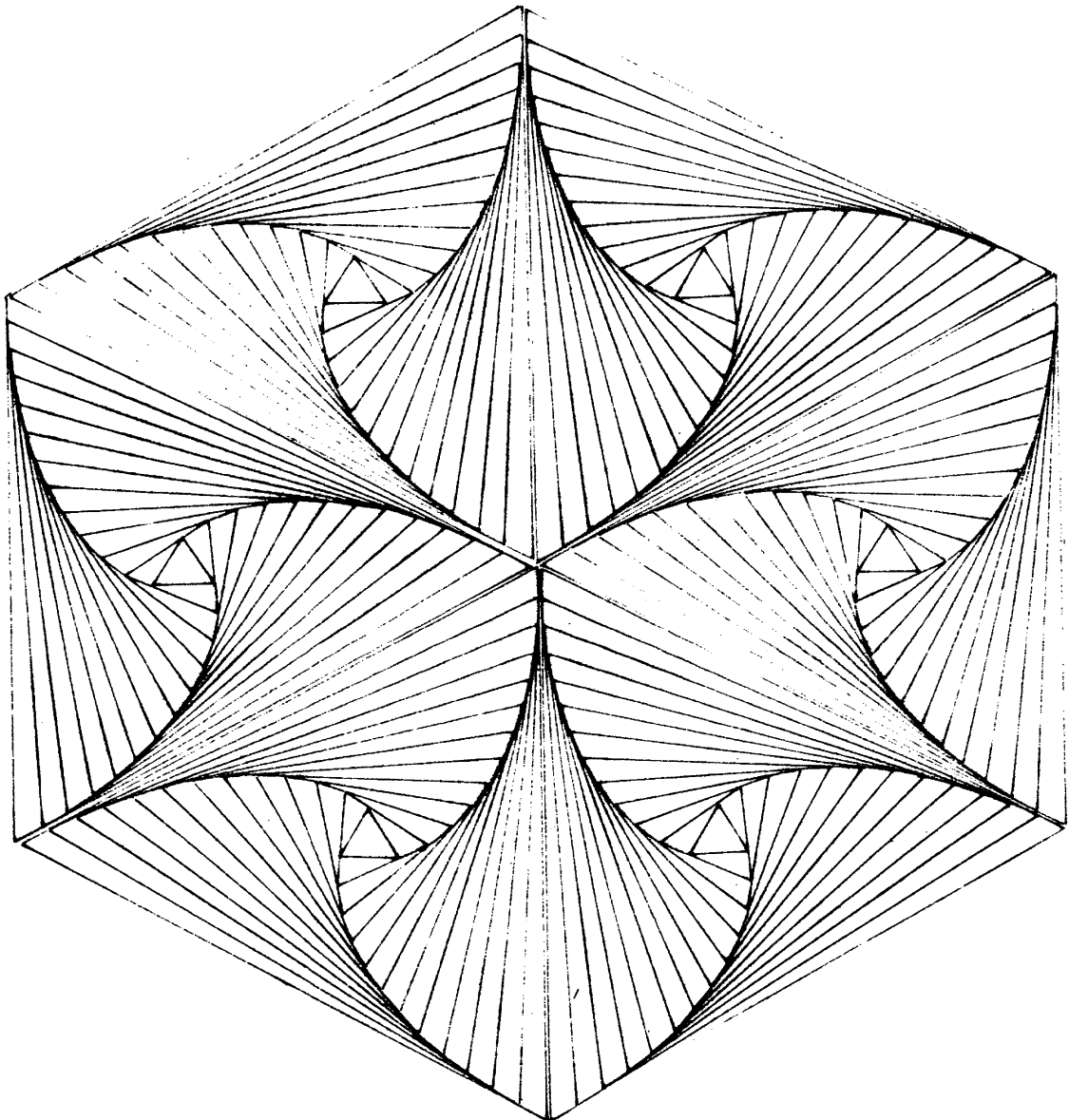


ACTIVITES GEOMETRIQUES en sixième et cinquième



Animateurs de l'IREM de Grenoble ayant participé aux travaux du groupe 6ème-5ème.

Christian	BARTH
Nicole	BELLARD
Annie	BLANC
Martine	BOURGEAT
Bernard	CAPPONI
Philippe	CLAROU
Claude	GACHET
Michel	GUILLERAULT
Rirette	GUILLERMARD
Nicole	LAFON
Ostilia	LANARO
Marc	LEGRAND
Geneviève	LETZGUS
Alain	MASSON
Maryvonne	VERJUS

La frappe de ce document a été réalisée par Monique BERNARD.

Toutes les remarques et suggestions concernant ce fascicule sont à adresser au groupe 6ème-5ème de l'IREM de Grenoble

B.P. 41

38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex

des activités géométriques

- Cherchant à rendre l'élève actif, curieux, précis.
- Cherchant à enrichir son expérience en géométrie.
- Tenant compte de ses acquis provenant non seulement du CM, mais aussi du contact de tout son environnement qui est pour lui l'occasion de nombreuses approches intuitives des notions de géométrie.

- Familiarisant :
 - à la lecture d'un énoncé, et à l'application des consignes,
 - à l'utilisation d'instruments de dessin et de mesure,
 - à l'existence de propriétés géométriques,
 - à des notions telles que : aire, cercle, angle, distance et orthogonalité.
- Sensibilisant :
 - à la nécessité de tracés précis,
 - à la nécessité de formuler des énoncés clairs et complets,
 - au risque de «déductions abusives» conduisant à de «fausses-propriétés»,
 - à la possibilité d'utiliser des propriétés découvertes et admises pour «démontrer» de nouveaux énoncés.

en aucun cas

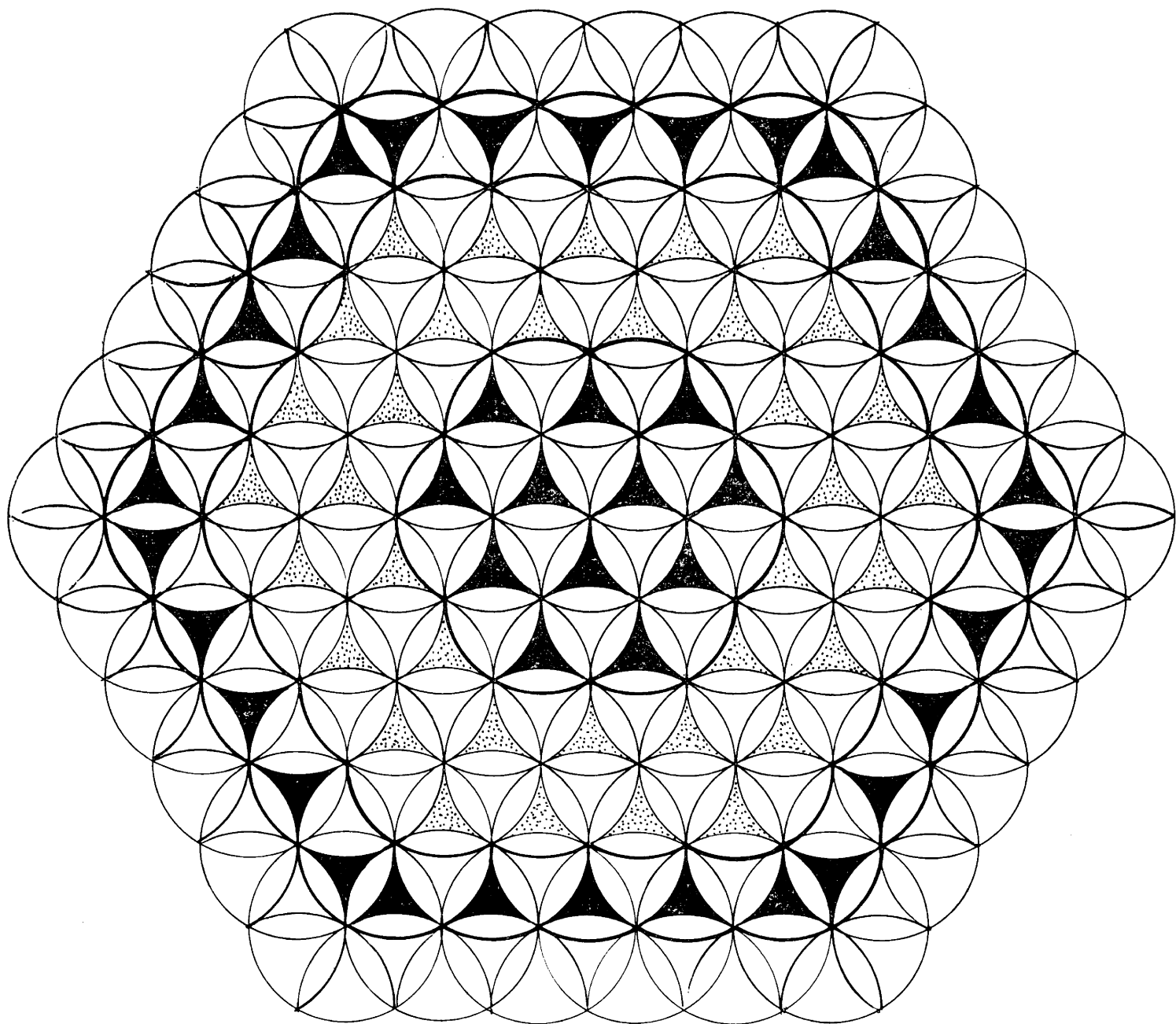
: ces activités ne visent une formalisation pour elle-même avant l'approche des différents aspects d'une notion.

en aucun cas

: ces activités ne veulent s'inscrire dans le schéma trop connu : définitions, propriétés, exercices de reconnaissance de la définition ou de certaines propriétés.

mais plutôt

:- Reconnaître une même notion au travers de différentes situations.
— Dégager cette notion et quelques-unes de ses propriétés.
— Retrouver cette notion dans de nouvelles situations.



Réseau hexagonal

Sommaire

PRESENTATION DU DOSSIER	9
-------------------------------	---

Première partie : FICHES SIGNALETIQUES et DOCUMENTS-ELEVES

CHAPITRE T : TRACES ET CONSTRUCTIONS

Cardioïde	19
Pentagone	31
Bonaparte	35
Pliages	45

CHAPITRE A : AIRE

Aires	57
Aire-Périmètre	71

CHAPITRE D : DROITE

Poursuites	79
Pappus	85
Polaire	89
Segment et droite	97

CHAPITRE C : CERCLES

Réseau hexagonal	105
Tracés de cercles	109
Médiatrice	117
La grue, les radio-amateurs, la chèvre, un «exercice de géométrie»	123

CHAPITRE θ : ANGLES

Rotations et angles	151
Les angles et les côtés d'un triangle	185
Chalmont - cas d'égalité des triangles	193

CHAPITRE H : DISTANCE ET ORTHOGONALITE	215
--	-----

CHAPITRE L : LIAISON GEOMETRIE – ARITHMETIQUE

Dessins avec des cercles	251
Des triangles, des carrés qui «roulent»	257

Deuxième partie : QUELQUES DEVELOPPEMENTS

1 - DIVERSES PRESENTATIONS DE L'ACTIVITE SEGMENT ET DROITE	268
2 - QUELQUES COMMENTAIRES sur l'INEGALITE TRIANGULAIRE à propos de la CHEVRE	279

1 — PRESENTATION DU DOSSIER

1.1 Un groupe IREM 6ème-5ème élabore une série de documents élèves et les expérimente dans la classe.

Jusqu'à la rentrée 1979, le groupe 6ème-5ème de l'IREM de Grenoble réunissait une dizaine d'enseignants (du secondaire : pégc, agrégé, certifié, et du supérieur). Ce groupe était chargé de l'animation des stages d'établissements proposés par l'IREM au niveau 6ème-5ème. Ces stages regroupaient les enseignants d'un même établissement ou d'établissements voisins et permettaient une réflexion sur l'enseignement dans l'une des classes de 6ème ou de 5ème.

Pour susciter l'observation dans les classes, la réflexion et la discussion dans les stages, nous avons proposé un certain nombre d'activités géométriques. Ces activités ont été élaborées au cours des stages ou par le groupe d'animateurs. Certaines d'entre elles ont été remaniées en tenant compte des observations faites par chacun avec ses élèves. Cela ne doit pas conférer un caractère définitif à la présente rédaction de ces activités. La présentation d'un document élève permet de préciser notre point de vue, mais il nous semble essentiel que chaque professeur adapte l'activité, ne serait-ce que pour tenir compte des acquis de sa classe. Dans certains cas, une simple présentation orale de l'activité suffit.

Ce travail représente un échantillonnage des réflexions du groupe sur de nombreuses années. Il nous paraît susceptible d'intéresser à plusieurs titres les enseignants, d'autant plus que la suppression des heures de décharges stagiaires ne permet plus à l'IREM d'organiser des stages sur l'année. En effet, au cours des années, grâce aux contacts établis, aux discussions menées, aux observations faites dans les classes, le groupe s'est forgé une certaine expérience et par là une certaine idée sur les moyens de surmonter quelques difficultés pédagogiques. La meilleure façon de faire partager «cette expérience de la classe» est de proposer quelques exemples de ce qui nous semble susceptible de débloquer des situations.

Bon nombre d'enseignants qui n'avaient pas participé à l'élaboration de ces documents, les ont trouvés en première lecture bien naïfs et sans grand intérêt mathématique ; c'est l'expérimentation dans leurs classes qui leur a montré à quel point cette naïveté, la lenteur des différentes approches, la longueur et la diversité des différentes manipulations étaient nécessaires pour débusquer des malentendus, des confusions et des blocages.

Ces activités ne représentent pas pour nous «ce qu'il faut faire ou ne pas faire». Nous espérons seulement que leur diffusion assez large donnera l'idée ou l'occasion à chacun de créer dans ses propres classes des situations peut-être différentes mais réutilisant certaines démarches illustrées ici.

Toutes ces activités se rapportent à des notions de géométrie pouvant être abordées en 6ème ou en 5ème. Ce travail est loin d'être complet. Il ne représente pas l'ensemble des points que nous avons abordés : et nous nous proposons de le compléter par la suite, en publiant (si les IREM en ont encore les moyens) d'autres fascicules portant par exemple sur : l'étude de l'espace en 5ème ou l'approche du raisonnement et l'étude de démonstrations plus ou moins formalisées en 6ème et 5ème.

1.2 Quelques constats de départ.

Voici les principaux constats et les idées forces qui ont servi de base à notre travail.

** La mise en place des programmes de 69-70 a entraîné une certaine désaffection pour la géométrie de 6ème-5ème.*

Nous voyons diverses raisons à cela. Notons en particulier :

Les difficultés d'adapter un enseignement de la géométrie, trop chargé de traditions, à certaines «exigences nouvelles» de cette réforme (nous verrons plus loin quelques-unes de ces exigences).

Une volonté trop systématique de rénover, faisant attribuer une grande importance aux leçons relatives à l'apprentissage du vocabulaire ensembliste sans aucun lien avec d'autres chapitres.

Une géométrie qui est perçue par l'élève comme naturellement intuitive et concrète et qui s'est trouvée présentée dès le départ de façon à perdre tout attrait pour l'enfant.

** Les programmes de 77 ont tenté de corriger cet état de fait. Y sont-ils parvenus ?*

Pas toujours. Beaucoup d'enseignants se sentent gênés pour présenter les notions de géométrie de 6ème-5ème tout en voulant répondre à une certaine idée des mathématiques qu'ils retrouvent dans le manuel en usage dans l'établissement. En effet on rencontre trop souvent encore dans les manuels scolaires :

— une mathématique, soucieuse de sa seule cohérence interne, présentée pour elle-même, suivant un ordre logiquement fondé certes, mais fortement contraire aux modes d'appréhension des enfants.

(Par exemple, la présentation des secteurs angulaires comme intersection ou réunion de demi-plans).

— une mathématique présentée dans son formalisme définitif. Or ce formalisme est souvent inaccessible aux élèves de ce niveau. Dans tous les cas, ils ne peuvent pas l'utiliser dans une situation autre que la situation élémentaire qui a servi à l'introduire.

— une analyse et une séparation de concepts, justifiable sur un plan mathématique, mais alourdissant considérablement le maniement des objets en détournant parfois complètement le langage courant de son sens. Pour «clarifier les choses» certaines présentations des premiers éléments de géométrie font apparaître un segment comme un élément de sa longueur !!! Certes une séparation des concepts est une attitude justifiée (parce qu'elle est simplificatrice) sur le plan pédagogique. Mais hormis les situations d'apprentissage, l'élève retrouve mêlés différents concepts qu'il avait tout d'abord rencontrés isolément. Dans ces conditions, il ne faut pas s'étonner que l'élève n'arrive pas à utiliser directement ses connaissances (un pianiste qui maîtrise le jeu de la main droite et le jeu de la main gauche séparément, n'est pas capable, immédiatement, d'exécuter un morceau avec les nuances nécessaires). Nous pensons qu'il faut aider l'élève à effectuer des transferts de connaissances en le confrontant le plus souvent possible à des situations autres que des situations d'apprentissage.

— L'absence de souci de l'intégration de l'enseignement des mathématiques à la vie scolaire (autres disciplines) et extra-scolaire de l'enfant. Ceci est à rapprocher des difficultés de transferts des connaissances.

— L'introduction de modèles issus d'une pratique mathématique d'un niveau supérieur, ne trouvant pas de véritable justification dans la situation présente (par exemple l'ensemble des entiers relatifs présenté comme un ensemble quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

** A l'heure actuelle, l'enseignement de la géométrie au cours du 1er cycle se déroule habituellement en deux étapes très distinctes :*

niveau 6ème 5ème : mise en place d'un vocabulaire définitif à propos d'objets usuels, souvent au détriment de la manipulation de ces objets.

niveau 4ème-3ème : introduction de raisonnements déductifs complètement formalisés, à partir de situations abstraites, très proches des axiomes et des fondements de la théorie.

Nous refusons une distinction aussi nette qui exclut pratiquement toute amorce de raisonnement déductif dans la première étape et qui ne donne pas assez d'importance aux manipulations dans la seconde.

Une démarche naturelle de la pensée nous semble décrite par le schéma suivant :

- une analyse de la réalité, conduite par une intervention active sur les objets étudiés, permet d'entrevoir un résultat, une propriété remarquable.
- la recherche et l'ébauche d'une démonstration (d'une preuve) confirment l'intuition première.
- la formalisation de cette démonstration avec un vocabulaire approprié valide le résultat obtenu.

Ces deux dernières étapes ne sont pas «naturellement justifiées pour les élèves» si elles viennent systématiquement confirmer et redonder autour de «situations évidentes» ; c'est pourquoi il nous semble important de les mettre en œuvre principalement lorsqu'elles permettent de découvrir ou de confirmer des «idées non triviales a priori». L'une quelconque de ces étapes ne peut être réservée à un niveau donné.

** Une énergie considérable est trop souvent consacrée exclusivement à la mise en place et à la mémorisation d'un vocabulaire surabondant.*

Par exemple, tous les élèves de 6ème connaissent les mots droites, demi-droites, segments, rencontrés dès le CM. Mais combien y en a-t-il qui ont accédé au concept recouvert par exemple par le mot «droite» ; quelles activités leur a-t-on proposées pour leur permettre de le préciser ?

Est-ce la connaissance du mot recouvrant un certain concept qui doit être recherchée à tout prix ou bien la reconnaissance des différents aspects d'un concept tels qu'ils apparaissent au travers de diverses situations ? Certes ne pas connaître un mot est source de blocage mais la première activité avant la seconde est un leurre qui a trop souvent été entretenu par la pratique de l'enseignement.

