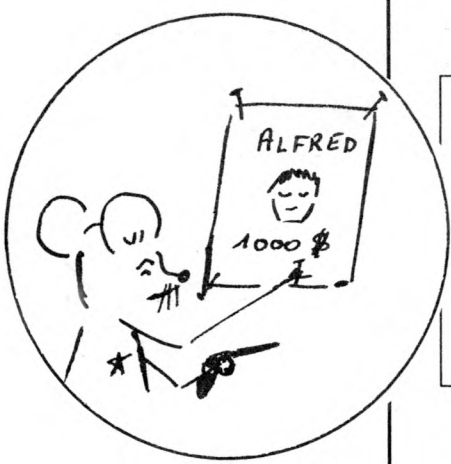
On voit ici qu'on peut disposer $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{w}$ comme rayons d'un même cercle, ainsi que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (rayons d'un autre cercle). Mais comme $\vec{v}$ et $\vec{w}$ n'ont pas la même direction, ils ne sont pas égaux.

CONCLUSION : ne pas faire de déduction lorsqu'on rencontre la norme d'une somme…

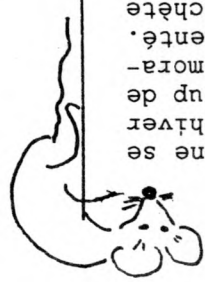
Mais alors que faire ? Et bien transformer cette somme… pour que cela n'en soit plus une ! Voir dans l'autre cahier : le barycentre, un outil pour transformer une somme vectorielle…

* * * *

En lisant les réponses d'Alfred :



7) En cherchant à répondre à la question 5), Alfred pense avoir démontré aussi que la déduction 4) est correcte. Que penses-tu de son raisonnement ?
§ *Si* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ *alors* $\vec{v} = \vec{w}$.
§ *Mais si* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$
on a aussi $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} + \vec{w} \|$.
§ *donc*
§ *Comme* $\vec{v} = \vec{w}$ *on a aussi* $\| \vec{v} \| = \| \vec{w} \|$.
§ $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} + \vec{w} \|$ *entraîne bien que* $\| \vec{v} \| = \| \vec{w} \|$.



Deux conséquences d'une même affirmation… ne se déduisent pas l'une de l'autre ! Exemple : l'hiver 86-87 a été très rude, donc on a consommé beaucoup de charbon pour le chauffage, et aussi le taux de mortalité des personnes de plus de 75 ans a augmenté. Pourrait-on imaginer qu'on dise : lorsqu'on achète plus de charbon, les personnes âgées meurent davantage! C'est ce que fait Alfred…

TROISIEME DIFFICULTE : PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE

***** Une opération bizarre…**

Cela peut surprendre d'ajouter autre chose que des nombres comme nous avons fait pour les vecteurs.

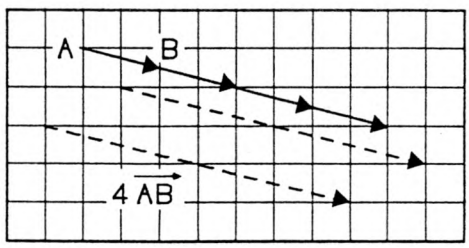
Mais quand même, on prenait deux vecteurs pour les ajouter, et on trouvait un autre vecteur, ce qui paraît bien naturel ! (Comme en ajoutant deux nombres, on trouve un nombre).

Ici on va parler de produit, de multiplication, mais pas entre deux choses de même nature (comme deux nombres, ou deux vecteurs) : on va multiplier un VECTEUR par un NOMBRE.

***** Mais c'est «naturel» quand même !**

En effet, on découvre la multiplication en observant une addition «répétée» avec le même nombre : 5 + 5 + 5 + 5 fera 4 fois 5.

Avec les vecteurs, il y a aussi des situations d'addition répétée du même vecteur :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ c'est bien naturel de le noter $4\ \overrightarrow{AB}$.



Observons ce que donne la mise bout à bout:

on ne sort pas de la direction définie par $\overrightarrow{AB}$.

***** Alors pourquoi parle-t-on de difficulté dans le titre ?**

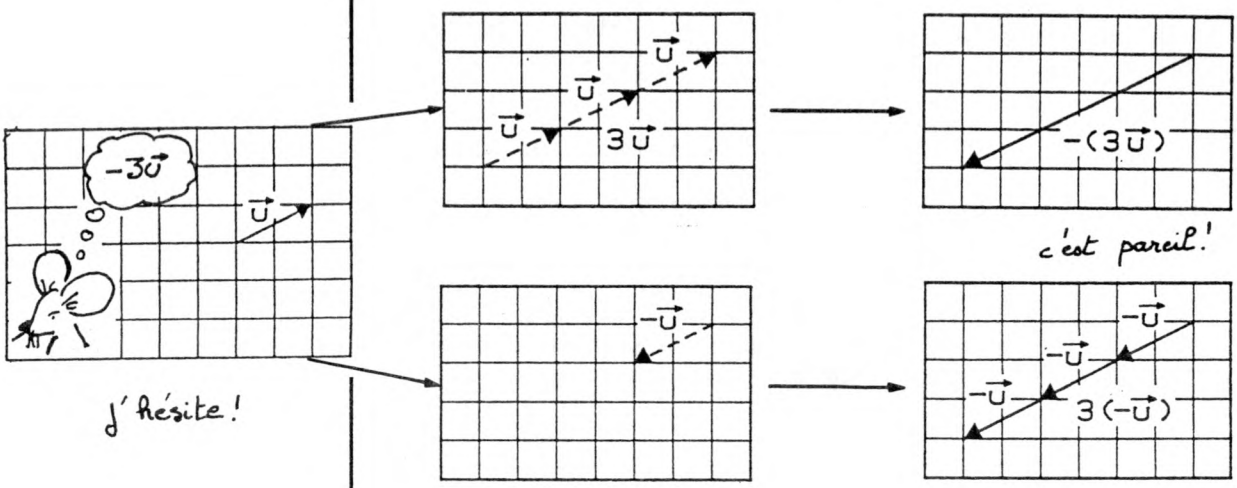
D'abord… peut-être que pour certains d'entre vous ce chapitre ne présentera aucune difficulté ! Dans ce cas là, tant mieux pour vous…

Mais pour d'autres élèves, le fait que la multiplication d'un vecteur par un nombre arrive naturellement comme celle de deux nombres, les entraîne à penser que cette nouvelle multiplication ressemble tout à fait à celle de deux nombres, et ils écrivent «n'importe quoi» comme disent les profs (en fait ils suivent logiquement l'idée de ressemblance avec une multiplication qu'ils connaissent déjà !).

Nous allons donc essayer de vous faire sentir ce qui se ressemble et au contraire ce qui est bien différent.

OUI, MAIS AVEC 4 C'EST FACILE !

*** Comment procéder pour dessiner $-3\vec{u}$?**

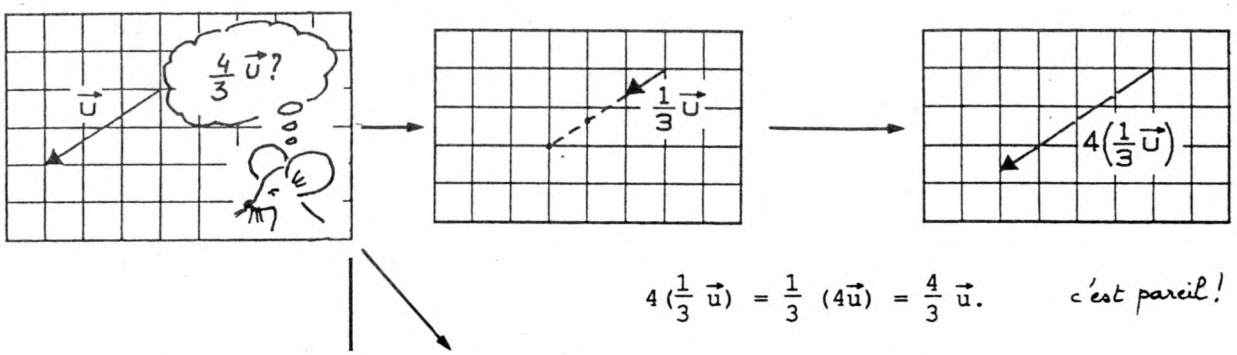


Donc on peut faire comme on veut :
Tripler puis prendre l'opposé, ou bien prendre l'opposé d'abord puis tripler.
C'est pour cela qu'on peut écrire tranquillement -3u sans préciser.

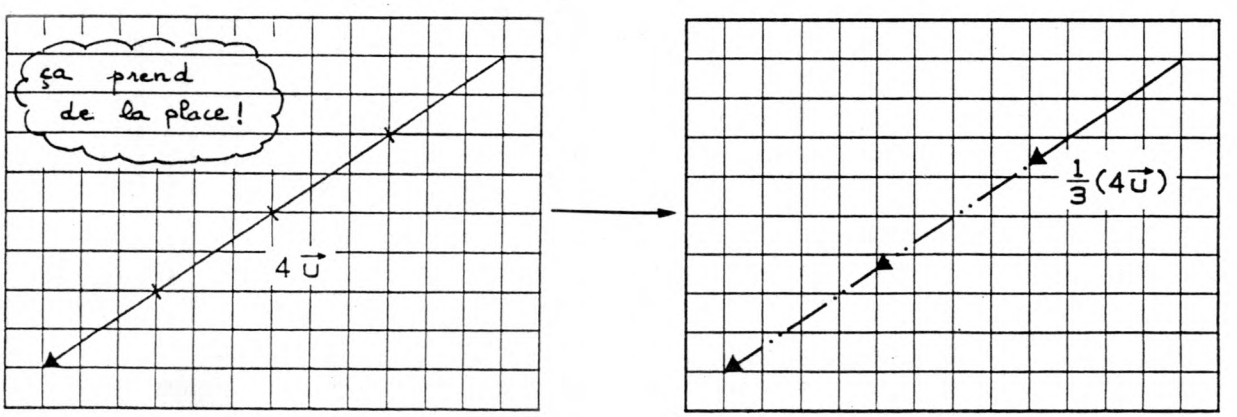
$$-3\vec{u} = -(3\vec{u}) = 3(-3\vec{u}).$$

***** Et pour dessiner $\frac{4}{3}\vec{u}$?**

C'est pareil : on peut penser 4 fois un tiers de $\vec{u}$ ou un tiers de $4\vec{u}$!



$4(\frac{1}{3}\vec{u}) = \frac{1}{3}(4\vec{u}) = \frac{4}{3}\vec{u}.$ c'est pareil !



RESUMONS CES MANIPULATIONS…

(La lecture de cette page est facultative !)

*** Pour construire $-3\vec{u}$, deux façons de faire.**

$\vec{u} \xrightarrow{\text{opposé}} -\vec{u} \xrightarrow{\times 3} -3\vec{u}$

$\vec{u} \xrightarrow{\times 3} -3\vec{u} \xrightarrow{\text{opposé}} -3\vec{u}$

*** pour construire $\frac{4}{3}\vec{u}$, également deux façons.**

$\vec{u} \xrightarrow{: 3} \xrightarrow{\times 4} \frac{4}{3}\vec{u}$

$\vec{u} \xrightarrow{\times 4} \xrightarrow{: 3} \frac{4}{3}\vec{u}$

*** Tâchons d'imaginer diverses façons de construire $-\frac{3}{2}\vec{v}$.**

Déjà $-\frac{3}{2}$ peut se comprendre comme $\frac{-3}{2}$ ou $\frac{3}{-2}$ alors…

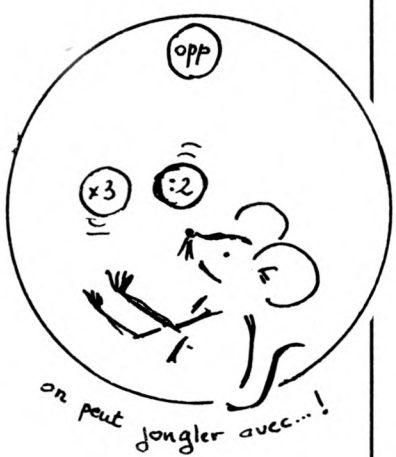
$\vec{v} \xrightarrow{\text{opposé}} \xrightarrow{: 2} \xrightarrow{\times 3} 3\left(\frac{-\vec{v}}{2}\right)$

$\vec{v} \xrightarrow{\text{opposé}} \xrightarrow{\times 3} \xrightarrow{: 2} \frac{3(-\vec{v})}{2}$

c'est tout pareil !

$\vec{v} \xrightarrow{: 2} \xrightarrow{\text{opposé}} \xrightarrow{\times 3} \left(-\frac{\vec{v}}{2}\right) \times 3$

$\vec{v} \xrightarrow{: 2} \xrightarrow{\times 3} \xrightarrow{\text{opposé}} -\left(\frac{\vec{v}}{2}\right) \times 3$



Ce sont les façons les plus naturelles…
Mais bien sûr on peut aussi commencer par le produit par 3.

$\vec{v} \xrightarrow{\times 3} \xrightarrow{\text{opposé}} \xrightarrow{: 2}$

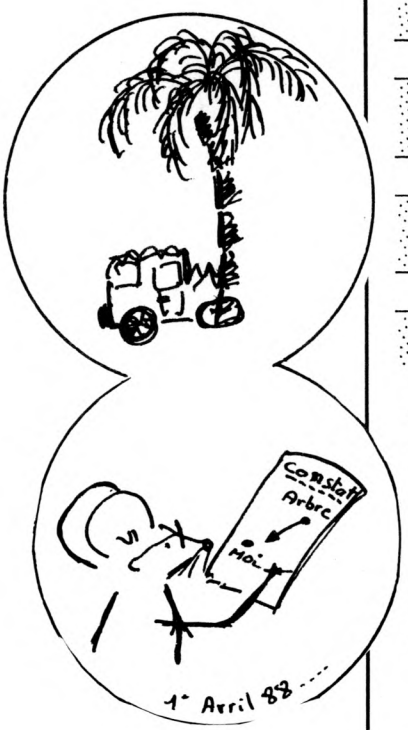
$\vec{v} \xrightarrow{\times 3} \xrightarrow{: 2} \xrightarrow{\text{opposé}}$

On joue ici sur l'associativité de la multiplication, car pense que prendre l'opposé s'écrit aussi «multiplier par -1».

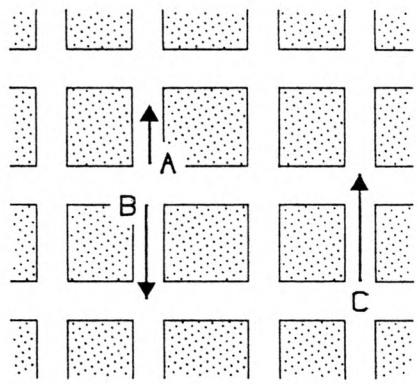
Tu peux essayer de dessiner chaque façon de faire le produit par $-\frac{3}{2}$.

*** Lorsqu'on multiplie un vecteur par un nombre différent de zéro, on se retrouve avec un vecteur dans la même direction… **On ne peut pas changer de direction en multipliant par un nombre…**

*** **Direction** et **sens** ne veulent pas dire la même chose au cours de math et dans la vie de tous les jours…



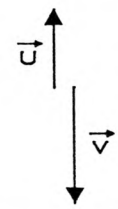
Ville de Manhattan



Comme dans les constats d'accident, les flèches montrent le sens des déplacements

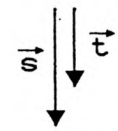
A et B ne vont pas dans la même direction ! Ils vont en sens opposé.

Cours de math



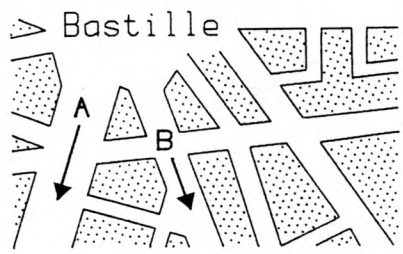
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont

la même direction mais, comme en français, on dira qu'ils sont de sens contraire.

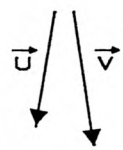


Ici, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ ont même direction et même sens.

Ville de Grenoble



A et B vont dans la même direction : vers le sud…

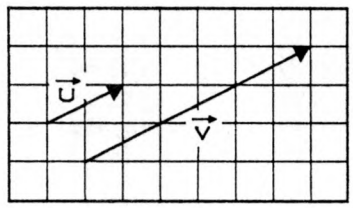


$\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction. Dans ce cas, leurs sens ne se comparent pas.

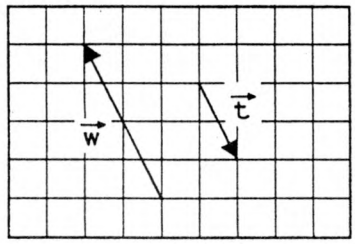
DEUX VECTEURS AYANT LA MEME DIRECTION SONT DITS COLINEAIRES.

PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE.

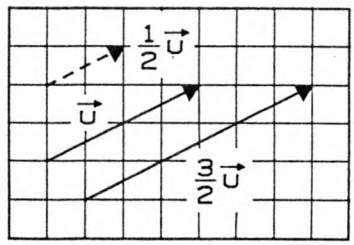
…vu par le dessin.



$\vec{v} = 3\,\vec{u}$ ou $\vec{u} = \frac{1}{3}\,\vec{v}$.

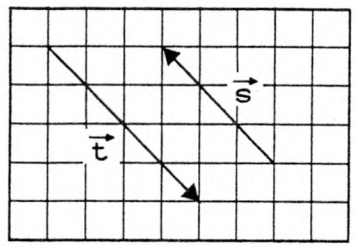


$\vec{w} = -2\vec{t}$ ou $\vec{t} = \frac{1}{2}\,\vec{w}$.



$\vec{v} = \frac{3}{2}\,\vec{u}$ ou $\vec{u} = \frac{2}{3}\,\vec{v}$.

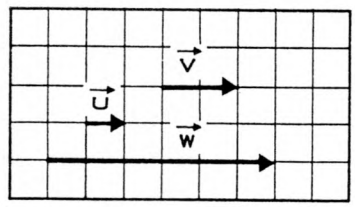
$\vec{v} = \frac{3}{2}\,\vec{u}$ ou $\vec{v} = \vec{u} + \frac{1}{2}\,\vec{u}$ ou $\vec{v} = (1 + \frac{1}{2})\,\vec{u}$.



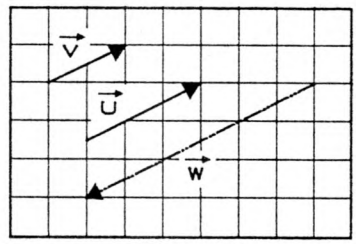
$\vec{s} = -\frac{3}{4}\,\vec{t}$ ou $\vec{t} = -\frac{4}{3}\,\vec{s}$.

$\vec{s} = -3(\frac{1}{4})\vec{t}$ ou $\vec{s} = 3(-\frac{1}{4})\vec{t}$.

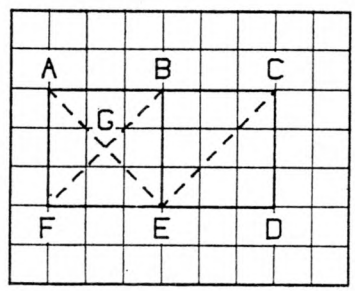
ou encore $\vec{s} = -\vec{t} + \frac{1}{4}\,\vec{t}$ (car $-\frac{3}{4} = -1 + \frac{1}{4}$).



$\vec{v} = 2\,\vec{u}$ et $\vec{w} = 3\,\vec{v}$ d'où $\vec{w} = 6\,\vec{u}$.



$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \frac{2}{3}\,\vec{u} \\ \vec{w} = -2\,\vec{u}\end{array}\right\}$ $\vec{u} = \frac{3}{2}\,\vec{v}$ et $\vec{w} = -2(\frac{3}{2}\,\vec{v}) = -3\,\vec{v}$.

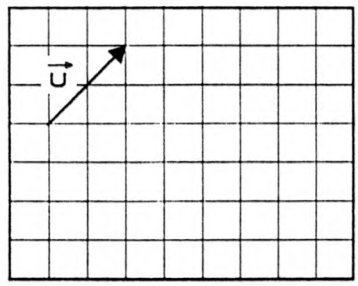


$\vec{FG} = \frac{1}{2}\,\vec{FB}$ $\qquad$ $\vec{FG} = \frac{1}{2}\,\vec{EC}$.

$\vec{AC} = 2\,\vec{ED}$ $\qquad$ $\vec{BA} = -\,\vec{ED}$.

EXERCICES

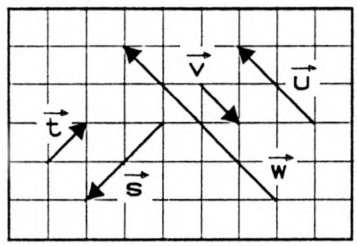
…A faire en observant…



*** Exercice 1.**

Dessine un représentant de $\vec{v} = 2{,}5\ \vec{u}$ et un représentant de $\vec{w} = -\frac{3}{5}\vec{v}$.

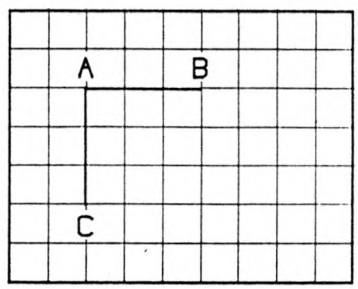
Quelle relation peux-tu écrire entre $\vec{w}$ et $\vec{u}$?



*** Exercice 2.**

Lorsque c'est possible, complète les égalités :

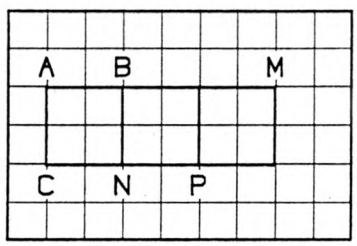
$\vec{v} = \ldots\ \vec{u}$; $\vec{w} = \ldots\ \vec{u}$; $\vec{w} = \ldots\ \vec{v}$.
$\vec{u} = \ldots\ \vec{v}$; $\vec{u} = \ldots\ \vec{w}$; $\vec{s} = \ldots\ \vec{u}$.
$\vec{t} = \ldots\ \vec{s}$; $\vec{s} = \ldots\ \vec{t}$; $\vec{v} = \ldots\ \vec{t}$.



*** Exercice 3.**

Construis les points M, N et P définis par les égalités vectorielles :

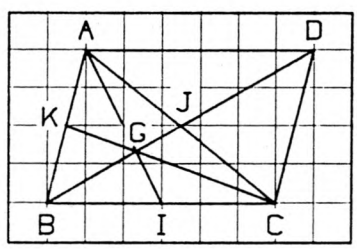
$\overrightarrow{AM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CP} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{BA}$.



*** Exercice 4.**

Lorsque cela est possible, complète les égalités :

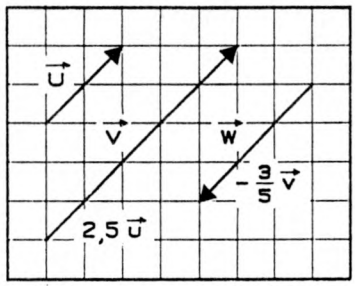
$\overrightarrow{AM} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = \ldots\ \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{CP} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{PN} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \ldots\ \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{PB} = \ldots\ \overrightarrow{AN}$.



*** Exercice 5.**

Complète les égalités suivantes :

$\overrightarrow{BI} = \ldots\ \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{KJ} = \ldots\ \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BG} = \ldots\ \overrightarrow{BJ}$.
$\overrightarrow{BG} = \ldots\ \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AJ} = \ldots\ \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{GJ} = \ldots\ \overrightarrow{BD}$.
$\overrightarrow{AK} = \ldots\ \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{GB} = \ldots\ \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{IC} = \ldots\ \overrightarrow{CI}$.

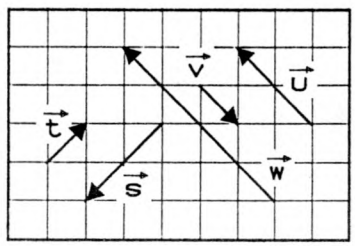


*** Exercice 1.**

2,5 c'est aussi $\frac{5}{2}$. Donc $\vec{w} = -\frac{3}{5}\left(\frac{5}{2}\vec{u}\right)$

$\vec{w} = -\frac{3}{2}\vec{u}$.

(Si tu avais oublié, est-ce que le dessin t'aide à retrouver comment on multiplie deux fractions ?).



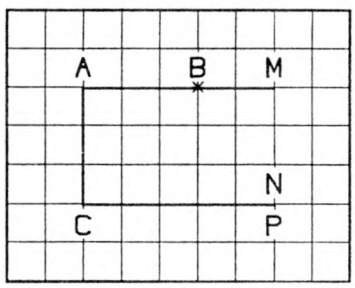
*** Exercice 2.**

$\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$; $\vec{w} = 2\vec{u}$; $\vec{w} = -6\vec{w}$;

$\vec{u} = -2\vec{v}$; $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{w}$;

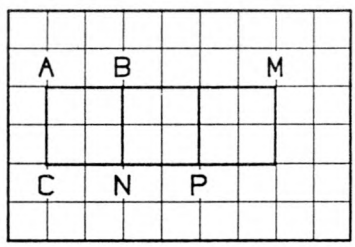
$\vec{t} = -\frac{1}{2}\vec{s}$; $\vec{s} = -2\vec{t}$;

$\vec{s}$ et $\vec{u}$ n'ayant pas la même direction, on ne peut pas écrire $\vec{s} = k\vec{u}$.
De même pour $\vec{v}$ et $\vec{t}$.



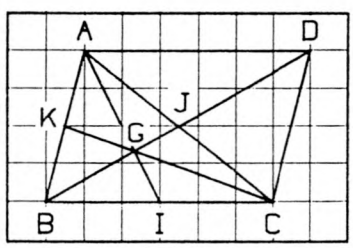
*** Exercice 3.**

Les trois vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont égaux car tous égaux à $\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$).
Les points N et P sont confondus puisqu'on dessine la même flèche partant du même point C.



*** Exercice 4.**

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AB}$;
$\overrightarrow{PN} = -\overrightarrow{AB}$; (*) ; $\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AN}$.
On ne peut pas exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ car les droites (AN) et (BC) ne sont pas parallèles.



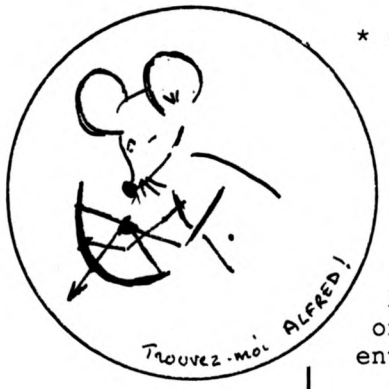
*** Exercice 5.**

Observation du dessin : ABC est un triangle avec ses 3 médianes concourantes en G. ADCB est un parallélogramme avec ses diagonales.

Ces deux figures de base, et les égalités vectorielles données ici sont à retenir comme un résultat classique à connaître…
$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ on a $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (droite des milieux) ; $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ centre de gravité).
$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (milieu).
$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$ donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
(car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$).
On a trouvé $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{GB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$; enfin $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{CI}$.

QUAND ALFRED POSE DES QUESTIONS.



* Question : avec des nombres entiers, j'ai compris, il suffit de faire attention au sens des vecteurs quand le nombre est négatif…

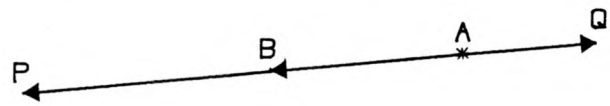
Mais je ne sais pas comment faire pour $\overrightarrow{AP} = 2,3\ \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AQ} = -0,7\ \overrightarrow{AB}$.

* Réponse : c'est qu'il faut considérer en plus les longueurs des segments [AP] ou [AQ]. Cette fois on ne peut pas se contenter de reporter des flèches entières dans un sens ou dans un autre…

Tu mesures [AB]. Ici AB = 2,5 cm.

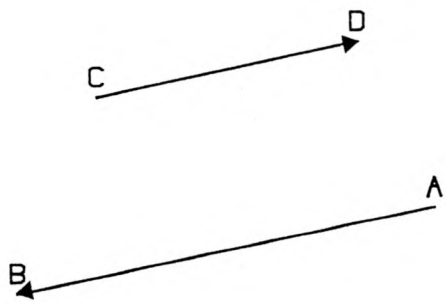
Tu calcules AP = 2,5 cm × 2,3 = 5,75 cm ;
AQ = 2,5 cm × 0,7 = 1,75 cm.

Et tu places les points avec ton double décimètre…



* Complément : dans les cas où les nombres sont des fractions simples comme 2/3 ou 1/4 ou 5/3, nous verrons plus loin une construction géométrique qui n'oblige pas à passer par le calcul des longueurs. (Ce sera page 69 et 65).

* Question :



Lorsqu'on me donne deux vecteurs colinéaires comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ par exemple, est-ce que je peux «faire comme avant» pour trouver le nombre ?

Je mesure CD = 3,5 cm et AB = 5,6 cm.

Je calcule 5,6 : 3,5 = 1,6.

Donc $\overrightarrow{CD} = -1,6\ \overrightarrow{AB}$.

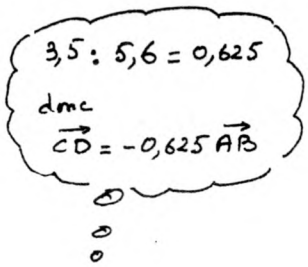
(Je mets - parce qu'ils sont de sens contraire).

* Réponse.

Je pense que tu as compris l'essentiel sur le produit d'un vecteur par un nombre ! Car l'erreur que tu fais ici est une erreur qui «vient d'ailleurs».

Je pense que tu es un peu fâché avec la multiplication par un NOMBRE PLUS PETIT QUE 1.

En effet ton 1,6 a quelque chose à voir dans la question, mais c'est $\overrightarrow{AB} = -1,6\ \overrightarrow{CD}$ car c'est la flèche de $\overrightarrow{AB}$ qui est la plus longue…
Si on te pose la question sous la forme :
complète : $\overrightarrow{CD} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$.



Alors tu passes aux longueurs : 3,5 cm = … × 5,6 cm.

Comme 3,5 est plus petit que 5,6 cela t'indique déjà que tu vas trouver un nombre plus petit que 1.

En effet, multiplier par un nombre inférieur à 1, fait «diminuer». C'est cela qu'on accepte mal, car au fond de notre tête il y a une association d'idées tenace : multiplier c'est augmenter, sans doute parce que dans notre enfance on rencontre d'abord la multiplication par des nombres plus grands que 1 et aussi parce que dans le langage ordinaire multiplier est souvent synonyme d'augmenter :

«avec la crise, les problèmes de chômage se multiplient» peut-on entendre, et tout le monde comprend bien qu'ils augmentent ;

«il faut multiplier le nombre de bacheliers d'ici l'an 2000» dit un responsable politique…

Puisque tu sembles avoir bien compris la multiplication d'un vecteur par un nombre, et parce qu'on peut dessiner, donc apporter une aide visuelle, essaie d'en profiter pour te mettre au clair avec la multiplication, **essaie de deviner à l'avance si le nombre à trouver est plus grand ou plus petit que 1**, comme tu sais deviner à l'avance s'il est positif ou négatif.

Voici une feuille pour s'entraîner.

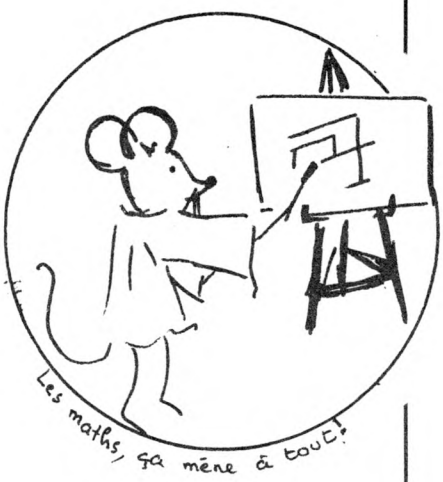
* (Tu peux aussi travailler cette difficulté sur un tout autre sujet : les pourcentages. Prendre 90 %, c'est multiplier par 0,90, c'est faire diminuer…).

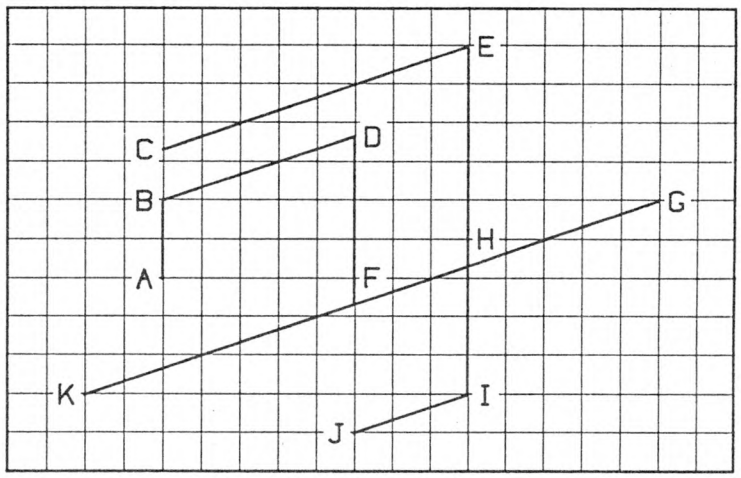
En regardant la figure, dire si le nombre à mettre à la place des pointillés doit être :

- positif ou négatif,

- si sa valeur absolue (le nombre par lequel est multipliée la longueur) est plus grande ou plus petite que 1.

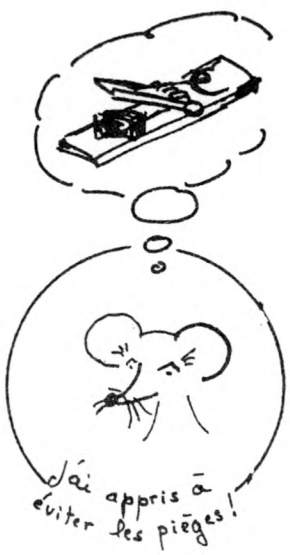
APRES cette réflexion, on mettra une croix dans la colonne correspondante.





	… < -1	-1 < … < 0	0 < … < + 1	… > + 1
$\overrightarrow{BD} = \ldots \overrightarrow{KG}$				
$\overrightarrow{BD} = \ldots \overrightarrow{FH}$				
$\overrightarrow{IJ} = \ldots \overrightarrow{BD}$				
$\overrightarrow{HF} = \ldots \overrightarrow{FK}$				
$\overrightarrow{HI} = \ldots \overrightarrow{IJ}$				
$\overrightarrow{EI} = \ldots \overrightarrow{HI}$				
$\overrightarrow{EH} = \ldots \overrightarrow{AB}$				
$\overrightarrow{AB} = \ldots \overrightarrow{FD}$				
$\overrightarrow{IE} = \ldots \overrightarrow{AB}$				
$\overrightarrow{IJ} = \ldots \overrightarrow{CE}$				

REPONSES



$\overrightarrow{BD}$ = … $\overrightarrow{KG}$ Même sens donc le nombre est positif. BD plus petit que KG donc plus petit que 1.

$\overrightarrow{BD}$ = … $\overrightarrow{FH}$ Positif aussi et comme BD est plus long que FH, le nombre est plus grand que 1.

$\overrightarrow{IJ}$ = … $\overrightarrow{BD}$ Sens contraire donc le nombre est négatif, IJ est plus petit que BD, donc le nombre sans son signe (ce qu'on appelle sa valeur absolue) est plus petite que 1. Donc c'est du genre -0,6.

$\overrightarrow{HF}$ = … $\overrightarrow{FK}$ Positif et plus petit que 1.

$\overrightarrow{HI}$ = … $\overrightarrow{IJ}$ IMPOSSIBLE de les comparer car ils n'ont pas la même direction.

$\overrightarrow{EH}$ = … $\overrightarrow{AB}$ Négatif car de sens contraire ; et la longueur AB est multipliée par 3. Donc -3 qui est plus petit que -1.

$\overrightarrow{AB}$ = … $\overrightarrow{FD}$ Positif et plus petit que 1…

$\overrightarrow{IE}$ = … $\overrightarrow{BA}$ Négatif car de sens contraire $\overrightarrow{IE}$ = -4,5 $\overrightarrow{BA}$ donc première colonne car -4,5 est plus petit que -1.

$\overrightarrow{IJ}$ = … $\overrightarrow{CE}$ En longueur IJ vaut environ 0,3 CE mais pour les vecteurs le nombre est négatif car ils sont de sens contraires.

	… < -1	-1 < … < 0	0 < … < + 1	… > + 1
$\overrightarrow{BD}$ = … $\overrightarrow{KG}$			X	
$\overrightarrow{BD}$ = … $\overrightarrow{FH}$				X
$\overrightarrow{IJ}$ = … $\overrightarrow{BD}$		X		
$\overrightarrow{HF}$ = … $\overrightarrow{FK}$			X	
$\overrightarrow{HI}$ = … $\overrightarrow{IJ}$				
$\overrightarrow{EI}$ = … $\overrightarrow{HI}$				X
$\overrightarrow{EH}$ = … $\overrightarrow{AB}$	X			
$\overrightarrow{AB}$ = … $\overrightarrow{FD}$			X	
$\overrightarrow{IE}$ = … $\overrightarrow{AB}$	X			
$\overrightarrow{IJ}$ = … $\overrightarrow{CE}$		X		

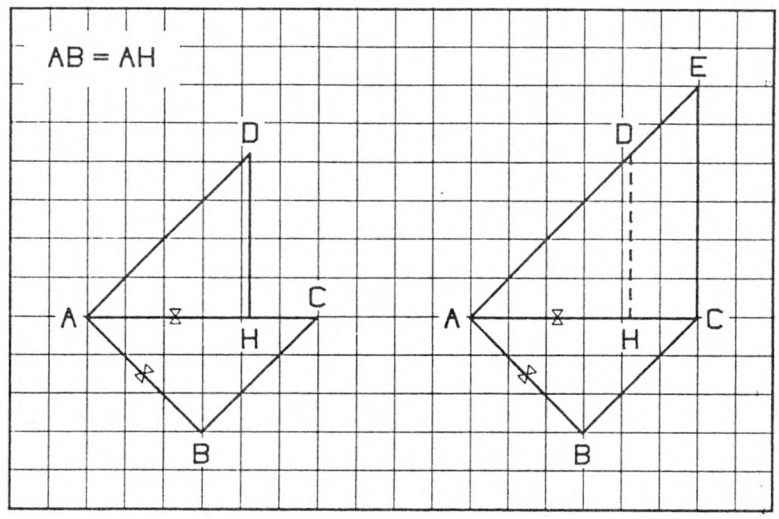
*** Si on se donne un vecteur non nul $\vec{u}$, on peut exprimer, (ou «dire avec des $\vec{u}$») tous les vecteurs de même direction que $\vec{u}$, c'est-à-dire tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

Ils s'écriront sous la forme du produit de $\vec{u}$ par un nombre.

Nous avons dessiné des exemples où le nombre est

- un entier positif ou négatif ($-3\vec{u}$; $2\vec{u}$) ;
- une fraction (on dit aussi un rationnel) : $\frac{4}{3}\vec{u}$;
- un nombre décimal : $1,6\vec{u}$. (Mais un nombre décimal est un cas particulier de fraction : 1,6 = 16/10).

Maintenant regarde les dessins ci-dessous, constitués de demi-carrés.



Pour comprendre ce qui suit, il suffit de se souvenir que, si le côté d'un carré mesure 1 cm, alors la diagonale mesure $\sqrt{2}$ cm (se démontre avec le théorème de Pythagore).

On a donc la longueur de [AC] égale à celle de [AH] multipliée par $\sqrt{2}$.

Pour les vecteurs on écrira aussi $\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{AH}$. Mais si on avait donné les points A, H, C sans montrer les carrés, en mesurant on aurait trouvé $\overrightarrow{AC} = 1,5\ \overrightarrow{AH}$ ou $\overrightarrow{AC} = 1,4\ \overrightarrow{AH}$ (une valeur approchée par excès ou par défaut).

Quand les figures géométriques permettent d'en savoir plus que les mesures expérimentales, on garde la valeur «exacte» $\sqrt{2}$.

On a aussi $\overrightarrow{AD} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{BC}$ (car AD = AC et BC = AB = AH). Et dans la figure de droite, en utilisant le théorème de Thalès, on peut encore écrire $\overrightarrow{AE} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{AD}$.
D'où, puisque $\overrightarrow{AD} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AE} = \sqrt{2} \bullet \sqrt{2}\ \overrightarrow{BC}$ soit $\overrightarrow{AE} = 2\ \overrightarrow{BC}$.

Si on s'était contenté des valeurs approchées, on ne verrait pas que $\overrightarrow{AE}$ est exactement le double de $\overrightarrow{BC}$. Voilà pourquoi il vaut mieux calculer avec les valeurs exactes pour les nombres «irrationnels» comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$…

La famille des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$, c'est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent : $k\vec{u}$, où k est un nombre absolument quelconque, un nombre REEL.

***** Un original dans cette famille…**

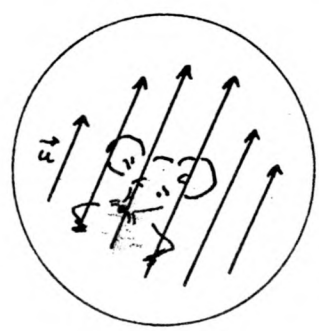
Si jamais on multiplie $\vec{u}$ par le nombre 0, on obtient le vecteur $\vec{0}$… C'est un peu le «fantôme» de cette famille. Il en fait partie, mais il fait partie de toutes les familles de vecteurs colinéaires à n'importe quel vecteur. C'est un vecteur passe-partout qui n'a pas de direction bien définie, alors on admet qu'il à n'importe quelle direction… donc pourquoi pas celle de $\vec{u}$!

***** Il y a plusieurs façons de désigner une même famille…**

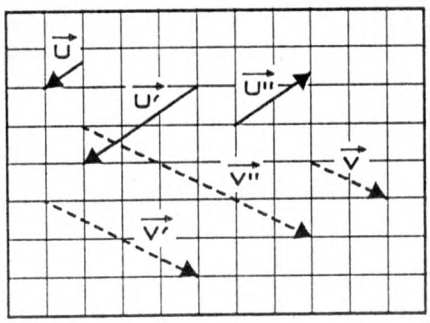
Si François et Myriam sont frère et sœur, tu comprends bien que la famille de l'un c'est pareil que la famille de l'autre !

Et bien si $\vec{u'}$ est un vecteur de la famille de $\vec{u}$, cela reviendra au même de parler de l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ ou de l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u'}$, c'est la même famille !

*** Rappelons qu'une famille de vecteurs colinéaires est prisonnière d'UNE direction et qu'elle ne peut en sortir !



Y A-T-IL DES RENCONTRES ENTRE LES FAMILLES DE VECTEURS COLINEAIRES ?



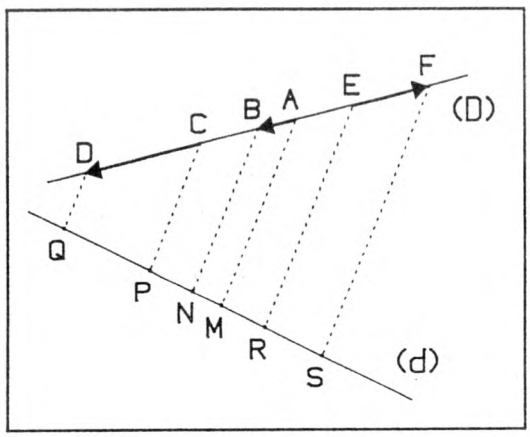
Voici deux familles de vecteurs :

Chez les $\vec{u}$, on a par exemple $\vec{u'} = 3\vec{u}$ et $\vec{u''} = -2\vec{u}$.

Chez les $\vec{v}$, on a $\vec{v'} = 2\vec{v}$ et $\vec{v''} = 3\vec{v}$ par exemple.

Mais bien qu'on voie le même nombre 3 dans les égalités $\vec{u'} = 3\vec{u}$ et $\vec{v''} = 3\vec{v}$, on ne peut pas pour autant mettre un lien entre $\vec{u'}$ et $\vec{v''}$... **Ils n'ont pas la même direction donc on ne peut les comparer entre eux.** On ne peut rien dire non plus à propos de leurs normes, elles n'ont aucune raison d'être égales puisque $\vec{u'}$ est dit avec des $\vec{u}$ et $\vec{v''}$ avec des $\vec{v}$...

*** La seule façon pour deux familles d'entrer en relation, c'est que l'une envoie à l'autre des «messages parallèles» !



Chez les $\vec{u}$, de direction (D), dessinons les vecteurs sur une même droite :

$\vec{u'} = 3\vec{u}$ devient $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$
et $\vec{u''} = -2\vec{u}$ devient $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AB}$.

La famille $\vec{v}$ est prisonnière de la direction (d).

Si les $\vec{u}$ lui envoient des parallèles, on pourra dire qu'on a aussi chez les $\vec{v}$:
$\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{RS} = -2\overrightarrow{MN}$.

C'est le théorème de Thalès !

Mais ATTENTION, on ne peut toujours pas écrire une comparaison entre un vecteur de la famille $\vec{u}$ et un de la famille $\vec{v}$.

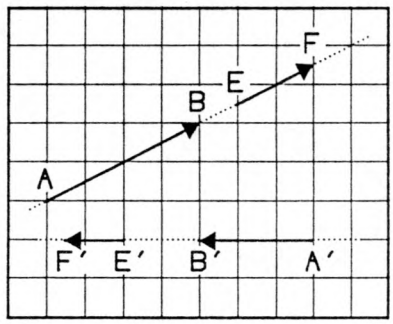
Simplement, ce qui se passe entre des vecteurs de la famille $\vec{u}$ se passe aussi entre des vecteurs de la famille $\vec{v}$.

Et comme on ne sait pas ce que pourrait être une division par un vecteur... on n'écrit surtout pas des rapports égaux comme on le faisait avec les mesures algébriques qui sont des nombres (et on sait ce que veut dire diviser par un nombre).

***** Quand le hasard s'en mêle…**

Ce n'est pas parce que «il se passe la même chose» chez les $\vec{u}$ et chez les $\vec{v}$ que forcément ils se sont envoyés des messages parallèles !

Ainsi, chez les Dupont et chez les Dubois, on dîne tôt ce premier avril, parce qu'on s'est téléphoné pour aller à la séance de cinéma de 19h30… Mais chez les Randus qui ne connaissent pas les précédents, on dîne tôt aussi pour aller au cinéma. C'est par coïncidence que les Randus font la même chose que les Dupont ou les Dubois !

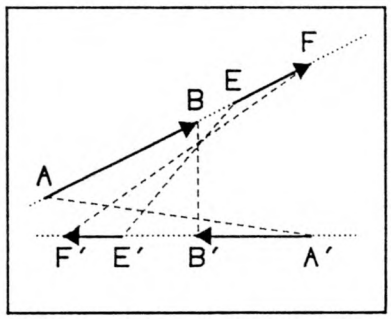


C'est pareil pour les vecteurs !

Voici deux familles de vecteurs :

chez les $\vec{U}$: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EF}$

chez les $\vec{V}$: $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{E'F'}$.

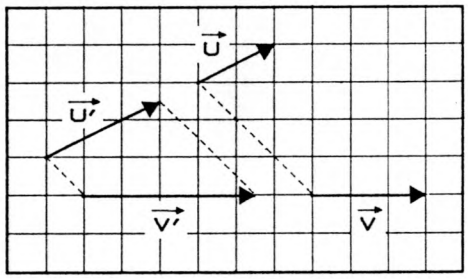


Se sont-ils envoyés des messages parallèles ?

Essayons pour voir !

C'est le fouillis !

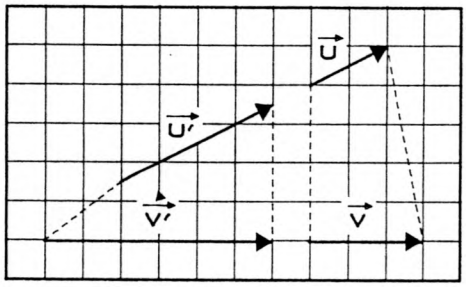
Mais cependant :



S'il se passe la même chose chez les $\vec{u}$ et chez les $\vec{v}$,
et si l'on sait que tous les messages sauf UN que l'on ne connaît pas, sont parallèles,.

alors, ils sont TOUS parallèles.

Le message inconnu ne peut pas être quelconque.



Mais si on sait seulement que deux messages sur 4 sont parallèles, cela ne veut rien dire pour les autres…

POUR CALCULER. JE NE VOIS PAS DE DIFFERENCE ENTRE LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES. LE PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE.

*** Oui, il y a beaucoup de ressemblances.

- On peut regrouper comme on veut :
3 fois $2\vec{u}$ c'est pareil que (3.2) fois $\vec{u}$…
(On l'utilise surtout pour les fractions ou pour le produit par -1).

- Comme pour les nombres, prendre l'opposé c'est pareil que multiplier par -1.
Opposé de 5 = 5 × (-1) ou (-1) × 5.
Opposé de $\vec{u}$ = (-1) $\vec{u}$; $-\overrightarrow{AB}$ = (-1) $\overrightarrow{AB}$.

- On dirait aussi que l'on met en facteur :

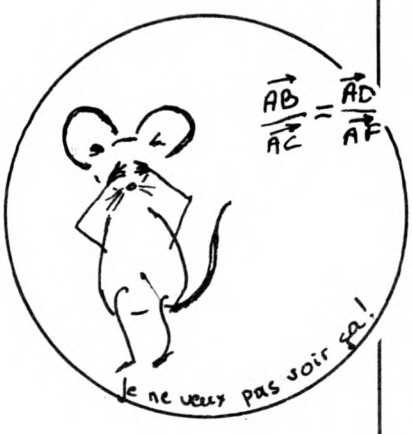
$a + 0,2a = 1a + 0,2a = (1 + 0,2)a$ soit $1,2a$;
de même $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1 + \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

- «Multiplier par 0 ça fait $\vec{0}$!»

Mais ici il y a deux «zéro» possibles :
celui des nombres :
$$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB}$$
$$= (3 - 1 - 2)\overrightarrow{AB} = 0\overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$
ou celui des vecteurs :
$$5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 5\vec{0} = \vec{0}.$$

Ici encore on peut dire : «Pour que le produit $k\vec{U}$ soit le vecteur nul, il faut et il suffit que k soit le nombre 0 ou que $\vec{U}$ soit le vecteur nul».

(Montrer qu'un vecteur est nul est utile pour montrer par exemple que deux points sont confondus… quand cela a l'air vrai sur le dessin, mais qu'il faut prouver que ce serait vrai pour tous les dessins possibles, que ce n'est pas du hasard).



*** ET UNE GROSSE DIFFERENCE.

Le vecteur nul $\vec{0}$ joue pour l'addition des vecteur le même rôle que le nombre zéro pour l'addition des nombres. Ces deux opérations se ressemblent totalement.

Mais ce n'est pas pareil pour la multiplication.

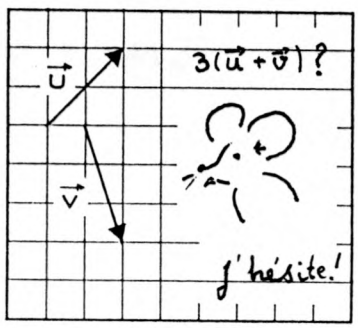
Pour les vecteurs, on ne multiplie pas deux vecteurs entre eux…

Deux nombres sont inverses si leur produit vaut le nombre 1. Mais chez les vecteurs, il n'y a pas de vecteur qui joue le rôle du 1, donc on ne peut pas parler d'inverse d'un vecteur… et encore moins l'écrire

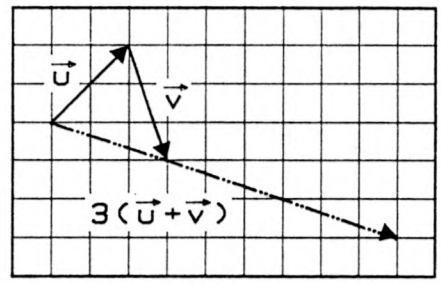
Dans une écriture, un vecteur n'est JAMAIS au dénominateur.

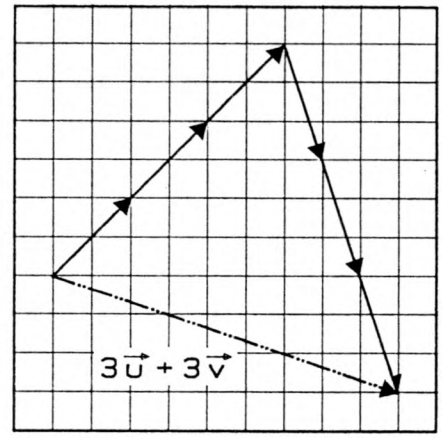
ENCORE UNE RESSEMBLANCE :

MULTIPLIER UNE SOMME PAR UN NOMBRE.



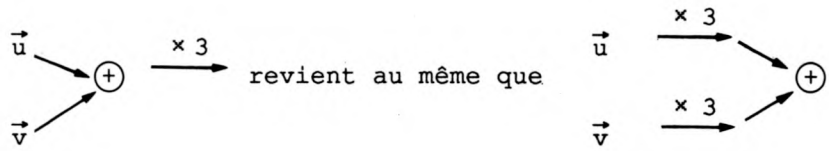
ou





C'est pareil !

En résumé :



Ce qui s'écrit $3(\vec{u} + \vec{v}) = 3\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$.

On connaissait déjà le lien entre l'addition et le produit de deux NOMBRES (appelé la distributivité) :

$$a(x + y) = ax + ay$$

ou, «dans l'autre sens» la factorisation

$$ax + ay = a(x + y).$$

Le lien entre l'addition de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre, a donc la même forme. Ici encore on pourra garder nos habitudes de calcul.

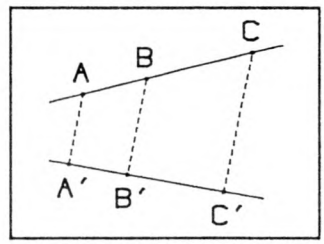
Exemple, si on utilise la relation de Chasles :

$$3\,\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = 3\,\overrightarrow{AG} + 3\,\overrightarrow{GC}.$$

Au contraire, ne pas VOIR une relation de Chasles dans
$3\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$… qui ne peut s'écrire $3\,\overrightarrow{AB}$ car le 3 n'est pas distribué à chaque vecteur.

Nous allons voir un cas particulier des «messages parallèles du théorème de Thalès, combiné au calcul vectoriel que nous venons de voir. Cela donnera un dessin (on dit une configuration) à retenir visuellement.

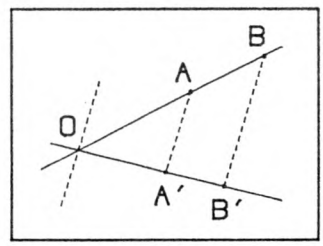
Rappel du cas général :



AA', BB' et CC' étant parallèles, alors
$\overrightarrow{A'C'}$ se dit avec des $\overrightarrow{A'B'}$ de la même façon que $\overrightarrow{AC}$ se dit avec des $\overrightarrow{AB}$.
C'est-à-dire que si $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$, alors on a aussi $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$, avec le **même nombre** x.

Cas particulier.

Les droites (AB) et (A'B') sont en général de directions différentes. Elles se coupent en un point O. Alors le «message parallèle» que O (qui est un point de (AB)) envoie sur (A'B')… arrive aussi en O.



D'après le théorème de Thalès, on a donc comme plus haut :
Il existe k tel que $\overrightarrow{OB} = k\ \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\ \overrightarrow{OA'}$ (le même k).
Mais que penser de $\overrightarrow{BB'} = k\ \overrightarrow{AA'}$?
Comme ils ont même direction (c'est-à-dire comme ils sont colinéaires).

On doit aussi pouvoir exprimer $\overrightarrow{BB'}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$.

On utilise alors l'outil «calcul vectoriel» : suivant la version qu'on perçoit le mieux !

Version différence

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}\\ &= k\ \overrightarrow{OA'} - k\ \overrightarrow{OA}\\ &= k(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA})\\ &= k\ \overrightarrow{AA'}\end{aligned}$$

Version somme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB'}\\ &= k\ \overrightarrow{AO} + k\ \overrightarrow{OA'}\\ &= k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'})\\ &= k\ \overrightarrow{AA'}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BB'}$ se dit avec des $\overrightarrow{AA'}$ comme $\overrightarrow{OB}$ se dit avec les $\overrightarrow{OA}$ et comme $\overrightarrow{OB'}$ se dit avec les $\overrightarrow{OA'}$. Les «petits vecteurs» formant le triangle OAA' donnent les «grands vecteurs» du triangle OBB' en les multipliant par **le même** nombre.

Dans ce dessin ce nombre est positif. ($\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ ont le même sens). Mais c'est pareil si le nombre est négatif. Il faut se mettre ces deux dessins dans l'œil pour les reconnaître au passage. Nous les appellerons les configurations **d'homothétie.**

A RETENIR : LES DESSINS D'HOMOTHETIE.

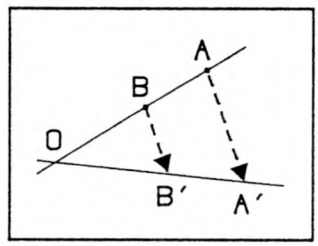
Sachant que (AA') et (BB') sont parallèles :

alors

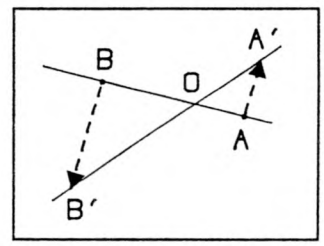
il existe un même nombre k tel que

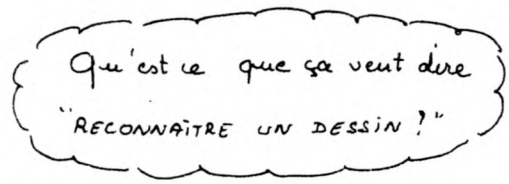
$\overrightarrow{OB} = k\ \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = k\ \overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BB'} = k\ \overrightarrow{AA'}$

Dessin pour k positif



Dessin pour k négatif





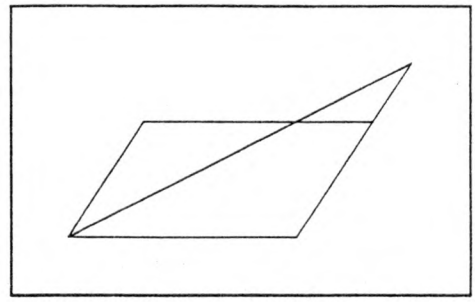
L'autre jour en passant devant la terrasse du café du lycée, tu as reconnu Arthur au milieu d'un groupe qui riait.
C'est-à-dire que tu l'as en quelque sorte isolé des autres que tu ne connais pas et par exemple des souvenirs te sont revenus dans la tête en le voyant : c'est lui qui m'a passé le disque de U 2…

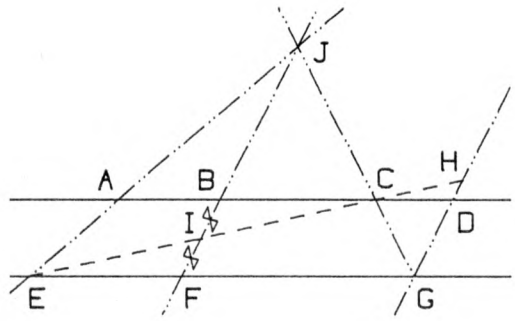
Il en est de même pour une configuration géométrique… Tu la rencontreras au milieu d'autres dessins et il faudra la «voir», l'isoler, et te souvenir de ce qu'elle t'a dit en apprenant ton cours… (ce qui est à retenir en haut de cette page !).

EXEMPLES :

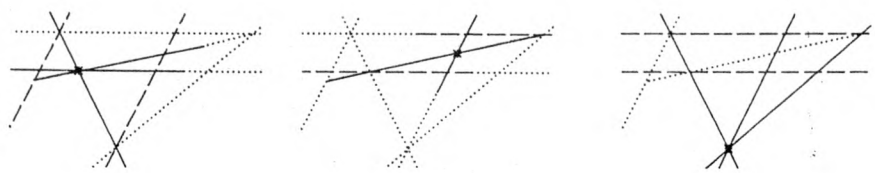
* Dans ce dessin que reconnaît-on ?

Essaie de ne voir qu'une partie du dessin comme si le reste s'effaçait, et de nommer ce que tu vois.

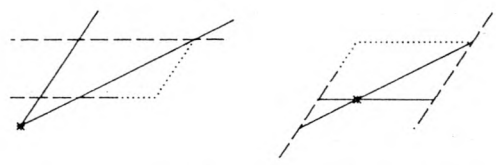




On sait que :
• I milieu de [BF]
• BDGF est un parallélogramme
• Essaie d'extraire des dessins connus.



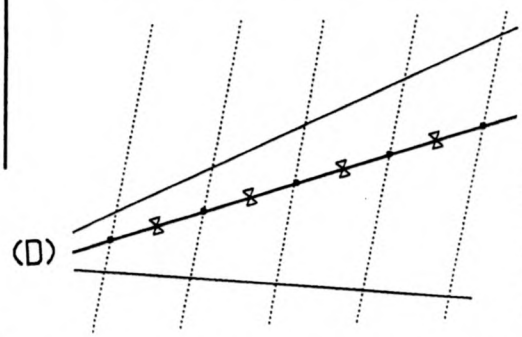
2) une homothétie de centre J (rap. positif) ; une symétrie de centre I ; une homothétie de centre C (rap. négatif)



1) un parallélogramme ; une homothétie (rap. négatif) ; une homothétie (rap. positif)

RÉPONSES.

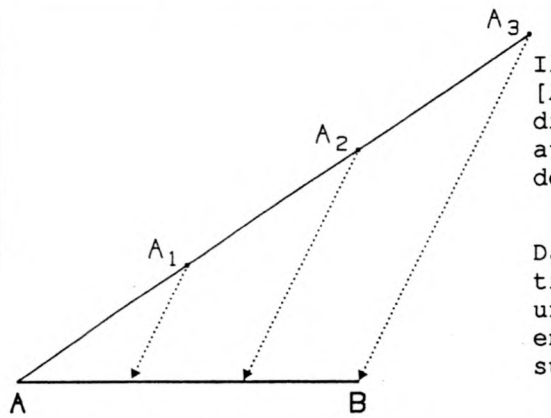
*** Une observation utile pour la construction.**



Supposons que la droite D soit régulièrement graduée et que l'on fasse passer des parallèles par chaque point de la graduation.
Alors ces parallèles forment une graduation régulière sur toute autre droite qui les coupe.

Pour reprendre la comparaison déjà utilisée : les parallèles transportent bien le message «graduations régulières».

* Application :
Ayant $\overrightarrow{AB}$, construire M tel que $\overrightarrow{AM} = 2/3\ \overrightarrow{AB}$.

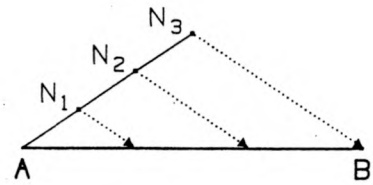


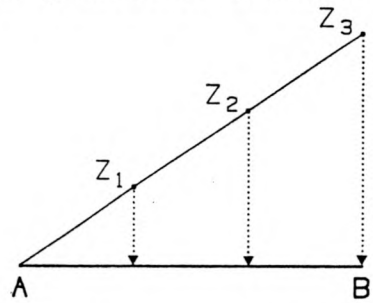
Il faudrait partager [AB] en 3. C'est-à-dire former une graduation régulière avec des tiers de [AB].