Pour raisonner est-il indispensable de tout formaliser ? Mais ne pas formaliser n'est-ce pas réserver le raisonnement déductif à une petite élite ?

La communication d'une propriété géométrique, et par là même son explication, se font dans un certain contexte. Consacre-t-on avec les élèves le temps nécessaire à mettre en évidence les éventuels sous-entendus, les ambiguïtés pouvant subsister dans tel énoncé ou dans telle dénomination de la vie courante ? Et pourtant, n'aurait-on pas l'occasion de le faire à partir des définitions ou des «raisonnements» que ne manquent pas de proposer les élèves ?

1.3 Quelques-uns de nos objectifs.

Tout d'abord, comme nous l'avons déjà dit : «au cours d'une première lecture, on peut être choqué par la naïveté et la simplicité des textes présentant ces activités, et par certains «habillages» de situations». L'observation des

classes a montré combien cette façon de faire est importante pour la bonne compréhension des textes par les élèves.

Lors de l'élaboration de ces activités nous avons cherché tout d'abord :

- à rendre l'élève vraiment actif (d'où un grand nombre de manipulations et de tracés),
- à éviter de mettre, dès le départ, l'enfant en situation d'échec,
- à encourager le plus possible les initiatives et la recherche,
- à tenir compte des acquis, provenant non seulement du CM, mais aussi du contact de tout l'environnement, contact qui est l'occasion de nombreuses approches intuitives des notions de géométrie.

Nous avons cherché aussi :

- à approcher une notion en la découvrant dans ses différents aspects et à consolider les notions déjà abordées. En aucun cas nous n'avons voulu donner en préalable une définition privilégiant une seule propriété caractéristique, et ensuite une application directe du formalisme de cette définition.
- à intriguer, à éveiller la curiosité des élèves, afin d'enrichir leur vécu et leur expérience en géométrie. Nous pensons ainsi faire mieux sentir la nécessité de l'étape suivante : élaborer une démonstration et formaliser les différents concepts.
- à faire utiliser les connaissances que les enfants possèdent bien pour les avoir employées au cours d'une activité mathématique, face à une situation nouvelle. Nous n'ignorons pas les grandes difficultés que les enfants ont à opérer ces transferts. Nous pensons pouvoir améliorer ces possibilités en leur faisant étudier des situations diverses, les plus réelles possibles. Ils doivent alors notamment reconnaître les différentes notions déjà étudiées sous des aspects parfois déroutants.

Ainsi nous pensons envisager les programmes de 6ème-5ème dans un autre esprit que celui d'un cours asséné par l'enseignant, dans une forme trop achevée.

2 – PRESENTATION DES ACTIVITES

2.1 Un dilemme.

- Présenter une activité en l'illustrant par un document élève assez élaboré, c'est prendre le risque de la faire apparaître comme figée et de faire perdre de vue les multiples autres présentations.
- Présenter une activité sans document élève, comporte de nombreux inconvénients pratiques, notamment pour l'enseignant qui voudrait utiliser cette activité dans sa classe. (Réaliser un document élève sans partir d'un exemple de présentation est souvent un travail considérable).

2.2 Notre choix.

Dans une première partie, nous avons tenu à donner pour chaque activité une présentation qui avait été expérimentée dans nos classes, pour illustrer l'esprit dans lequel on pouvait la conduire. Nous souhaitons que les documents élèves ne soient pas considérés comme des modèles mais plutôt comme des exemples de présentation. Ces activités se veulent non fermées et n'enfermant pas !

Nous sommes bien conscients que certaines présentations peuvent être allégées, par suite des acquis de la classe, et par les explications orales du professeur (quelquefois un document écrit n'est pas indispensable).

Pour faciliter la lecture de ce dossier, nous avons accompagné chaque activité d'une fiche signalétique. Quelquefois nous avons joint un commentaire plus détaillé ou des travaux d'élèves.

Dans la première partie de ce fascicule, nous avons souvent proposé plusieurs présentations d'une même activité, ainsi que quelques commentaires sommaires et quelques idées de prolongement.

Il nous a paru intéressant dans la deuxième partie : «Quelques développements» de pousser plus loin dans ce sens. A titre d'exemple nous avons décortiqué davantage deux activités : «Segment et droite» et «la chèvre».

Cette analyse plus approfondie permet entre autres d'envisager comment l'état d'esprit de ces activités 6ème-5ème peut se prolonger et s'orienter en 4ème-3ème, et pourquoi pas au-delà !!!

PREMIERE PARTIE

- FICHES SIGNALETIQUES
- DOCUMENTS ELEVES

Chapitre T

TRACÉS CONSTRUCTIONS

- CARDIOIDE
- PENTAGONE
- BONAPARTE
- PLIAGES

LA CARDIOÏDE

Fiche signalétique

Activité pour la classe de 6ème.

Temps d'utilisation en classe : environ 2 heures.

OBJECTIFS

Réalisation de tracés soignés, ce qui nécessite :

- le respect de consignes données,
- une bonne maîtrise de la règle et du compas.

INTERETS

Les élèves apprécient les qualités esthétiques de ces dessins.

C'est une forte motivation pour obtenir des tracés précis ; les élèves se montrent persévérants et n'hésitent pas à recommencer un tracé incorrect.

Remarques :

– Il n'est pas question de faire étudier aux élèves les propriétés de la cardioïde. Peut-être pourra-t-on les sensibiliser aux notions de tangentes et d'enveloppe ?

– Avec un matériel relativement simple, il est facile de réaliser 'en classe un montage qui permette d'observer une cardioïde (voir commentaires page 22). En classe de 4ème il peut être intéressant d'effectuer ces observations en liaison avec l'enseignement d'optique (sciences physiques).

DETAILS PRATIQUES

* L'ouvrage publié par «Cambridge University Press», intitulé «A BOOK OF CURVES» (auteur E.H. Hockwood) apporte d'intéressants renseignements sur de nombreuses courbes planes et leurs tracés, en particulier sur la Cardioïde.

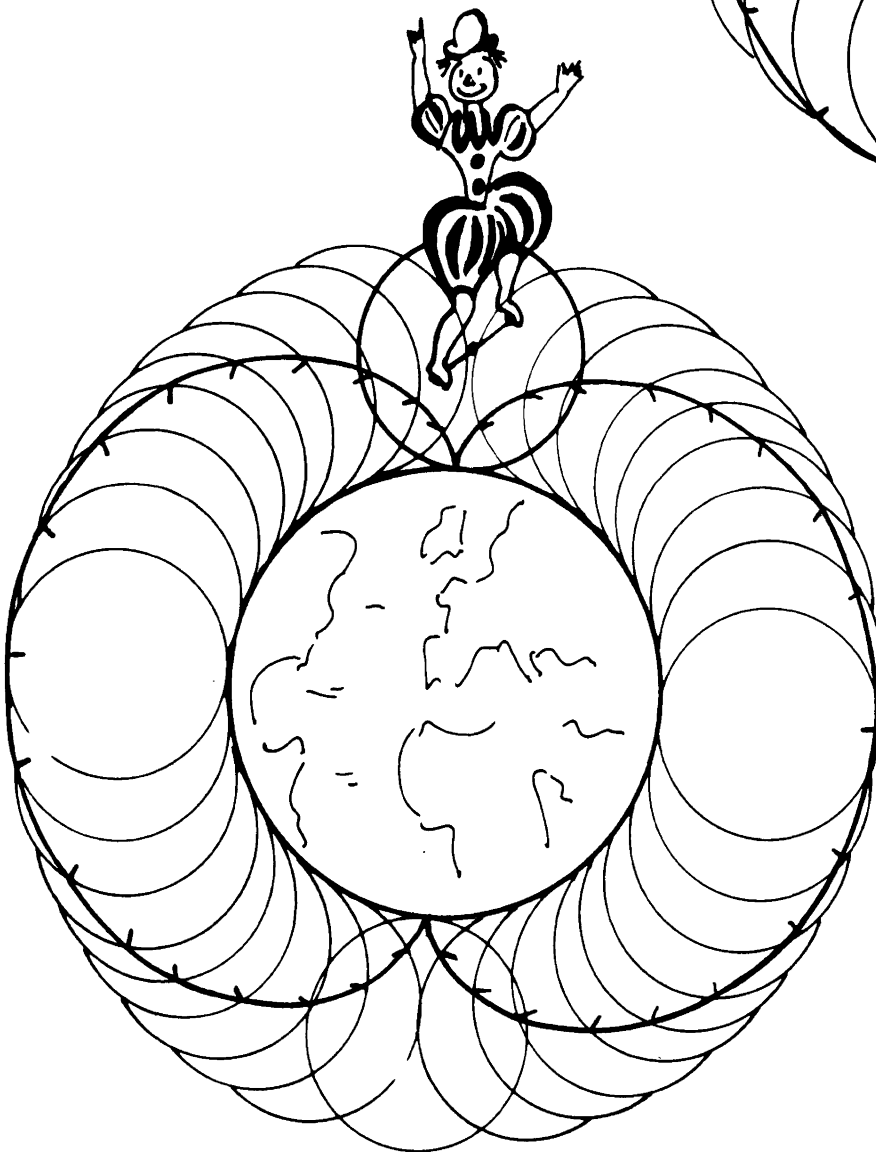
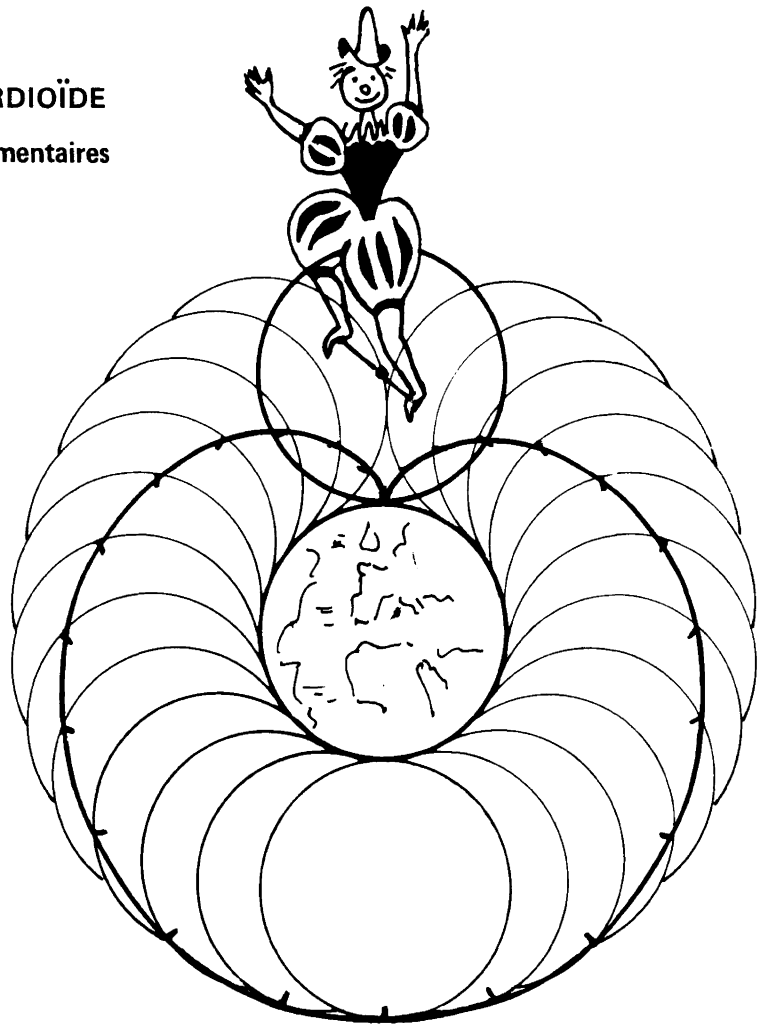
* Dans l'ouvrage publié par CEDIC (Paris) et intitulé «MODELES MATHEMATIQUES», on trouve également des renseignements sur la cardioïde et autres enveloppes.

CARDIOÏDE

Commentaires

I – SUIVEZ LA VALVE

Une CARDIOÏDE est une épicycloïde (1) engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur un autre cercle de même rayon.



Une NEPHROÏDE est une épicycloïde (1) engendrée par un point d'un cercle de rayon « r », roulant sans glisser sur un autre cercle de rayon double « $2r$ ».

(1) voir page suivante.

Quelques définitions :

UNE CYCLOÏDE (du grec Kuklos : cercle, eidos : forme)

est une courbe engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite.

UNE EPICYCLOÏDE

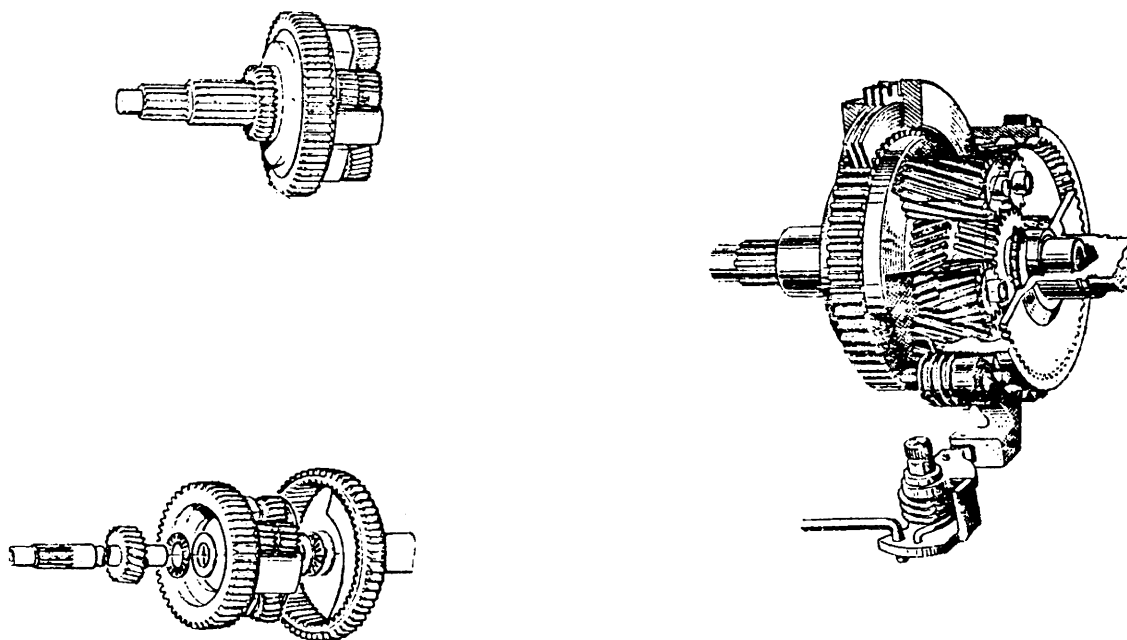
est une courbe engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur un cercle fixe.

UNE HYPOCYCLOÏDE

est une courbe engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe.

Des engrenages épicycloïdaux de boîtes de vitesse sont constitués d'un pignon central, ou planétaire, et de petits pignons placés autour, les satellites ; les axes des satellites sont mobiles pendant le fonctionnement.

Dans un engrenage hypocycloïdal, une roue dentée roule à l'intérieur d'une roue plus grande.



II – SUIVEZ LES RAYONS LUMINEUX...

Comment obtenir ces courbes avec boîte de conserve et rayons lumineux :

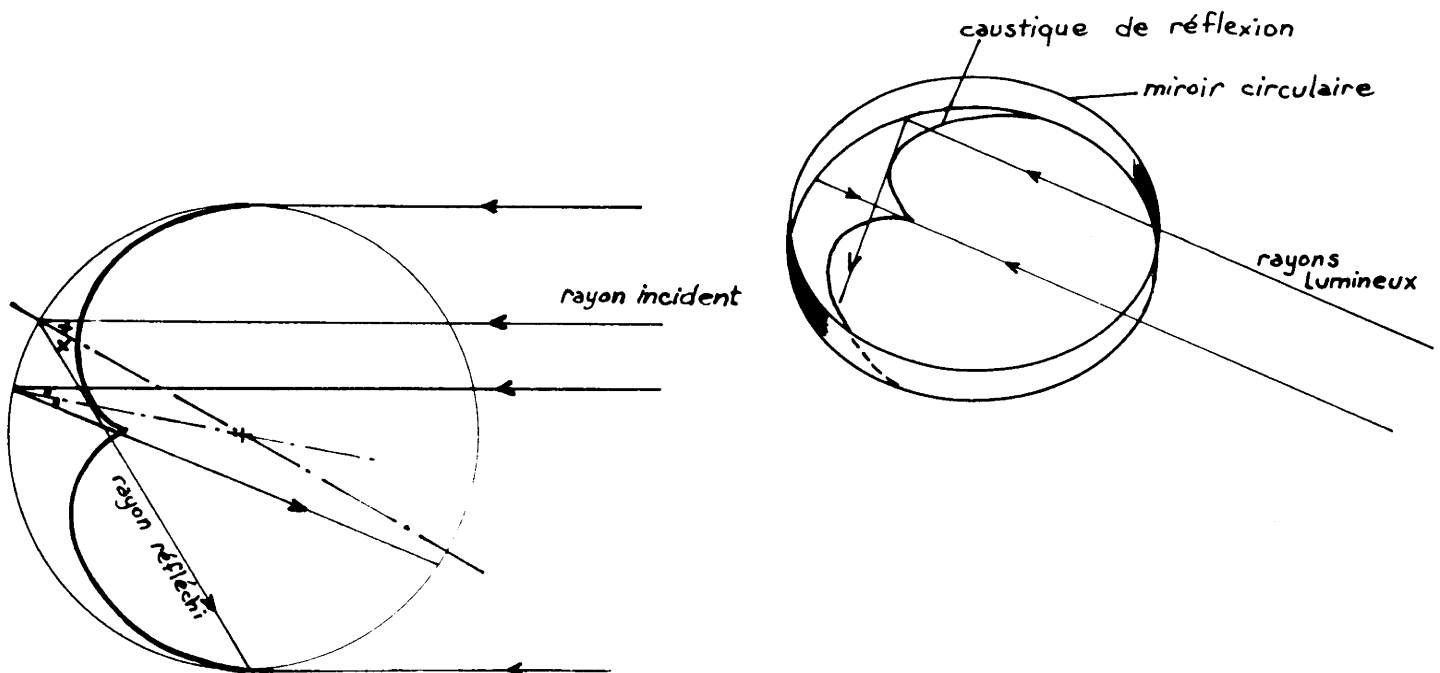
* Il faut trouver une surface réfléchissante qui puisse jouer le rôle de miroir circulaire ou semi-circulaire.

Par exemple : boîte de conserve à intérieur brillant,
casserole en acier inoxydable,
tasse cylindrique,
anneau métallique,
alliance en métal brillant ...

* On oriente cette surface vers une source lumineuse (soleil, lampe à incandescence).

Lorsque la source lumineuse est éloignée on peut considérer les rayons lumineux comme des rayons parallèles.

Le miroir concentre les rayons lumineux sur une région délimitée par une courbe appelée caustique de réflexion. Cette caustique est une moitié de néphroïde.