Dans une autre direction, on va construire une graduation… puis envoyer des parallèles sur [AB].

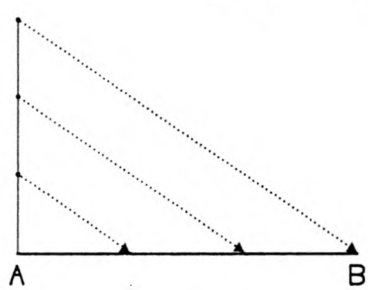
On construit AA_1 puis on reporte avec un compas pour avoir A_2, A_3, A_4 etc. Ici comme on veut couper en 3, il faut que ce soit le «message» de A_3 qui arrive sur B. Donc (A_3B) donne la direction des parallèles.

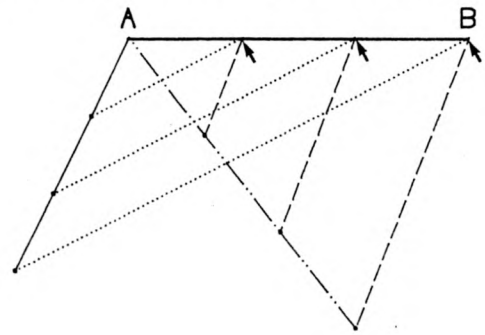
• Peu importe le pas de la graduation inventée…



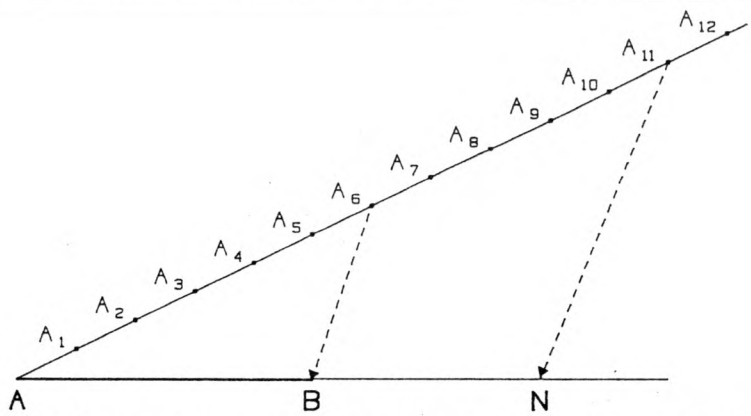


Peu importe la direction qui va porter la graduation inventée… On a donc une grande liberté!





* $\overrightarrow{AB}$ étant donné, construire N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{11}{6}\ \overrightarrow{AB}$.

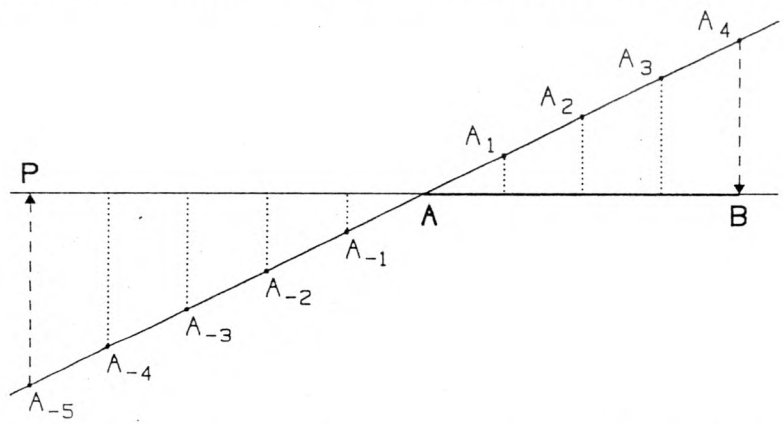


Puisque l'on veut graduer [AB] en «sixième», c'est (A_6B) qui donnera la direction des parallèles… Et c'est A_{11} qui enverra sa parallèle sur le point cherché N.

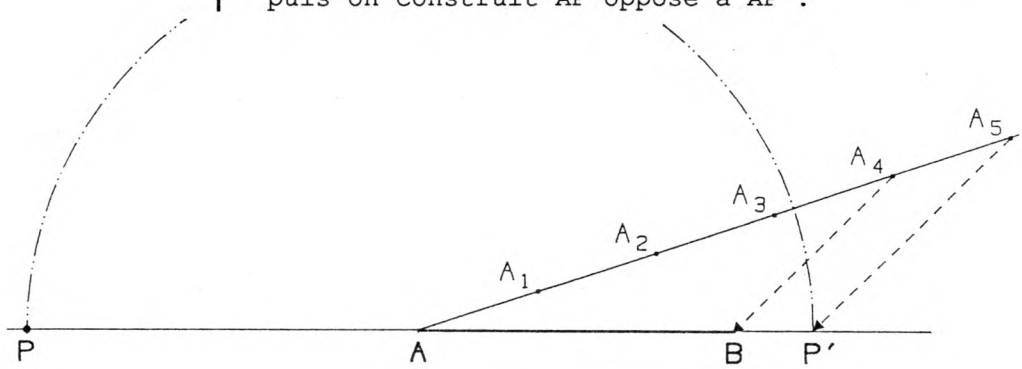
(Une fois qu'on a compris le principe, on ne dessine plus toutes les parallèles, mais seulement celle qui donne la direction et celle qui donne le point).

* $\overrightarrow{AB}$ étant donné, construire P tel que $\overrightarrow{AP} = -5/4\ \overrightarrow{AB}$.

• Soit on prolonge la graduation du côté négatif :



• Soit on place d'abord P' tel que $\overrightarrow{AP'} = -5/4\ \overrightarrow{AB}$, puis on construit $\overrightarrow{AP}$ opposé à $\overrightarrow{AP'}$.



LA NORME ET LE PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE…

IL Y A DE LA SYMPATHIE DANS L'AIR !

* Pour la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, nous avons vu que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont { même direction, même sens.

Or c'est justement le cas lorsqu'on ajoute plusieurs fois le même vecteur.

$$\|\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{u}\| + \|\vec{u}\| \text{ soit } \|3\vec{u}\| = 3\,\|\vec{u}\|.$$

* Lorsqu'on cherche la norme de $-4\vec{u}$, comme deux vecteurs opposés ont la même norme, il suffit de cher-cher celle de $4\vec{u}$ et d'après ce que l'on vient de voir c'est $4\,\|\vec{u}\|$.

* Il en est de même quand les nombres ne sont pas entiers, car cela revient à mettre bout à bout, dans la même direction et dans le même sens des $\vec{u}$ et une partie de $\vec{u}$, ou des $(-\vec{u})$ et une partie de $(-\vec{u})$.
On est donc toujours dans le cas de l'EGALITE.

Donc :

$\|5{,}2\,\vec{u}\| = 5{,}2\,\|\vec{u}\|$; $\|1/2\ \vec{u}\| = 1/2\,\|\vec{u}\|$;

si k est positif $\|k\vec{u}\| = k\,\|\vec{u}\|$.

$\|-3{,}7\,\vec{v}\| = 3{,}7\,\|\vec{v}\|$; $\left\|-\frac{2}{3}\,\vec{v}\right\| = \frac{2}{3}\,\|\vec{u}\|$;

si k est négatif $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$.

(Comme une norme est positive, on se ramène chez les positifs en prenant la valeur absolue de k… Bien sûr, quand k est positif on peut dire aussi qu'on met la valeur absolue de k… mais cela ne sert à rien).

Pour progresser au sujet de la valeur absolue.

• Si tu perçois ici, que l'on peut écrire d'un seul coup $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$ sans distinguer le signe de k, c'est que la notion de valeur absolue te devient familière.

• Si tu ne le perçois pas encore, continue à réfléchir en pensant que la norme doit toujours être positive…

UNE FAÇON DE DIRE TOUS LES VECTEURS DU PLAN

* Nous avons vu que si $\vec{u}$ est un vecteur (mais pas le vecteur $\vec{0}$!) alors tous les vecteurs ayant la même direction que $\vec{u}$ peuvent se dire x $\vec{u}$, x étant un nombre peut-être entier, mais peut-être une fraction, ou un nombre irrationnel comme $\sqrt{2}$…

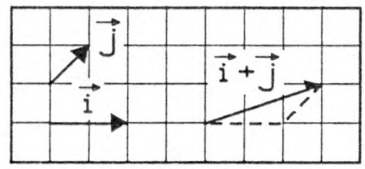
Pour chaque direction on pourrait choisir un vecteur de référence… mais alors, comme il y a une infinité de directions, il y aurait une infinité de vecteurs de référence et cela semble bien compliqué.

Avec un seul vecteur de référence, on est prisonnier d'une direction.

*** Et avec deux vecteurs ?**

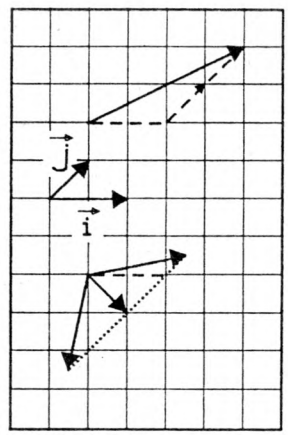
Bien sûr on ne va pas prendre deux vecteurs ayant même direction, sinon on n'en sortira jamais !

Mais si l'on combine deux vecteurs de directions différentes (on dit deux vecteurs indépendants), il est bien vrai qu'en les ajoutant on échappe à la direction imposée par l'un ou l'autre :



si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction alors, la direction $\vec{i} + \vec{j}$ est une troisième direction…

*** Explorons les directions possible à partir de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.**



$\vec{i} + 2\vec{j}$ est encore une autre direction…

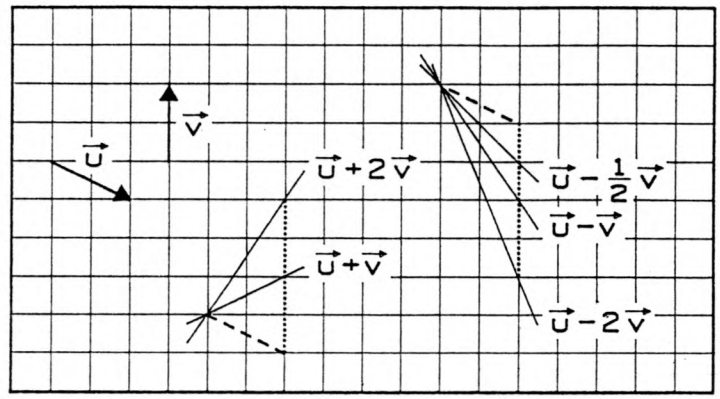
et $\vec{i} + 1/2\vec{j}$

et $\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{i} - 2{,}5\vec{j}$ etc.

Avec $\vec{i}$ + un peu ou beaucoup de $\vec{j}$ on peut faire toutes les directions (sauf celle de $\vec{i}$ et celle de $\vec{j}$).

*** Cela ne dépend pas des deux directions choisies au début.**

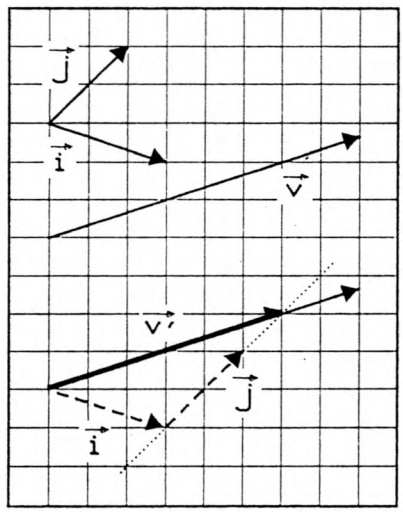
Ainsi avec $\vec{u}$ et un peu ou beaucoup de $\vec{v}$, on peut aussi trouver toutes les autres directions.



* A partir de deux directions distinctes, on peut faire naître toutes les autres… dans le plan où l'on dessine :
- par exemple, tu trouves toutes les directions du plan de ton classeur,
- et le professeur trouve toutes les directions du plan du tableau.

Avec DEUX DIRECTIONS DISTINCTES, on est en quelque sorte prisonnier d'un plan.

* Avec deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de directions différentes, on peut construire toutes les directions. **Mais peut-on dire n'importe quel vecteur ?**



Voici $\vec{i}$ et $\vec{j}$ connus et $\vec{v}$ un vecteur quelconque.

On peut trouver la direction de $\vec{v}$ avec $\vec{i}$ et des $\vec{j}$.

Par exemple, ici, au bout de $\vec{i}$ il faut mettre $1,5\vec{j}$.

On obtient alors $\vec{j}$.

Comme $\vec{v}$ a la direction de $\vec{v'}$, on peut trouver un nombre k tel que

$$\vec{v} = k\,\vec{v'}.$$

(Sur le dessin $\vec{v} = \frac{4}{3}\,\vec{v'}$).

Alors on ressort l'outil calcul vectoriel :

$$\vec{v} = k\vec{v'} = k(\vec{i} + 1,5\vec{j}) = k\vec{i} + 1,5k\vec{j}.$$

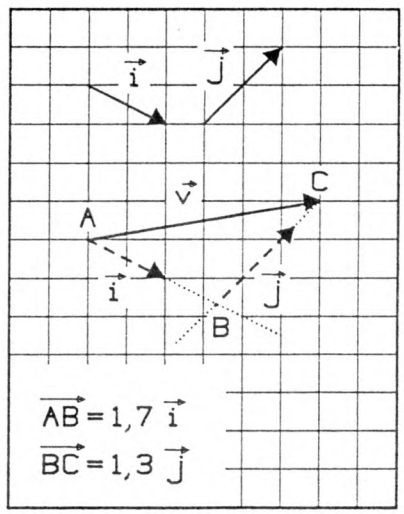
Donc on peut dire le vecteur $\vec{v}$ avec des $\vec{i}$ et des $\vec{j}$…

*** Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs de directions différentes, **on peut dire TOUS les vecteurs du plan en combinant des $\vec{i}$ et des $\vec{j}$…**

(On ne mettra que des $\vec{i}$ si on veut obtenir un vecteur qui est justement dans la direction de $\vec{i}$… ou bien on ne mettra que des $\vec{j}$ si le vecteur a la direction de j…).

***** Combien de $\vec{i}$, combien de $\vec{j}$?**

Tout vecteur $\vec{v}$ s'écrit : $\vec{v}$ = … $\vec{i}$ + … $\vec{j}$ (peut-être zéro fois $\vec{i}$…, ou zéro fois $\vec{j}$…).



…$\vec{i}$ ou x$\vec{i}$ a la direction de $\vec{i}$.

…$\vec{j}$ ou y$\vec{j}$ a la direction de $\vec{j}$.

Il s'agit donc de mettre bout à bout un vecteur dans la direction de $\vec{i}$ et un de la famille $\vec{j}$ pour reconstituer le vecteur $\vec{v}$.

On trace les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ à partir des extrémités de $\vec{v}$.

On peut ainsi trouver, en mesurant, quelles doses il faut mettre de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ pour retrouver $\vec{v}$. (Un calcul donne parfois un résultat un peu plus précis).
On pourrait presque dire que $\vec{v}$ est un mélange de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$. S'il faut par exemple $2\vec{i} + 3\vec{j}$, on dira que les nombres 2 et 3 sont les composantes de $\vec{v}$ dans la base (i, j).

Attention, il faut respecter l'ordre pour se comprendre…

(Ainsi, dans le «Ricoré» mélange de café et de chicorée, les pourcentages 40% et 60% ne veulent pas dire grand chose si on ne sait pas de quel produit on parle ! il y a quelques années, les fabricants ont d'ailleurs discrètement inversé les pourcentages… sans en parler ! 60% café et 40% chicorée est devenu 40% café et 60% chicorée !).

EN MATH, on s'accordera sur l'ordre ; ce sera le même que celui des vecteurs de base :
$\vec{V}$ a pour composantes (3, -1) dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) veut dire : $\vec{V} = 3\vec{i} - \vec{j}$.
$\vec{W}$ a pour composante (x, y) dans la base ($\vec{v}$, $\vec{u}$) veut dire : $\vec{W} = x\vec{v} + y\vec{u}$.

* Nous vous avons déjà expliqué que le calcul vectoriel était un outil pour démontrer, pour résoudre certains problèmes de géométrie, et nous avons revu les principales règles de calcul : somme de deux vecteurs et produit d'un vecteur par un nombre.

Les vecteurs étaient alors des objets que l'on manipulait entre eux.

Et puis, si l'on s'accorde pour choisir deux vecteurs de directions différentes, $\vec{i}$ et $\vec{j}$, voilà que chaque vecteur pourra se ramener à un mélange de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$, il suffira de connaître son «dosage», c'est-à-dire ses composantes, donc deux nombres (dans l'ordre donné !).

On pourra alors ramener le calcul vectoriel à un «double calcul» sur des nombres… sans perdre de vue ce que l'on veut faire avec les vecteurs (par exemple on veut montrer qu'ils ont la même direction).

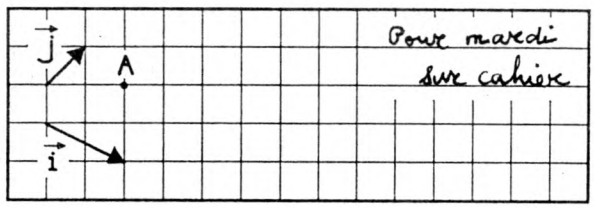
* Une comparaison pour essayer de vous faire sentir ce qu'est un double calcul.

Lorsqu'on joue un morceau de piano, on peut dire que cela se décompose en deux activités : celle de la main droite et celle de la main gauche… Certains lisent directement et travaillent toujours les deux mains ensemble : c'est comme l'élève qui travaille directement avec le calcul vectoriel, il ne décompose pas. D'autres préfèrent peut-être travailler d'abord une main, et puis l'autre… Cela paraît plus facile, mais le risque est d'oublier le projet… qui est de jouer le morceau les mains ensemble. Ainsi, certains élèves qui aiment travailler sur les composantes des vecteurs (parce que ce sont des nombres, donc du déjà connu) s'égarent dans leurs calculs car ils ne pensent plus «en vecteur» dans leur tête. Alors ils alignent des calculs… mais ils ne savent plus très bien ce qu'ils calculent ! C'est comme au piano, si on a besoin, pour un passage difficile, de décomposer le travail de chaque main, il est toujours conseillé de «l'entendre dans sa tête comme s'il y avait les deux mains»…

* En math, il est parfois utile de travailler sur les composantes, mais il faudra toujours penser ce que l'on fait en vecteurs.

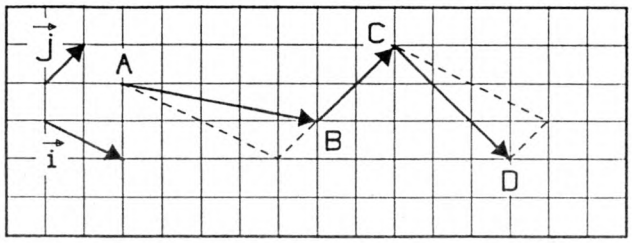
* Les composantes d'un vecteur sont relatives à une base donnée.

Mais imaginons Alfred qui téléphone à Alphonse…

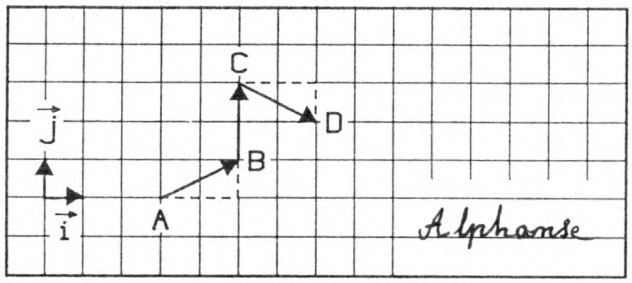


Alfred a reçu une fiche, qu'il doit compléter connaissant les composantes :

$\overrightarrow{AB} : \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{BC} : \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{CD} : \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$

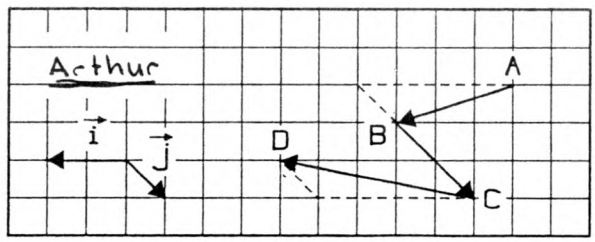


Il a donc dessiné en utilisant la base proposée par le professeur.



Il dicte les coordonnées à Alphonse qui était malade le jour de la distribution de la fiche.

Alphonse qui a du sens pratique n'a pas envie de se compliquer la vie, il va utiliser les carreaux !



Mais voilà qu'Arthur, qui a perdu sa fiche, téléphone aussi. Comme c'est un inquiet (c'est bien pour ça qu'il perd ses affaires !), il veut savoir comment est la base… et Alfred, qui a un petit compte à régler, lui indique une base complètement farfelue, rien à voir avec celle du prof !

Et chacun a son dessin…

Choisis une autre base pour faire ton propre dessin.

La question prévue est : que peut-on dire des points A, B, D ?
Eh bien, comme tu peux le voir, sur tous les dessins, ces points sont alignés et même B est au milieu du segment [AD].

* En géométrie vectorielle, lorsque tu changes de base, tu vas dessiner un autre modèle d'une même configuration…

et le calcul vectoriel ne se préoccupe pas de TON dessin…

Quand on écrit : $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$,

donc $\vec{AD} : \begin{vmatrix} 2 + 0 + 2 \\ 1 + 2 - 1 \end{vmatrix}$ donc $\vec{AD} : \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix}$ et comme $\vec{AB} : \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

alors $\vec{AD} = 2\ \vec{AB}$ et donc B est le milieu de [AD],

cela est vrai quel que soit la base.

Le calcul vectoriel travaille au niveau général.

(Et si souvent les profs donnent une base pour que tout le monde ait la même, ce n'est pas parce que c'est important pour trouver le résultat, c'est simplement parce qu'ils verront plus facilement, en passant dans les rangs, si certains se sont trompés en construisant, puisqu'avec la même base tout le monde doit arriver au même modèle…).

LES REGLES DE CALCUL SUR LES COMPOSANTES.

* Nous savons que tu ne te trompes pas pour trouver les composantes d'une somme de deux vecteurs ou les composantes de $3\vec{U}$ connaissant celles de $\vec{U}$.

Alors nous n'en parlerons plus !

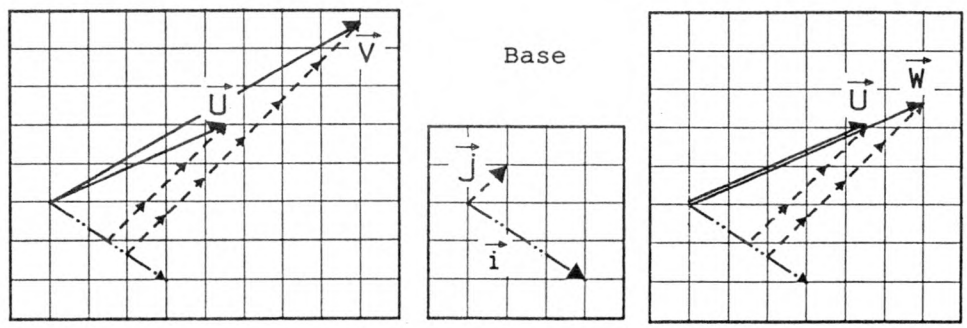
* Nous nous arrêterons plutôt sur un point où souvent tu oublies de réfléchir «en vecteur».
Comment reconnaître que deux vecteurs ont la même direction, au vu de leurs composantes ?

Voici $\vec{U}$: $\begin{vmatrix} 0,5 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\vec{V}$: $\begin{vmatrix} 2/3 \\ 6 \end{vmatrix}$ $\vec{W}$: $\begin{vmatrix} 2/3 \\ 4 \end{vmatrix}$

Il est manifeste que $\vec{V}$ et $\vec{W}$ n'ont pas la même direction (parce que comme ils ont la même «dose» de $\vec{i}$, ils devraient avoir aussi la même dose de $\vec{j}$…).
$\vec{U}$ et $\vec{V}$ ont-ils la même direction ? Et $\vec{U}$ et $\vec{W}$?

Dessinons des vecteurs de même origine.

Pour $\vec{U}$ et $\vec{V}$ Pour $\vec{U}$ et $\vec{W}$



Quand les deux vecteurs ont même direction, c'est-à-dire quand ils sont colinéaires, alors on arrive à une configuration d'homothétie… à savoir reconnaître !
De même que $\vec{W}$ peut s'écrire sous la forme k $\vec{U}$, chacune des composantes aussi.
Quand k est un nombre entier, ça se voit facilement :

$\vec{W'}$: $\begin{vmatrix} 1,5 \\ 9 \end{vmatrix}$ alors $\vec{W'} = 3\vec{U}$.

Mais quand ce n'est pas un nombre entier, cela se voit moins bien… Les composantes de $\vec{U}$ et de $\vec{W}$ doivent être proportionnelles, mais ce n'est pas bien visible.
On utilise alors un «truc» pour reconnaître la proportionnalité des composantes : les «produits en croix doivent être égaux». Voyons-le :
0,5 × 4 est bien égal à 3 × (2/3),
donc $\vec{U}$ et $\vec{W}$ sont bien colinéaires.

A RETENIR.

Voici deux vecteurs avec leurs composantes dans une même base :

$$\vec{U} : \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \quad \text{et } \vec{U'} : \begin{vmatrix} a' \\ b' \end{vmatrix}$$

Ils sont colinéaires si $\vec{U}$ est de la forme $k\vec{U}$, c'est-à-dire **si leurs composantes sont proportionnelles.**

On regarde si ab' = a'b
ou, ce qui revient au même, si ab' - a'b = 0.

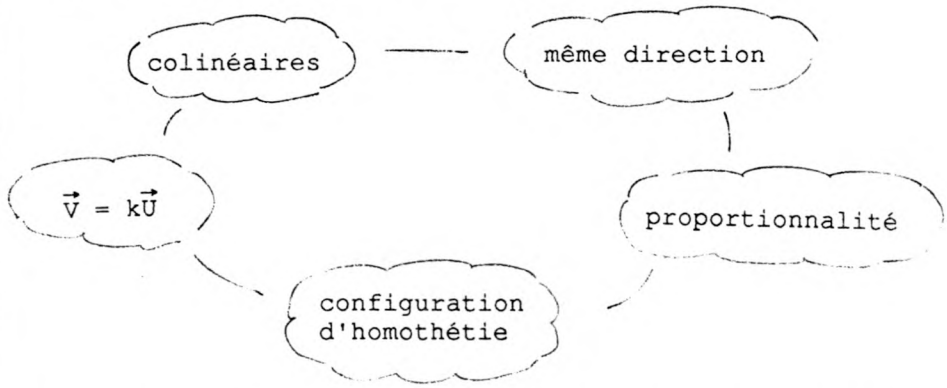
***** Ne pas se laisser distraire par des mots savants !**

Une petite histoire…

Il y a quelques années, j'étais entrain de bricoler avec une enfant de 6 ou 7 ans qui m'aidait à visser, très fière de tenir un gros tournevis alors que je n'avais qu'une petite vrille pour préparer le trou. «Il est drôle ce tournevis» dit alors Myriam… Et moi j'ai voulu faire la savante, je lui ai dit que c'était un tournevis «cruciforme». Le mot lui a beaucoup plu… (maintenant, je sais qu'elle est très sensible aux mots…), tellement qu'elle s'est laissée distraire totalement ! A la fin, elle s'est énervée car elle avait pris une vis ordinaire que bien sûr elle ne pouvait pas visser avec son «cruciforme» !

Ce qu'elle faisait jusque là naturellement (choisir des vis adaptées à son outil), voilà qu'elle ne le faisait même plus ! Mais elle savait que son tournevis s'appelait cruciforme. Bel apprentissage encombrant !

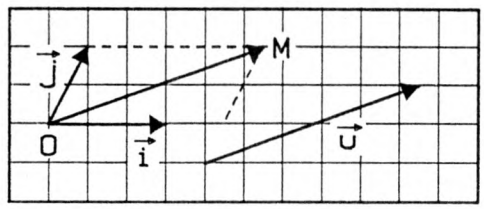
Et bien depuis que dans les livres du collège on parle du mot savant de «déterminant», j'ai remarqué que souvent, vous aussi, vous vous laissez distraire. Vous oubliez de penser :



Il est souvent utile d'enrichir son vocabulaire, et il m'arrive même de vous donner des mots (comme homothétie par exemple) parce qu'ils permettent de décrire ou de résumer une notion importante. Mais le mot déterminant n'a aucun intérêt en soi…

*** Pour que tu t'y retrouves dans ce vocabulaire, nous te proposons d'associer :

Un VECTEUR a des COMPOSANTES dans une BASE donnée $(\vec{i}, \vec{j})$.
Un POINT a des COORDONNEES dans un REPERE donné $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Les coordonnées du point M sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Mais on peut dessiner ailleurs un autre représentant du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Pour les vecteurs, tout est «flottant» puisqu'on peut dessiner les vecteurs de base n'importe où (en fait on ne dessine pas un vecteur, on essaie de s'en faire une idée avec un dessin…).

Pour les points d'un plan, au contraire, tout est fixé… Un peu comme si on prenait un clou pour fixer les deux vecteurs de base à partir d'un point choisi pour origine. Avec une même base, on peut faire de multiples repères en changeant d'origine…

***** Les composantes et les coordonnées, quelle différence ?**

C'est comme dans les devinettes, on peut dire qu'il n'y en a pas. D'ailleurs certains livres parlent aussi des coordonnées d'un vecteur.

Nous te proposons d'adopter deux mots différents et deux représentations différentes : pour que tu t'y retrouves mieux.

Point M: coordonnées (3, 2)

Vecteur $\overrightarrow{OM}$: composantes $\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}$

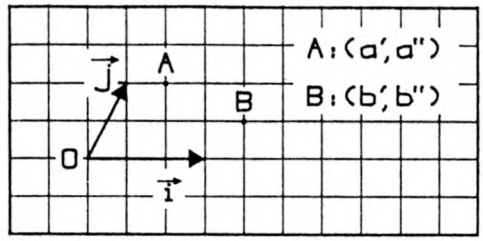
En effet, avec les points on dessine, on représente, mais on ne CALCULE PAS. C'est une façon «immobile» de voir ce qui se passe. (La somme de deux points, ce serait quoi ?).

Lorsqu'on veut «bouger», transformer, prouver, calculer, on quitte le pays des points pour aller dans celui des vecteurs. Souvent on utilise le calcul sur les vecteurs pour obtenir des réponses sur les points.

Exemple : pour montrer que les POINTS A, B et C sont alignés on essaie de montrer que les VECTEURS $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, par du calcul vectoriel.

LE MILIEU D'UN SEGMENT.

Voilà un bel exemple où l'on va penser en vecteurs pour calculer et pour obtenir finalement une réponse concernant un point : **quelles sont les coordonnées du milieu d'un segment ?**

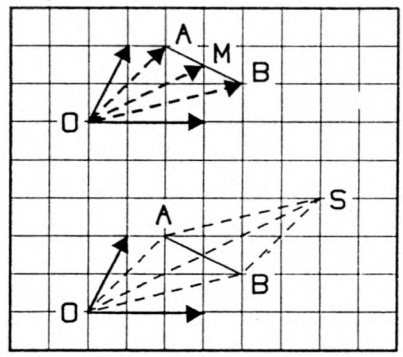


On connaît les coordonnées des points A et B dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Comment va-t-on dire le milieu de [AB] avec des vecteurs ?

On pourrait dire $\overrightarrow{AM} = 1/2\,\overrightarrow{AB}$, c'est vrai, mais il faudrait chercher les composantes de $\overrightarrow{AB}$. C'est faisable, mais long.

Nous allons te proposer ici une autre méthode pour trouver les coordonnées de M. Elle va te paraître longue aussi, mais elle s'appuie **sur une association d'idées** qu'il te faudra ranger «dans ta mémoire», car elle est souvent utile.

Que connaît-on ? Les coordonnées de A et de B, donc, pour penser en vecteurs, les composantes de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$. Pour avoir les coordonnées de M il suffit de trouver les composantes de $\overrightarrow{OM}$. Alors la question revient à dire $\overrightarrow{OM}$ (que l'on cherche) avec des $\overrightarrow{OA}$ et des $\overrightarrow{OB}$ (que l'on connaît).



Pour cela on reconstitue mentalement (ou en pointillé !) le parallélogramme OASB, $\overrightarrow{OS}$ illustrant $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

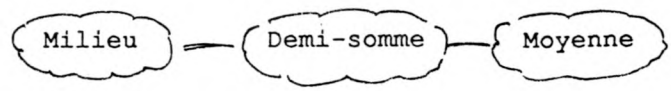
Et comme les diagonales se coupent en leurs milieux

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OS}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Pour atteindre le milieu, on fait la demi-somme des vecteurs ou encore leur «moyenne» (quand tu fais la moyenne de deux notes, tu les ajoutes et tu divises par 2 !).

Alors $\overrightarrow{OA}\begin{vmatrix} a' \\ a" \end{vmatrix}$: $\overrightarrow{OB}\begin{vmatrix} b' \\ b" \end{vmatrix}$: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\begin{vmatrix} a' + b' \\ a" + b" \end{vmatrix}$: $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} \frac{a' + b'}{2} \\ \frac{a" + b"}{2} \end{vmatrix}$

Association d'idée à ne pas oublier :



PASSAGE DES COORDONNEES DE A ET DE B
AUX COMPOSANTES DE $\overrightarrow{AB}$.

* Par exemple A(5, 3) et B(2, 1).

Beaucoup d'élèves ont écrit $\overrightarrow{AB}$ $\begin{vmatrix} 5+2 \\ 3+1 \end{vmatrix}$

«Je ne comprends pas pourquoi c'est faux» a dit Céline.

POURQUOI FAUT-IL FAIRE LA DIFFERENCE ?

* D'abord, c'est sûr qu'en ajoutant les coordonnées de A et de B, cela ne pourra donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$!
Pourquoi ? $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ce n'est pas le même vecteur.
Avec ton idée d'ajouter, tu trouverais les mêmes composantes pour $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$, ce qui n'est pas possible.

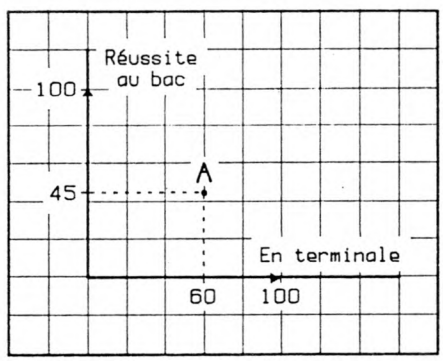
Une idée à retenir :

ajouter est une opération commutative (5+2=2+5) mais soustraire ne l'est pas (5-2 ce n'est pas pareil que 2-5). **Une opération commutative ne peut pas être associée à un résultat qui ne l'est pas.**
(Cette idée te poursuivra loin ! on la retrouve pour contrôler des formules de trigonométrie ou des formules de dérivées jusqu'en terminale…).

*** Pourquoi soustrait-on, et dans quel sens ?**

Bien sûr, on a dû vous le «prouver» avec la relation de Chasles. Mais puisque vous vous trompez encore souvent la-dessus, c'est que cette «preuve» ne vous touche pas vraiment…

Alors nous allons vous montrer un autre aspect d'un vecteur, tel qu'on le rencontre parfois sur des graphiques d'économie…



Nous allons découvrir qu'un vecteur traduit l'évolution entre deux situations.

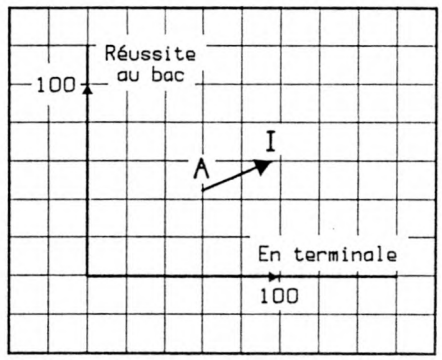
Nous allons choisir une situation qui vous concerne : le cheminement des élèves qui entrent au lycée.

Comprenons d'abord qu'une situation peut se décrire par un point du graphique.

Pour 100 élèves entrés ensemble, en septembre 83 par exemple, combien sont en terminale 3 ans plus tard ? (60 par exemple), et combien ont effectivement eu le bac en juin 86 (45 par exemple).

Le point A (60,45) illustre la situation de la promotion A.

Imaginons que pour la promotion suivante (les élèves qui arrivent au lycée en septembre 84), un nouveau ministre de l'éducation nationale ait décidé que le redoublement devrait être exceptionnel.



Alors la promotion I (comme imaginée !) a les résultats suivants :

trois ans plus tard,
95% des élèves sont arrivés en terminale,
60% des jeunes de cette promotion ont eu le bac en 3 ans.

Le point I (95,60) illustre le cheminement de cette promotion.

Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ représente l'EVOLUTION entre les deux promotions successives. (On retrouve l'aspect dynamique du vecteur alors que les points illustrent des situations statiques, des états de fait).

Alors, si tu étais journaliste et que tu commentes l'évolution entre les deux promotions pour un journal de parents d'élèves, te viendrait-il à l'idée d'ajouter les pourcentages de deux années successives?

• Pour décrire l'évolution entre

A (60 élèves arrivés en term, 45 reçus)

et I (95 élèves arrivés en term, 60 reçus)

tu regarderas les DIFFERENCES.

Evolution $\overrightarrow{AI}$: + 35 élèves en terminale en trois ans,

+ 15 reçus au bac (en trois ans).

*** C'est ce que l'on fait en math…

$\overrightarrow{AI}$ c'est ce qu'il faut ajouter à $\overrightarrow{OA}$ pour obtenir $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{AI}$ c'est une différence.

C'est cela que dit aussi la relation de Chasles:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} \text{ donc } \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI}$$
$$\text{ou encore } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA}$$

Voilà pourquoi on a la règle :

Composantes de $\overrightarrow{AI}$:	abscisse extrémité I - abscisse origine A ordonnée extrémité I - ordonnée origine A

DE L'UTILITE DES VECTEURS EN PHYSIQUE…

Au collège, puis au lycée, tu rencontres des vecteurs au cours de physique et au cours de mathématiques, dans des utilisations assez différentes.

En physique on se sert souvent des vecteurs pour aider à la compréhension de certaines notions, pour les représenter, pour étudier certains phénomènes, pour prévoir que telles causes donneront tels effets.

En seconde, les principales notions de physique où l'on utilise les vecteurs sont :

- les forces,
- les vitesses,
- les quantités de mouvement,

(sans compter la parenté entre le centre d'inertie vu en physique et le barycentre vu en math…).

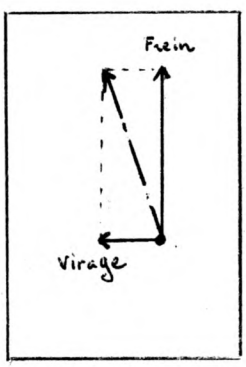
Chez l'épicier, si tu demandes de rajouter 500 g de raisins au 800 g déjà posés sur le plateau de la balance, cela fera 1 300 g… Ici les nombres suffisent, «pas besoin de vecteur» pourrait-on dire, car les raisins pèsent «dans la même direction».

Mais il y a d'autres situations où les nombres ne suffisent pas.

Ainsi en voiture, si on freine, tu te sens poussé vers l'avant, et si on tourne à droite, tu te sens poussé vers la gauche… Alors si on freine dans un virage, comment illustrer ce que l'on ressent ?

On choisit de dessiner une flèche qui indique

- la direction (ex : avant/arrière),
- le sens (ex : vers l'avant),
- l'intensité de la poussée… (ex : cela pousse «beaucoup» si la voiture allait vite, assez peu si on était à 30 km/h). Ici cela se complique : c'est la longueur de la flèche qui va indiquer si la poussée est faible ou forte. Il faut donc connaître une unité de poussée et choisir une échelle pour faire correspondre une longueur de flèche.



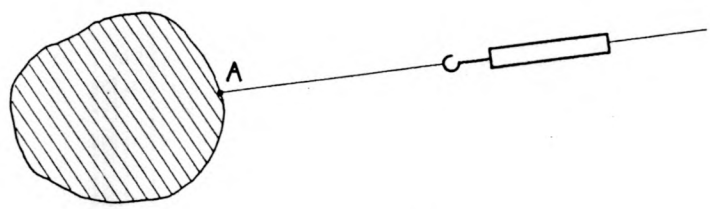
Sur le dessin, l'intensité de la force due au coup de frein est trois fois plus forte que celle due au virage : la flèche arrière/avant est trois fois plus longue que la flèche droite/gauche… Quelles que soient les unités choisies, le rapport des longueurs des flèches illustre le rapport des intensités des poussées.

FORCES ET VECTEURS

Lorsqu'on se sent «poussé» (dans une bousculade par exemple), ou bien lorsqu'on se fait «tirer» (pour se faire remorquer…), on perçoit bien une action, mais comment la dire ? Comment la décrire ? Pour cela on va parler de force.

C'est cette description un peu vague que l'on va essayer de préciser et pour laquelle le professeur de physique a besoin d'un «outil» afin d'étudier divers phénomènes.

* Exemple : on tire sur un solide par l'intermédiaire d'un fil.



La force exercée par le fil sur le solide a

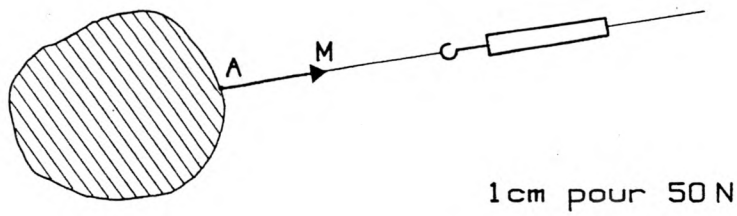
- un point d'application A (action localisée en A) ;
- une ligne d'action : la droite matérialisée par le fil tendu ; cette ligne d'action donne une direction ;
- un sens : celui de la traction du fil ;
- une intensité. L'intensité c'est pour préciser si l'on tire «plus ou moins fort».

* L'unité de mesure de l'intensité d'une force est le «newton» (du nom du physicien, mathématicien et astronome anglais qui publia en 1687 les résultats de ses travaux sur les forces et notamment le principe d'inertie, la proportionnalité des forces et des accélérations, l'égalité de l'action et de la réaction…).

Pour ce qui est des conséquences physiques de la force, le physicien a avec les quatre renseignements ci-dessus, une description complète du phénomène.

Souvent, plusieurs forces s'exercent en même temps sur un même solide. Alors la description précédente, avec des phrases, ne permet pas de tirer des conclusions concernant «l'effet» de ces diverses forces sur le solide (en seconde, on étudie notamment les problèmes d'équilibre d'un solide soumis à plusieurs forces).

C'est pourquoi on passe de la description à la représentation d'une force.



Pour représenter la force avec laquelle on tire sur le solide, on dessine un représentant particulier d'un vecteur mathématique (appelé le vecteur force), représentant dans lequel on met toute l'information contenue dans la force.

Ce représentant particulier $\overrightarrow{AM}$:

- a pour origine le point d'application A de la force

- a pour direction, celle de la ligne d'action (ici le fil) ;
- a pour sens, celui de la traction ;
- et la longueur de la flèche (du segment [AM]) est proportionnelle à l'intensité de la force.

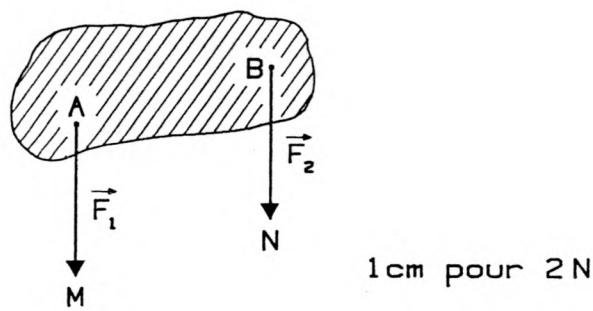
* Dans le cas ci-dessus, le représentant choisi prend en compte le point d'application de la force. Tu as sans doute rencontré des forces qui n'ont pas de point d'application, par exemple la force de pesanteur (force répartie).

* Le modèle mathématique «vecteur force» a été très vite adopté par les physiciens car il permet de résoudre très simplement les problèmes de statique (équilibre d'un solide).
La mécanique a joué un rôle fondamental dans la création du calcul vectoriel.

* Il ne faut pas identifier la force ou action, qui est une notion physique, avec le vecteur force associé, qui est une notion mathématique (un «outil» pour représenter la force).

* Il t'arrivera de rencontrer des forces différentes associées à des vecteurs égaux. (Deux forces sont égales si elles produisent les mêmes effets).

Par exemple :

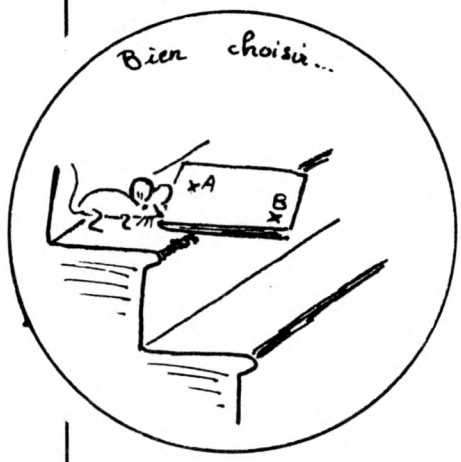


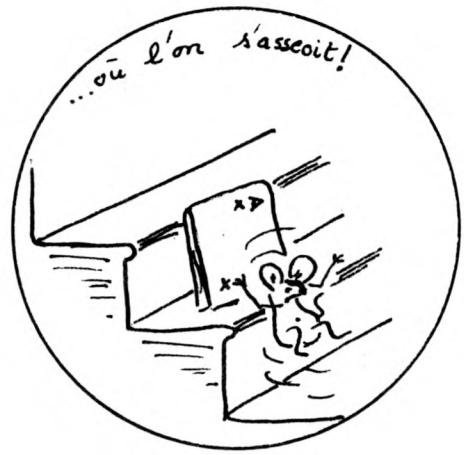
Deux forces appliquées en des points différents mais ayant :

- même direction,
- même sens,
- même intensité,

sont différentes, mais les vecteurs associés sont égaux et on écrira :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2.$$

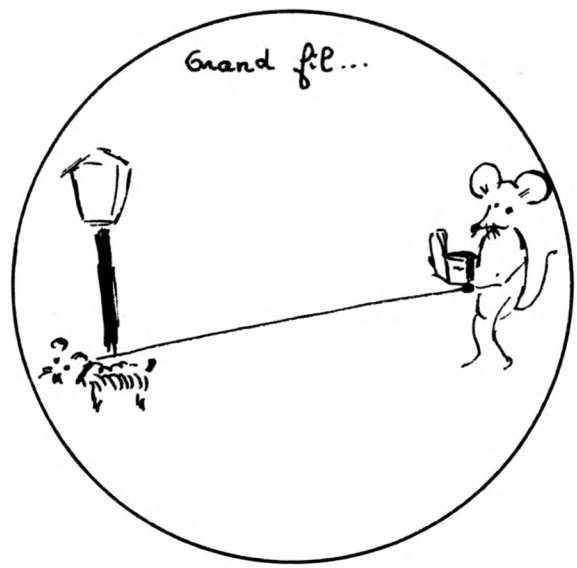




Je m'assois en A ? Ou je m'assois en B ?

(On peut d'ailleurs constater que si la souris s'assoit en A… cela ne fera pas le même effet que si elle s'assoit en B… Bien que le vecteur force associé à son poids soit le même ! Expérience faite… notre souris est convaincue !).

* L'intensité de la force est indépendante de la longueur du fil. Par exemple, avec un grand fil, on peut exercer une petite force et avec un petit fil une grande force.Le fil est un intermédiaire qui transmet la force et celle-ci s'exerce sur le solide au point d'application A.(Le fil donne la direction du vecteur force).
Notre souris a les mêmes difficultés, que le fil mesure 2 cm ou 10 cm.



* Il ne faut pas confondre l'intensité de la force (qui s'exprime en newtons) avec la longueur du représentant du vecteur-force associé qui dépend de l'échelle choisie pour faire la représentation. L'intensité de la force est proportionnelle à la longueur du représentant, elle ne lui est pas égale.

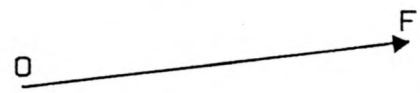
Exemple: Alain tire sur un anneau dans la direction Ox avec une force dont l'intensité est 400 N. Représente le vecteur-force :

a) sachant que 1 cm représente 100 N ;
b) sachant que 1 cm représente 80 N.

1 cm pour 100 N

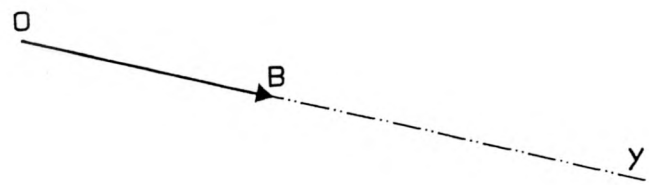
Représentation a)
OF = 4 cm

1 cm pour 80 N



Représentation b)
OF = 5 cm

Exemple: Bernard tire dans la direction Oy avec la force représentée par $\overrightarrow{OB}$. Quelle est l'intensité de la force exercée par Bernard ?



Réponse: on ne peut pas savoir puisqu'on ne connaît pas l'échelle choisie pour faire la représentation !

Une représentation doit toujours être accompagnée de l'échelle, sinon elle ne permet pas de déterminer l'intensité de la force.

Exemple : même question concernant Bernard, sachant que 1 cm correspond à 150 N.

Réponse: comme la longueur du segment [OB] est 3,3 cm, l'intensité de la force exercée par Bernard est 495 N car 150 × 3,3 = 495.

* Pour déterminer l'intensité d'une force à partir de sa représentation, il suffit de connaître l'échelle choisie ; on opère de la même manière que pour calculer une distance à partir d'un plan ou d'une carte géographique.

* Dans certains manuels de physique, on parle de la norme du vecteur-force, cela correspond à la longueur du représentant choisi (l'unité de longueur utilisée n'étant pas indiquée).

* La direction de la force n'est pas souvent matérialisée comme dans l'exemple précédent.

* Lorsqu'on pousse un objet… il n'y a pas de fil tendu, et pourtant on pousse bien dans une direction précise (et dans un sens précis). On aura alors une représentation à l'allure ci-dessus.

* Le poids est une force répartie dans tout le solide, force dont la direction est la verticale et le sens du haut vers le bas. Dans les problèmes d'équilibre, cette force est équivalente à une force localisée au centre d'inertie du solide, d'où sa représentation.

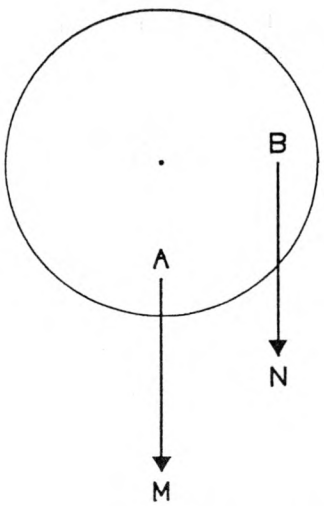
* Selon le problème que l'on étudie, on peut s'intéresser aux différents éléments du vecteur-force et conserver seulement les éléments utiles au problèmes.

- Si je veux soulever un objet, ce qui m'importe le plus, c'est son poids, donc l'intensité de la force.

- Lorsque je joue au billard, le plus important est la direction et le sens de la force. (Les bons joueurs de billards prennent aussi en compte le point d'application de la force qui permet de donner plus ou moins d'effet à la boule).

- Dans le cas de la souris dans l'escalier, le plus important était le point où elle s'asseyait (point d'application de la force).

EXERCICES SUR LES FORCES



1cm pour 10 N

Exercice 1.

Une roue peut tourner sans frottement (les forces de frottement sont supposées négligeables) autour de son axe horizontal.

1) On exerce au point A une force verticale représentée par le vecteur $\overrightarrow{AM}$. Quel sera l'effet de cette force sur la roue ?

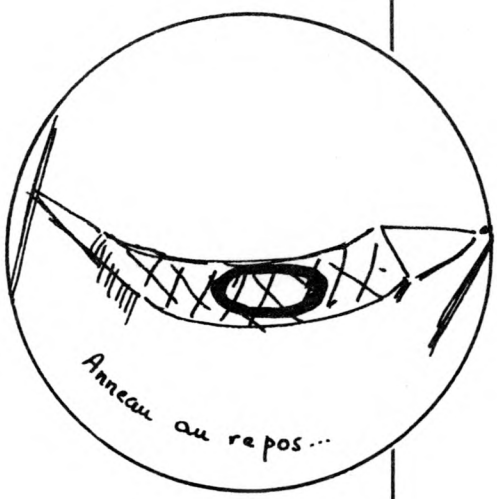
2) On exerce maintenant une force au point B représentée par le vecteur $\overrightarrow{BN}$. Que va-t-on constater ?

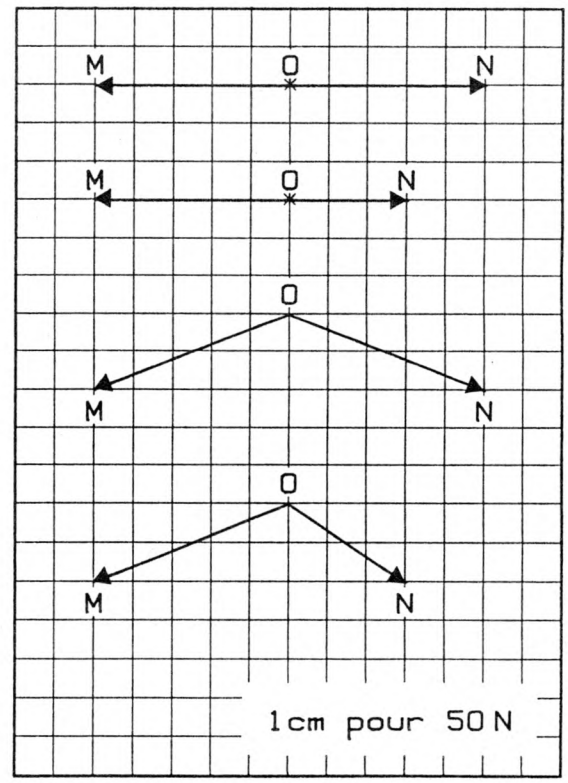
3) Si on modifie uniquement l'intensité des forces, que pourra-t-on dire sur l'équilibre de la roue ?

4) Reprendre la question précédente en changeant uniquement la direction des forces.

Exercice 2.

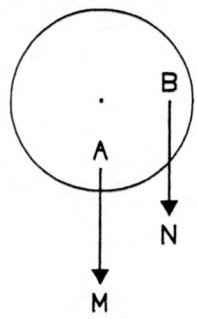
Deux cordes sont fixées a un anneau O initialement au repos. Pierre et Paul tirent sur chacune des cordes avec des forces représentées par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$. Que peux-tu dire du déplacement de l'anneau dans chacun des cas suivants ?





CORRIGES DES EXERCICES.

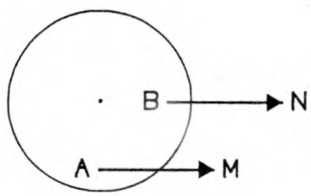
Exercice 1.



1) La droite (AM) coupe l'axe de la roue, la force correspondante n'a aucun effet sur l'équilibre de la roue.

2) La droite (BN) ne coupant pas l'axe de la roue, la force correspondante fera tourner la roue.

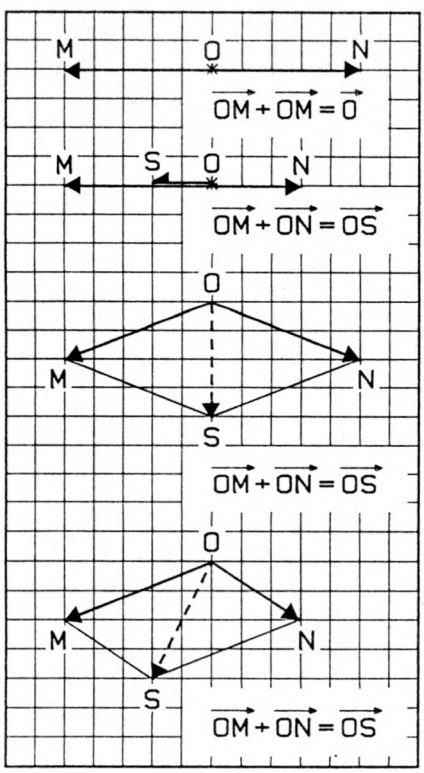
3) Si on modifie uniquement l'intensité des forces, les conclusions seront identiques à celle obtenues dans les questions précédentes.



4) Si on modifie les directions des forces, la roue n'est plus en équilibre tant que le support de la force ne coupe pas l'axe de la roue. Dans le schéma ci-contre, on voit que pour la force exercée en A, l'équilibre est rompu alors que pour la force exercée en B, la roue ne tourne pas.

La roue reste immobile sur son axe lorsque l'on exerce une force dont le support coupe l'axe de la roue et cela quelque soit le point d'application de la force et son intensité.

Exercice 2.



1) Les vecteurs forces étant opposés, l'anneau restera immobile. Dans ce cas, les forces ont même point d'application, même support, même intensité mais elle ne sont pas de même sens.

2) L'anneau va se déplacer sur la demi-droite [OM), (du côté de celui qui tire le plus fort). Si l'on fait la somme des vecteurs forces $\overrightarrow{OM}$ + $\overrightarrow{ON}$, on obtient le vecteur $\overrightarrow{OS}$ colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OM}$.

3) La somme des vecteurs forces n'est pas nulle (les forces ont la même intensité mais pas le même support), l'anneau O se déplacera sur la demi-droite [OS) définie par : $\overrightarrow{OS}$ = $\overrightarrow{OM}$ + $\overrightarrow{ON}$.

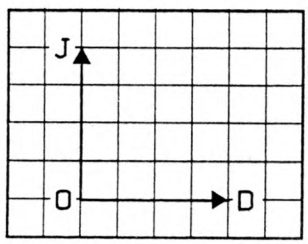
Notons que dans ce cas, la demi-droite [OS) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MON}$ (car OMSN est un losange).

4) De même que pour la question précédente, l'anneau se déplacera sur la demi-droite [OS).

Notons que l'anneau reste immobile dans le seul cas où la somme des vecteurs forces est nulle.

EXERCICES SUR LES FORCES.

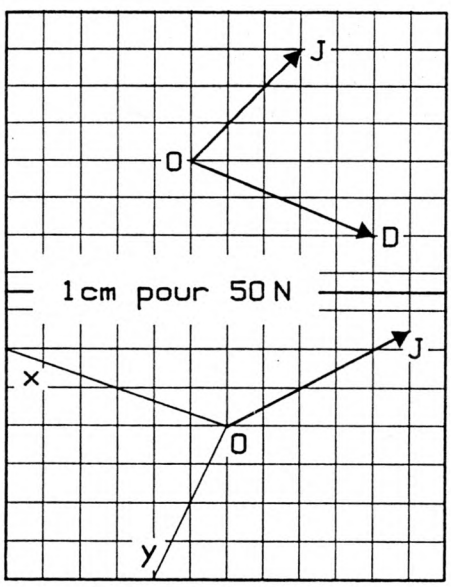
Plusieurs personnes peuvent tirer sur un même anneau initialement immobile par l'intermédiaire de cordes fixées à ce dernier. Le point O représente l'anneau.



1) Jean et Daniel tirent sur l'anneau avec des forces représentées par $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD}$.
a. Que peux-tu dire sur les forces exercées par Jean et Daniel ?
b. Représente la force avec laquelle doit tirer René sur l'anneau pour que celui-ci reste immobile.
c. Que penses-tu de l'intensité de la force exercée par René par rapport aux intensités des forces exercées par Jean et Daniel ?

2) Même question que précédemment lorsque les cordes tirées par Jean et Daniel font entre elles un angle de 120 degrés.

3) Jean et Daniel tirent sur l'anneau dans des directions perpendiculaires et Jean tire deux fois plus fort que Daniel.
a. Fais un schéma représentant la situation précédente.
b. Représente la force avec laquelle doit tirer René sur l'anneau pour que celui-ci reste immobile.
c. On suppose que Daniel tire sur l'anneau avec une force dont l'intensité est de 100 N. Calcule l'intensité de la force exercée par René lors de l'équilibre.



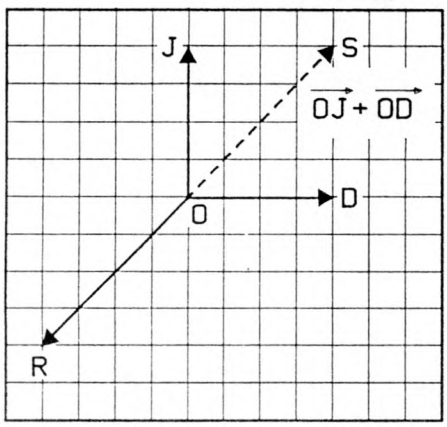
4) Jean et Daniel tirent sur l'anneau avec des forces représentées par le schéma ci-contre.
a. Représente la force avec laquelle René doit tirer sur l'anneau pour que celui-ci reste immobile.
b. Peux-tu donner une valeur approximative de l'intensité de la force avec laquelle tire René.

5) Jean tire sur l'anneau avec la force représentée par le schéma ci-contre.
a. Afin que l'anneau reste immobile, René et Pierre tirent sur ce dernier dans les directions [Ox) et [Oy). Représente les forces exercées par René et Pierre sur l'anneau.
b. Donne une valeur approximative de l'intensité des forces exercées.

CORRIGE DES EXERCICES SUR LES FORCES.

1) a. Les forces exercées par Jean et Daniel sont différentes (elles ne produisent pas les mêmes effets).

Ces forces ont :
- le même point d'application,
- la même intensité (car les segments [OJ] et [OD] sont de même longueur),
- pas les mêmes supports.



b. Pour que l'anneau reste immobile, il faut que la somme des vecteurs associés aux forces exercées par Jean, Daniel et René soit nulle :

$$\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OR} = \vec{0}.$$

René doit exercer une force représentée par le vecteur :

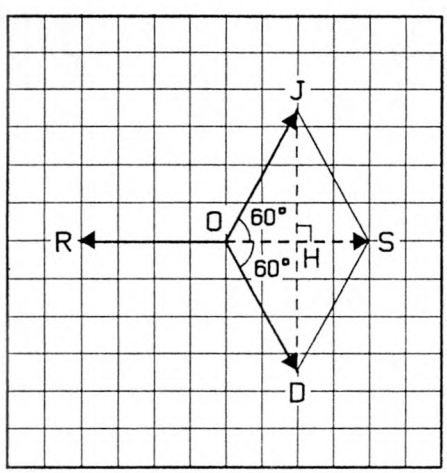
$$\overrightarrow{OR} = -(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD}).$$

Sur le schéma ci-contre, on a commencé par représenter la somme $\overrightarrow{OS}$ des vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OJ}$, puis ensuite le vecteur $\overrightarrow{OR}$ opposé du vecteur $\overrightarrow{OS}$.

c. L'intensité de la force exercée par René n'est pas égale à la somme des intensités des forces exercées par Jean et Daniel. En effet, l'intensité d'une force est proportionnelle à la longueur de la flèche représentant le vecteur force et OR < OJ + OD.

De plus, dans le carré OJSD, la longueur de la diagonale OS est égale à $OJ.\sqrt{2}$, donc l'intensité de la force exercée par René est égale à celle exercée par Jean multipliée par $\sqrt{2}$.

2) Lorsque Jean et Daniel exercent sur l'anneau des forces de même intensité et dont les supports font entre eux un angle de 120°, la force exercée par René est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OR}$ dessiné ci-contre.



Pour comparer les intensités des forces exercées par René et Jean, il nous faut comparer les longueurs OR et OJ.