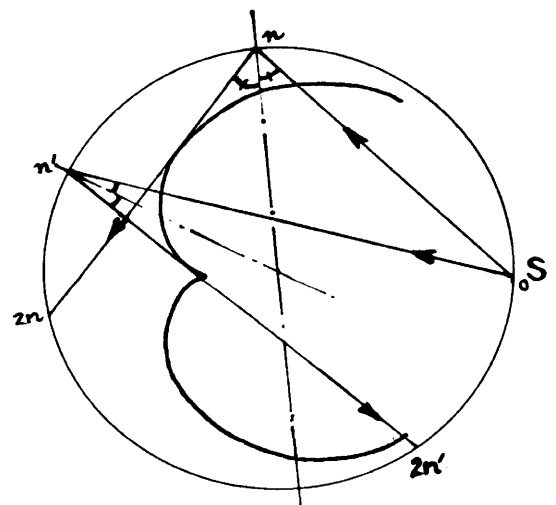
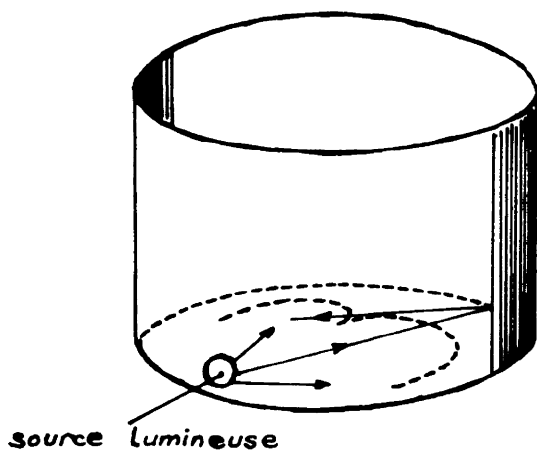
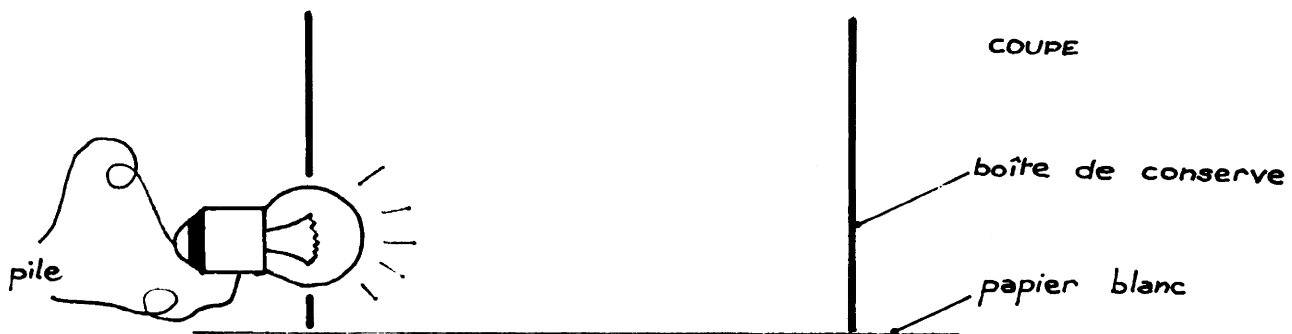


Les rayons lumineux d'une source ponctuelle sont divergents.

Lorsqu'on place une source ponctuelle en un point du cercle (par exemple au point S), la caustique de réflexion qui apparaît est une portion de cardioïde.

On peut obtenir un montage satisfaisant en utilisant :

- une lampe 3,5 volts à ampoule claire, alimentée par une pile (le verre dépoli ne convient pas car il masque le filament lumineux).
- une boîte de conserve percée d'un trou à sa base pour y loger l'ampoule (enlever le fond et le couvercle).



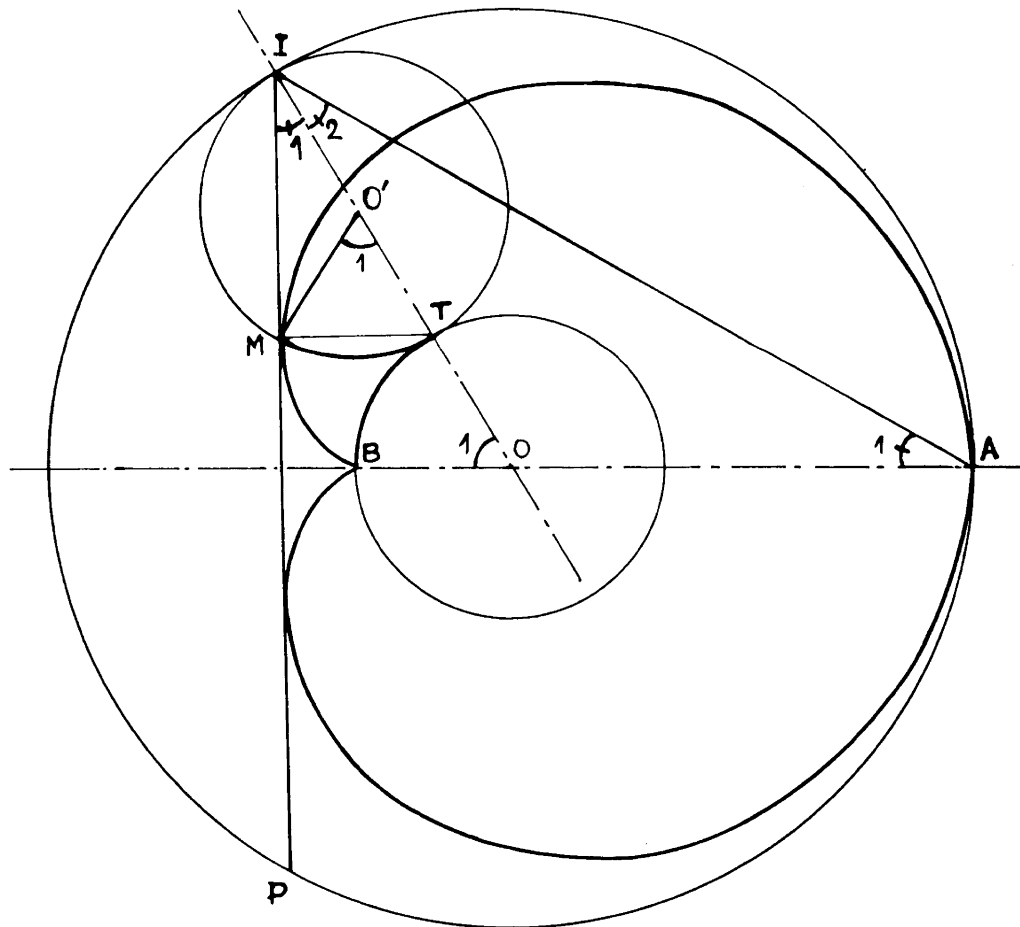
N.B. : Voir le tracé élève numéro 1 où l'on obtient des rayons réfléchis en joignant chaque point numéroté «n» au point numéroté «2n». (La source de lumière étant située au point numéroté «zéro»).

III – COINCIDENCE D'UNE CARDIOÏDE ET D'UNE CAUSTIQUE :

* Les données :

Nous partons d'une cardioïde (cf : figure ci-dessous).

- Le cercle fixe a pour centre O et pour rayon OB de mesure r .
- Le cercle qui roule sans glisser sur le précédent, a même rayon r .
Sur ce dessin, il est centré en O' et les deux cercles sont tangents en T .
- Le point M de ce cercle mobile décrit une cardioïde ayant pour point de rebroussement le point B du cercle fixe.
- A l'instant initial M est en B et le faire «rouler sans glisser» signifie qu'à chaque instant les arcs TM et TB ont même longueur.
- Le cercle mobile reste constamment tangent intérieurement au cercle de centre O et de rayon $3r$; soit I le point de contact de ces deux cercles.
- Soit A le point de la droite OB , tel que $\overline{OA} = -3 \overline{OB}$.



Nous voulons montrer que $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$

et que IM est tangent en M à la cardioïde.

* L'égalité $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ permettra de dire que si IA représente le trajet d'un rayon lumineux issu de A, il se réfléchit sur le miroir circulaire de centre O et de rayon $3r$ suivant la direction IM.

* Le fait que IM soit tangent en M à la cardioïde montrera la coïncidence entre la cardioïde et la caustique de réflexion obtenue en plaçant une source lumineuse en A.

* Principe de démonstration :

— Puisque les arcs TM et BT ont même mesure, on en déduit que les angles au centre correspondants $\widehat{O'_1}$ et $\widehat{O_1}$ ont même mesure.

A ces angles $\widehat{O'_1}$ et $\widehat{O_1}$ correspondent des angles inscrits de même mesure : $\widehat{I_1}$ dans le cercle $(O'; r)$ et $\widehat{A_1}$ dans le cercle $(O; 3r)$.

Grâce au triangle isocèle OAI on obtient alors

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$$

— Pour traiter le problème de la tangente, considérons le point $M(t)$ du cercle mobile, au voisinage de sa position $M_{(t_0)}$ à l'instant t_0 .

Appelons $T_{(t)}$ le point du cercle mobile, en contact avec le cercle fixe à l'instant t_0 .

L'hypothèse «rouler sans glisser» permet de dire qu'à l'instant t_0 la vitesse du point $T_{(t)}$ est nulle, et «qu'au premier ordre» le cercle mobile tourne autour de ce point fixe $T_{(t_0)}$.

Par suite «au premier ordre» le point $M_{(t)}$ décrit un arc de cercle de centre $T_{(t_0)}$ et de rayon $M_{(t_0)} T_{(t_0)}$.

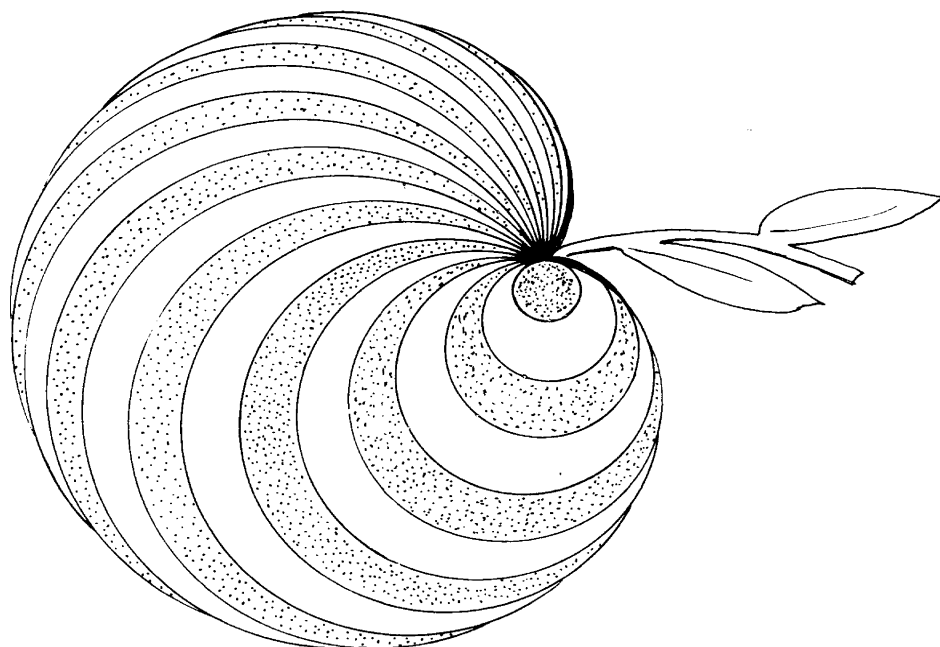
La tangente à la cardioïde au point M est donc la tangente au cercle de centre T et de rayon MT. Pour terminer, il suffit de remarquer que l'angle TMI est droit, car inscrit dans un demi-cercle.

Ainsi chaque rayon réfléchi est tangent à la cardioïde décrite par M. La cardioïde est l'enveloppe des rayons réfléchis.

N.B. Dans le dessin numéro 1, on gradue le cercle $(O; 3r)$.

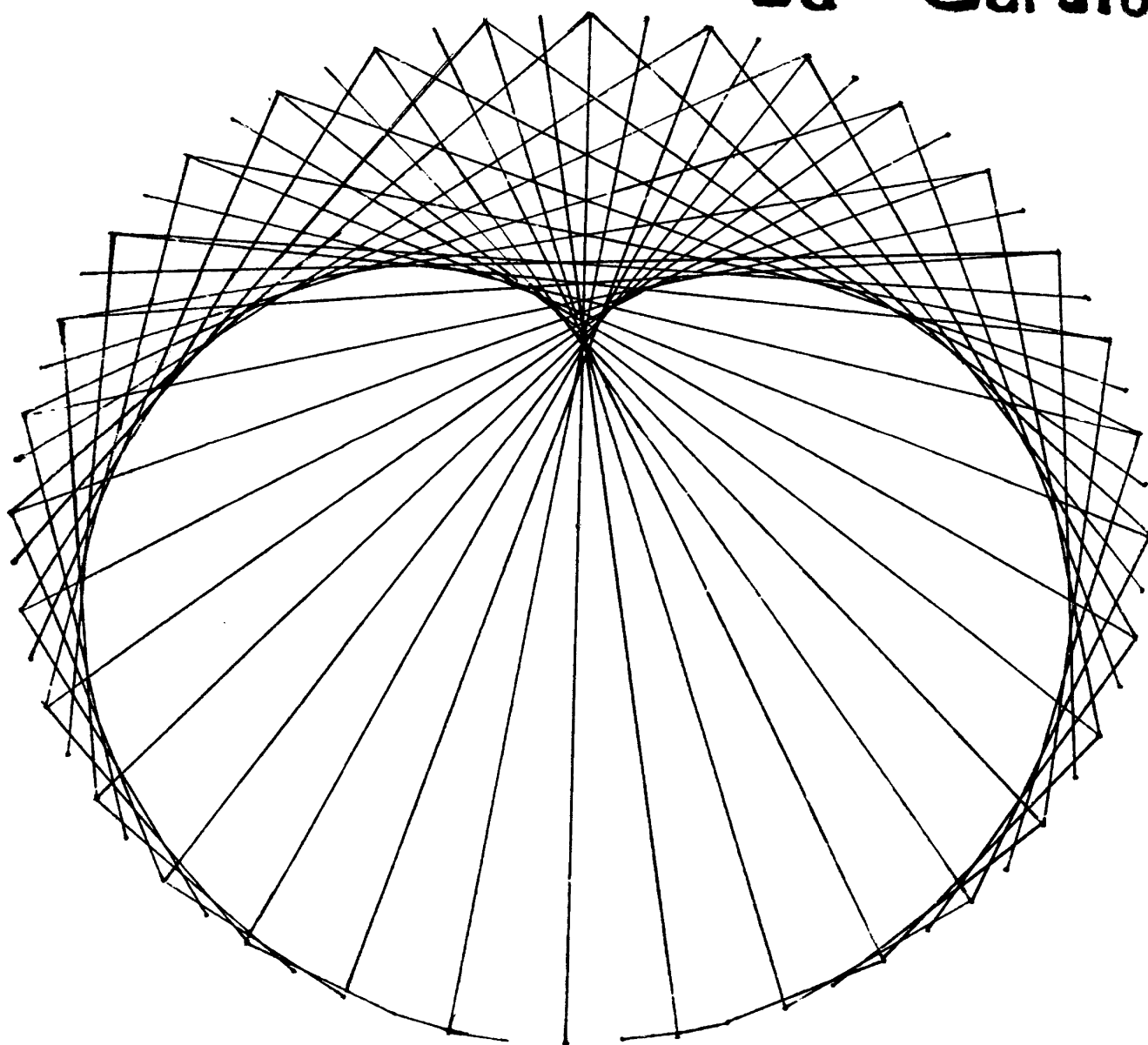
Soit P, le second point d'intersection de IM avec le cercle.

Lorsqu'au point A on fait correspondre «zéro» et au point I le nombre n , alors au point P on fait correspondre le nombre double $2n$ ($\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$)



Cardioïde ou pomme ?

La Cardioïde



LA CARDIOÏDE

Tu as reçu deux feuilles jointes à celle-ci.

I – Prends la feuille numéro 1.

Sur celle-ci est dessiné un cercle divisé en 36 parties égales. Chaque point est numéroté de deux façons : un nombre écrit en gros caractères et un autre écrit en petits caractères. Tu peux remarquer que la somme des deux nombres associés à chaque point est égale à 36.

- Joins par un trait, à l'aide de ta règle le point 1 (grand caractère) au point 2 (grand caractère).
- Joins par un trait le point 2 (grand caractère) au point 4 (grand caractère).
- Joins par un trait chaque point numéroté en grands caractères, avec son double numéroté aussi en grands caractères.
- Recommence la même chose avec les points numérotés en petits caractères en commençant par le 1.

Quand tu auras terminé, tu verras apparaître une forme géométrique appelée par les mathématiciens la **cardioïde**.