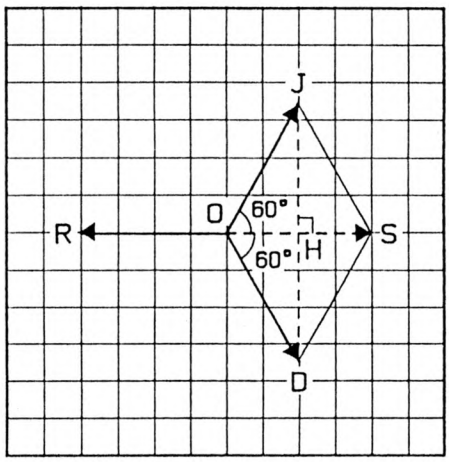
Comme OR = OS, on va comparer OS et OJ.

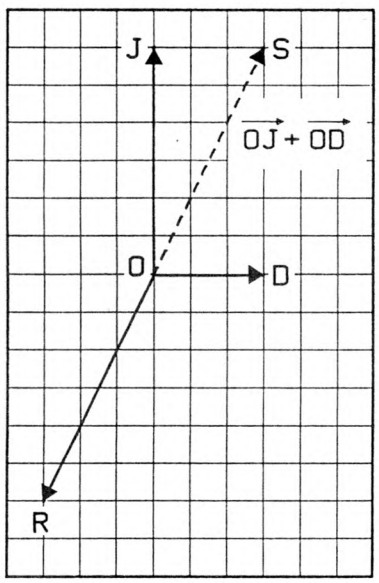
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD}$ donc OJSD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OD}$ (Jean et Daniel tirent avec des forces de même intensité) donc OJSD est un losange.

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et ont même milieu :

$$OS = 2.OH.$$





Le triangle rectangle OJH ayant un angle de 60° est la moitié d'un triangle équilatéral, donc :

$$OJ = 2.OH.$$

Des deux dernières égalités on déduit OS = OJ.
L'intensité de la force exercée par René est la même que celle exercée par Jean.

3) a.Les vecteurs $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD}$ représentant les forces exercées par Jean et Daniel auront des supports perpendiculaires et la norme du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ sera le double de celle du vecteur $\overrightarrow{OD}$ car Jean tire deux fois plus fort que Daniel.

b. Comme auparavant on a : $\overrightarrow{OR} = -(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD})$.

c. Les intensités des forces étant proportionnelles aux longueurs des segments [OR], [OJ] et [OD], on pourra calculer directement avec les intensités des forces.

Dans le rectangle OJSD, on a $OS^2 = OJ^2 + OD^2$.
En considérant les intensités des forces, on obtient en désignant par r l'intensité de la force exercée par René :

$$r^2 = 200^2 + 100^2$$
$$r^2 = 50\,000 \text{ ; d'où } r = 100.\sqrt{5} \cong 223,6.$$

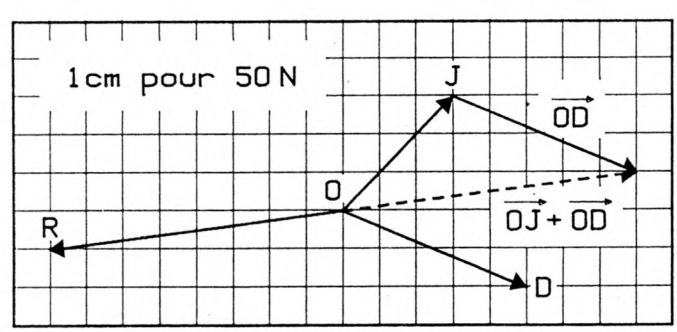
L'intensité de la force exercée par René est approximativement de 223,6 N.

4) a. L'anneau restera immobile si la somme des vecteurs force est nulle. On doit donc avoir :

$$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$
d'où $\overrightarrow{OR} = -(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD})$.

Le vecteur $\overrightarrow{OR}$ représente la force exercée par René :

b. Sur le graphique 1 cm correspond à 50 newtons, il suffit de mesurer la longueur du segment [OR] pour avoir une valeur approximative de la force exercée par René. La longueur du segment [OR] étant à peu près de 4 cm, l'intensité de la force exercée par René est à peu près de 200 newtons.



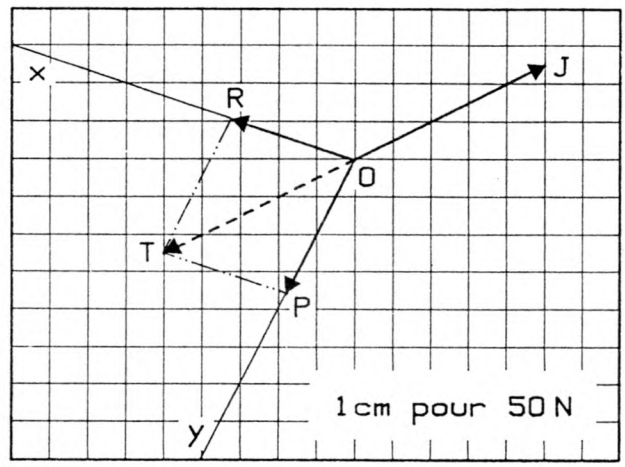
5) a. L'anneau restera immobile si la somme des forces exercées par René et Pierre «compense» la force exercée par Jean ; donc si l'on a :

$$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OJ}$$

Il suffit de décomposer le vecteur $\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OJ}$ en la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OP}$ de supports [Ox) et [Oy).

b. En multipliant les longueurs des segments [OJ], [OR] et [OP] par 50, on obtient les valeurs approximatives des intensités des forces exercées par Jean, René et Pierre.

Intensité de la force exercée par :
- Jean 140 newtons car OJ = 2,8 cm
- René : 80 newtons car OR = 1,6 cm
- Pierre : 100 newtons car OP = 2 cm.



La détermination de la valeur approximative de l'intensité d'une force à partir de sa représentation se fait de manière analogue à celle de la détermination d'une distance à partir d'un plan. Il suffit de mesurer les longueurs des représentations, puis d'utiliser l'échelle de la représentation.

SOLIDE SOUMIS A PLUSIEURS FORCES.

Dans l'étude d'un solide soumis à plusieurs force, on est amené à considérer la somme des vecteurs associés aux forces auxquelles est soumis le solide.

- Si la somme des vecteurs associés n'est pas nulle, le solide n'est pas en équilibre (en terminale, on étudiera ce cas).

- Si cette somme est nulle, le solide a des chances d'être en équilibre mais ne l'est pas forcément (il faut que certaines conditions supplémentaires soient vérifiées).

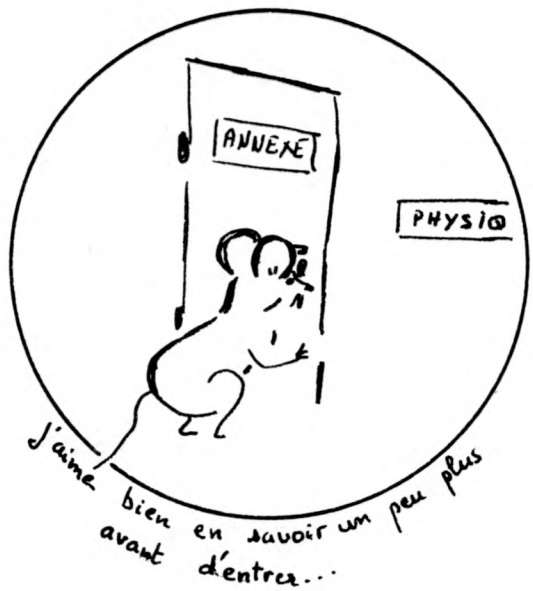
L'étude de l'équilibre d'un solide soumis à plusieurs forces nécessite la connaissance et la maîtrise de la somme de plusieurs vecteurs.

Nous voulions juste te dire ici que les vecteurs ne servent pas seulement à «faire un dessin» des vecteurs-forces pour mieux représenter les choses, ils servent surtout à répondre à des questions, à expliquer et donc à prévoir.

Dans un problème, il y aura différentes étapes (comme nous le verrons plus tard) :

- définir le système ;
- faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au système ;
- associer à chaque force un vecteur ;
- traduire sous forme mathématique l'équilibre du système (somme des vecteurs forces nulle et somme des moments de toutes les forces appliquées par rapport à n'importe quel axe également nulle) ;
- résolution du problème mathématique concernant les conditions d'équilibre ;
- retour au problème physique (traduction et communication des résultats).

ANNEXE MATHEMATIQUE AU PAYS DE LA PHYSIQUE



Ce cahier parle essentiellement des vecteurs. Mais en physique, il arrive qu'on utilise en même temps les vecteurs et d'autres outils mathématiques. En particulier :

- pour calculer des longueurs,
- pour trouver les mesures de certains angles.

Il fallait donc entr'ouvrir une porte dans le domaine des mathématiques non vectorielles. C'est ce que nous faisons dans cette annexe.

DES QUESTIONS… dont la réponse est dans cette annexe.

Quels sont les outils mathématiques qui permettent de calculer une longueur ?

Il y a essentiellement le théorème de Pythagore et la trigonométrie. Mais ces deux outils ne peuvent travailler QUE sur des triangles RECTANGLES. (Au-delà de la classe de seconde tu verras des «formules» liant les côtés et les angles d'un triangle quelconque, mais si tu es en seconde, les connaissances sur les triangles rectangles doivent te suffire pour la physique).

Comment choisir entre Pythagore et la trigonométrie ?

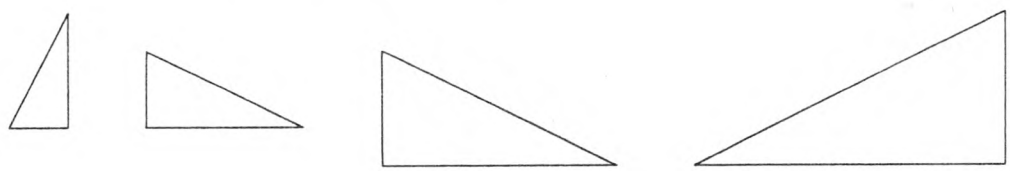
Bonne question ! En effet lorsqu'on a deux outils voisins, il faut savoir avec précision ce que permet l'un et ce que permet l'autre.

Dans un triangle RECTANGLE :

- si tu connais déjà deux côtés, c'est avec le théorème de Pythagore que tu trouveras le troisième,

- si tu connais seulement un côté mais aussi l'un des angles aigus (donc en fait les deux !), c'est la trigonométrie qui conviendra…

- si tu connais seulement les trois angles, tu ne pourras rien conclure sur les côtés car il y a beaucoup de triangles ayant les mêmes angles : ils ont la même «forme» mais pas la même «taille» (on dit qu'ils sont semblables).



Pour trouver une longueur, c'est donc parfois utile de trouver d'abord un angle… pour s'en servir ensuite ?

Oui !

Pour cela tu peux souvent utiliser des résultats de mathématiques sur : les triangles particuliers (équilatéraux, isocèles, demi-carrés), mais aussi une configuration très utilisée en physique… mais qu'on ne détaille pas au cours de math : ce sont **les angles à côtés perpendiculaires.**

TRIANGLE RECTANGLE.

La configuration «triangle rectangle» est très utilisée dans la résolution des problèmes de physique. Pour cette raison, il te faut apprendre à la reconnaître et de plus être capable de calculer certains éléments en fonction des autres.

Afin de t'aider, nous avons essayé de rappeler dans cette fiche et les suivantes les principales propriétés utilisées en physique.

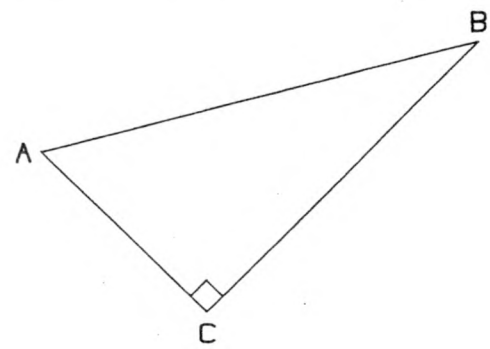
*** Théorème de Pythagore** : Le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Ce théorème te permet notamment de calculer la longueur d'un côté dès que tu connais les longueurs des deux autres.

Exemples.

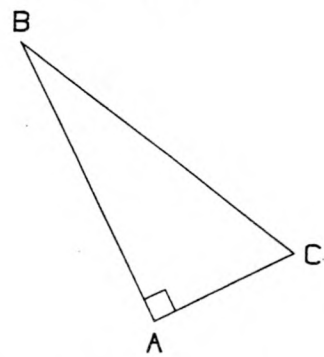
Calcule la longueur AB dans chacun des cas suivants.

AC = 3 cm
BC = 5 cm



[AB] est l'hypoténuse donc on a :

$AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 3^2 + 5^2 = 34$;
$AB = \sqrt{34}$; $AB \cong 5,83$.

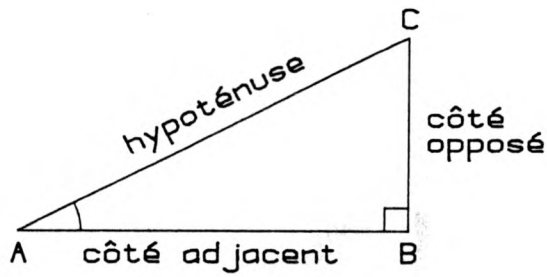


BC = 4 cm
AC = 2 cm

Ici, [AB] est un côté de l'angle droit, d'où :

$AB^2 = BC^2 - AC^2$; $AB^2 = 4^2 - 2^2$
$AB = \sqrt{12}$; $AB \cong 3,46$.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.



Dans tout triangle ABC rectangle en B, tu dois connaître les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}.$$

Pour un angle aigu donné, le côté adjacent est celui qui «touche» le sommet de l'angle et qui n'est pas l'hypoténuse alors que le côté opposé est celui qui est en face du sommet.

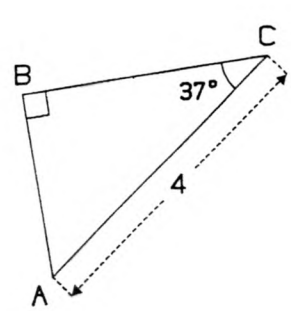
Lorsque tu voudras appliquer une des relations précédentes, commence par repérer les noms des différents côtés par rapport à l'angle que tu vas utiliser.

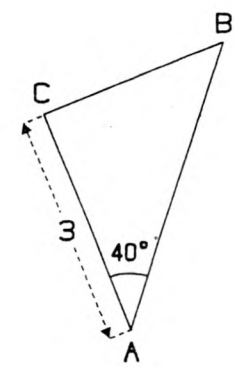
Ces deux relations permettent dans un triangle rectangle de calculer la longueur d'un côté dès que l'on connaît la longueur d'un autre côté et la mesure d'un des angles aigus (donc de l'autre car ils sont complémentaires).

Exercices.

Dans chacun des triangles suivants, calcule la longueur du côté AB.

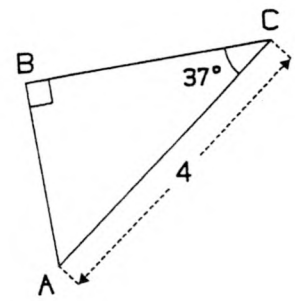
Les longueurs sont données en cm.





Corrigé des exercices.

1.



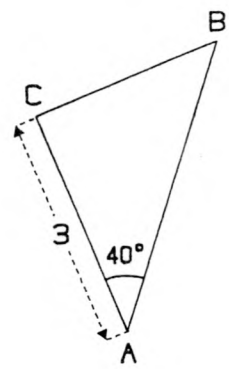
Pour calculer AB, dans le triangle rectangle je connais l'angle opposé et l'hypoténuse ; je dois donc me servir du sinus.

$$\sin \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}.$$

Donc $AB = AC.\sin \widehat{C} \cong 4 \times 0,6 \cong 2,4$ car $\sin 37° \cong 0,6$.

La longueur de AB est de 2,4 cm.

2.



Je connais ici l'angle $\widehat{A}$, le côté adjacent et je cherche l'hypoténuse. Je vais donc utiliser le cosinus de l'angle $\widehat{A}$.

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}.$$

On déduit de $\cos \widehat{A} = \frac{AC}{AB}$ en permutant $\cos \widehat{A}$ et AB.

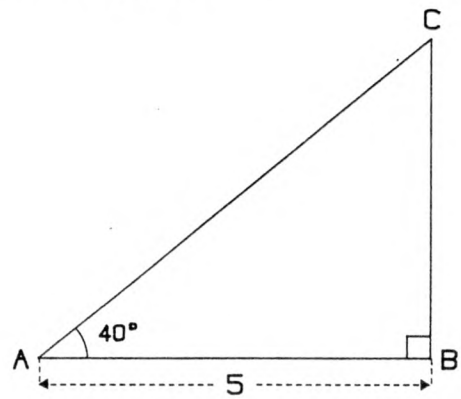
$$AB = \frac{AC}{\cos \widehat{A}} = \frac{3}{0,77} \cong 3,9 \text{ car } \cos 40° \cong 0,766.$$

La longueur AB est de 3,9 cm.

Tangente d'un angle aigu.

Tu sais que dans un triangle rectangle, dès que l'on connaît un angle aigu et un côté, on peut déterminer tous les éléments du triangle. On va envisager ici le cas où l'on connaît les mesures d'un angle et d'un côté de l'angle droit.

Exemple : Dans le triangle ABC rectangle en B, l'angle $\widehat{A}$ mesure 40° et le côté AB 5 cm. On se propose de calculer la longueur BC.



Dans le triangle rectangle ABC, pour l'angle $\widehat{A}$ (que je connais), je cherche BC qui est le côté opposé. Si je veux utiliser le sinus de A, il me faut déterminer la longueur de l'hypoténuse AC.
Je détermine AC en utilisant le cosinus de l'angle $\widehat{A}$.

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\cos \widehat{A}}.$$

Puis je calcule BC en utilisant le sinus de l'angle $\widehat{A}$.

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}.$$

$$\sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC}, \text{ d'où } BC = AC.\sin \widehat{A}.$$

Je remplace AC par sa valeur.

$$BC = \frac{AB}{\cos \widehat{A}} \sin \widehat{A} = \frac{AB \times \sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = AB \times \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}.$$

$\sin 40° \cong 0,643$ et $\cos 40° \cong 0,767$.

$$BC \cong 5 \times \frac{0,643}{0,767} \cong 4,2.$$

Peut-être as-tu entendu parler de la tangente d'un angle, elle sert notamment à simplifier les exercices du type précédent.

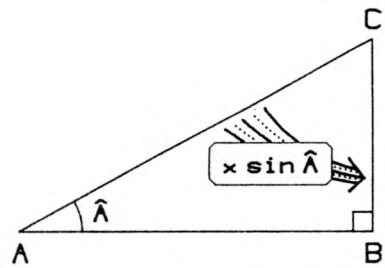
$$\text{tangente} = \frac{\text{sinus}}{\text{cosinus}} = \frac{\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}}{\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Dans notre exercice, on :

$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC}$ d'où $BC = \tan \hat{A}\ 5 \times 0{,}84 = 4{,}2$.

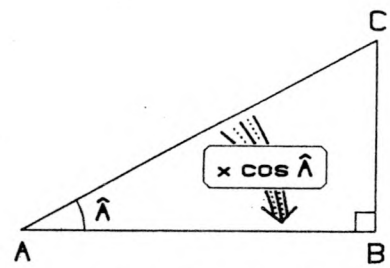
Comme tu peux le constater, on arrive beaucoup plus vite au résultat.

EN RESUME.



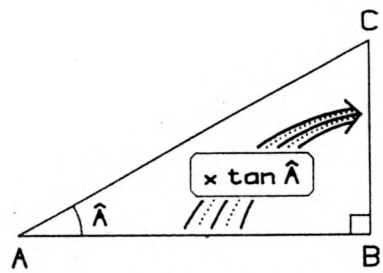
$$\text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$BC = AC \times \sin \hat{A}$



$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$AB = AC \times \cos \hat{A}$



$$\text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$BC = AB \times \tan \hat{A}$

Exercices de trigonométrie dans le triangle rectangle.

Exercice 1.

ABC désigne un triangle rectangle en A dans lequel la longueur de l'hypoténuse est de 6 cm et celle d'un côté de l'angle droit de 4 cm.
a) Dessine le triangle ABC.

b) Détermine les mesures des angles aigus du triangle ainsi que la longueur du troisième côté.

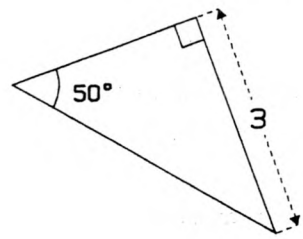
Exercice 2.

Dans le triangle rectangle ABC, l'angle en A mesure 40° et le côté adjacent 4 cm.

Détermine les longueurs des deux autres côtés.

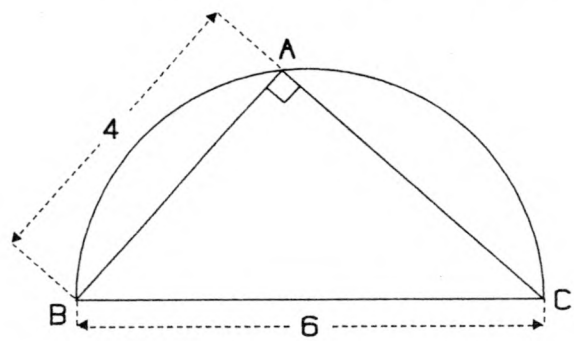
Exercice 3.

Détermine les éléments manquants du triangle ABC.



Exercice 1.

a) Tu sais qu'un triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle dont le diamètre est l'hypoténuse ; on commence donc par tracer un demi-cercle ayant 3 cm de rayon. Le diamètre de ce demi-cercle est l'hypoténuse BC du triangle rectangle. Il ne nous reste plus qu'à mener de B ou de C, une corde ayant 4 cm de longueur.



b) Dans la figure ci-dessus, on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse, on peut donc déterminer les mesures des angles avec le sinus ou le cosinus. L'angle $\widehat{B}$ est déterminé en utilisant le cosinus, alors que pour l'angle $\widehat{C}$ il faut prendre le sinus.

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA}{BC} = \frac{4}{6} = 0,66.$$

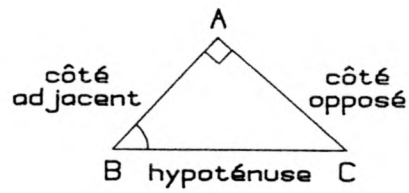
La calculatrice donne (en tapant 4 ÷ 6 = inv cos) :

$$\widehat{B} = 48,19°.$$

Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ étant complémentaires :

$\widehat{C} = 90° - \widehat{B} = 41,81°$.

Pour calculer AC, on a :



$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$.

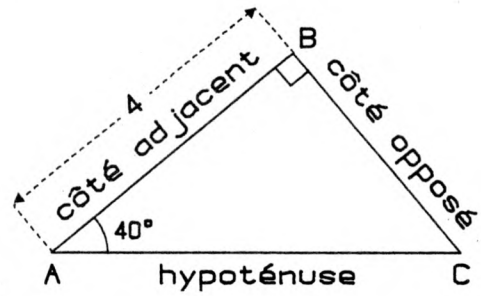
$AC = BC.\sin \widehat{B}$.

Or $\sin 48,19° \cong 0,745$: $AC \cong 6 \times 0,745 \cong 4,47$.

Une remarque d'Alfred : «je ne me rappelais plus du cercle circonscrit au triangle rectangle ; mais moi j'ai calculé AC en appliquant le théorème de Pythagore».

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 16 = 20$ d'où $AC = \sqrt{20} \cong 4,47$.

Exercice 2.



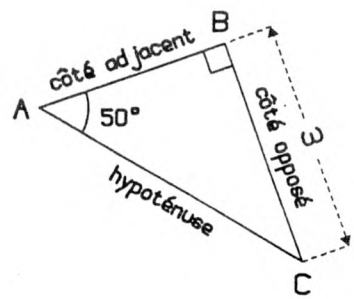
$\tan \widehat{A} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AB}$ d'où $BC = AB.\tan \widehat{A}$.

$BC \cong 4 \times 0,84 \cong 3,36$.

$\cos \widehat{A} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$ d'où $AC = \dfrac{AB}{\cos \widehat{A}}$.

$AC \cong \dfrac{4}{0,766} \cong 5,22$.

Exercice 3.



$\tan \widehat{A} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AB}$ d'où $AB = \dfrac{BC}{\tan \widehat{A}}$.

$AB \cong \dfrac{3}{1,19} \cong 2,52$.

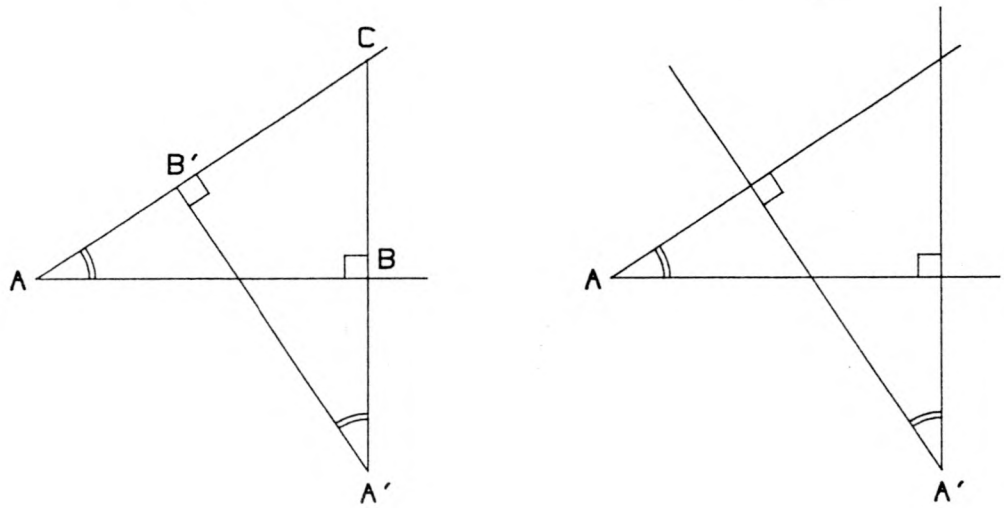
$\sin \widehat{A} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$ d'où $AC = \dfrac{BC}{\sin \widehat{A}}$.

$AC = \dfrac{3}{0,766} = 3,92$.

On aurait pu faire comme dans l'exercice précédent en utilisant l'angle $\widehat{C}$ dont la mesure est de 40°.

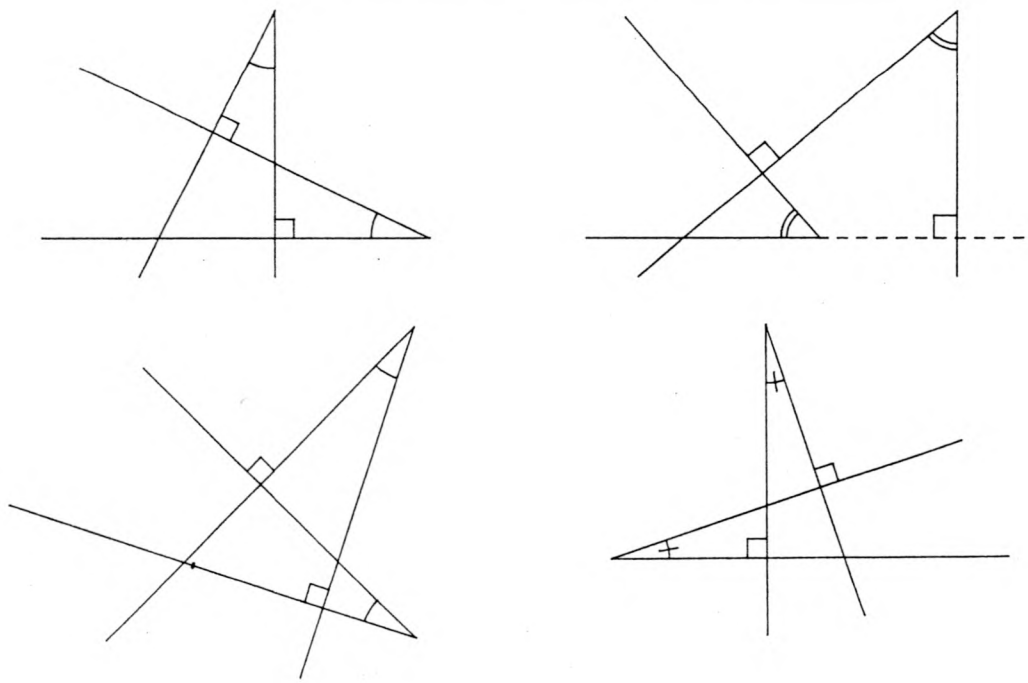
ANGLES A COTES PERPENDICULAIRES.

Une des configurations utilisées dans les problèmes où l'on trouve un plan incliné est celle des angles à côtés perpendiculaires. Regarde bien les dessins ci-dessous afin de pouvoir reconnaître cette configuration.

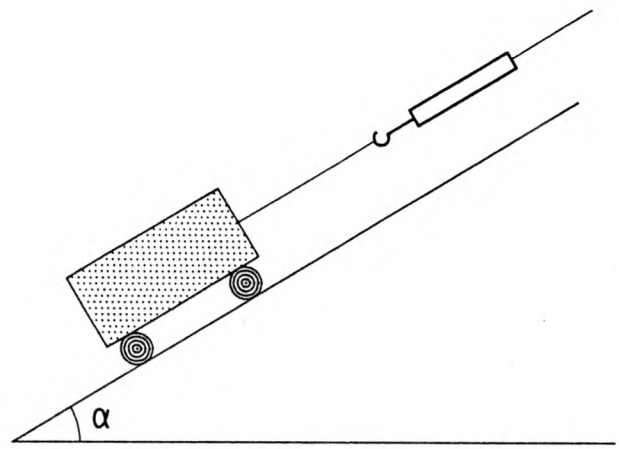


Les triangles rectangles ABC et A'B'C ont l'angle C commun, donc les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A}'$ sont égaux (car ils ont le même complémentaire $\widehat{C}$).
Sur la figure de droite, j'ai dessiné les mêmes angles $\widehat{A}$ et $\widehat{A}'$, égaux, que l'on appelle angles à côtés perpendiculaires et qu'il te faudra reconnaître dans certains problèmes de physique.

Regarde bien les figures ci-dessous de manière à pouvoir t'en souvenir lorsque tu les rencontreras.



SOLIDE EN EQUILIBRE SUR UN PLAN INCLINE

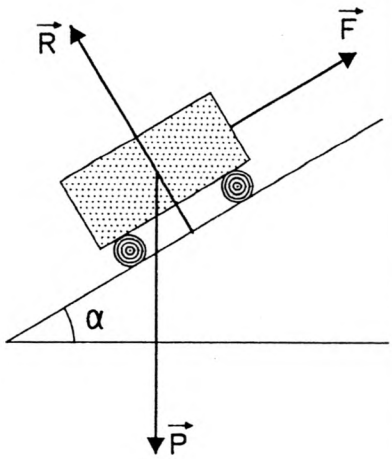


Les forces de frottement sont supposées négligeables.

* Commençons par définir le système étudié : c'est le solide (en équilibre). On étudie donc les actions mécaniques exercées sur le solide.

* Bilan des forces extérieures appliquées au solide :

- action de la terre (poids du solide) ;
- réaction du plan incliné (cette réaction est perpendiculaire au plan) ;
- tension du fil (qui maintient le solide en équilibre).



* Modèle vectoriel.