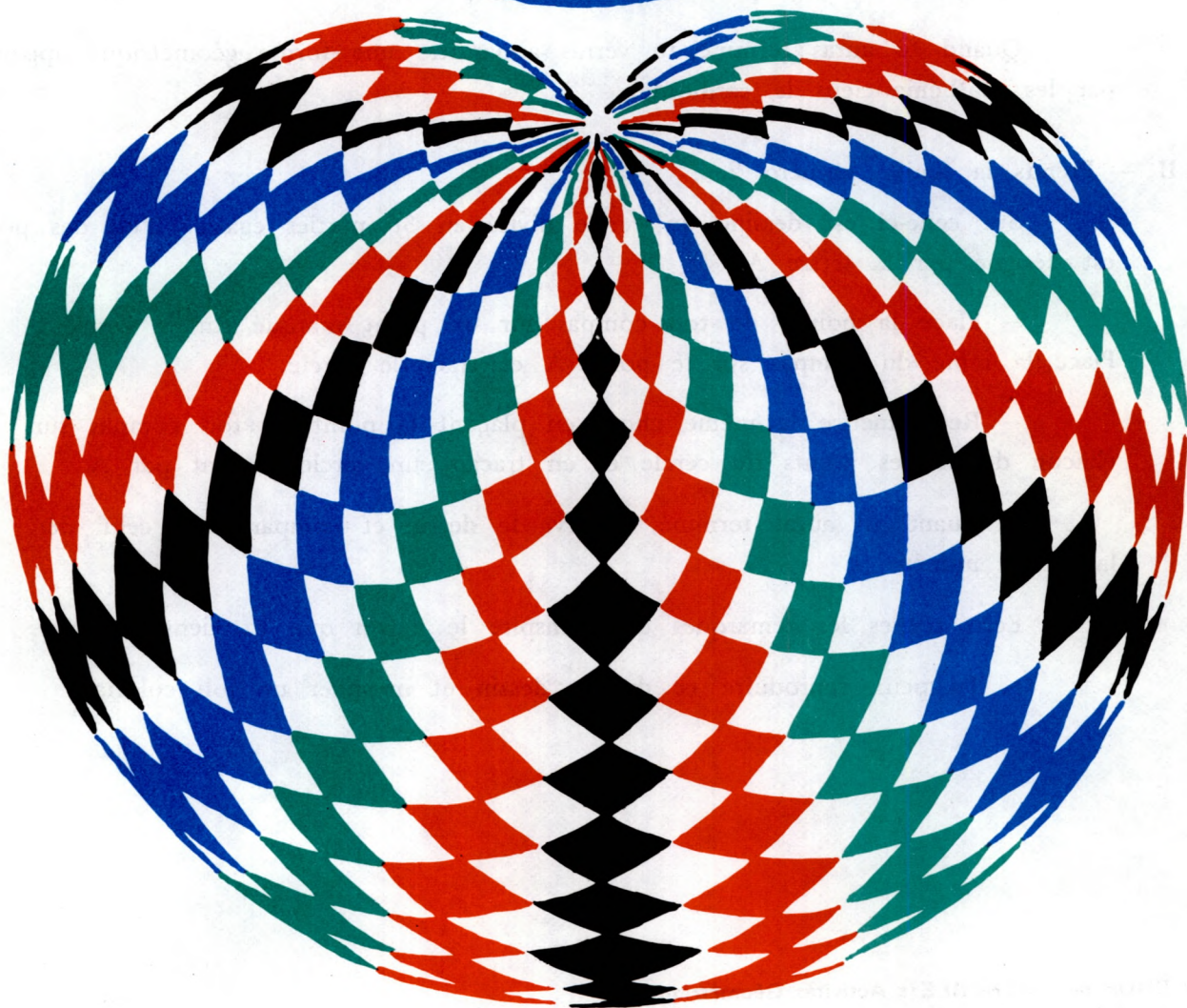
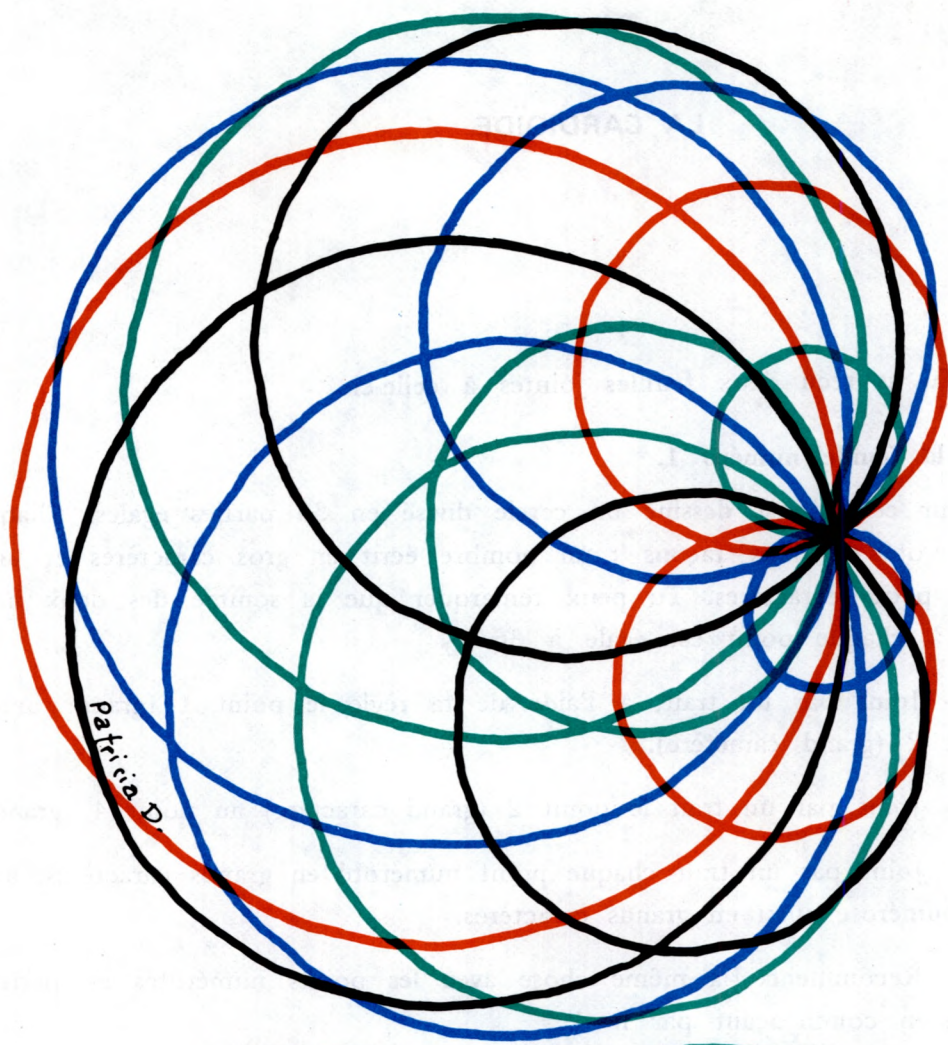
II – Prends la feuille numéro 2.

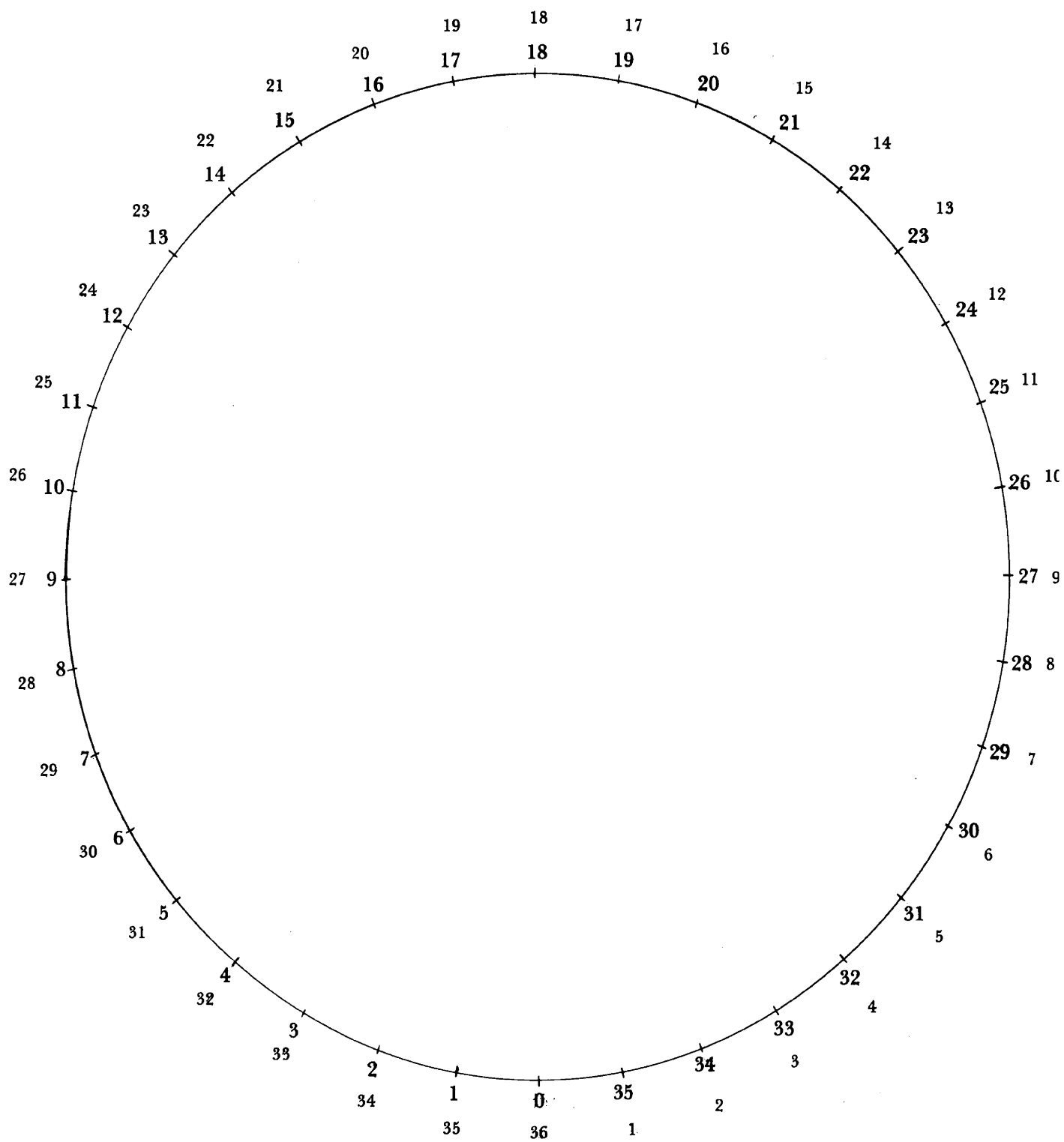
Sur celle-ci est dessiné un cercle divisé en 36 parties égales. L'un des points est désigné par la lettre A.

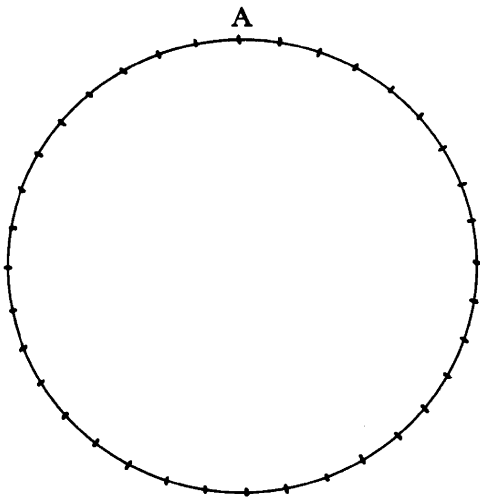
- Place la pointe de ton compas sur un point marqué sur le cercle. Place la mine du compas sur le point A et trace le cercle.
- Recommence la même chose en plaçant la pointe de ton compas sur chacun des autres points du cercle et en traçant un cercle passant par A.
- Quand tu auras terminé, observe le dessin et compare-le à celui de la feuille numéro 1.

Ecris toutes les remarques que t'inspire le dessin que tu viens de faire.

- Tu peux reproduire ce dernier dessin et imaginer un joli coloriage.







PENTAGONE

Fiche signalétique

Activité pour la classe de 6ème avec des prolongements pour la 5ème.
Le temps d'utilisation varie de 1 h à 2 h.

OBJECTIFS

- Compréhension d'un texte utilisant un vocabulaire géométrique
- Maniement des instruments de dessin.
- Application de constructions éventuellement connues : perpendiculaire, milieu, médiatrice.
- Essai de formulation d'une définition à partir d'un objet construit par les élèves.

INTERETS DE L'ACTIVITE.

- Utilisation des tracés de perpendiculaire et de médiatrice.
- Possibilité de montrer la différence entre condition nécessaire et condition suffisante : l'égalité des mesures des côtés est nécessaire pour avoir un polygone régulier, mais elle ne suffit pas (des conditions sur les angles ou sur l'inscriptibilité sont à ajouter).

PROLONGEMENTS POSSIBLES

En 6ème :

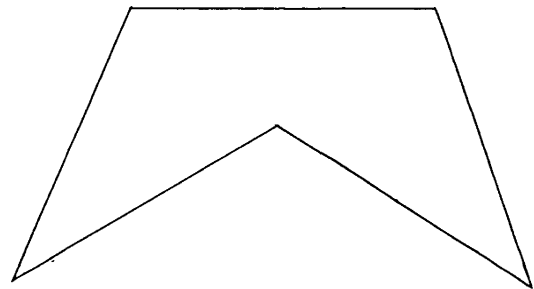
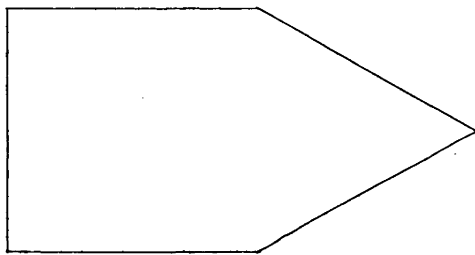
- Mesure des angles du pentagone et des angles au centre.
- Définition des polygones réguliers et relation existant entre la mesure des angles et le nombre de côtés.
- Positions respectives des cercles de la figure : sécants, tangents intérieurement ou extérieurement, concentriques.

En 5ème :

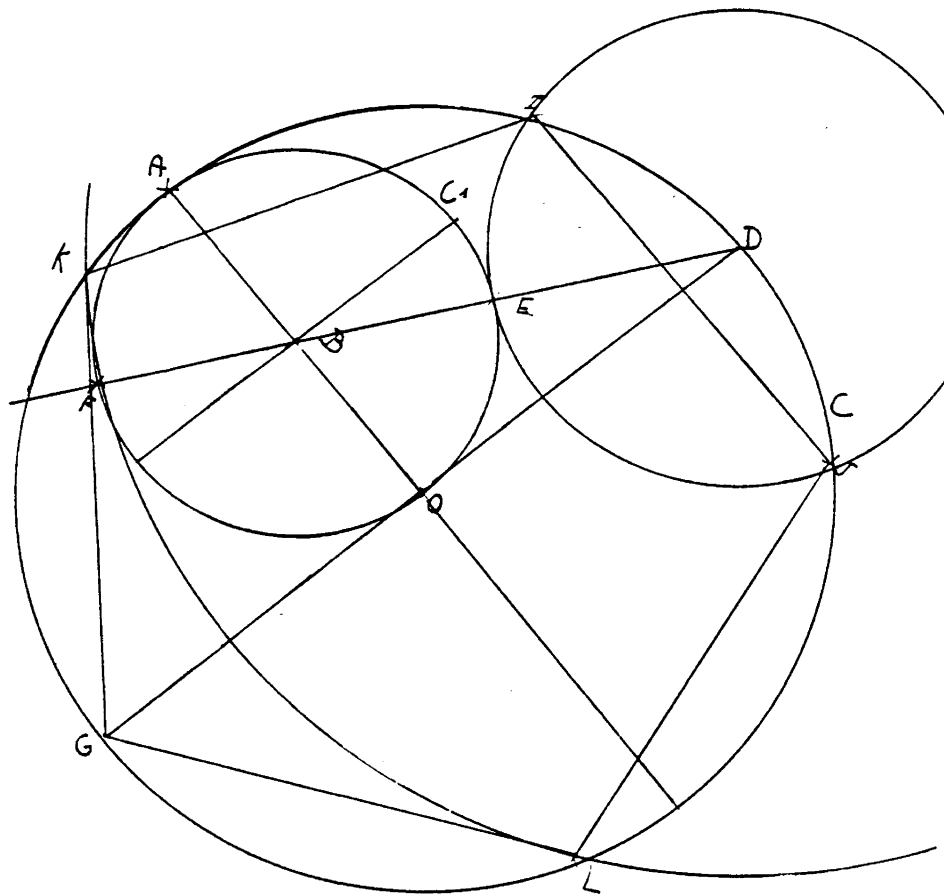
- Construction d'un dodécaèdre régulier : polyèdre dont les douze faces sont des pentagones réguliers.
- Construction des 5 solides réguliers : tétraèdre, octaèdre, icosaèdre, cube et dodécaèdre.

DETAILS PRATIQUES.

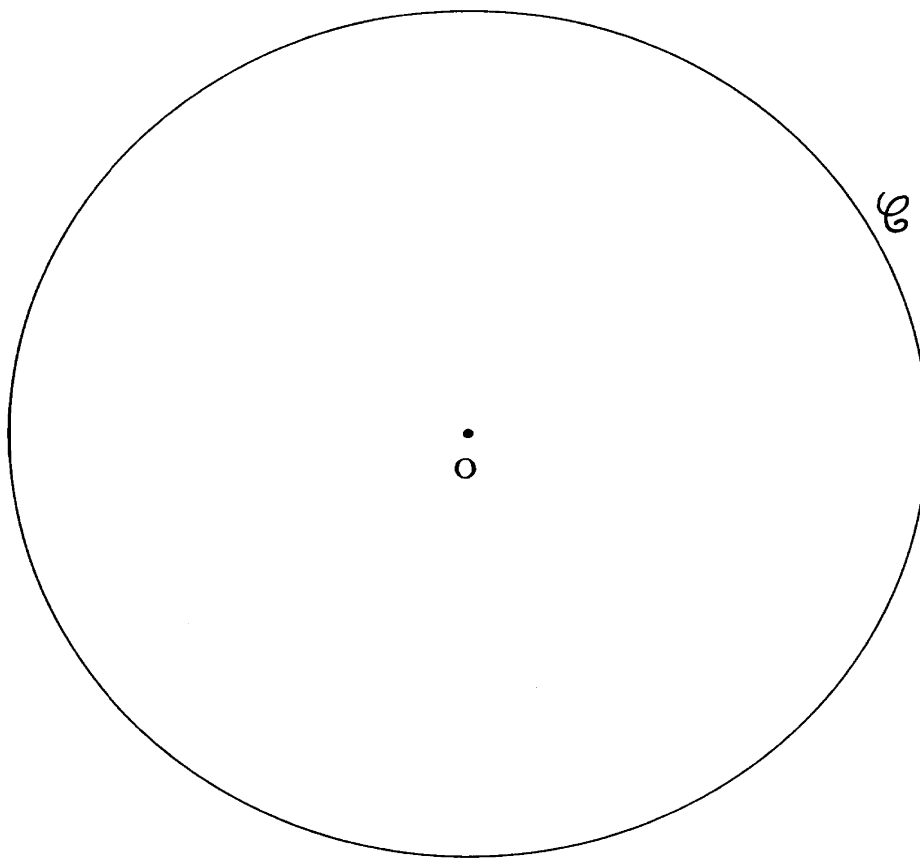
- Il faut vérifier que les diamètres perpendiculaires ne sont pas tracés au hasard.
- Les deux cercles de centre D ne sont pas toujours tracés avec précision.
- Pour la fin de l'activité, il est intéressant de faire observer des pentagones non réguliers ayant des côtés de même longueur. Voici deux exemples :



Pentagone



PENTAGONE



Voici un cercle, il s'appelle $\mathcal{C}$ et son centre s'appelle O.

- Choisis un point A sur le cercle $\mathcal{C}$ et dessine le diamètre qui passe par A.
- Trace le diamètre de $\mathcal{C}$ perpendiculaire à celui que tu viens de dessiner : il coupe le cercle en G et D. Comment as-tu fait ?
- Dessine le cercle de diamètre AO : on l'appelle $\mathcal{C}_1$. Comment as-tu fait ? Appelle B le centre du cercle $\mathcal{C}_1$.
- La droite BD coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en deux points E et F.
- Dessine le cercle de centre D qui passe par E : il coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points I et J.
- Dessine le cercle de centre D qui passe par F : il coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points K et L.
- Les points I, J, K, L et G sont les sommets d'un pentagone : dessine ses côtés.
- Le pentagone que tu viens de dessiner est-il régulier ? Comment le vérifies-tu ?
- Dessine un pentagone qui n'est pas régulier.
- Explique ce qu'est un pentagone régulier.

BONAPARTE

Fiche signalétique

Activité pour la classe de 6ème-5ème.

Son temps d'utilisation varie de 1 h à 2 h.

OBJECTIFS

- Réaliser des tracés soignés.
- Montrer qu'un même travail peut être plus ou moins difficile à réaliser, suivant les moyens et les outils dont on dispose.

INTERETS

Cette fiche donne aux élèves les moyens de retrouver le centre d'un cercle en utilisant :

1 - la méthode connue du tracé des médiatrices.

Elle permet de démontrer que le point trouvé est effectivement le centre du cercle.

2 - la méthode moins connue, attribuée à Bonaparte, qui consiste à trouver le centre, en ne se servant que du compas.

Ce n'est qu'une simple activité de tracé. Il n'est pas possible, au niveau des élèves, de faire une démonstration.

DETAILS PRATIQUES.

- L'activité peut être présentée en classe sous la forme d'une recherche.
- Elle peut être utilisée pour vérifier qu'une ligne est bien un cercle, ou pour chercher le centre et le rayon d'un arc de cercle.

La fiche numéro 1 ne peut être utilisée que si les élèves ont étudié auparavant la médiatrice.

BONAPARTE

Commentaires

UN PEU D'HISTOIRE

Le mathématicien et poète Lorenzo Mascheroni, né en 1750, écrit un ouvrage appelé «Géométrie du compas» (1795), où il s'efforce de résoudre, au moyen du compas seul, tous les problèmes dont Euclide construisait la solution par la règle et le compas.

Ce livre curieux attire, dès son apparition, l'attention du général Bonaparte, pendant la campagne d'Italie. Bonaparte, revenu en France et élu à l'Académie des Sciences en 1797 s'amuse alors, aux séances de l'Académie, à poser à ses confrères des questions, tirées de «Mascheroni», que ceux-ci n'arrivent pas à résoudre.

Aussi le problème qui consiste à déterminer, par le compas seul, le centre d'un cercle tracé, reste-t-il connu sous le nom de «Problème de Napoléon».

UN PEU DE MATHEMATIQUE.

1 — Rappel sur l'inversion.

Dans le plan affine euclidien P , on appelle inversion de pôle O et de puissance k l'application : $I : P - \{O\} \longrightarrow P - \{O\}$.

$$M \longmapsto M'$$

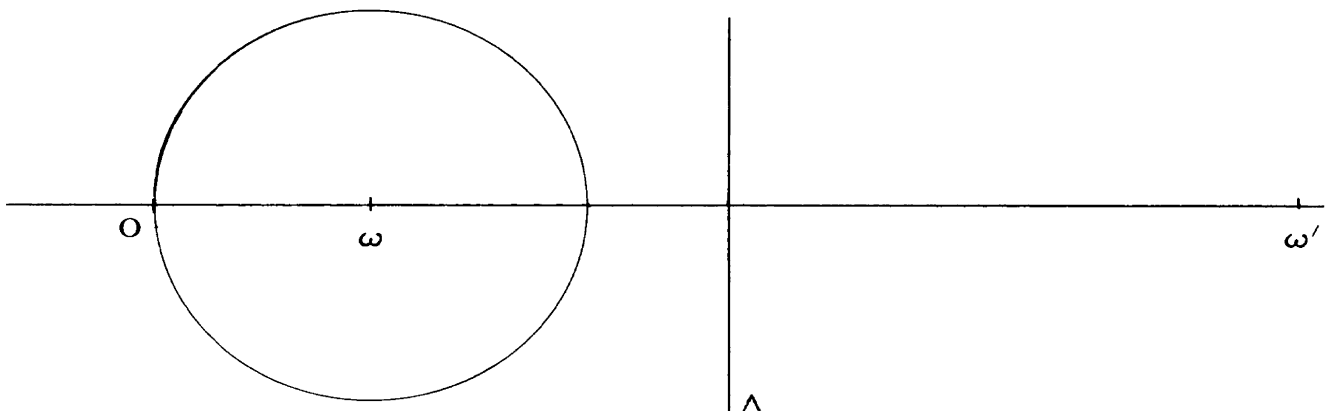
telle que O, M, M' soient alignés et que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

Quelques propriétés :

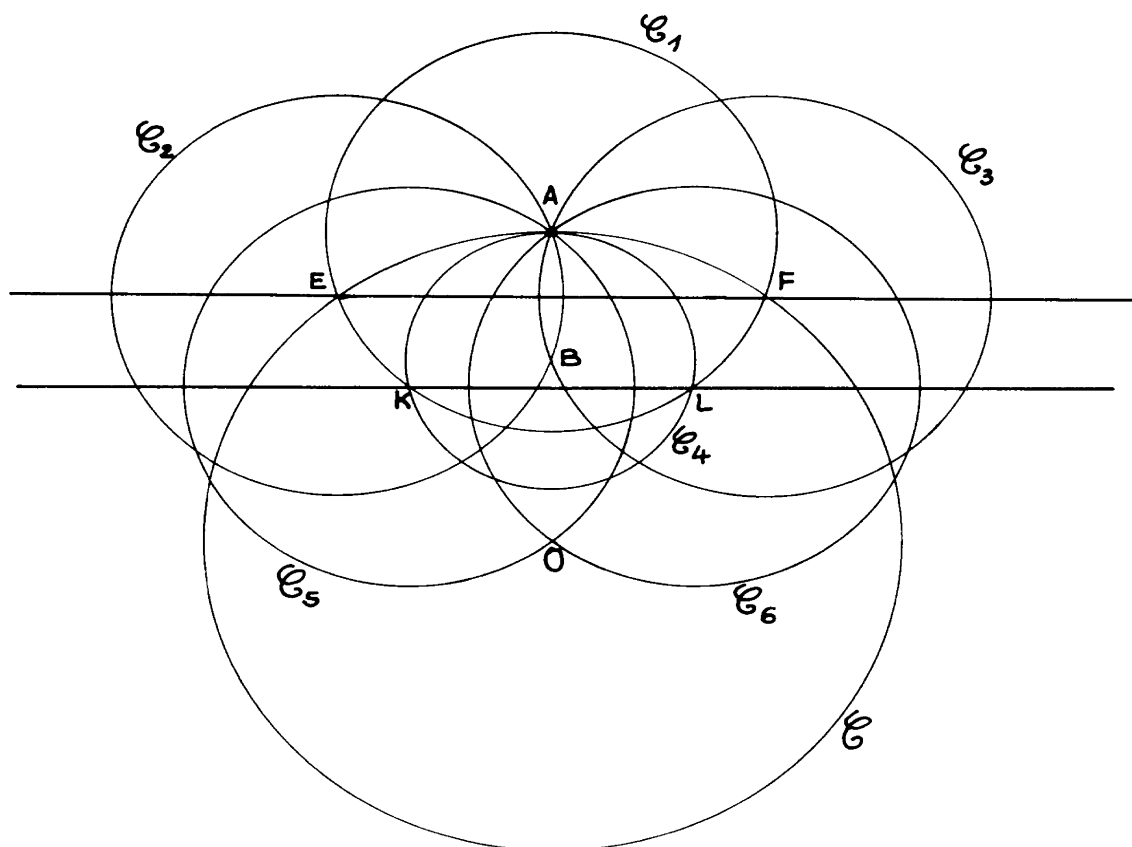
1 - L'inversion est involutive : $I \circ I = \text{id}_{P - \{O\}}$ ou $I = I^{-1}$.

2 - L'inversion de pôle O et de puissance R^2 conserve, point par point, le cercle de centre O et de rayon R .

3 - Un cercle passant par le pôle O a pour image une droite Δ , perpendiculaire au diamètre passant par O . Le centre ω du cercle est transformé en ω' , symétrique du pôle O , par rapport à Δ .



2 – Démonstration du «problème de Napoléon».



On considère l'inversion de pôle A et de puissance AE^2 .

- Le cercle $\mathcal{C}_1$ est conservé (Propriété 2)

En particulier l'image de E est E et l'image de F est F.

- Le cercle $\mathcal{C}$ passe par le pôle A. Son image est une droite (Propriété 3). Comme $\mathcal{C}$ passait par E et F, son image est la droite EF.

- Le centre O de $\mathcal{C}$ a pour image B, symétrique de A par rapport à la droite EF (Propriété 3).

- L et K sont sur le cercle $\mathcal{C}_1$, donc sont invariants.

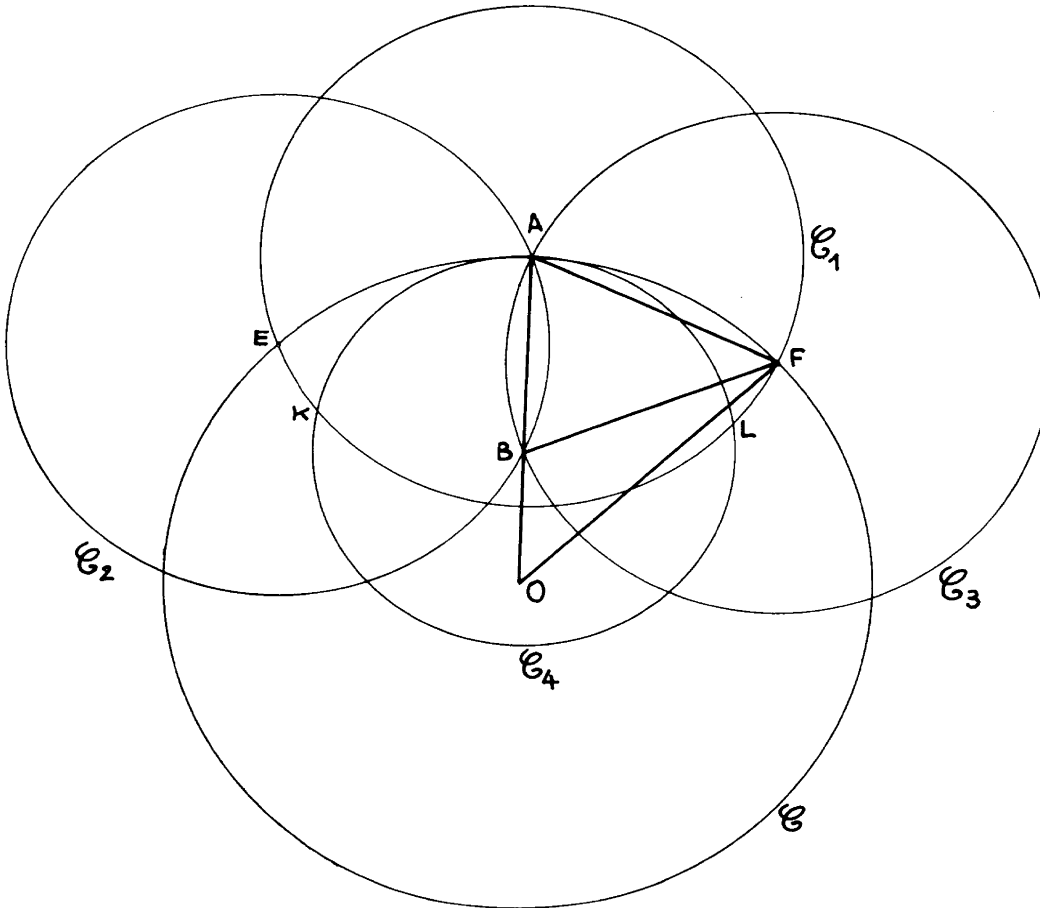
Le cercle $\mathcal{C}_4$, passant par le pôle A et les points L et K, a pour image la droite LK (Propriété 3).

- O a pour image B, donc B a pour image O (Propriété 1).

Or, d'après la propriété 3, B a pour image le symétrique de A par rapport à la droite LK, soit l'intersection des cercles $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$.

3 – Conditions pour la construction de la figure.

Dans la fiche numéro 2, de «Bonaparte», une série d'instructions est donnée, mais à aucun moment n'est posé le problème d'existence des points. Nous allons donc reprendre le problème et voir dans quels cas celui-ci est faisable.



On sait que :

- $\mathcal{C}$: cercle de centre O , de rayon R
- $\mathcal{C}_1$: cercle de centre A , de rayon a
- $\mathcal{C}_2$: cercle de centre E , de rayon a
- $\mathcal{C}_3$: cercle de centre F , de rayon a
- $\mathcal{C}_4$: cercle de centre B , passant par A .

1 - Le cercle $\mathcal{C}_1$, de rayon a , coupe le cercle $\mathcal{C}$, de rayon R , à condition que : $a < 2R$

2 - Les points E , A , F n'étant pas alignés, les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, qui ont un point commun A et qui ne sont pas tangents, auront un autre point commun B .

3 - Le cercle $\mathcal{C}_4$, de centre B, passant par A, ne coupe $\mathcal{C}_1$ qu'à la condition que $2AB > a$.

Les triangles OAF et FBA sont isocèles et ont l'angle A commun. Leurs angles à la base étant égaux, ils sont semblables.

$$\text{D'où } \frac{AB}{AF} = \frac{AF}{OF} \quad \text{ou} \quad AB = \frac{AF^2}{OF} = \frac{a^2}{R}.$$

La condition : $2 AB > a$ devient donc $2 \frac{a^2}{R} > a$ ou $a > \frac{R}{2}$.

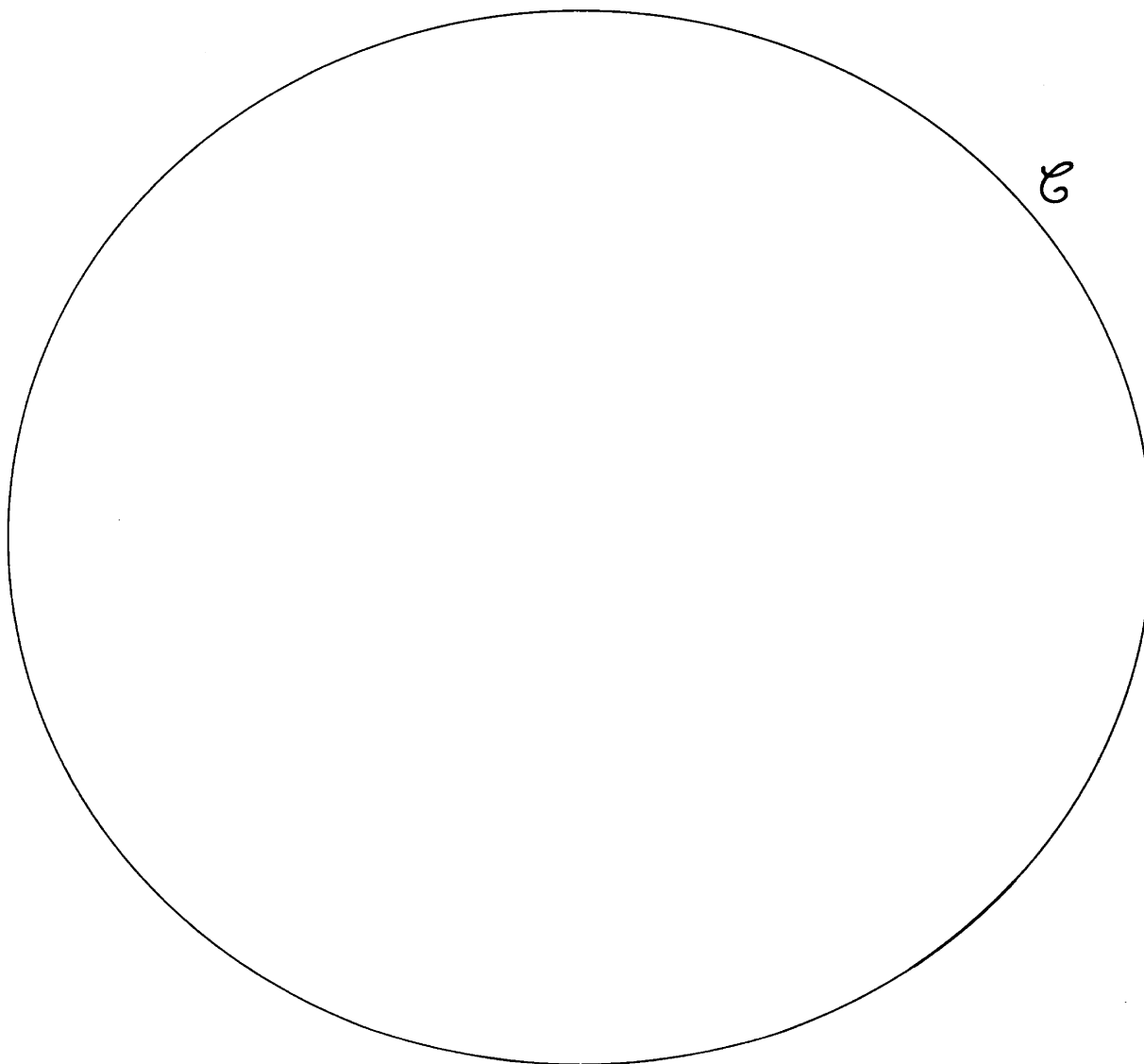
(C'est pour cette raison, que dans le numéro 1 de la fiche, nous avons demandé aux élèves de tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ avec un rayon supérieur à 5 cm).

4 - Les cercles $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$, ayant le point A commun sont sécants.

En résumé, la construction n'est possible que si

$$\frac{R}{2} < a < 2R.$$

BONAPARTE
Fiche numéro 1



Sur cette feuille est dessiné un cercle $\mathcal{C}$. On ne connaît pas son centre.

- Choisis 3 points distincts sur le cercle $\mathcal{C}$: appelle-les A, B et C.
- Dessine la médiatrice de AB et celle de BC. Ces deux droites se coupent au point P.
- Trace la médiatrice de AC. Où passe-t-elle ? Pouvait-on le prévoir ?
- Que peut-on dire du point P ? Explique.

BONAPARTE

Fiche numéro 2

Sur la feuille de dessin, un cercle $\mathcal{C}$ est dessiné. Son centre n'est pas connu : on veut le trouver en ne se servant que du compas.

Ce problème, connu sous le nom de «Problème de Napoléon», est résolu ici.

Cette fiche t'indique une construction du centre du cercle, en n'utilisant que le compas.

1 — Choisis un point A sur le cercle $\mathcal{C}$. Dessine un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon supérieur à 5 cm.

Le cercle $\mathcal{C}_1$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points E et F.

2 — Dessine les cercles : $\mathcal{C}_2$: de centre E, qui passe par A.

$\mathcal{C}_3$: de centre F, qui passe par A.

Les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont deux points d'intersection : A et B.

3 — Dessine le cercle $\mathcal{C}_4$ de centre B, qui passe par A.

Il coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en K et L.

4 — Dessine les cercles : $\mathcal{C}_5$: de centre K, qui passe par A.

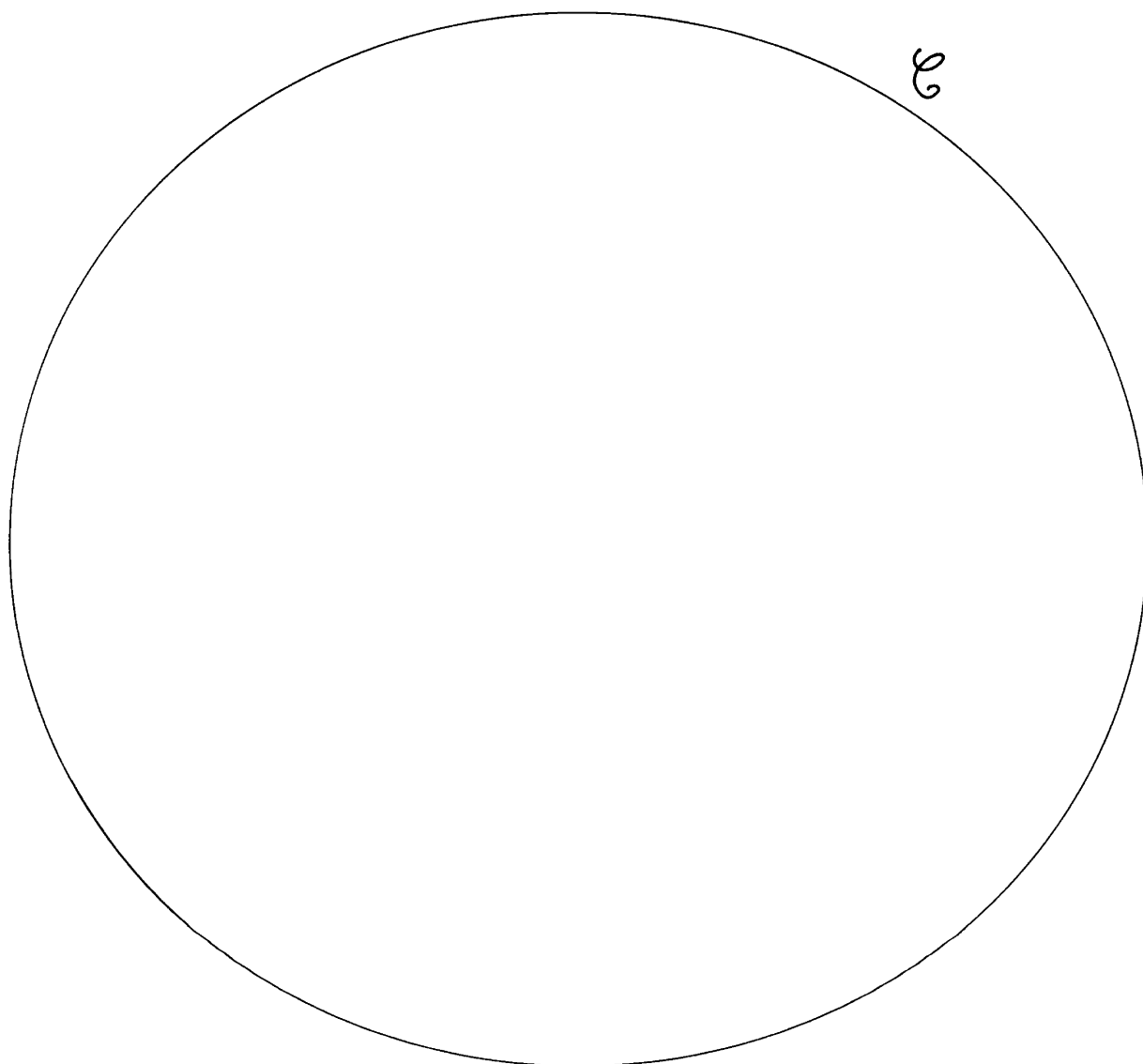
$\mathcal{C}_6$: de centre L, qui passe par A.