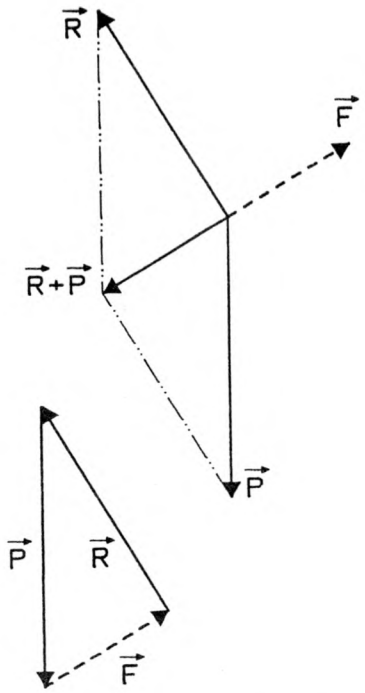
- $\vec{P}$ vecteur représentant le poids du solide ;
- $\vec{R}$ vecteur représentant la réaction du plan ;
- $\vec{F}$ vecteur représentant la tension du fil.

* Conditions d'équilibre.

1. Somme des forces extérieures nulle.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}.$$

2. Les supports des représentants des vecteurs-forces étant concourants, la somme des moments des forces appliquées par rapport à n'importe quel axe est nulle.



*** Résolution mathématique.**

1. Solution géométrique.

Dès que l'on connaît deux des vecteurs, il est facile de déterminer le troisième (puisque la somme des trois vecteurs est nulle).

Le vecteur cherché étant l'opposé de la somme des deux vecteurs connus, on peut commencer par dessiner cette somme.

Par exemple, si l'on cherche la tension du fil, on peut faire le schéma ci-contre.

Les professeurs de physique utilisent souvent «le triangle des forces» ; ils mènent «bout à bout» des représentants des trois vecteurs, ce qui constitue un triangle puisque la somme des trois vecteurs est nulle.

Une fois que l'on a dessiné le vecteur force cherché, pour déterminer l'intensité de la force correspondante, on utilise l'échelle de représentation des forces.

2. Méthode analytique.

On désignera par :

P l'intensité du poids ;

R l'intensité de la réaction du plan ;

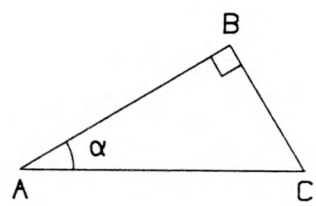
F l'intensité de la tension du fil.

Pour déterminer de manière analytique l'intensité d'une force une fois que le vecteur force associé est tracé, on peut opérer de différentes manières.

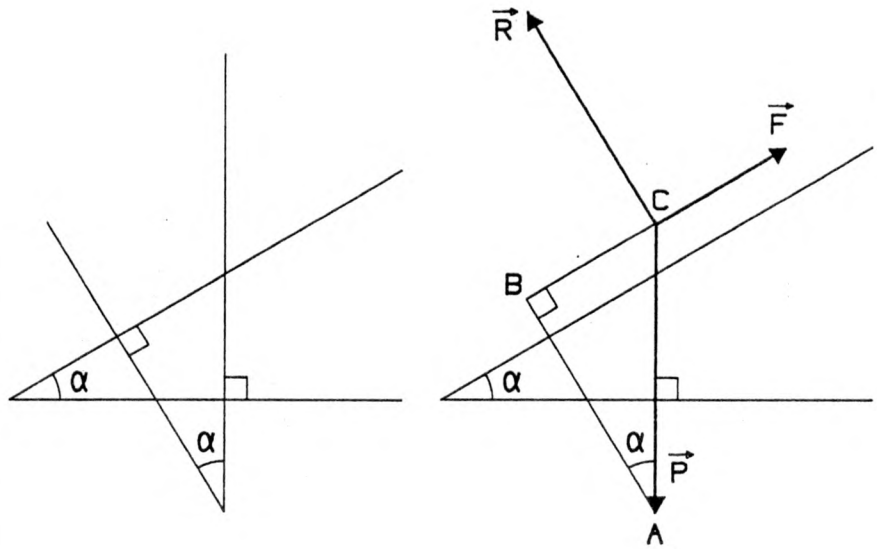
* En utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle (la réaction du plan est perpendiculaire au plan alors que la tension du fil s'exerce parallèlement au plan) :

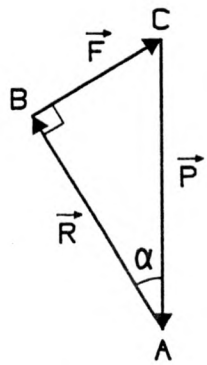
$AB = AC \cos \alpha$

$BC = AC \sin \alpha$



Il te faudra donc «voir» dans les triangles rectangles et aussi reconnaître la configuration suivante (angles à côtés perpendiculaires) :





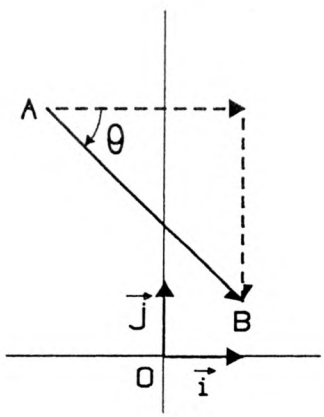
triangle des forces

Par exemple, si l'on cherche l'intensité de la tension du fil, on a :

$$BC = AC \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad F = P \sin \alpha.$$

Pour l'intensité de la réaction du plan :

$$AB = AC \cos \alpha \quad \text{d'où} \quad R = P \cos \alpha.$$



* En choisissant un repère orthonormé et en projetant sur les axes la somme (nulle) des trois vecteurs force:

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}.$$

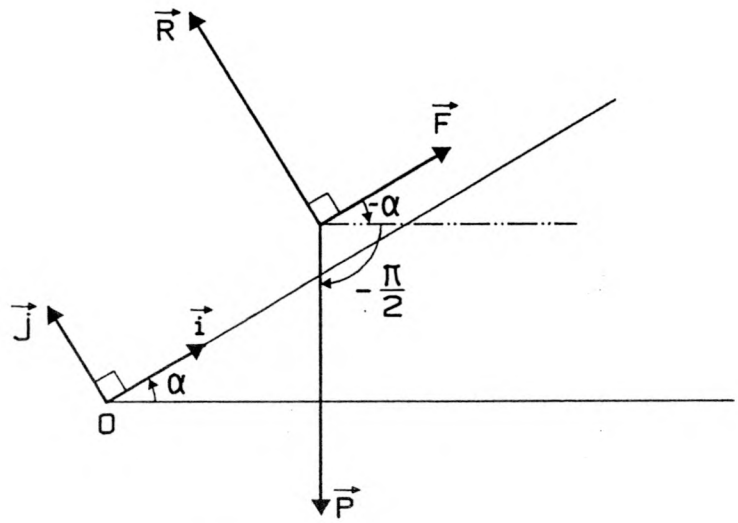
Il nous faut donc choisir un repère orthonormé de manière à ce que les calculs soient les plus simples possibles ; d'où le choix fait ci-contre (l'origine du repère n'intervient pas puisque l'on travaille sur les coordonnées des vecteurs).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} AB \cos \theta \\ AB \sin \theta \end{pmatrix}$$

où θ désigne une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$.

Cette méthode suppose la maîtrise des angles orientés et de certaines relations trigonométriques. Pour cette raison elle est très peu employée en seconde.

Dans le cas présent, nous avons :



Une mesure de $(\vec{i}, \vec{F})$ est 0 rad.

Une mesure de $(\vec{i}, \vec{R})$ est $+ \pi/2$ rad.

Une mesure de $(\vec{i}, \vec{P})$ est $- \alpha - \pi/2$ rad.

La relation $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$ permet d'écrire :

$$\begin{cases} P \cos(-\alpha - \frac{\pi}{2}) + R \cos\frac{\pi}{2} + F \cos 0 = 0 \\ P \sin(-\alpha - \frac{\pi}{2}) + R \sin\frac{\pi}{2} + F \sin 0 = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -P \sin\alpha + F = 0 \\ -P \cos\alpha + R = 0 \end{cases}$$

Car :

$\cos(-\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$. $\sin(-\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$.

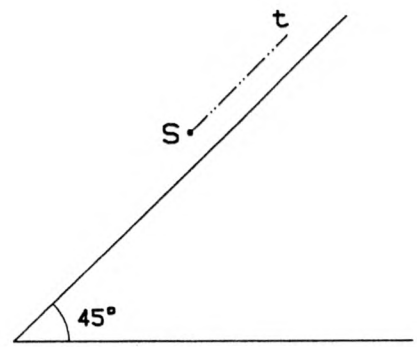
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$;

$\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$.

EXERCICES SUR L'EQUILIBRE D'UN SOLIDE.

Exercice 1.

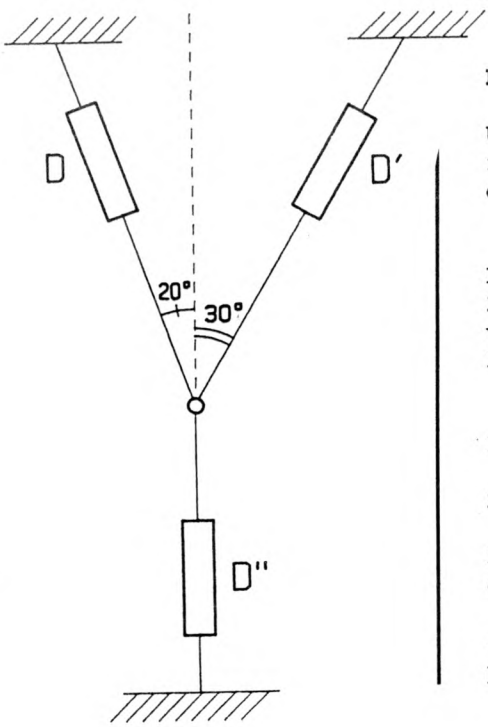
Un skieur est sur une pente faisant un angle de 45° avec l'horizontale. Le poids de ce skieur est de 800 N.



S représente le centre d'inertie du skieur.

1) Représente le vecteur associé au poids du skieur en indiquant l'échelle choisie.

2) On exerce sur ce skieur une force dans la direction (St) de manière à ce qu'il reste immobile. Essaie de déterminer l'intensité de cette force (on suppose les frottements négligeables).



Exercice 2.

Un anneau A de masse négligeable est relié à trois fils dont les autres extrémités sont fixées à des dynamomètres D, D' et D".

Les dynamomètres D et D' indiquent respectivement 2,5 N et 1,8 N. Le dynamomètre D" ne fonctionne pas. Tu vas essayer de déterminer ce qu'aurait dû indiquer l'appareil détérioré.

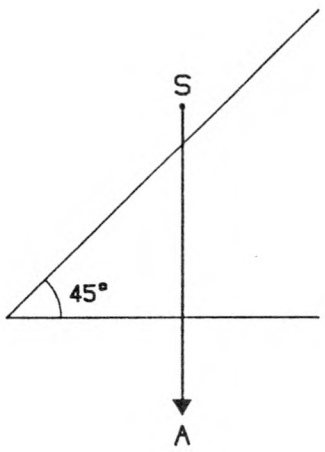
1) Cite les corps en interaction avec l'anneau A.

2) Indique les forces appliquées à l'anneau A.

3) Représente les vecteurs associés aux forces exercées sur l'anneau A.

4) Détermine l'indication qui aurait dû être donnée par le dynamomètre détérioré.

CORRIGE DE L'EXERCICE 1.



1 cm pour 200 N

1) Le poids du skieur est une force répartie dans tout le skieur, force dont la direction est la verticale et le sens, du haut vers le bas ; l'intensité est ici 800 N. Dans notre problème, cette force est équivalente à une force localisée au point S et ayant les mêmes caractéristiques.

Si on prend pour échelle : 1 cm correspondant à 200 N, on obtient la représentation graphique ci-contre dans laquelle la longueur du segment [SA] est de 4 cm.

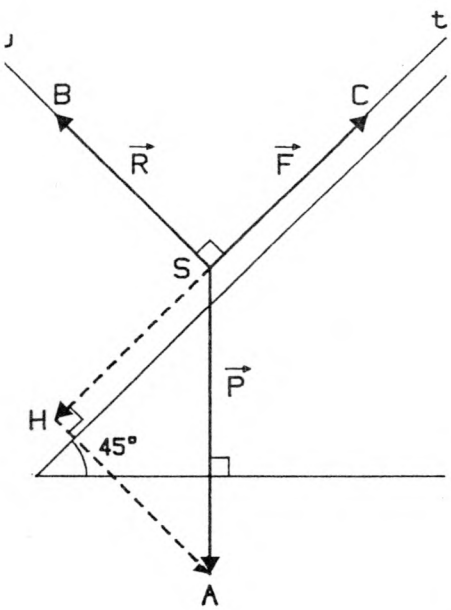
2) Les forces extérieures appliquées au skieur sont :

- le poids du skieur représenté par le vecteur $\vec{P}$;

- la réaction du plan incliné, perpendiculaire à ce dernier car les frottements sont négligeables, représentée par le vecteur $\vec{R}$;

- la force exercée sur le skieur pour le maintenir en équilibre, représentée par le vecteur $\vec{F}$.

Puisque le skieur est en équilibre, la somme de ces trois vecteurs est nulle.



Les directions des vecteurs étant déterminées, on a en décomposant le vecteur $\vec{P}$ en somme de deux vecteurs ayant les directions (St) et (Su) :

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HA}.$$

De l'égalité $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$, on déduit :

$$\overrightarrow{SH} = -\vec{F} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HA} = -\vec{R}.$$

Il nous faut donc calculer SH. Dans le triangle rectangle, l'angle en A est égal à 45° (on reconnaît la configuration des angles à côtés perpendiculaires) d'où :

$$SH = SA.\sin 45°, \quad \text{or } \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

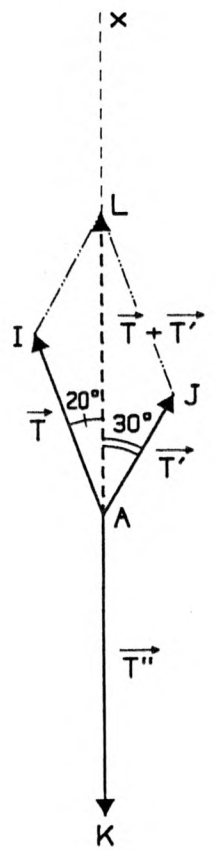
d'où $SH = 2\sqrt{2}$.

L'intensité de la force est donc de $400\sqrt{2}$ newtons soit approximativement de 566 N.

Vérification graphique.

La mesure du segment [SC] est de 2,8 cm, ce qui correspond à une force dont l'intensité est de 560 N. car 1 cm correspond à 200 N.

CORRIGE DE L'EXERCICE 2.



1cm pour 1N

1) Les corps en interaction avec l'anneau A sont :

- les trois dynamomètres ;

- la terre (action négligeable car la masse de l'anneau A est très petite).

2) Les forces s'exerçant sur l'anneau A sont donc :

- les trois tensions des dynamomètres ;

- le poids de l'anneau A, négligeable.

3) Désignons par $\vec{T}$, $\vec{T'}$ et $\vec{T''}$ les vecteurs associés aux tensions des dynamomètres.

Le système étant en équilibre, la somme de ces trois vecteurs est nulle donc le vecteur $\vec{T''}$ est égal à l'opposé de la somme $\vec{T} + \vec{T'}$ des vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{T'}$.

En prenant pour échelle 1cm pour 1N, on obtient le schéma ci-contre.

4) Pour avoir une valeur approchée de l'indication du dynamomètre détérioré, il suffit de mesurer sur le schéma ci-contre la longueur du segment [AK] car 1cm correspond à 1N. Si tu veux utiliser cette méthode, il te faut faire un schéma avec le plus grand soin possible, surtout lorsque seule la détermination graphique t'est demandée.

Pour faire une détermination de cette intensité par le calcul, il suffit de voir que :

$$\vec{AL} = \vec{T} + \vec{T'}$$

d'où par projection sur l'axe [Ax),

$$AL = AI \cos 20° + AJ \cos 30° ;$$

$$AL \cong 2,5 \times 0,94 + 1,8 \times 0,87 ;$$

$$AL \cong 3,9.$$

L'indication trouvée par le calcul est de 3,9N.

Si le dynamomètre avait été en état de marche, il aurait indiqué 3,9N.

Lorsque tu fais une détermination par le calcul, il est bon de vérifier si ton résultat est en accord avec la valeur approchée que tu déduis du graphique.

VITESSES ET VECTEURS

* Dans la vie courante, la notion de vitesse est liée à la notion de nombre :

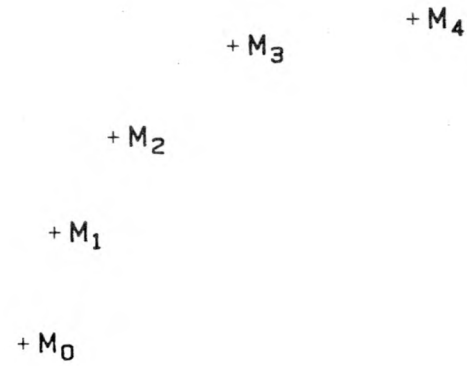
- je roule à 100 km/h (vitesse indiquée par le compteur) ;
- j'ai fait une moyenne de 70 km/h (et pourtant il m'est arrivé de rouler à 130 km/h…). C'est qu'en effet la vitesse moyenne est une vitesse fictive, obtenue en divisant la distance parcourue par la durée du parcours.

(Il est bon de remarquer que 100 km/h se lit 100 kilomètres par heure et non pas 100 kilomètres heure comme on entend parfois dans le langage courant. L'écriture correspondante à 100 kilomètres heure serait 100 km.h et non pas 100 km/h ou 100 $km.h^{-1}$).

* Ce que l'on convient d'appeler la «vitesse-instantanée» est en fait la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps «très petit».

Exemple.

Il n'est pas facile d'étudier en classe les déplacements d'une voiture ! Alors nous allons regarder un mobile se déplaçant sur une table à coussin d'air. On relève ses positions à intervalles de temps réguliers, par exemple toutes les 40 ms (c'est-à-dire 0,04 seconde).



A l'instant T_2, en M_2, la vitesse du mobile est définie par :

$$v_2 = \frac{M_1 M_3}{2 \times 0,04}.$$

Dans notre exemple M_1M_3 mesure 3,3 cm, et le temps mis pour aller de M_1 à M_3 est de 0,08 s.

D'où : $v_2 = \frac{3,3}{0,08} = 41,25$ cm/s.

La vitesse à l'instant t_2 est donc de 41 cm/s ou encore de 0,4 m/s ou 0,4 $m.s^{-1}$.

Remarquons que la vitesse-instantanée dépend de la distance «à vol d'oiseau» (en ligne droite) séparant deux positions du mobile et non de la distance réellement parcourue sur la trajectoire. En fait, les intervalles de temps étant très petits, il y a peu de différence entre ces deux distances (et par ailleurs il serait très difficile de calculer la distance sur la trajectoire).

Cet aspect numérique de la vitesse-instantanée est insuffisant pour expliquer, analyser, prévoir certains phénomènes physiques, comme le «dérapage» par exemple. En effet, rouler à 90 km/h n'a pas les mêmes conséquences dans une ligne droite ou dans un virage serré !

* Comment prendre en compte la forme de la trajectoire ?

Plusieurs possibilités «plus ou moins fines» peuvent être essayées.

Voyons d'abord comment procède le professeur de physique en SECONDE.

Pour mieux rendre compte de la réalité, on défini le «vecteur-vitesse» du mobile à l'instant t_2 :

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{t_3 - t_1} \overrightarrow{M_1M_3}.$$

Le représentant du vecteur vitesse-instantanée en t_2, aura :

- pour origine, le point M_2 ;

- pour direction, celle de (M_1M_3) ;

- pour sens, celui du mouvement ;

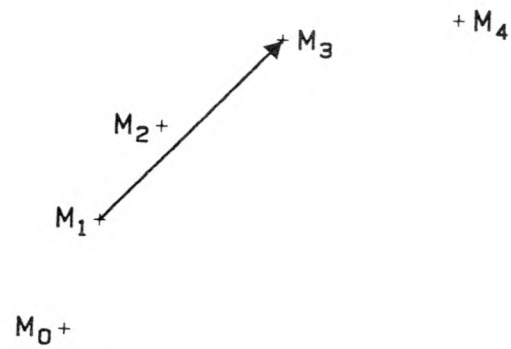
- et sa longueur (longueur de la flèche) sera proportionnelle à l'intensité de la vitesse v_2 en t_2 :

$$v_2 = \frac{M_1M_3}{t_3 - t_1}.$$

Regardons d'abord comment on représente le vecteur vitesse-instantanée, puis nous essaierons de voir en quoi ce vecteur apporte plus de renseignements sur la forme de la trajectoire que la vitesse numérique.

Le dessin du vecteur-vitesse pose la question du choix d'une «échelle».

Reprenons l'exemple du mobile sur coussin d'air. Les déplacements sont représentés ici en grandeur réelle (ce que l'on appelle l'échelle 1), et nous prenons comme unité le cm.



Alors $M_1M_3 = 3{,}3\,\text{cm}$.

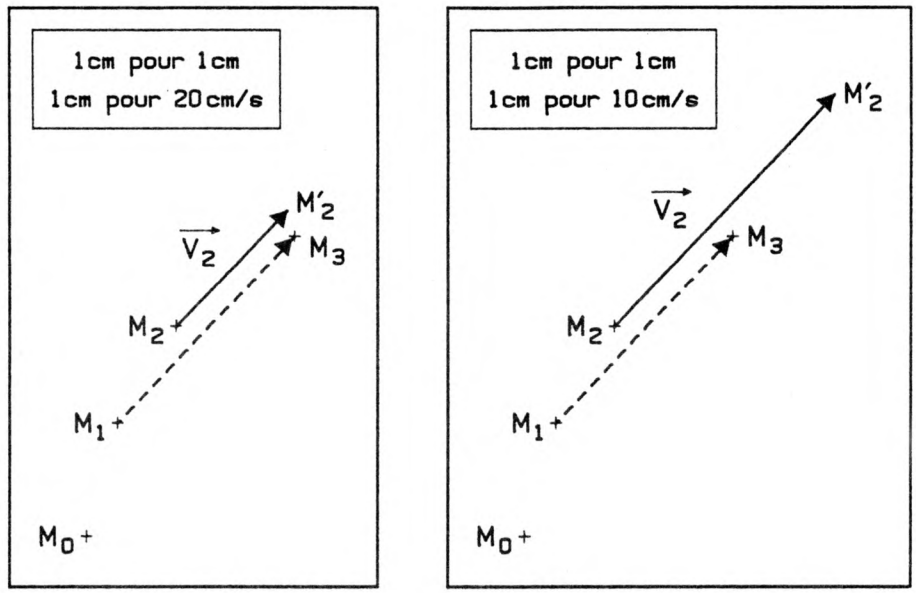
On a trouvé $v_2 = 41{,}25\,\text{cm/s}$.

La longueur du représentant du vecteur-vitesse étant proportionnelle à l'intensité de la vitesse, il nous faut choisir une «échelle» de manière à pouvoir dessiner ce représentant (pour qu'il tienne sur le graphique).

Exemple.

Si on choisit 1 cm pour 20 cm/s alors on aura à peu près $M_2M'_2 = 2$ cm.

Si on avait choisit 1 cm pour 10 cm/s, on aurait eu à peu près $M_2M'_2 = 4,1$ cm.



Il faut éviter de faire des confusions entre l'intensité de la vitesse et la longueur du représentant du vecteur-vitesse associé.

Peut-être que dans ton livre de physique on parle de la norme du vecteur-vitesse en écrivant par exemple :

- pour le premier cas $\| \vec{v_2} \| = 2$;

- pour le deuxième cas $\| \vec{v_2} \| = 4,1$.

S'il en est ainsi, il faut que tu saches que cette notation correspond à la longueur des représentants utilisés (sans les unités). Sans doute cette notation est utilisée afin que tu ne fasses aucune confusion avec l'intensité de la vitesse.

Sur le même dessin il y aura deux «échelles» de nature différentes :

- l'échelle des déplacements.

Ici on avait la grandeur réelle, c'est-à-dire 1 cm, donc le dessin est à l'échelle 1 (souvent, dans ce cas, on n'indique pas l'échelle sur le dessin) ; mais on peut avoir 1 cm pour représenter 2 cm, 1 m,… donc des dessins à l'échelle 1/2, 1/100…

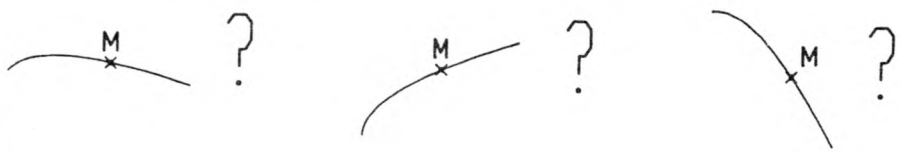
Il s'agit ici d'une réduction : une distance reste une distance (comme on réduit les voitures pour faire des jouets : une petite voiture «majorette» reste une voiture !).

- L'échelle des vitesses.
Ici, on convient de représenter des cm/s par des cm, il faut absolument mettre la correspondance sur le dessin. A la place de 1 cm pour 20 cm/s, on écrit souvent 1 cm correspond à 20 cm/s ; certains utilisent l'abréviation «1 cm $\widehat{=}$ 20 cm/s».

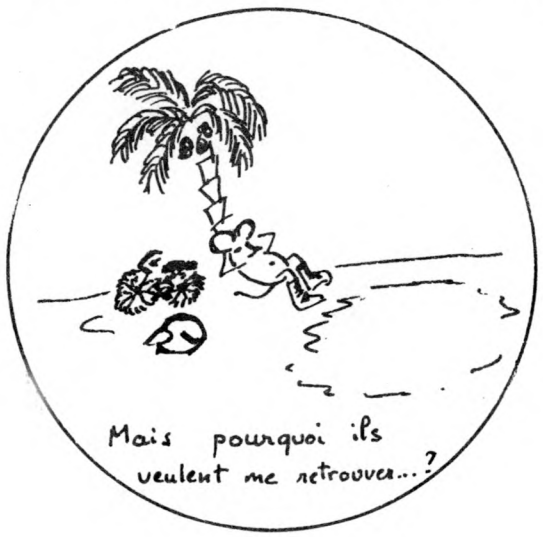
Il faudra donc s'entraîner à construire et à lire des représentations de vecteurs-vitesse, car cela n'est pas aussi naturel que la réduction d'une distance, déjà rencontrée d'ailleurs en géographie.

* Comment ce vecteur-vitesse renseigne-t-il sur la forme de la trajectoire ?

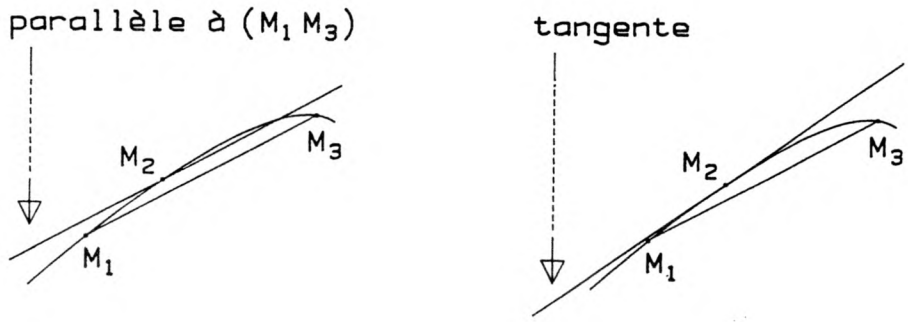
- Si on sait seulement que le mobile est «passé par M» avec une vitesse numérique de 40 cm/s, on ne sait rien sur sa direction et son sens. Cela peut être :



- Si on sait que le mobile en M a un vecteur-vitesse $\vec{V}$, on connaît sa «rapidité» comme avec la vitesse numérique (en faisant correspondre à la norme de ce vecteur-vitesse l'intensité de la vitesse), mais aussi qu'il est passé en M en «frôlant» la flèche et dans la direction de celle-ci. (Si on veut retrouver un motard perdu dans le Paris-Dakar, il vaut mieux connaître, pour la dernière position connue, le vecteur-vitesse plutôt que la vitesse numérique !).



On prend pour direction du vecteur-vitesse, la direction (M_1M_3) car pour des petits segments de courbes «ordinaires» (c'est-à-dire point trop zigzagantes !), cette direction est approximativement celle de la tangente à la trajectoire.



COMMENT VA S'AFFINER CETTE REPRESENTATION dans les classes de PREMIERE et TERMINALE ?

* Remarquons d'abord combien la notion de durée «très petite» est relative.

En effet, pour un voyage d'une journée en voiture, 15 s, c'est «très petit»…

Mais si l'on passe au déplacement des plaques techtoniques en géographie (plaques qui portent les continents) alors, une année c'est aussi très petit…

* Ensuite, la parallèle à la corde, cela ressemble à la tangente, mais ce n'est pas la tangente…

On pourrait dire qu'il y a là un besoin de préciser ce «flou».

Au cours de mathématiques de première (en toutes sections) tu découvriras la notion de dérivée qui réglera cela. Les mathématiciens ne parlent pas de durées très petites, mais d'intervalles de temps qui «tendent vers 0». Si les intervalles $[t_1t_2]$ et $[t_2t_3]$ tendent vers 0, le déplacement M_1M_3 aussi…, mais, sous certaines conditions (avec une trajectoire arrondie), les mathématiciens savent montrer qu'un rapport dont les deux termes (numérateur et dénominateur) tendent vers 0 peut «avoir pour limite» un nombre précis.

Si tu sais programmer des fonctions, tu peux observer ce phénomène avec le quotient suivant :

numérateur : $x^2 + 3x - 4$. Ce numérateur est nul quand $x = 1$;

dénominateur : $x^2 - 1$. Il est aussi nul quand $x = 1$.

Pourtant si tu essaies de calculer le quotient quand x vaut 1,1 ; puis 1,01 ; puis 1,001 etc., tu verras que ta machine annonce des résultats qui se rapprochent de plus en plus de 2,5. Le nombre 2,5 s'appelle la limite du quotient quand x tend vers 1.

Il en est de même pour la vitesse-instantanée.

Si nous avions fait des relevés des positions du mobile toutes les 30 ms, nous n'aurions pas trouvé exactement la même vitesse en t_2. De même si nous faisons des relevés toutes les 10 ms.

Mais quand l'intervalle de temps tend vers 0, le mathématicien sait trouver la limite du quotient

$$\frac{\text{distance}}{\text{durée}}$$

cette limite sera LA vitesse-instantanée. Elle ne dépend plus des intervalles de temps expérimentaux.

* Quant au vecteur-vitesse, on parvient à montrer qu'il est exactement porté par la tangente à la trajectoire (quand elle est arrondie) et, si l'on connaît l'équation de la trajectoire, on sait trouver exactement la tangente.

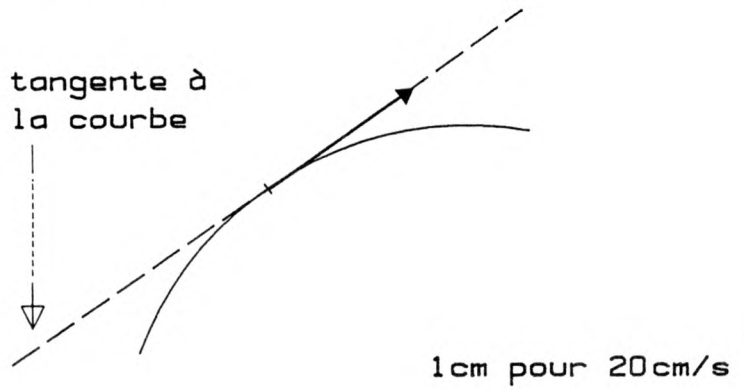
Voilà une idée du menu physico-mathématique qui vous attend en terminale.

A RETENIR :

A un instant donné t, le mobile se trouve au point M de la trajectoire avec une vitesse-instantanée v.

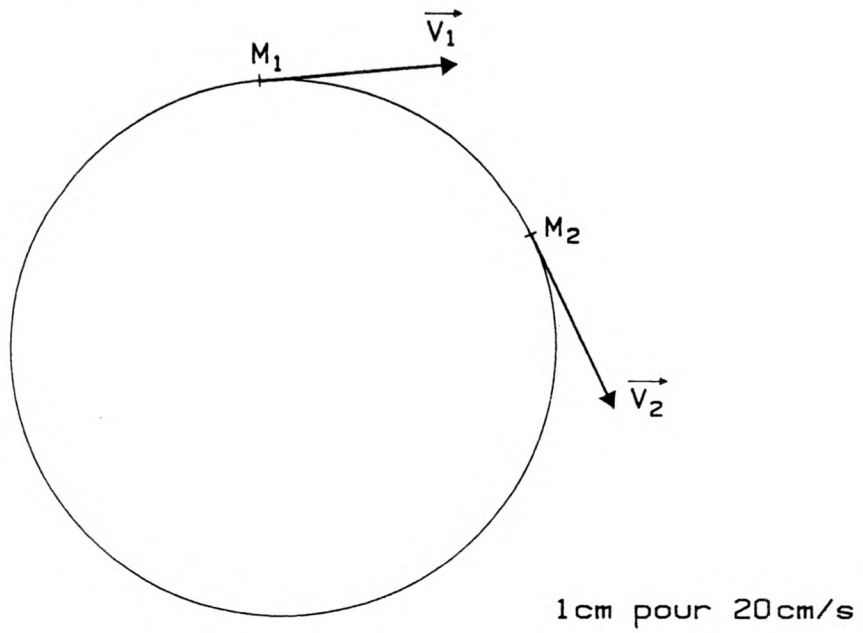
Alors on lui associe un vecteur-vitesse dont le représentant

- a pour origine le point M,
- a pour support : la tangente à la trajectoire,
- a pour sens : celui du mouvement,
- et dont la longueur est proportionnelle à la vitesse-instantanée v, à l'instant considéré. (Le choix d'une «échelle» de représentation des vitesses est impératif).



REMARQUE :

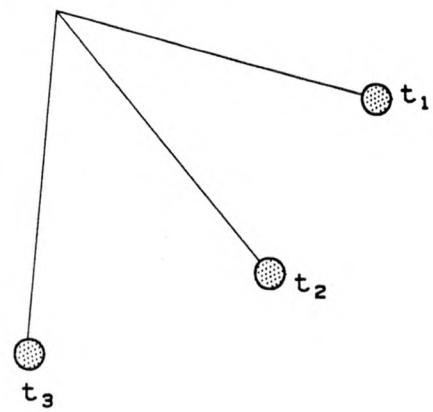
Si aux instants t_1 et t_2, les vitesses-instantanées sont les mêmes, alors les vecteurs-vitesse associés ont même norme, MAIS ILS NE SONT PAS FORCEMENT EGAUX. C'est le cas du mouvement circulaire uniforme.



EXERCICES SUR LA VITESSE

Exercice 1.

Un pendule est photographié aux instants t_1, t_2 et t_3.



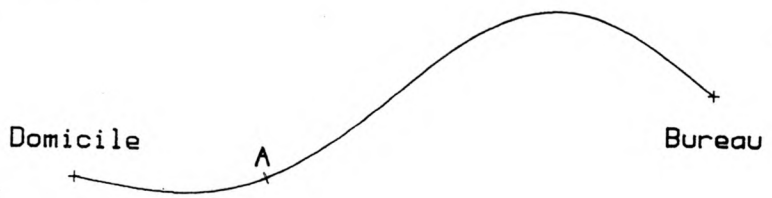
Les intensités des vitesses sont respectivement :

$v_1 = 1,5\,m/s$; $v_2 = 2,1\,m/s$ et $v_3 = 3\,m/s$.

Représente les vecteurs-vitesse correspondant en prenant 2 cm pour 1 m/s.

Exercice 2.

Ci-dessous on a représenté la trajectoire d'un automobiliste.



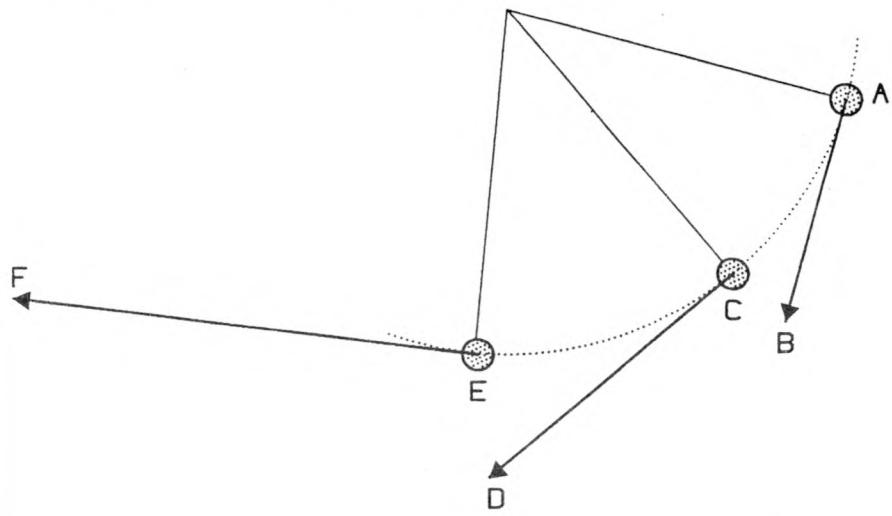
Lorsqu'il passe en A, on sait qu'en 1/10ème de seconde, il parcourt approximativement 3 m.
Calcule sa vitesse en km/h.
Représente le vecteur-vitesse au point A sachant que 1 cm correspond à 30 km/h.

Cet automobiliste a parcouru les 40 km qui séparent son domicile de son lieu de travail à la vitesse moyenne de 50 km/h.
A quelle heure doit-il partir de chez lui sachant qu'il doit être à 8 heures à son bureau ?

Corrigé de l'exercice 1.

Le pendule a une trajectoire circulaire, les vecteurs-vitesse sont tangents à cette trajectoire. La tangente au cercle étant la perpendiculaire au rayon en son point de contact, nous avons le schéma suivant avec :

AB = 3 cm ; CD = 4,2 cm et EF = 6 cm.

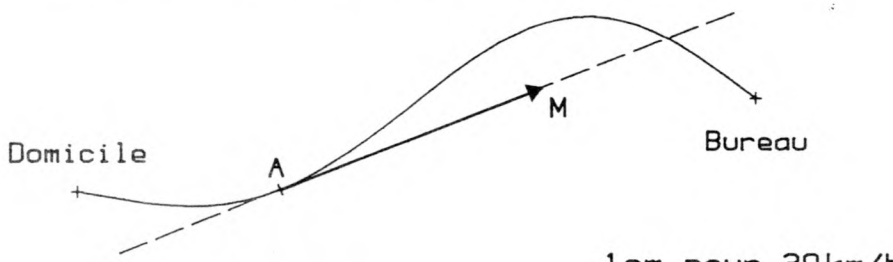


1 cm pour 0,5 m/s

Corrigé de l'exercice 2.

La vitesse en A de l'automobiliste est de 30 m/s, ce qui correspond à 30 × 3 600 m/h ce qui est la même chose que 108 km/h.

Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{AM}$ est porté par la tangente à la trajectoire ; puisque 1 cm correspond à 30 km/h, la longueur AM est de 3,6 cm (108 : 30 = 3,6).

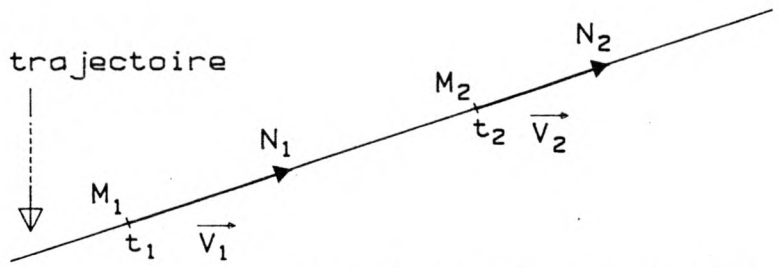


1 cm pour 30 km/h

L'automobiliste met 40:50=0,8 h soit 0,8×60=48 min pour faire le trajet. Pour être à l'heure à son bureau, il devra partir au plus tard à 7 h 12 mn.

Exercice 3.

Un mobile a un mouvement rectiligne correspondant au graphique suivant :



échelle 1/2 pour les distances
1cm correspond à 50cm.s^{-1}

a) Calcule la distance séparant les positions du mobile aux instants t_1 et t_2.

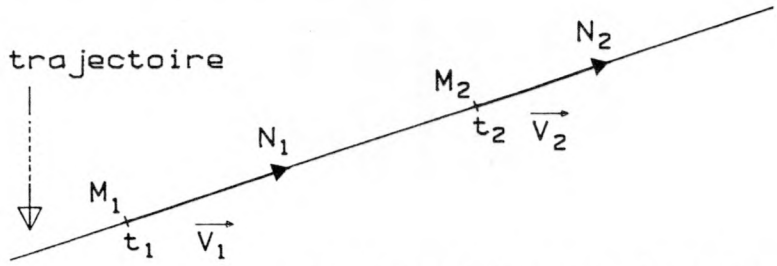
b) Calcule les valeurs des vitesses v_1 et v_2.

Exercice 4.

Un cycliste roule sur une piste circulaire de 200 mètres de diamètre à la vitesse de 45 km/h.

Représente sur un graphique la trajectoire du cycliste et le vecteur-vitesse à un instant donné. Tu préciseras l'échelle des espaces ainsi que celle des vitesses.

Corrigé de l'exercice 3.



échelle 1/2 pour les distances
1 cm correspond à 50 cm.s^{-1}

a) L'échelle des distances étant 1/2, 1 cm sur le dessin correspond à 2 cm réellement parcourus par le mobile. Or sur le dessin, le segment $[M_1M_2]$ mesure 4,7 cm, donc la distance séparant les positions du mobile aux instants t_1 et t_2 est de 9,4 cm (2 fois celle du dessin).

b) Des longueurs M_1N_1 et M_2N_2, on déduit les valeurs des vitesses correspondantes.

M_1N_1 = 2,2 cm d'où v_1 = 110 cm/s (2,2 × 50 = 110).
M_2N_2 = 1,8 cm d'où v_2 = 90 cm/s (1,8 × 50 = 90).

Corrigé de l'exercice 4.

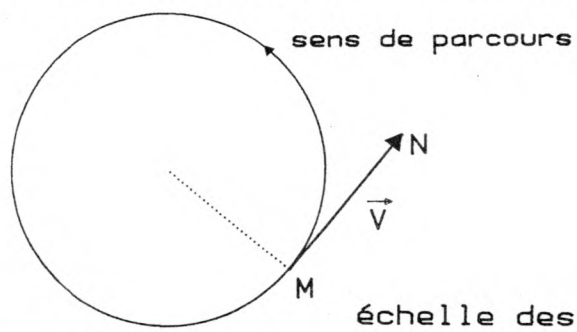
La trajectoire du cycliste est un cercle de 100 m de rayon. Si je trace un cercle de 2 cm de rayon, l'échelle est de :

$$\frac{0,02}{100} = \frac{1}{5\ 000}.$$

Si j'avais tracé un cercle de 5 cm de rayon, l'échelle aurait été de :

$$\frac{0,05}{100} = \frac{1}{2\ 000}.$$

Le vecteur-vitesse en M est représenté par le vecteur $\vec{MN}$, «porté» par la tangente en M à la trajectoire, dont le sens est celui du parcours et dont la norme est proportionnelle à la vitesse (45 km.h^{-1}).
Si je prends 1 cm pour représenter 20 km.h^{-1}, la longueur MN sera de 2,25 cm (45/20).
Si j'avais pris 1 cm pour représenter 10 km.h^{-1}, la longueur MN aurait été de 4,5 cm (45/10).



échelle des distances : 1/5000
échelle des vitesses : 1 cm correspond à 20 km.s^{-1}

UN PROBLEME CLASSIQUE SUR LA VITESSE.

1) Un nageur met 25 secondes pour traverser une piscine de 20 mètres de long.
Quelle est sa vitesse en $m.s^{-1}$? En $km.h^{-1}$?

2) Ce nageur se trouve maintenant au milieu d'une rivière large de 20 mètres. Sa vitesse par rapport à l'eau est la même qu'à la question précédente.

L'intensité de la vitesse du courant par rapport aux berges est de $0,4\,m.s^{-1}$.

a) Quelle est la vitesse du nageur par rapport aux berges lorsqu'il nage dans le sens du courant ?

Combien de temps mettra-t-il pour parcourir 20 m ?

c) Ce nageur décide maintenant de gagner la rive. Il nage en maintenant son corps perpendiculaire aux berges.

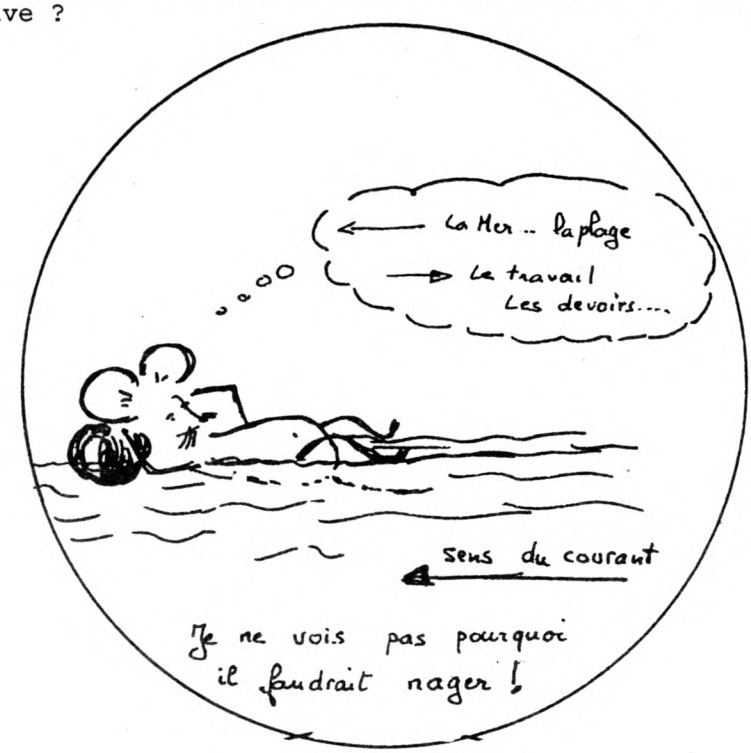
- Caractérise la vitesse du nageur par rapport aux berges.

- Calcule le temps que mettra ce nageur pour gagner la rive.

d) Si le nageur avait décidé d'atteindre la rive au point situé juste en face de lui :

- dans quelle direction aurait-il dû nager ?

- combien de temps aurait-il mis pour rejoindre la rive ?



Corrigé du problème sur la vitesse du nageur.

1) Ici on cherche une vitesse moyenne :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps mis pour la parcourir}}$$

La vitesse du nageur est de $0,8\,m.s^{-1}$ ce qui correspond à une vitesse de $2,88\,km.h^{-1}$.

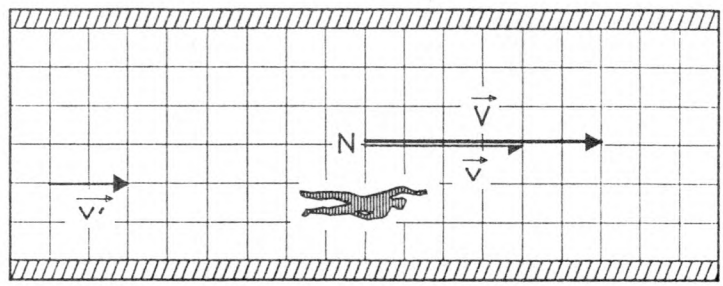
2) Dans toute la suite, on désignera par $\vec{v}$ le vecteur-vitesse du nageur par rapport au courant, par $\vec{v'}$ le vecteur-vitesse du courant par rapport aux berges et par $\vec{V}$ le vecteur-vitesse du nageur par rapport aux berges.

Dans tous les schémas, on prendra 1 cm pour représenter $0,4\,m.s^{-1}$.

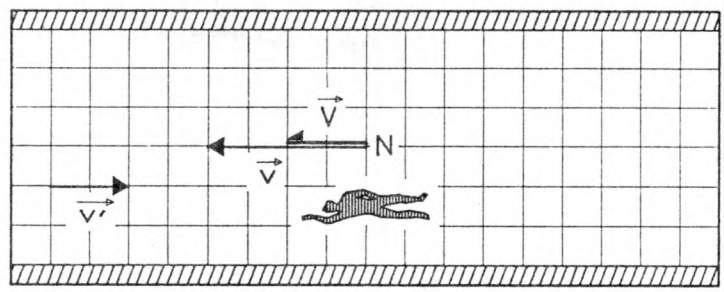
Le déplacement du nageur par rapport aux berges est la somme du déplacement de l'eau par rapport aux berges (courant) et du déplacement du nageur dans l'eau d'où la relation entre les vecteurs-vitesse :

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v'}.$$

a) Lorsque le nageur descend le courant, sa vitesse s'ajoute à celle du courant ; il a donc par rapport aux berges une vitesse de $1,2\,m.s^{-1}$ et pour parcourir 20 m il met un peu moins de 17 secondes (en effet 20/1,2 = 16,666…).



b) Lorsque le nageur remonte le courant, il faut retrancher la vitesse du courant de celle du nageur pour connaître la vitesse de ce dernier par rapport aux berges ; donc ici on a une vitesse de $0,4\,m.s^{-1}$ et il faut alors 50 secondes à notre nageur pour parcourir 20 m.



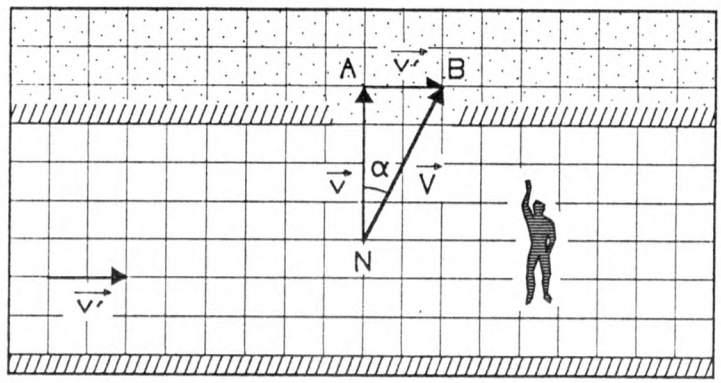
Si la vitesse du nageur par rapport au courant avait été égale à celle du courant, ce dernier aurait fait du «sur place» par rapport aux berges en nageant contre le courant.

Si elle avait été inférieure à celle du courant, malgré tous ses efforts pour progresser contre le courant, notre nageur aurait reculé par rapport aux berges.

Remarque.

Depuis le début de ce problème, on parle de vitesse à la place de l'intensité de la vitesse afin de ne pas alourdir la rédaction mais il faut penser que pour déterminer une vitesse il faut en plus une direction et un sens.

c) Le nageur nage perpendiculairement à la rive.



Par rapport aux berges, le nageur ne se déplace pas perpendiculairement, sa trajectoire fait avec la perpendiculaire à la rive un angle α.

Dans le triangle rectangle NAB :

- Pour déterminer l'angle α, on connaît les deux côtés de l'angle droit, donc on peut se servir de la tangente (on pourra toujours vérifier le résultat trouvé en mesurant cet angle à l'aide d'un rapporteur).

$$\tan \alpha = \frac{AB}{NA} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ d'où } \alpha \cong 26,5°$$

- Pour déterminer l'intensité de la vitesse, il faut calculer NB qui est la longueur de l'hypoténuse.

$NB^2 = NA^2 + AB^2$; $NB^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ d'où $NB \cong 2,23$.

L'intensité de la vitesse du nageur par rapport aux berges est de $0,89 m.s^{-1}$.

Seule la composante de la vitesse du nageur perpendiculaire aux berges rapproche ce dernier de la rive, il mettra donc 12,5 secondes pour rejoindre la rive.

d) Dans ce cas, la trajectoire est perpendiculaire à la rive et on a alors le schéma ci-dessous.

Le corps du nageur devrait alors faire un angle β avec la perpendiculaire à la rive.

Dans le triangle NCD :

- Pour déterminer l'angle β, on connaît l'hypoténuse et le côté opposé à cet angle, donc on peut utiliser le sinus :

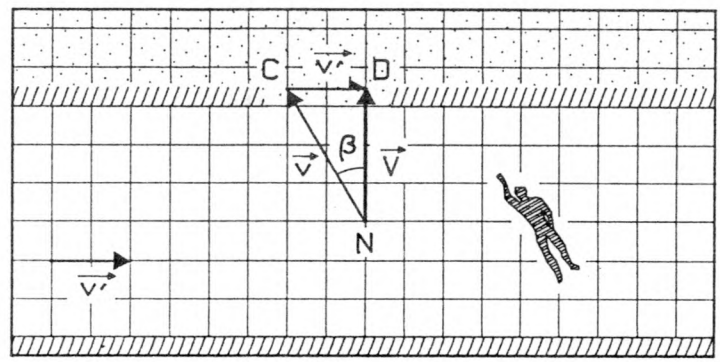
$\sin \beta = \frac{CD}{NC} = 0,5$ d'où $\beta = 30°$.

- Pour déterminer l'intensité, il nous faut calculer la mesure d'un côté de l'angle droit connaissant celle de l'hypoténuse et de l'autre côté :

$ND^2 = NC^2 - CD^2$; $ND^2 = 4 - 1 = 3$ d'où $ND \cong 1,73$.

L'intensité de la comosante de la vitesse du nageur perpendiculaire aux berges serait donc voisine de $0,7\ m.s^{-1}$ $(0,4 \times 1,73)$.

Le nageur mettrait alors 14,4 secondes (10/0,7) pour rejoindre la rive.

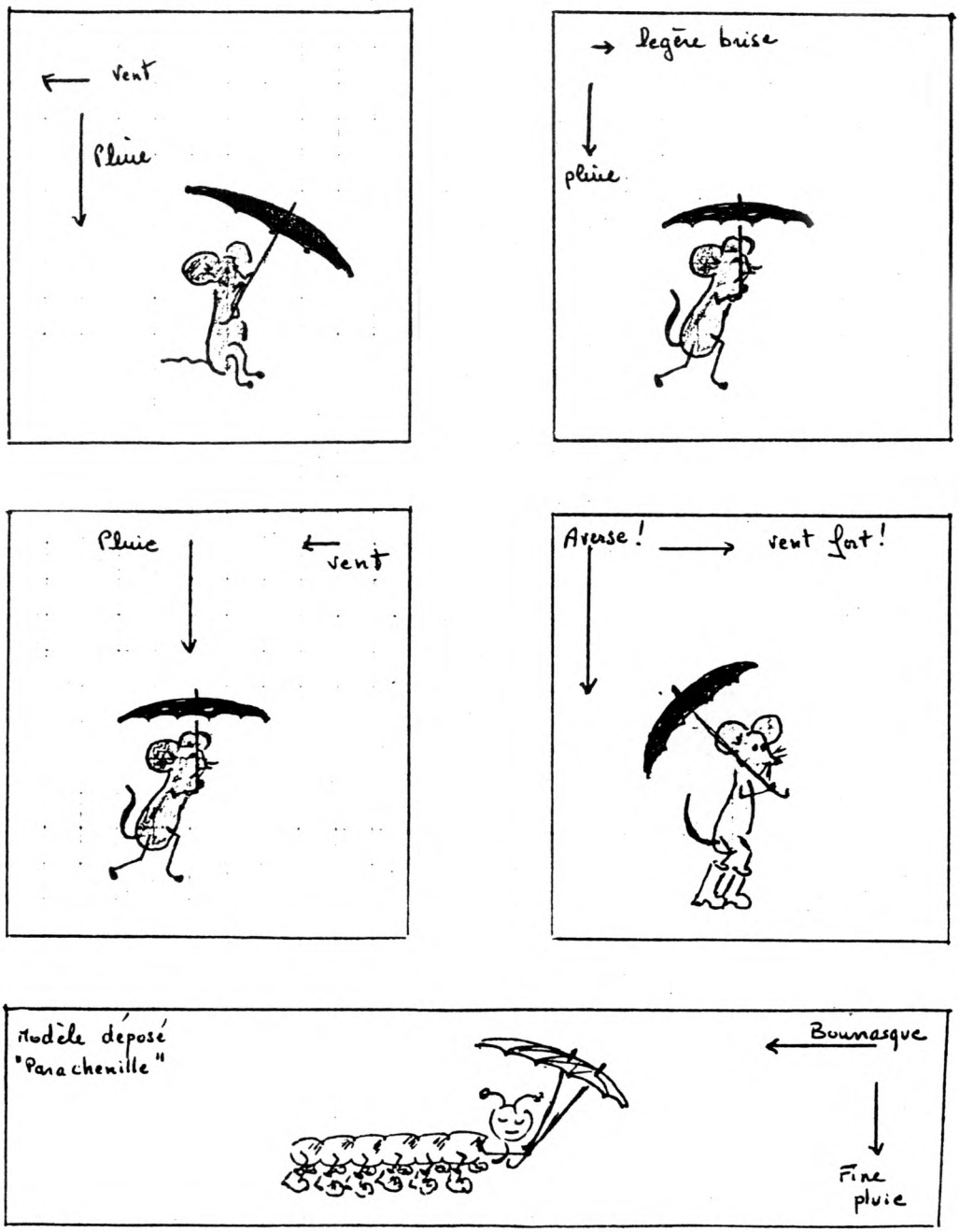


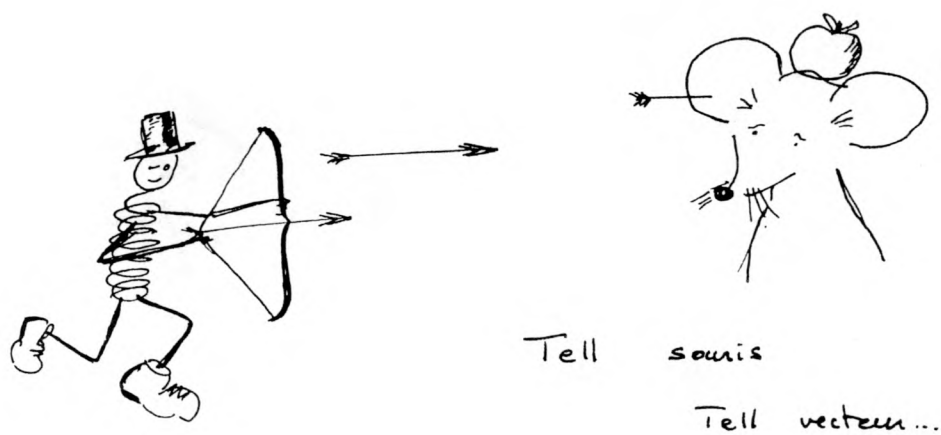
AURONS-NOUS LES PIEDS MOUILLES ?

La pluie tombe plus ou moins vite, suivant la grosseur des gouttelettes…

La pluie tombe plus ou moins verticalement suivant la force du vent…

La chute de la pluie est représentée par une flèche de haut en bas ; la force du vent (supposé régulier), par une flèche parallèle au bas de la page. Quelle est la direction de la pluie ? Et, vu la position du parapluie, aurons-nous les pieds mouillés ?




Tell souris
Tell vecteur...

VECTEURS ET QUANTITE DE MOUVEMENT

* Pour étudier le mouvement d'un solide, le physicien a «inventé» le vecteur «quantité de mouvement» du solide. Ce vecteur est défini par :

$$\vec{P} = m \vec{V_G}$$

où $\vec{V_G}$ est le vecteur-vitesse associé au centre d'inertie G du solide, et m la masse du solide.

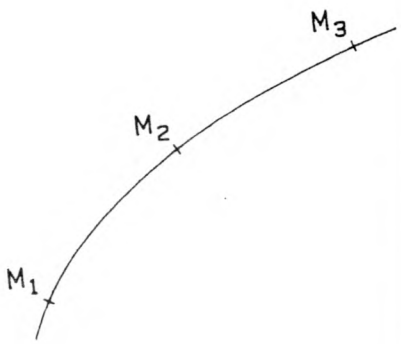
Ce vecteur «quantité de mouvement» renseigne sur le mouvement d'ensemble du solide, mais il ne prend pas en compte les mouvements du solide «sur lui-même» (mouvements propres) ; par exemple s'il pivote sur lui-même alors que la trajectoire du centre d'inertie est rectiligne.

Ce vecteur quantité de mouvement est le meilleur outil pour prévoir la situation résultant du choc de deux (ou plusieurs) solides et il sera utilisé en terminale pour définir le mouvement d'un solide soumis à une ou plusieurs forces.

Exemple.

Le vecteur quantité de mouvement associé à la terre décrit la rotation de la terre autour du soleil, mais «oublie» qu'elle tourne sur elle-même. La rotation de la terre autour de l'axe des pôles en 24 heures n'est pas prise en compte par le vecteur quantité de mouvement, puisque cette rotation, considérée toute seule, ne modifie pas la trajectoire du centre d'inertie de la terre.

* Dans les exercices précédents sur le mouvement d'un solide, les points M_1, M_2, M_3,… représentaient les positions du centre d'inertie G du solide aux instants t_1, t_2, t_3,…



Si m est la masse du mobile, on pourra donc dessiner un vecteur quantité de mouvement au temps t_1 (noté $\vec{P_1}$) un autre à l'instant t_2 (noté $\vec{P_2}$), etc.

Le vecteur $\vec{P_1}$ a même support, même sens que $\vec{V_1}$ et son point d'application est aussi M_1. Il en est de même pour les autres vecteurs $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$, etc.

Mais nous allons à nouveau rencontrer un problème «d'échelle» pour déterminer la norme du vecteur quantité de mouvement.

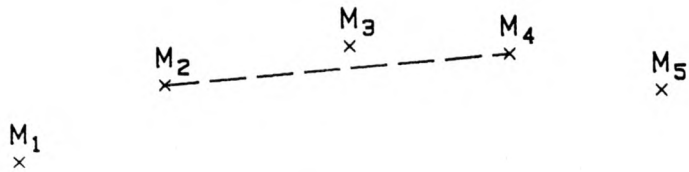
L'intensité de la quantité de mouvement m.v a une unité assez compliquée, par exemple des kilogram-mètres par seconde…

Il va donc falloir inventer encore une échelle pour avoir la place de dessiner un représentant du vecteur quantité de mouvement. Nous allons prendre un exemple.

Exemple.

Les points ci-dessous représentent le relevé des positions du centre d'inertie d'un solide toutes les 20 ms (0,02 seconde). Ce relevé est ici à l'échelle 1/2. C'est-à-dire 1 cm du dessin pour 2 cm réels.

On sait en outre que le solide a une masse de 350 g.



ECHELLE distances : 1 cm pour 2 cm

Nous allons représenter à l'instant t_3 le vecteur-vitesse et le vecteur quantité de mouvement. (C'est-à-dire leurs représentants ayant pour origine M_3).

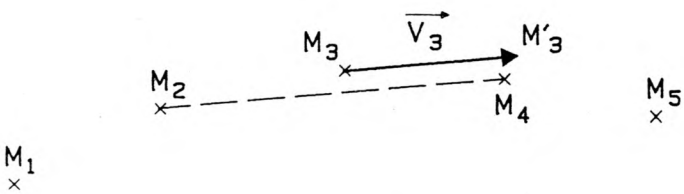
Construction du représentant de $\vec{v}_3$.

M_2M_4 mesure 4,4 cm sur le dessin, donc 8,8 cm en réalité puisqu'on travaille à l'échelle 1/2 pour les distances.

Le temps pour aller de M_2 à M_4 est de 40 ms ou 0,04 s.

La vitesse instantanée en M_3 est donc de

$$\frac{8,8}{0,04} = 220 \text{ cm/s ou } 2,2 \text{ m/s.}$$



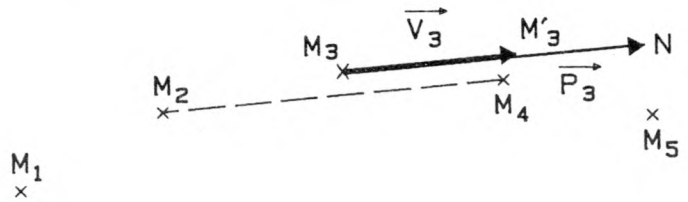
ECHELLES distances : 1 cm pour 2 cm
vitesses : 1 cm pour 1 m/s

Construction du vecteur quantité de mouvement.