Les cercles $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$ se coupent aux points A et O.

5 — Vérifie que O est le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Explique comment tu fais.

BONAPARTE
Feuille de dessin



CONSTRUCTIONS AVEC PLIAGES

Fiche signalétique

Cette activité a été présentée en classe de 6ème. Son temps d'utilisation a été approximativement de 2 heures.

OBJECTIFS.

- * Exécuter un travail avec soin et dextérité.
- * Mettre en évidence certaines propriétés des coniques à partir du moyen de construction utilisé.

INTERETS DE L'ACTIVITE.

- * Réviser des notions acquises (médiatrice, bissectrice)
- * Utiliser le rapporteur
- * Habituer l'élève à la lecture attentive d'un énoncé.
- * Découvrir un vocabulaire nouveau correspondant à des objets ou événements de la vie courante : ellipse, hyperbole, parabole (cf. commentaires).

DETAILS PRATIQUES

Activité préliminaire.

— Pour la division du cercle en 32 parties égales, il sera utile d'avoir traité auparavant la fiche «médiatrice d'un segment» (pour la division des arcs en 2 arcs égaux).

— On pourrait également proposer aux élèves la division d'un cercle en 36 parties égales, cette activité supposant connue l'utilisation du rapporteur.

On peut laisser les élèves trouver seuls une méthode pour la division du cercle, puis faire une récapitulation collective.

Pour la division d'un cercle en 36 parties égales, on pourra faire remarquer que le report de 36 fois 10° est une mauvaise méthode car les erreurs s'ajoutent.

Suggestion.

- 1er temps : on propose l'activité préliminaire à toute la classe.
- 2ème temps : on propose l'activité «ellipse» à un groupe de la classe, et l'activité «hyperbole» à un autre groupe.
- 3ème temps : à la fin du travail, chaque groupe explique à l'autre sa construction.
- 4ème temps : la construction «parabole» est proposée à toute la classe.

CONSTRUCTIONS AVEC PLIAGES

Commentaires

* La première manipulation comporte plusieurs risques d'échec : faux plis, incompréhension de l'énoncé (au lieu de marquer les plis obtenus après avoir fait coïncider P avec A_1 , puis P avec A_2 , ... etc ..., plusieurs élèves ont marqué les plis PA_1 , PA_2 , ... etc ...), qui nécessitent la reprise totale du travail.

Par la suite, les élèves comprennent assez vite que les différents points du cercle $\mathcal{C}$ ou de la droite $\mathcal{D}$ doivent coïncider exactement avec le point P, et que la feuille de papier calque ne doit avoir aucun faux pli.

* Les questions posées par les élèves à propos du vocabulaire nouveau utilisé dans cette activité (ellipse, hyperbole, parabole) peuvent être à l'origine d'un travail de recherche effectué par différents groupes dans la classe.

Quelques rappels.

Ellipse : trajectoire des planètes ou des comètes ; salles à voûte ellipsoïdale (pour avoir une bonne acoustique) : Un personnage en P, un auditeur en A ; si P parle tout bas, A l'entend très bien, même si A et P sont éloignés ... Une remarque qui a provoqué l'étonnement de certains : «un œuf n'est pas ellipsoïdal».

Hyperbole : trajectoire des comètes ; bords des toits de certains édifices modernes, ...

Parabole : trajectoire des comètes ; trajectoire des projectiles (en balistique) ; miroirs paraboliques (fours solaires), réflecteurs paraboliques pour certaines prises de son, le micro étant au foyer, ...

Exemple d'application en optique en classe de 4ème (voir dessin joint).

Pourquoi l'ellipse est-elle intéressante, du point de vue optique, et acoustique ?

Dans la construction avec pliages, l'ellipse apparaît comme l'enveloppe des droites d_i . Si on assimile chaque droite d_i à un miroir plan, montrons qu'un rayon incident issu de A est réfléchi en passant par P.

Assimilons donc chaque tangente à un miroir plan que l'on promènerait autour de l'ellipse (analogie avec le calcul différentiel : au voisinage d'un point l'ellipse est assimilée au plan tangent).

Considérons le miroir plan constitué par d_1 : tangente à l'ellipse en M, et un rayon lumineux incident AM. S'il n'y avait pas de miroir, le trajet de ce rayon se ferait suivant AA_1 (ligne droite, correspondant au trajet minimum). La présence du miroir d_1 donne un rayon réfléchi, symétrique de MA_1 par rapport au miroir. Le rayon réfléchi est MP (P et A_1 étant symétriques par rapport à d_1 d'après la construction). Appelons n_1 la normale en M au miroir.

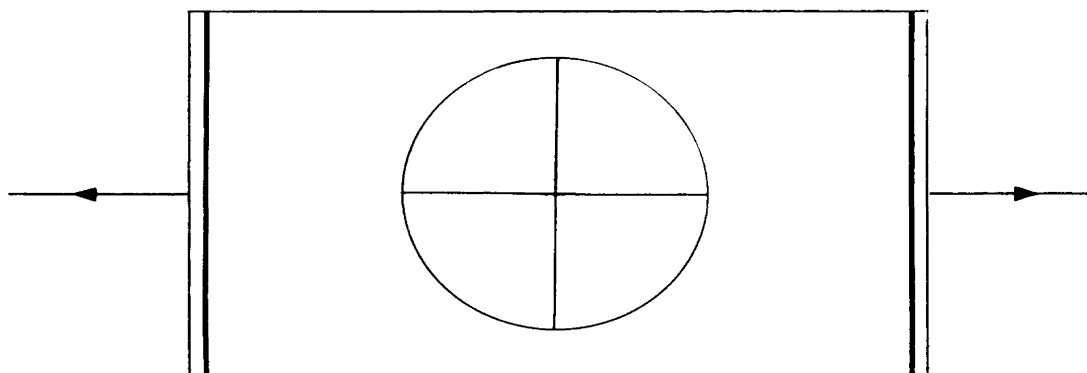
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M}_4 = \widehat{M}_3 \quad (\text{symétriques par rapport à } d_1) \\ \widehat{M}_5 = \widehat{M}_4 \quad (\text{opposés par le sommet}) \end{array} \right\} \text{ donc } \widehat{M}_3 = \widehat{M}_5$$

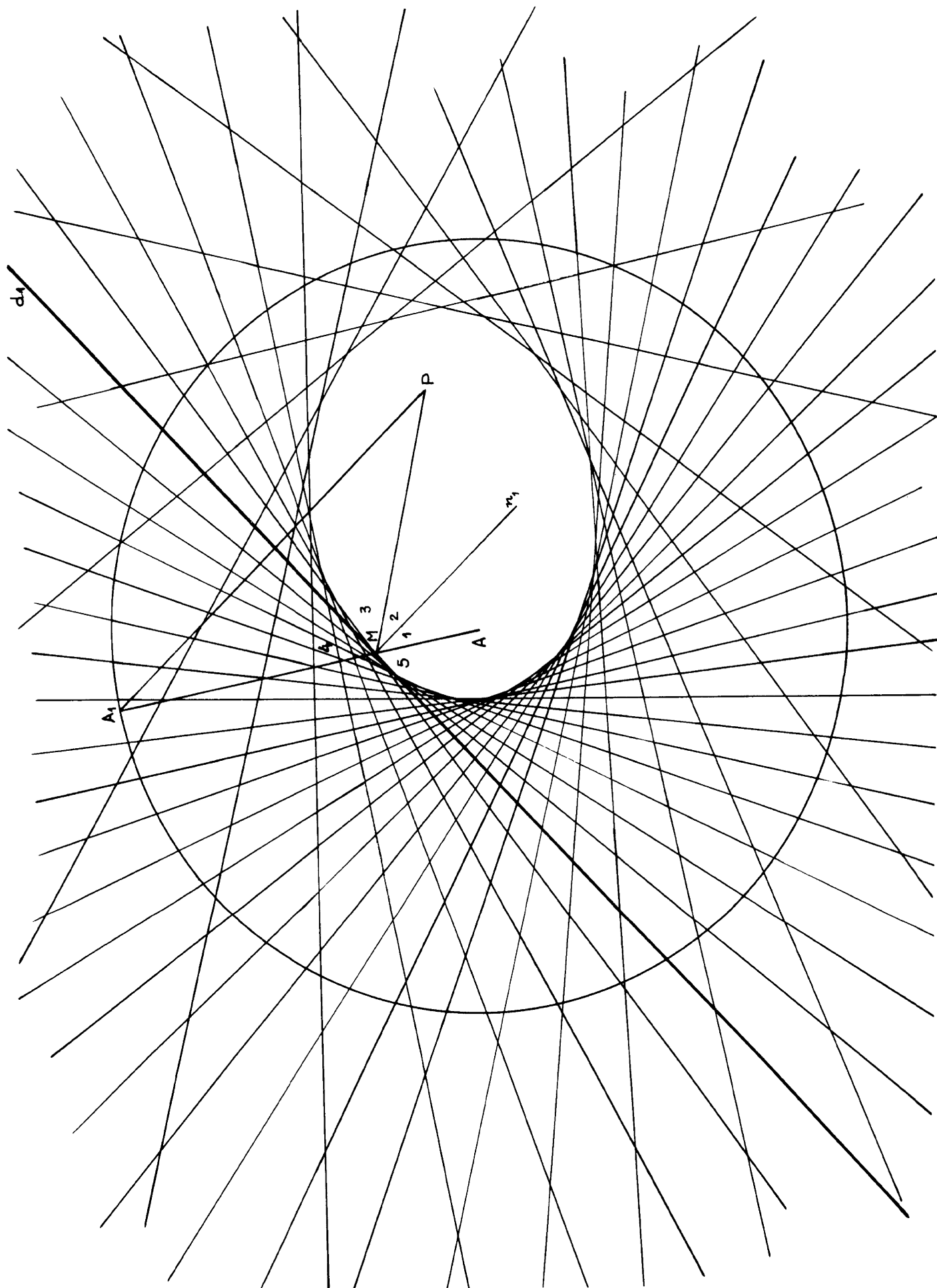
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M}_5 + \widehat{M}_1 = 1 \text{ droit} \\ \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 1 \text{ droit} \\ \widehat{M}_5 = \widehat{M}_3 \end{array} \right\} \text{ donc } \widehat{M}_2 = \widehat{M}_1$$

Conclusion : l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Prolongements possibles.

- * Faire construire la médiatrice d'un segment PA_i et vérifier qu'elle coïncide avec un pli du papier calque.
- * Rechercher des symétries dans les figures obtenues, par pliages.
- * Expérience à réaliser en classe avec une lampe de chevet dont l'abat-jour est cylindrique : on envoie les rayons lumineux perpendiculairement à la surface d'un mur : on obtient l'image d'un cercle. On incline petit à petit la lampe. On obtient successivement les images d'une ellipse, d'une parabole, d'une hyperbole (lorsque l'abat-jour est parallèle au mur).
- * Activité simple montrant comment obtenir une ellipse à partir d'un cercle (par affinité orthogonale) : sur une bande de tissu élastique, on dessine un cercle et 2 diamètres perpendiculaires. On étire la bande de tissu suivant l'un des diamètres. Une fois ces courbes tracées, on peut signaler différents domaines dans lesquels ces courbes interviennent.





CONSTRUCTIONS AVEC PLIAGES **1**

I – ACTIVITE PRELIMINAIRE.

Dessine un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 8 cm. Tu vas diviser ce cercle en 32 parties égales. Sur ta feuille, explique comment tu fais.

II – ELLIPSE.

Sur une feuille de papier calque, dessine un cercle $\mathcal{C}$ de centre A, de rayon 8 cm. Dessine un point P tel que la distance de A à P soit 5 cm. Divise ce cercle en 32 parties égales. Tu obtiens ainsi 32 points sur le cercle $\mathcal{C}$. Appelle ces points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}, A_{32}$.

En soulevant la feuille de papier calque, fais coïncider le point P avec le point A_1 , puis marque le pli avec le papier calque.

Recommence en faisant coïncider le point P avec le point A_2 . Lorsque P est sur A_2 , marque le pli avec le papier calque.

Recommence en faisant coïncider le point P avec le point A_3 , puis le point A_4 , ... puis le point A_{32} .

Ecris toutes les remarques que tu as envie de faire.

La forme que tu viens de découvrir est une ellipse.

CONSTRUCTIONS AVEC PLIAGES 2

I – ACTIVITE PRELIMINAIRE.

Dessine un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 8 cm. Tu vas diviser ce cercle en 32 parties égales. Sur ta feuille, explique comment tu fais.

II – HYPERBOLE.

Sur une feuille de papier calque, dessine un cercle $\mathcal{C}$ de centre A, de rayon 4 cm. Dessine un point P tel que la distance de A à P soit 6 cm. Divise le cercle en 32 parties égales. Tu obtiens ainsi 32 points sur le cercle $\mathcal{C}$. Tu appelleras ces points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}, A_{32}$.

En soulevant la feuille de papier, fais coïncider le point P avec le point A_1 , puis marque le pli avec le papier calque.

Fais coïncider le point P avec le point A_2 , puis marque le pli avec le papier calque.

Recommence en faisant coïncider le point P avec le point A_3 , puis le point A_4 , ... puis le point A_{32} .

Ecris toutes les remarques que tu as envie de faire.

La forme que tu viens de découvrir est une hyperbole.

CONSTRUCTIONS AVEC PLIAGES 3

PARABOLE

Prends une feuille de papier calque. Vers le centre de la feuille, marque un point P.

Dessine une droite $\mathcal{D}$, parallèle au grand côté de la feuille, à environ 7 cm du bord. Cette droite ne passe pas par P. Prends ton double décimètre, et, tous les centimètres, marque sur la droite $\mathcal{D}$ des points régulièrement espacés. Tu appelleras ces points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , ... etc

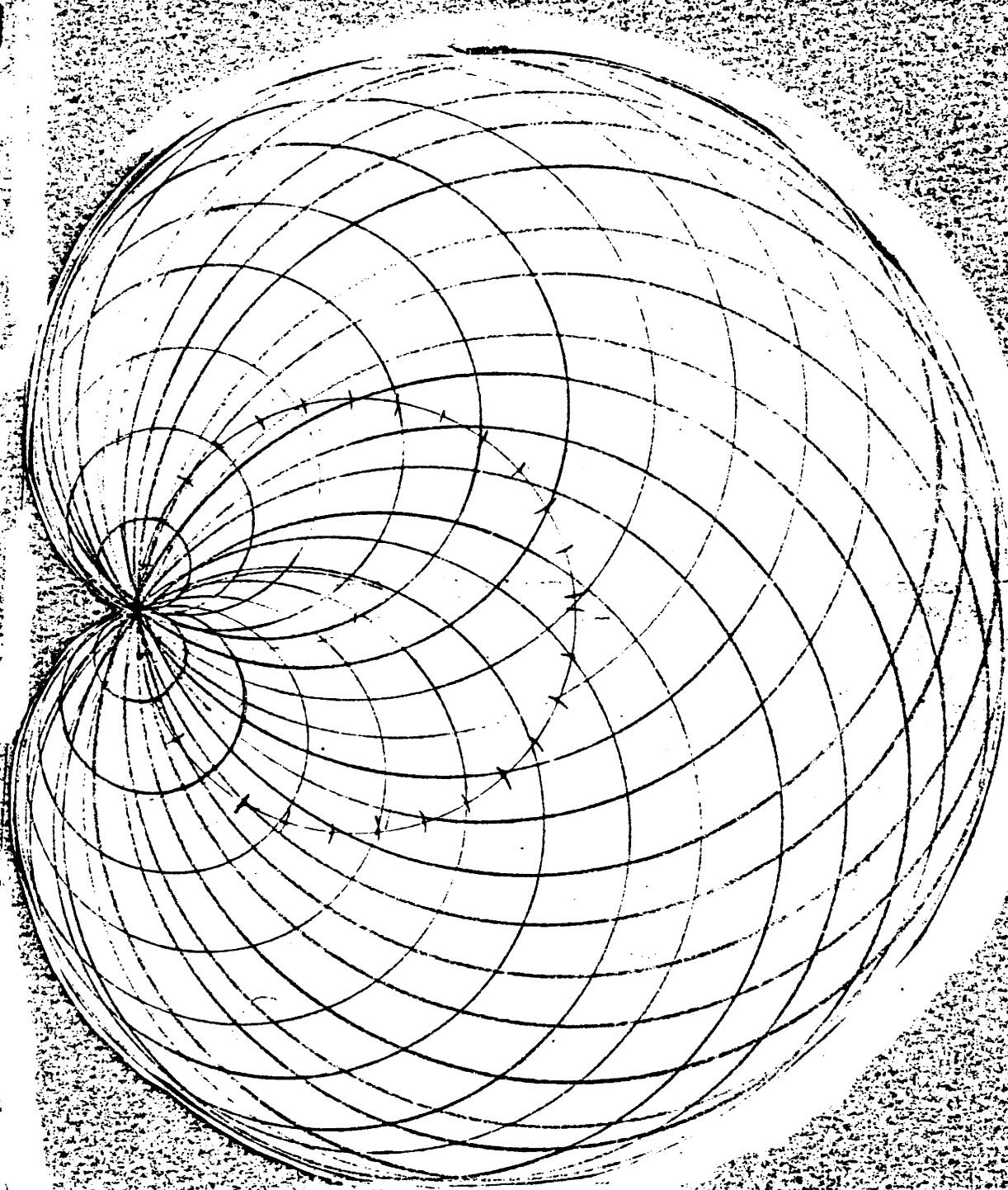
En soulevant la feuille de papier, fais coïncider le point P avec A_0 , puis marque le pli avec le papier calque.

Recommence ainsi avec tous les points (A_1 , A_2 , ... etc ...) que tu as marqués sur la droite $\mathcal{D}$.

Ecris toutes les remarques que tu as envie de faire.

La figure que tu viens de découvrir est **une parabole**.

LAFARDIOIDE



Chapitre A

AIRES

- AIRES
- AIRE-PERIMETRE

AIRES

Fiche signalétique

Activité pour la classe de 6ème.

Le temps d'utilisation a été très variable suivant les classes (au minimum : 6 heures en classe).