La valeur de la quantité de mouvement (ou encore son intensité) est de $0,35 \times 2,2 = 0,77\,kg.m/s$.

Il nous reste à choisir l'échelle. Si on prend 1 cm pour 1 kg.m/s, le dessin serait bien petit, donc pas très lisible (mais pas faux !).

Si on prend 5 cm pour $1\,kg.m.s^{-1}$, alors $0,77\,kg.m.s^{-1}$ seront représentés par $5 \times 0,77 = 3,85$ cm. La longueur M_3N_3 du représentant du vecteur quantité de mouvement sera de 3,85 cm. Nous choisissons cette échelle.



ECHELLES distances : 1 cm pour 2 cm
vitesses : 1 cm pour 1 m/s
Q de mvt : 5 cm pour $1\,kg.m.s^{-1}$

On pourrait presque dire que ces exercices sont des exercices sur les «échelles»… plutôt que sur les vecteurs !

C'est un peu fastidieux, mais si on ne respecte pas très soigneusement les échelles, il ne sera pas possible d'utiliser les vecteurs dessinés pour analyser la situation (par exemple dans le cas du choc de deux solides, il faut choisir les trois mêmes échelles pour les deux solides envisagés).

Un schéma «bien fait» permet par lecture graphique, en utilisant les différentes échelles, de déterminer avec une précision plus ou moins bonne les déplacements, vitesses et quantités de mouvement d'un solide ; et dans certains exercices seule cette détermination te sera demandée. Lorsque tu obtiendras des résultats par le calcul, le schéma te permettra de faire une première vérification.

Un T.P. de physique.

On a deux mobiles autoporteurs M_1 et M_2 de masses respectives $m_1 = 500\,g$ et $m_2 = 750\,g$, munis chacun d'un cerceau élastique. Les positions des centre d'inertie C_1 et C_2 des deux mobiles en mouvement sont inscrites simultanément toutes les 40 ms grâce à deux stylets.

Les deux mobiles sont projetés l'un vers l'autre, sur une table horizontale. Ils se rencontrent, puis leurs mouvements «divergent».

L'enregistrement des positions des centres d'inertie des deux solides a été reproduit à l'échelle 1/2.

1) Marque les positions successives du centre d'inertie C du système constitué des deux mobiles.

Que peux-tu dire sur le mouvement du centre d'inertie C du système ?

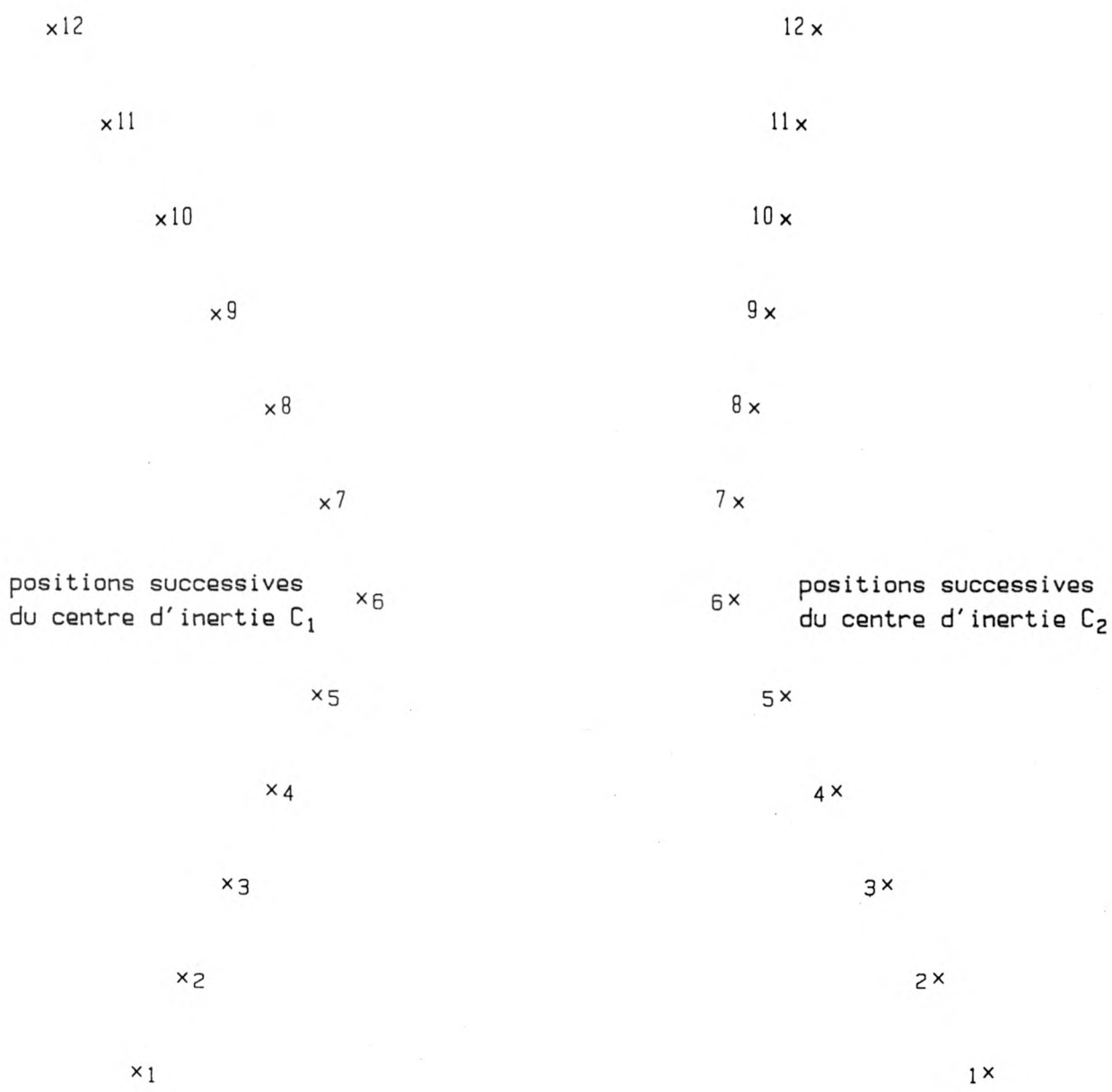
2) Représente à l'instant (3) les vecteurs-vitesse des centres d'inertie C_1, C_2 et C.

3) Dessine à l'instant (3) et à l'instant (8) les vecteurs quantité de mouvement des centres d'inertie C_1, C_2 et C.

Que constates-tu ?

* Pense à indiquer sur ton schéma les différentes échelles choisies.

Enregistrement des positions des centres d'inertie.



ECHELLE distances : 1/2

Corrigé du T.P. de physique.

1) Le centre d'inertie C du système formé par les deux mobiles M_1 et N_1 est le barycentre des centres d'inertie C_1 et C_2 des deux mobiles affectés des coefficients respectifs 500 et 750 (masses respectives des mobiles). On est amené à construire la barycentre de 2 points (problème mathématique).

Le barycentre de $(C_1, 500)$ et $(C_2, 750)$ est le même que le barycentre de $(C_1, 2)$ et $(C_2, 3)$: on a divisé les 2 coefficients par 250.

Le barycentre C de $(C_1, 2)$ et $(C_2, 3)$ peut-être défini par la relation vectorielle :

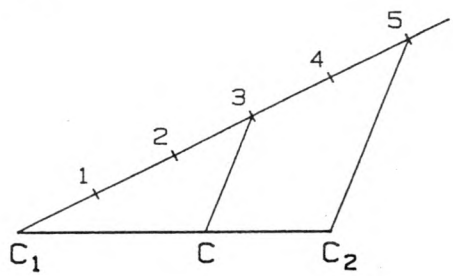
$$\overrightarrow{C_1C} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{3}{5}\overrightarrow{C_1C_2}.$$

Le point C est situé sur le segment $[C_1C_2]$, plus près de C_2 que de C_1 et on a en longueur :

$$C_1C = 3/5\ C_1C_2,$$

d'où la construction des différentes positions de C.

Une construction géométrique du point C pourrait-être:



$$\overrightarrow{C_1C} = \frac{3}{5}\overrightarrow{C_1C_2}$$

Il est facile de vérifier que les différentes positions du centre d'inertie C du système sont alignées et équidistantes, donc le mouvement du centre d'inertie du système est rectiligne et uniforme.
Le choc entre les deux mobiles modifie les vecteurs-vitesse des centres d'inertie de chaque mobile mais pas celui du centre d'inertie du système. Il y a «conservation de la quantité de mouvement» lors du choc.

2) Les trajectoires étant rectilignes, les vecteurs vitesse sont «portés» par les trajectoires ; leurs normes respectives sont proportionnelles aux intensités des vitesses des centres d'inertie.
L'intensité de la vitesse à l'instant 3 est égale à la distance parcourue entre les instants 2 et 4 divisée par le temps écoulé entre ces deux instants.
Il faut penser à prendre en compte l'échelle des déplacements, qui est ici de 1/2. Pour chaque centre d'inertie, les distances parcourues sont égales au double des longueurs mesurées sur le schéma.

Pour le mobile M_1, la distance parcourue entre les instants 2 et 4 est de 2 × 3,3 cm et la durée écoulée entre ces 2 instants est de 2 × 0,04 secondes, la vitesse à l'instant 3 est donc de 6,6/0,08 = 82,5 cm/s.

Si on convient que l'unité (le centimètre) correspond à 20 cm/s, le représentant du vecteur-vitesse aura pour longueur 4,125 cm (82,5/20).

On opère de la même manière pour les vitesses des centres d'inertie du mobile M et du système constitué par les deux mobiles.

3) Les vecteurs quantité de mouvement sont définis par:

$\vec{P_1} = m_1\vec{V_1}$; $\vec{P_2} = m_2\vec{V_2}$ et $\vec{P} = m\vec{V}$ avec $m = m_1 + m_2$,

où m_1, m_2 désignent les masses des deux solides et $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V}$ les vecteurs-vitesse des différents centres d'inertie.

Les vecteurs quantité de mouvement sont colinéaires et de même sens que les vecteurs-vitesse correspondants.

Pour le centre d'inertie, la vitesse étant constante, la valeur numérique de la quantité de mouvement est P = mV avec :

$$m = 1250\,g = 1{,}25\,kg$$

$$V = 70\,cm.s^{-1} = 0{,}7\,m.s^{-1}$$

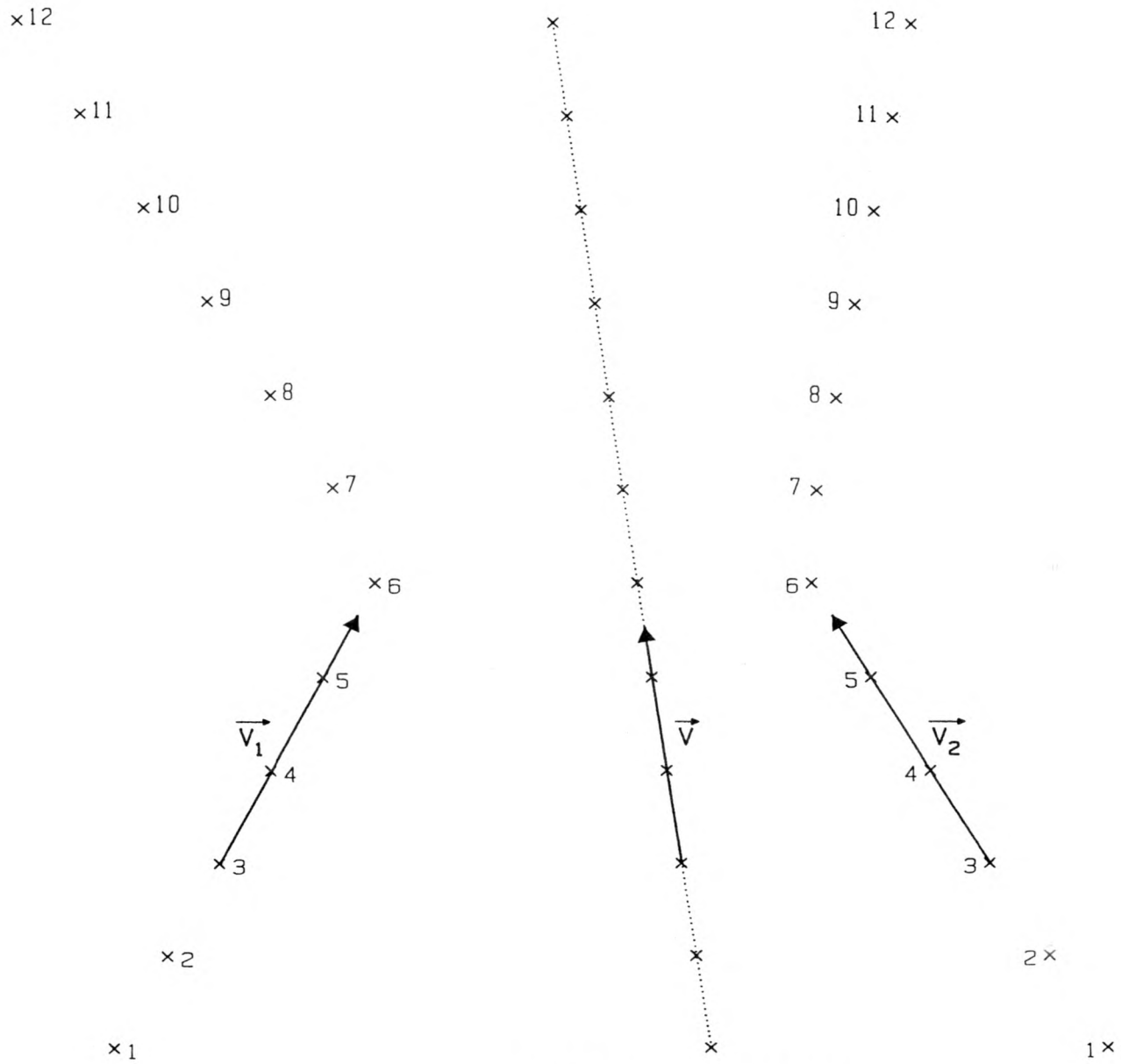
$$P = 1{,}25 \times 0{,}7 = 0{,}875\,kg.m/s.$$

* Pour représenter le vecteur quantité de mouvement, on peut prendre 4 cm pour 1 kg.m/s (c'est-à-dire 1 cm correspond à 0,25 kg.m/s), dans ce cas la longueur du représentant du vecteur quantité de mouvement sera de 3,5 cm.

En opérant de la même manière, on construit les autres vecteurs quantité de mouvement demandés.

Les vecteurs quantité de mouvement de chacun des solides varient avec le choc, alors que celui du système est constant. De plus, si on fait la somme des vecteurs quantité de mouvement des deux solides, on trouve, quel que soit l'instant, le vecteur quantité de mouvement du système.

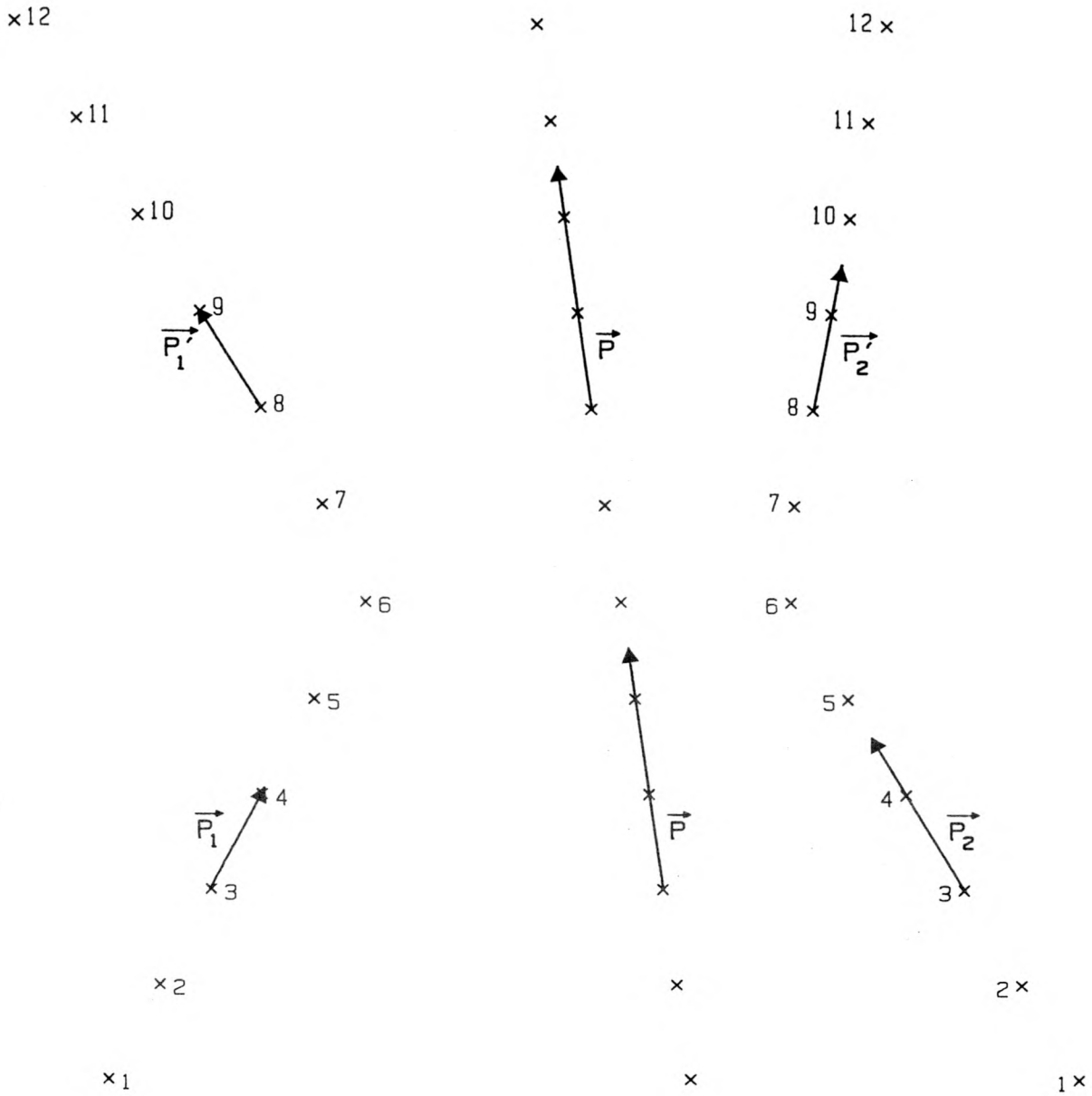
Centre d'inertie du système. Vecteurs vitesse.



positions successives
du centre d'inertie
du système

ECHELLES distances : 1/2
vitesses : 1cm pour 20cm/s

Conservation de la quantité de mouvement du système.



ECHELLES distances : 1/2
Q de mvt : 4cm pour 1kg.m/s

La somme des vecteurs quantité de mouvement des deux solides est toujours égale au vecteur quantité de mouvement du système, qui lui est un vecteur constant.

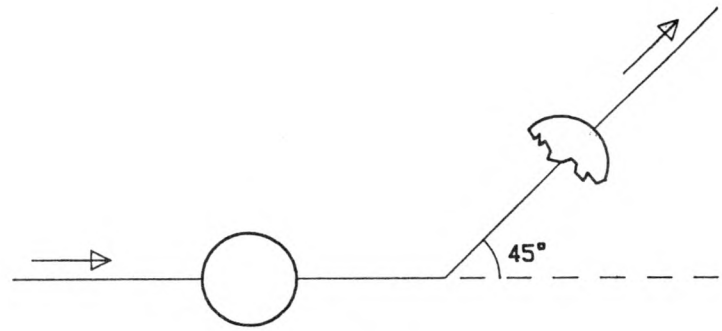
EXERCICES SUR LA QUANTITE DE MOUVEMENT.

Exercice 1.

Un solide dont la masse est 1 200 g glisse sur l'aérotable horizontale à la vitesse de $0,5\,m.s^{-1}$. Il éclate au point A en deux morceaux. L'un des morceaux de masse 500 g a une vitesse de $0,6\,m.s^{-1}$ et sa trajectoire fait un angle de 45° avec celle qu'avait le solide avant l'éclatement.

Dessine le vecteur quantité de mouvement du deuxième morceau (précise l'échelle utilisée).

Détermine graphiquement la vitesse du deuxième morceau.



Exercice 2.

Sur une voie horizontale, un chariot (1) de masse m = 5 kg heurte un chariot (2) arrêté dont la masse m = 8 kg. Avant le choc, la vitesse de chariot (1) est de $1,5\,m.s^{-1}$. Les deux chariots restent accrochés après le choc.
Sachant que les actions des rails compensent les poids, calcule la vitesse des chariots après le choc.

Exercice 3.

A l'intersection de deux routes perpendiculaires verglacées se produit une collision entre deux voitures A et B. On suppose que les deux véhicules restent accrochés après le choc. Les masses des deux voitures sont respectivement de 1 350 kg et de 1 020 kg, leurs vitesses respectives avant le choc sont $30\,km.h^{-1}$ et $25\,km.h^{-1}$.

a) Représente les vecteurs quantité de mouvement des deux véhicules avant le choc.

b) Détermine la vitesse des deux voitures après le choc.

Exercice 1.

On considère le système formé par le solide, entier au départ, puis en deux morceaux. Comme les actions intérieures n'interviennent pas (éclatement), il y a conservation de la quantité de mouvement lors de l'éclatement.

Avant l'éclatement :

* Un solide S :
  - de masse m = 1 200 g = 1,2 kg ;
  - vitesse v = 0,5 m.s^{-1} ;
  - quantité de mouvement $\vec{P} = m.\vec{v}$.

Après l'éclatement :
1. un solide S_1 :
   - de masse m_1 = 500 g = 0,5 kg ;
   - de vitesse v_1 = 0,6 m.s^{-1} ;
   - quantité de mouvement $\vec{P_1} = m_1.\vec{v_1}$.

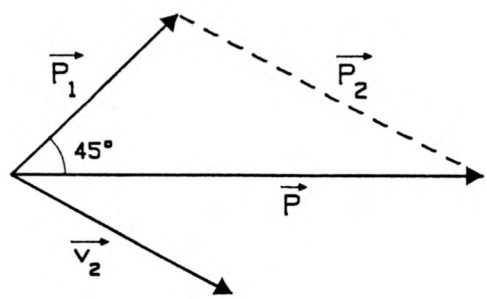
2. un solide S_2 :
   - de masse m = 700 g = 0,7 kg ;
   - de vitesse v_2 = ? ;
   - quantité de mouvement $\vec{P_2} = m_2.\vec{v_2}$.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{P} = \vec{P_2} + \vec{P_2} \ ;$$

$$m.\vec{v} = m_1.\vec{v_1} + m_2.\vec{v_2}.$$

Echelle : 1 cm correspond à 0,1 kg.m.s.



P = 0,6 kg.m.s^{-1}
P_1 = 0,3 kg.m.s^{-1}.

Graphiquement, le vecteur $\vec{P_2}$ est la différence $\vec{P} - \vec{P_1}$ des deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{P_1}$.
En utilisant l'échelle choisie,

on a $\vec{P_2}$ = 0,45 kg.m.s^{-1}.

Or $P_2 = m_2.v_2$ d'où $v_2 = \dfrac{0,45}{0,7} = 0,64$ m.s^{-1}.

Le vecteur $\vec{v_2}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{P_2}$. Sur le dessin, on a pris pour représenter $\vec{v_2}$, 1 cm pour 2 m.s^{-1}.

Exercice 2.

Considérons le système formé par les deux chariots.

Avant le choc :

* Chariot (1)
  - masse $m_1 = 5\,kg$;
  - vitesse $v_1 = 1,5\,m.s^{-1}$;
  - quantité de mouvement $\overrightarrow{P_1} = m_1.\overrightarrow{v_1}$.

* Chariot (2)
  - masse $m_2 = 8\,kg$;
  - vitesse $v_2 = 0$;
  - quantité de mouvement $P_2 = \vec{0}$.

* Quantité de mouvement du système
$\vec{P} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = m_1.\overrightarrow{v_1}$.

Après le choc :

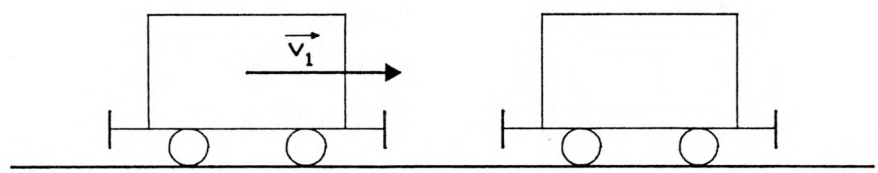
* Chariot (1)
  - vitesse v = ?
  - quantité de mouvement $m_1.\vec{v}$.

* Chariot (2)
  - vitesse v = ?
  - quantité de mouvement $m_2.\vec{v}$.

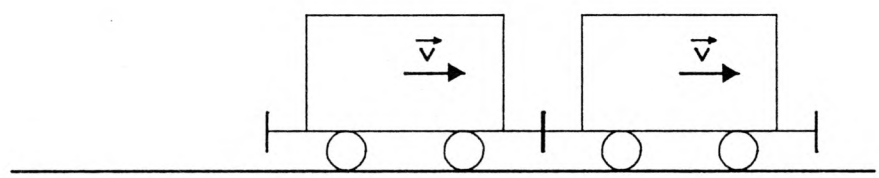
* Quantité de mouvement du système $\overrightarrow{P'} = m_1.\vec{v} + m_2.\vec{v}$.

La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire (les vecteurs-vitesse étant colinéaires et de même sens) :

$P = 5 \times 1,5 = 7,5\,kg.m.s^{-1}$;
$P' = 5.v + 8.v = 13.v$.
De $P = P'$, on déduit $v = \dfrac{7,5}{13} = 0,58\ m.s^{-1}$.



Avant le choc.



Après le choc.

Exercice 3.

On considère le système formé par les deux voitures.

Avant le choc :

* Voiture A :
  - masse : $m_1 = 1\,350\,kg$;
  - vitesse : $v_1 = 30\,km.h^{-1} = 6,94\,m.s^{-1}$;
  - Q. mvt : $\vec{P_1} = m_1.\vec{v_1}$ avec $P_1 = 11\,250\,kg$

* Voiture B :
  - masse : $m_2 = 1\,020\,kg$;
  - vitesse : $v_2 = 25\,km.h^{-1} = 6,94\,m.s^{-1}$;
  - Q. mvt : $\vec{P_2} = m_2.\vec{v_2}$ avec $P_2 = 7\,083,3\,kg.m.s.$

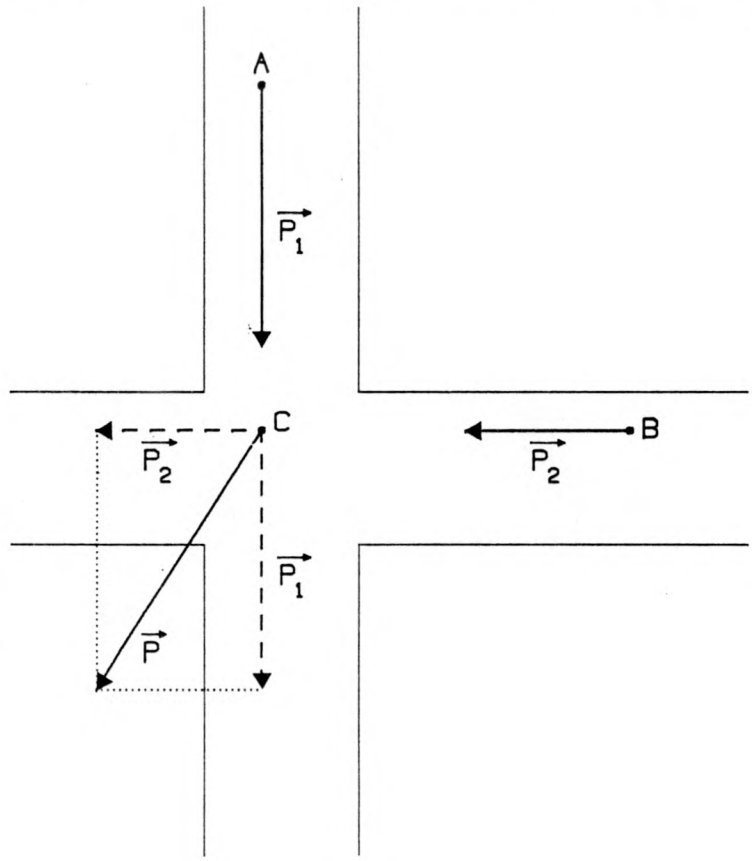
* Q. mvt du système : $\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$.

Après le choc :

* Les voitures A et B ont la même vitesse v.

* Q. mvt : $\vec{P'} = (m_1 + m_2).\vec{v}$.

Conservation de la quantité de mouvement : $\vec{P} = \vec{P'}$.



ECHELLE Q de mvt: 3cm pour 10000kg.m.s^{-1}

D'après le théorème de Pythagore :

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 = 11\ 250^2 + 7\ 083^2.$$

d'où $P = 13\,294\ kg.m.s^{-1}$.

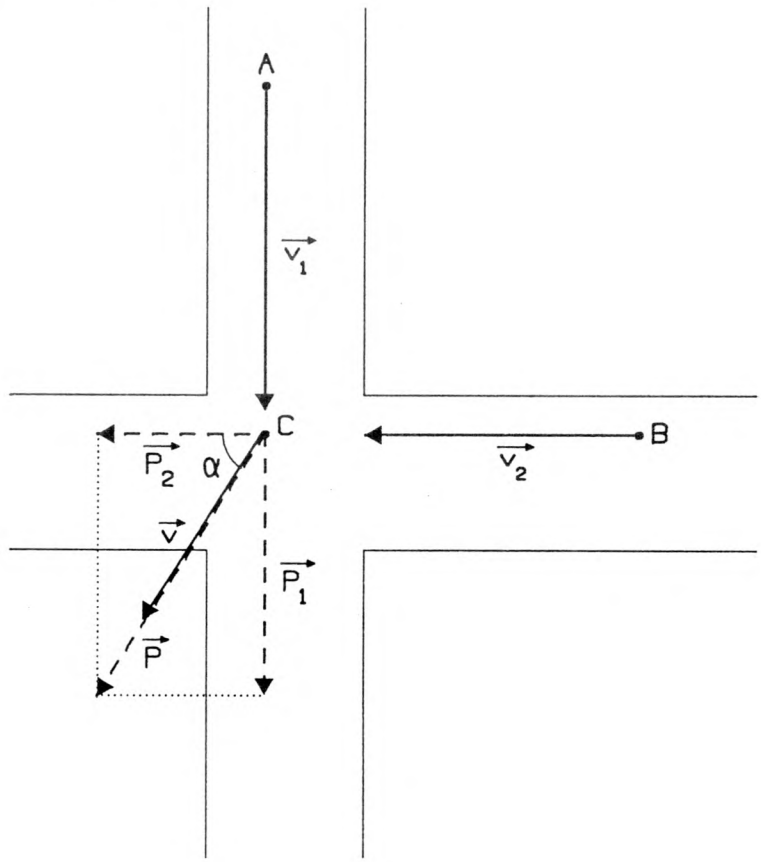
De $P = (m + m).v$ on déduit :

$$v = \frac{13\ 294}{2\ 370} = 5,61\ m.s^{-1} = 20,2\ km.h^{-1}.$$

La valeur de l'angle α que fait la trajectoire des deux voitures après le choc par rapport à un des bords de la route peut être défini à l'aide de la tangente.

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{11\ 250}{7\ 083} = 1,59.$$

D'où $\alpha = 57,8°$.



ECHELLES Q de mvt: 3cm pour 10000kg.m.s^{-1}
vitesses: 1cm pour 2m.s^{-1}