OBJECTIF

Faire apparaître la notion d'aire comme comparaison d'une surface à des surfaces de référence et non comme le résultat d'une formule ; cela doit permettre de lutter contre ce genre de réponse :

«l'aire d'un losange de côté 4 cm est 16 cm^2 »

«l'aire d'un parallélogramme de côtés 4 cm et 8 cm est 32 cm^2 ou ... 24 cm^2 ».

INTERETS DE L'ACTIVITE

- * Cette activité introduit progressivement la notion d'aire en mettant l'accent sur deux points importants :

- comparaison de surfaces et utilisation de pavés unitaires.

- * Cette activité aborde (I et II) une notion qui est très largement reprise dans l'activité «aire - périmètre» : «l'indépendance» de l'aire et du périmètre.

- * Cette activité conduit à utiliser des fractions, ce qui ne peut que favoriser la compréhension des nombres décimaux.

- * Elle permet une réflexion sur la proportionnalité en donnant l'exemple d'une fonction non linéaire (lorsqu'on double le côté d'un carré, l'aire de ce carré ne double pas).

PROLONGEMENTS POSSIBLES

- * Aires de polygones : rectangle, parallélogramme, triangle... aire du disque

- * Rectangles ayant même aire : recherche des deux dimensions et du périmètre correspondant (1)

- * Rectangles ayant même périmètre : recherche des deux dimensions et de l'aire correspondante (1)

- * Utilisation des unités d'aires usuelles (m^2 , ...) en liaison avec les décimaux.

DETAIL PRATIQUE

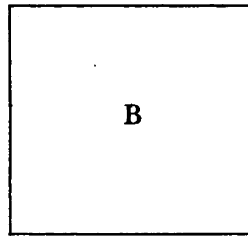
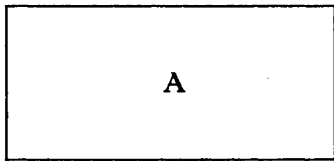
Les parties I et II ont montré qu'un certain nombre d'élèves comparent les aires en utilisant les périmètres. L'activité «aire-périmètre» essaie de résoudre cette difficulté.

(1) Voir activité «aire-périmètre»

AIRES

- I Jacques, qui est gourmand, a le choix entre deux gâteaux fabriqués de la même façon, mais de formes différentes. Il est très embarrassé !... Aide-le à choisir, en expliquant chaque fois comment tu fais.

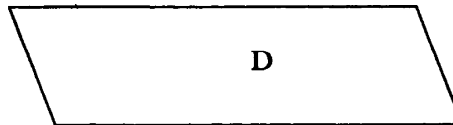
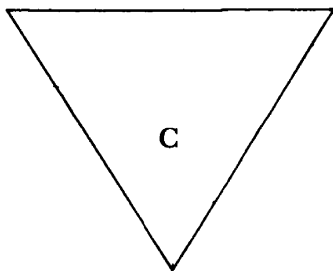
Que choisir ? A ou B ?



Je choisis le gâteau

J'explique ce que j'ai fait pour me décider :

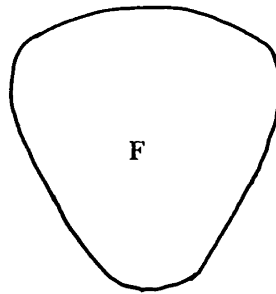
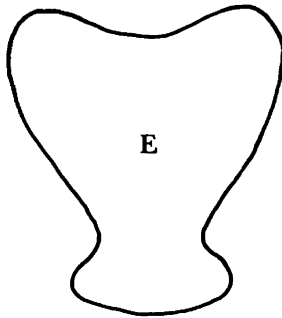
Que choisir ? C ou D ?



Je choisis le gâteau

J'explique ce que j'ai fait pour me décider :

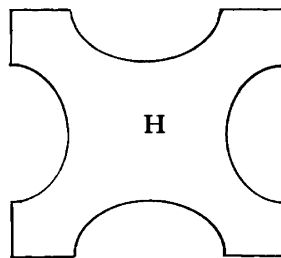
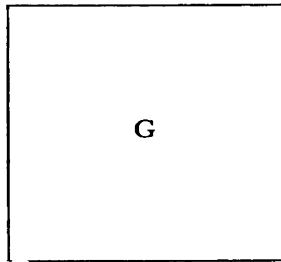
Que choisir ? E ou F ?



Je choisis le gâteau

J'explique ce que j'ai fait pour me décider :

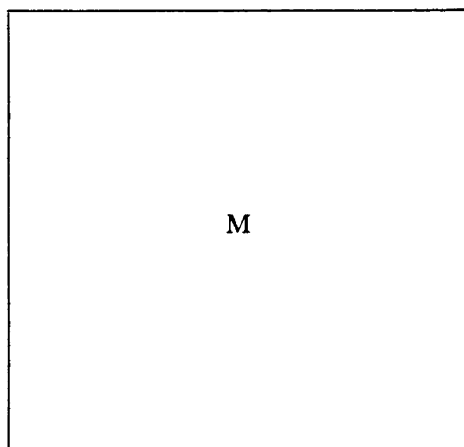
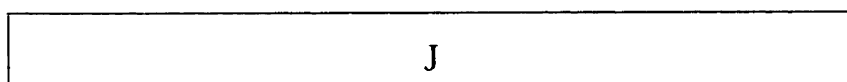
Que choisir ? G ou H ?



Je choisis le gâteau ...

J'explique ce que j'ai fait pour me décider :

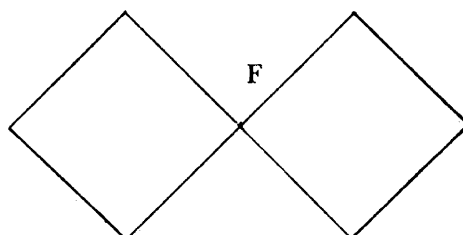
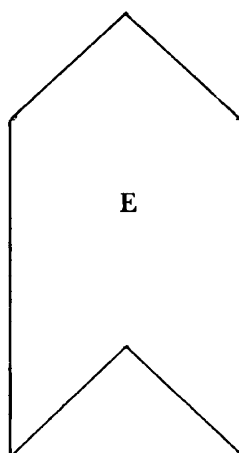
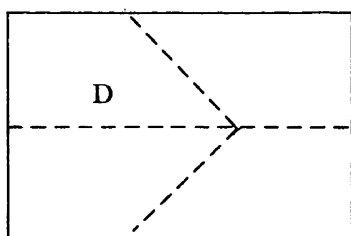
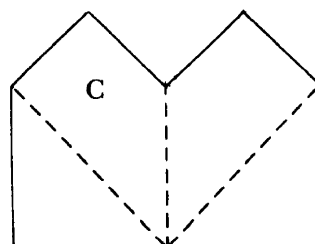
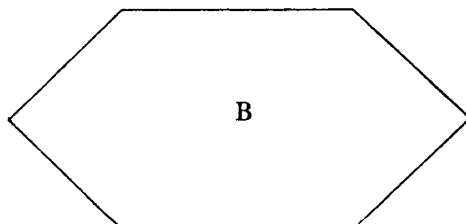
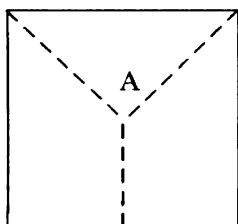
II Voici deux formes J et M :



Mesure en centimètres, le tour de chacune de ces formes. *Que trouves-tu ?*
La longueur du tour s'appelle PERIMETRE.

Reproduis la forme J sur un papier. Découpe-la en morceaux que tu vas coller sur M, pour essayer de la recouvrir. *Que remarques-tu ?*

III Observe les figures suivantes :



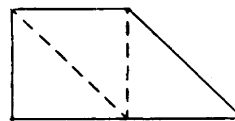
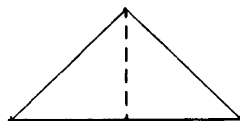
Chacune de ces figures peut être recouverte exactement à l'aide de copies des formes a et b :



Nous avons déjà dessiné le recouvrement des figures A, C et D (page 3). Sur la feuille annexe, tu disposes de formes a et de formes b. Découpe-les. Recouvre les figures.

Essaye de ranger les figures A, B, C, D, E, F suivant leur grandeur. Explique ton rangement. Si tu as des difficultés, note tes remarques sur ton cahier.

Zaïus a eu des difficultés pour ranger les figures D et F. Il a montré son travail à son ami Hector qui était venu le voir. Hector a fait le dessin suivant :



Zaïus a tout de suite complété son rangement. *Pourquoi ?*

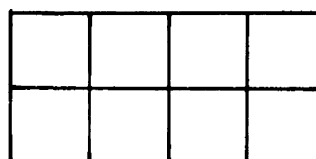
En utilisant la remarque d'Hector, peux-tu évaluer la grandeur des figures A, B, C, D, E et F, de façon à pouvoir les comparer ?

IV

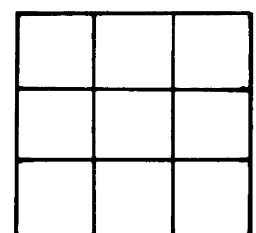
Voici quelques formes faites avec des pavés différents. Dans chaque cas, dis laquelle est la plus grande et explique pourquoi

* L ou N ?

Pourquoi ?



L

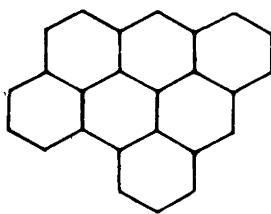


N

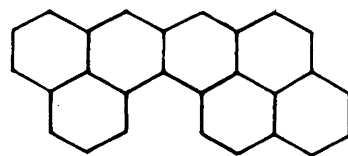
Compare avec les dessins A et B de la page 1.

* P ou M ?

Pourquoi ?



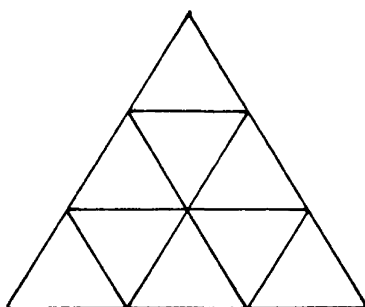
P



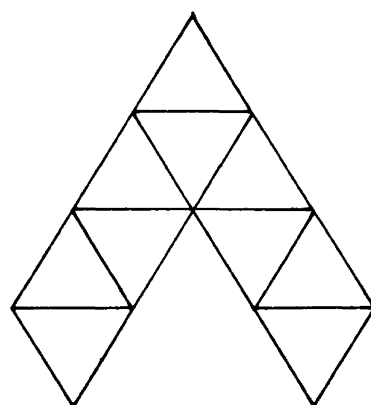
M

* V ou W ?

Pourquoi ?



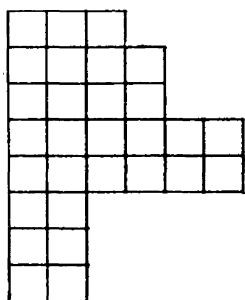
V



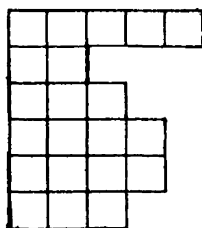
W

* X, Y ou Z ?

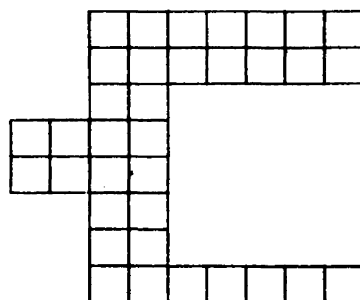
Pourquoi ?



X



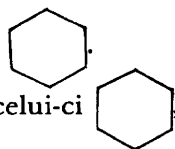
Y



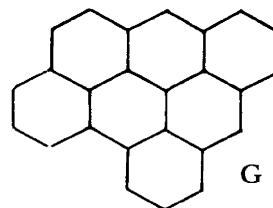
Z

V Pour recouvrir la figure G

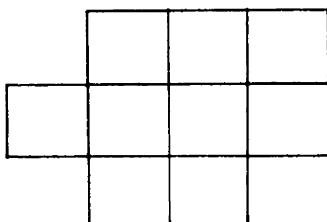
il faut 7 pavés comme celui-ci



Le pavé unitaire étant celui-ci nous dirons que l'AIRE de la forme G est 7.



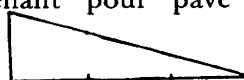
1 Voici une forme H :



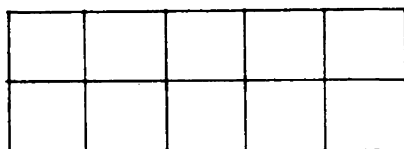
En prenant pour pavé unitaire celui-ci trouve l'aire de la forme H.



En prenant pour pavé unitaire celui-là , trouve l'aire de la forme H.



2 Voici une forme K :



Trouve un pavé unitaire, pour que l'aire de la forme K soit égale à 2.

Trouve un pavé unitaire, pour que l'aire de la forme K soit égale à 5.

3 Complète :

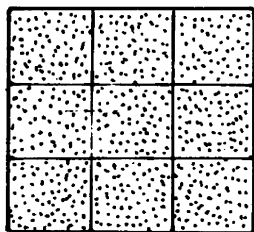
		PÂVE UNITAIRE	AIRE de R	AIRE de S	Quelle forme est la plus grande ?
 R	 S				

		PAVE UNITAIRE	AIRE de T	AIRE de U	Quelle forme est la plus grande ?
 T	 U				

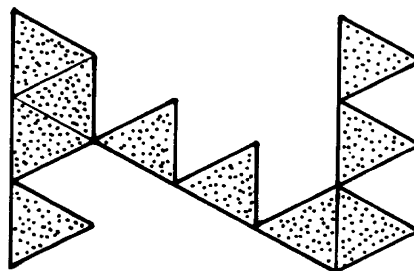
4 Basile dit que l'aire de la forme R est 6, celle de la forme U est 10. DONC, dit-il, la forme U est plus grande que la forme R.

- Est-il vrai que U est plus grande que R ?
- Que penses-tu de l'explication donnée par Basile ?

5 Voici deux formes Y et Z :



Y

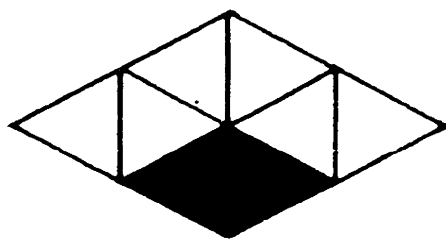


Z

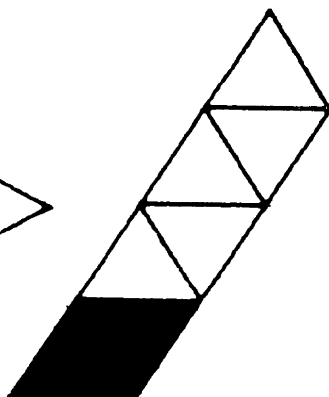
Peux-tu dire laquelle est la plus grande ?

Explique ce que tu fais. Attention ce travail est délicat. Fais-le avec beaucoup de soin ; tu seras ainsi plus sûr de ta réponse.

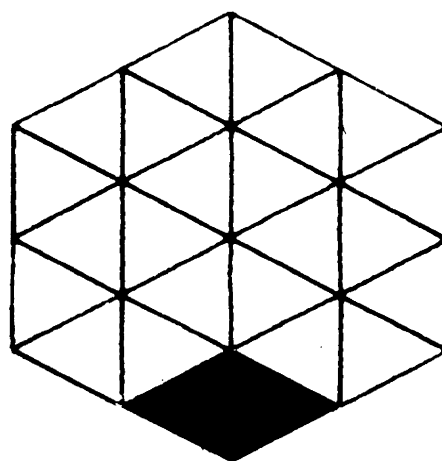
6 Pour chacune des formes M, N, P, le pavé unitaire est le pavé noir.
Ecris à côté de chaque forme son aire.



M



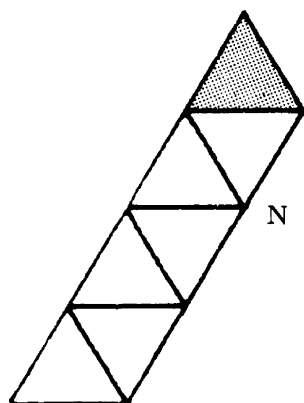
N



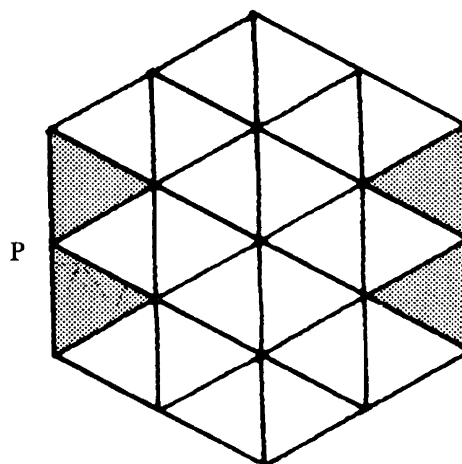
P

Si tu ne sais pas répondre, ou si tu doutes de ta réponse, écris les questions que tu te poses.

A la page précédente, tu as dû trouver 3,5 pour l'aire de N et 12 pour l'aire de P.



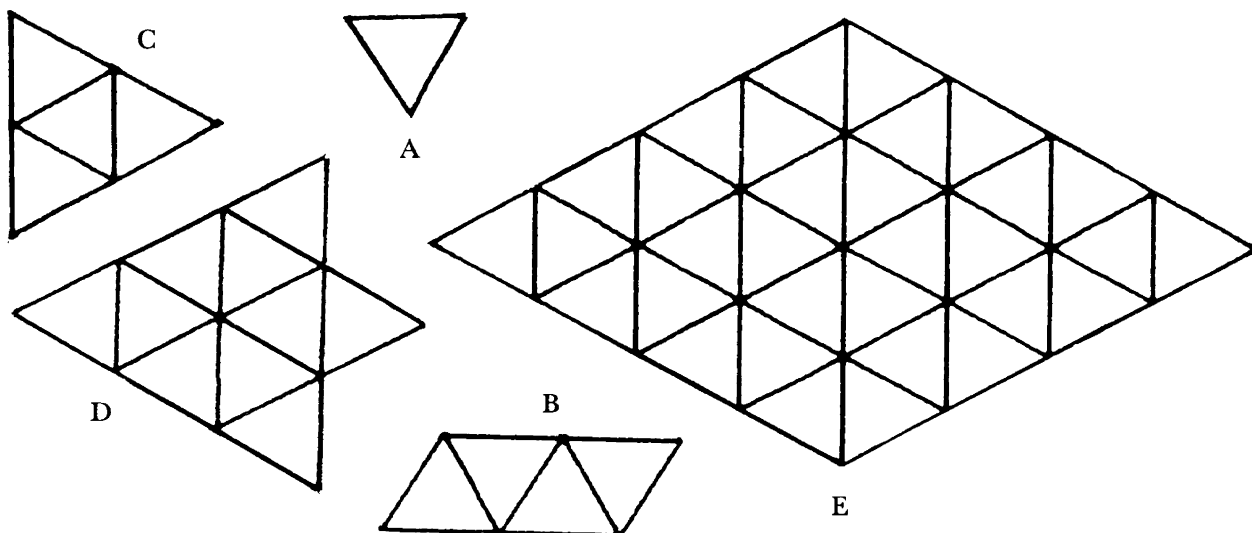
Il y a trois pavés entiers et la moitié d'un pavé en plus.



Il y a dix pavés entiers et il reste quatre moitiés de pavé.

Si tu réunis ces quatre moitiés, tu peux former deux pavés entiers.

7 Tu vas maintenant mesurer des aires, en changeant de pavé unitaire. Voici cinq formes A, B, C, D et E :



- * Prenons d'abord A, comme pavé unitaire.
Trouve l'aire de chacune des formes A, B, C, D et E.
Inscris tes résultats dans le tableau de la page suivante, puis montre-les moi.
- * Nous choisissons maintenant B, comme pavé unitaire.
Trouve l'aire de E, avec ce nouveau pavé unitaire.
Inscris ce résultat dans le tableau, puis complète la deuxième ligne.
- * Finis de remplir le tableau.

AIRE de PAVÉ UNITAIRE	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

* Ecris les remarques que tu fais en regardant le tableau ci-dessus.

* Voici un autre tableau :

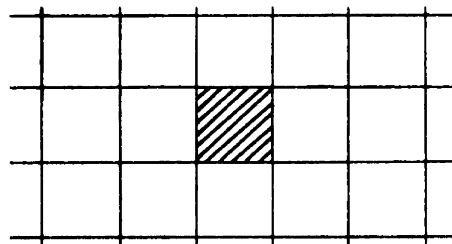
AIRE de PAVÉ UNITAIRE	A	B	C	D	E
L	$\frac{1}{2}$	2	2	5	16

Zaïus a perdu le dessin du pavé unitaire L !

Aide-le à refaire son dessin.

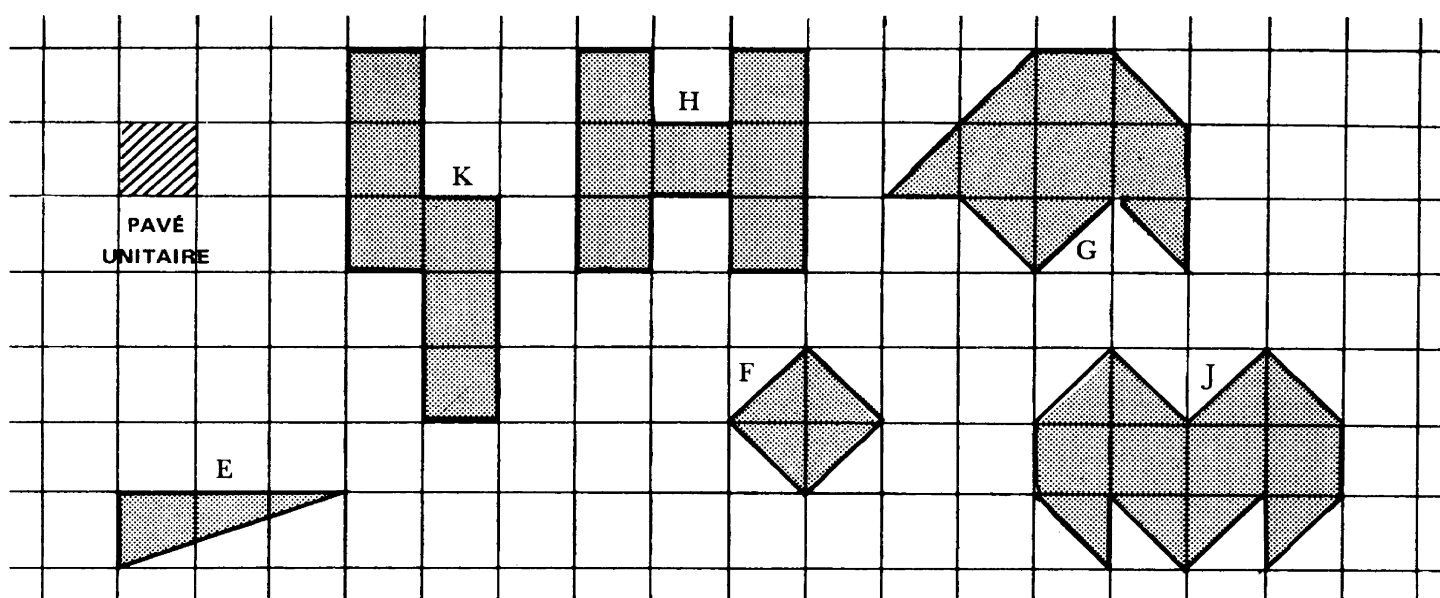
VI Les pavages les plus faciles à dessiner sont les quadrillages.

Le pavé unitaire est alors le carreau et il est assez facile de trouver l'aire d'une forme dessinée sur un quadrillage.



* L'aire de la forme K est 6.

Ecris l'aire de chacune des formes.



* Sur une feuille de papier quadrillé, marque les points dont les coordonnées sont données ci-dessous, puis joins-les dans l'ordre.

A l'intérieur de chaque forme obtenue, écris son aire ;

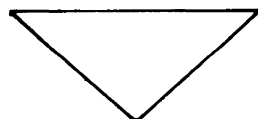
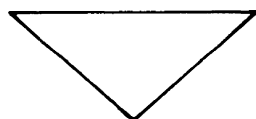
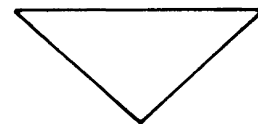
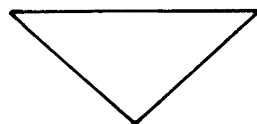
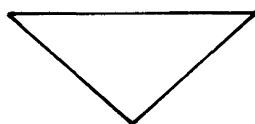
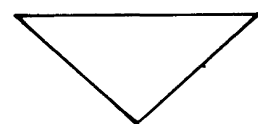
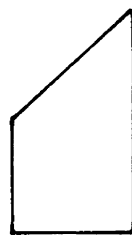
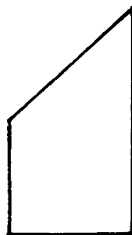
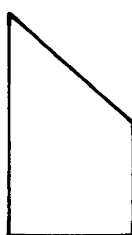
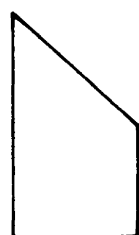
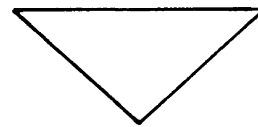
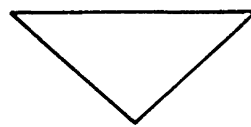
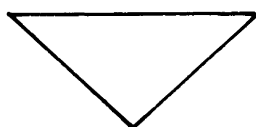
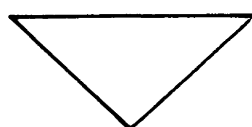
A : (1 ; 2) ; (2 ; 1) ; (3 ; 1) ; (4 ; 2) ; (3 ; 3) ; (2 ; 3) ; (1 ; 2).

B : (2 ; 5) ; (3 ; 5) ; (3 ; 6) ; (4 ; 6) ; (4 ; 7) ; (1 ; 7) ; (2 ; 5).

C : (5 ; 3) ; (7 ; 2) ; (8 ; 3) ; (9 ; 3) ; (9 ; 5) ; (5 ; 3).

* Par la suite, pour paver, nous utiliserons un carré.
Le côté de ce carré mesurera 1 centimètre.
Nous appellerons ce pavé le CENTIMETRE CARRE.

FEUILLE ANNEXE
(à découper)



AIRE - PERIMETRE

Fiche signalétique

Cette activité a été proposée en classe de 6ème. Le temps d'utilisation a varié d'une heure à trois heures.

Une partie du travail (par exemple : compléter les tableaux) peut être exécutée à la maison.

OBJECTIFS

* Mise en évidence du fait que si deux formes ont des aires différentes, celle qui a la plus grande aire n'est pas nécessairement celle qui a le plus grand périmètre, ni la plus grande envergure.

* Faire apparaître la formule de l'aire d'un rectangle comme dénombrement de pavés unitaires.

INTERETS DE L'ACTIVITE

C'est une activité courte, concrète, accessible à tous les élèves.

La première partie (activité avec des billes) offre un attrait ludique non négligeable.

PROLONGEMENTS POSSIBLES

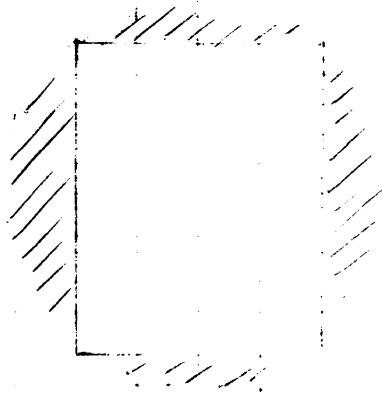
Mise en place des formules donnant les aires et les périmètres des figures géométriques usuelles.

aire et périmètre.

En rond : 72 billes.

En rectangle : 58 billes

Il y en va plus dans le cercle car lorsque l'on fait le rectangle il y a moins de surface que dans le cercle.



toute la partie achurée est enlevée lorsqu'on fait le rectangle.

AIRE et PERIMÉTRE

Il y a plus de billes et de cubes dans le cercle ~~car~~ que dans le rectangle car le cercle ayant le même périmètre que le rectangle a une aire plus grande.

dans le cercle j'ai mis 22 billes
" le rectangle " 20 "

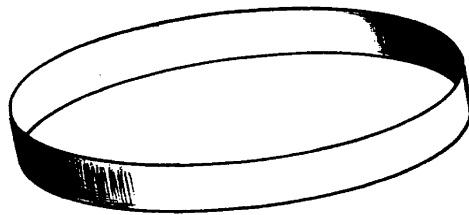
les billes étant rondes vont mieux dans le rond
quand on fait l'expérience avec des cubes il y en a plus dans le rectangle. le chiffre dépend donc de la forme des objets que l'on met dans le cercle et le rectangle

AIRE - PERIMETRE

Document numéro 1

Pour faire ce travail, tu auras besoin de billes de même grosseur.

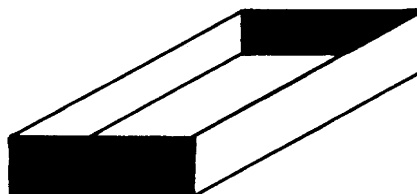
- 1) Dans du carton, découpe une bande de 30 cm de longueur, et colle les extrémités pour obtenir un anneau.



- 2) En posant cet anneau sur la table tu fabriques une sorte de boîte que tu rempliras de billes de même taille, (toutes les billes doivent toucher la table).

Combien peux-tu mettre de billes ?

- 3) Plie l'anneau pour lui donner la forme d'une boîte rectangulaire.



Remplis cette boîte de billes (sans la déformer).

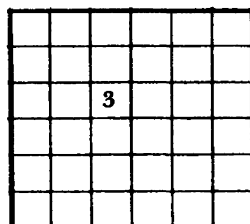
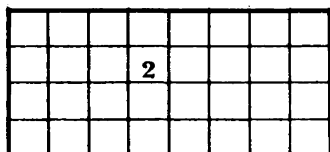
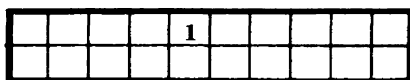
Combien peux-tu mettre de billes ?

Fais toutes les remarques que tu peux sur ce que tu viens de faire.

AIRE - PERIMETRE

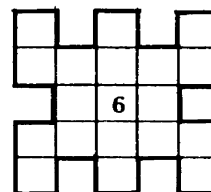
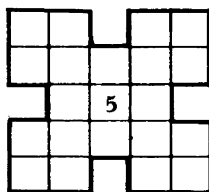
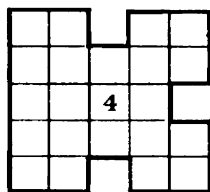
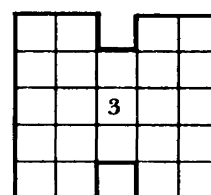
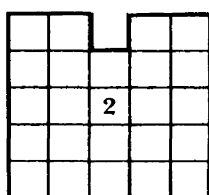
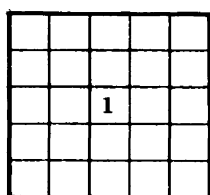
Document numéro 2

1



Que peux-tu dire du périmètre de ces trois formes (3 rectangles dont 1 carré) ?
Combien y a-t-il de carrés comme celui-ci  dans chacune de ces trois formes ? (Le nombre que tu trouves est l'aire de chaque forme, quand ce carré-ci  est l'unité d'aire).
Quelles remarques peux-tu faire ?

2



Regarde ces six formes.

Pour chacune : — mesure son périmètre (en prenant le côté de ce carré-ci  pour unité de longueur).
— mesure son aire (en prenant ce carré-ci  pour unité d'aire).

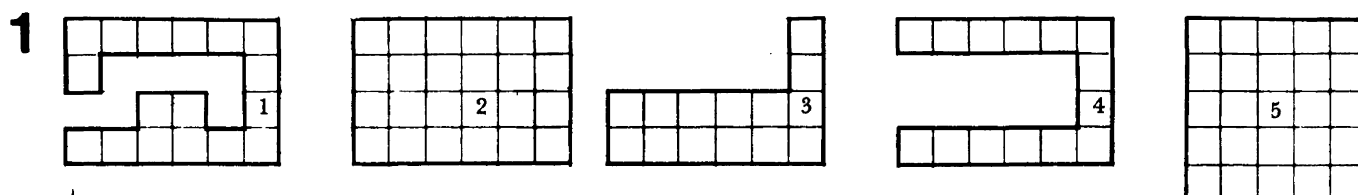
Tu mettras les résultats dans ce tableau :

numéro de la forme	périmètre	aire
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Quelles remarques te suggère le travail que tu viens de faire ?

AIRE - PERIMETRE

Document numéro 3



Détermine l'aire, puis le périmètre de chacune de ces formes.

Classe-les suivant leur aire.

Classe-les suivant leur périmètre.

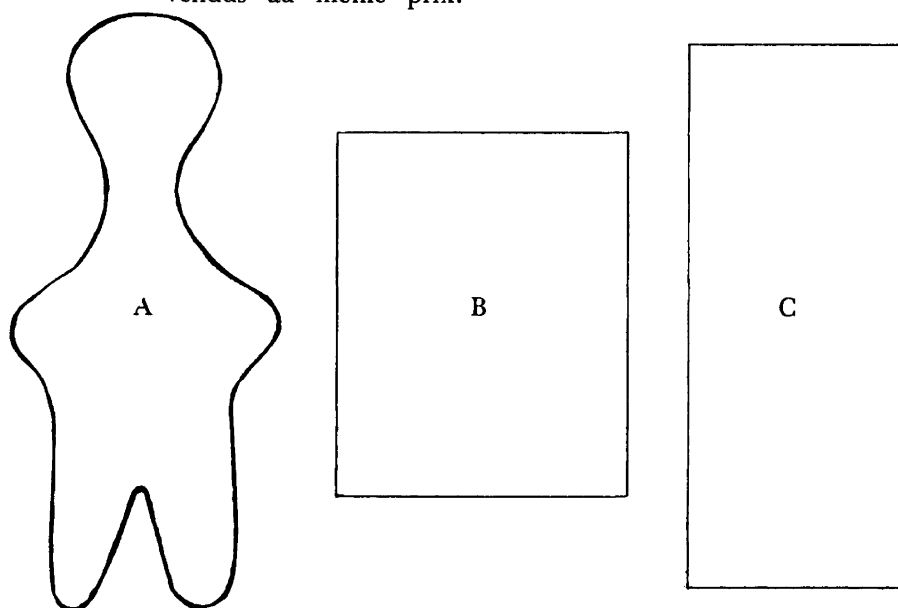
Obtiens-tu le même classement ? Quelles remarques peux-tu faire ?

Dessine une figure ayant la même aire que la figure 4 mais n'ayant pas le même périmètre.

Dessine une figure ayant le même périmètre que la figure 2 mais n'ayant pas la même aire.

2

Zaius a vu chez le pâtissier ces trois gâteaux plats de même épaisseur vendus au même prix.



Zaius sort de sa poche une ficelle et mesure le périmètre de chaque gâteau. Il se sert ensuite de sa règle et inscrit sur son carnet :

	A	B	C
périmètre en cm	26	18	21

et Zaius achète le gâteau A.

Dis ce que tu penses de l'achat de Zaius.

IREM de GRENOBLE

«Activités 6ème-5ème»

Chapitre D

DROITES

- **POURSUITES**
- **PAPPUS**
- **POLAIRE**
- **SEGMENT ET DROITE**

POURSUITES

Fiche signalétique

Cette activité a été présentée en classe de 6ème. Son temps d'utilisation a varié de 1 heure à 3 heures.

OBJECTIF .

Faire un tracé avec soin et précision pour obtenir un dessin esthétique. Cette esthétique a souvent poussé les élèves à faire de nouveaux dessins à la maison.

INTERETS DE L'ACTIVITE.

Le dessin obtenu par réitération d'une consigne de départ (cette consigne pouvant être donnée sous plusieurs formes - cf. «détail pratique» -), conduit à des tracés agréables à regarder.

Les élèves sont alors motivés pour recommencer le tracé, pour le reprendre avec différents polygones (losange, hexagone, ...).

La réitération de la consigne de départ est une approche de la notion de variable. (Plus particulièrement la méthode utilisée dans l'organigramme permet cette approche).

DETAIL PRATIQUE.

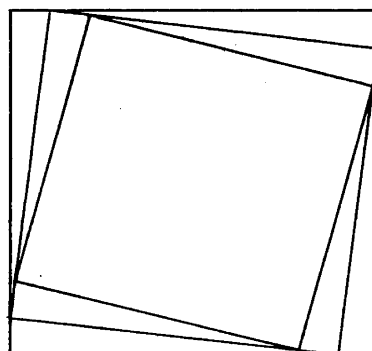
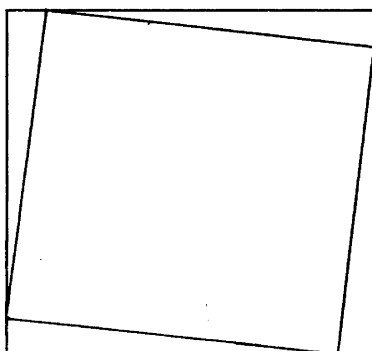
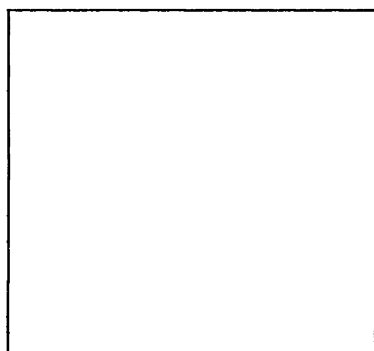
Plusieurs façons de dégager les consignes de travail :

- a) **Observation d'une figure par les élèves, qui ensuite, élaborent en commun une consigne de travail (présentation numéro 1).**
- b) **Exposé (oral ou écrit) des consignes, par le professeur.**
 - Utilisation d'un habillage (présentation numéro 2).
 - Utilisation d'une suite d'instructions géométriques précises ou d'un organigramme (présentation numéro 3).

PROLONGEMENTS POSSIBLES.

On peut inciter les enfants à inventer d'autres règles de tracé, et à réaliser les dessins correspondants.

POURSUITES
Présentation numéro 1



etc...

Voici les premières étapes d'un dessin. Observe-les.

Prends la feuille jointe, sur laquelle est dessiné un carré plus grand.
Continue le dessin aussi longtemps que tu le peux.
Observe le dessin obtenu. Ecris toutes tes remarques.
Si cela te plaît, tu peux colorier ton dessin.

Fais d'autres dessins. Pour cela, tu peux partir :

- d'un triangle équilatéral,
- d'autres polygones.

Tu peux aussi inventer d'autres règles de tracé.

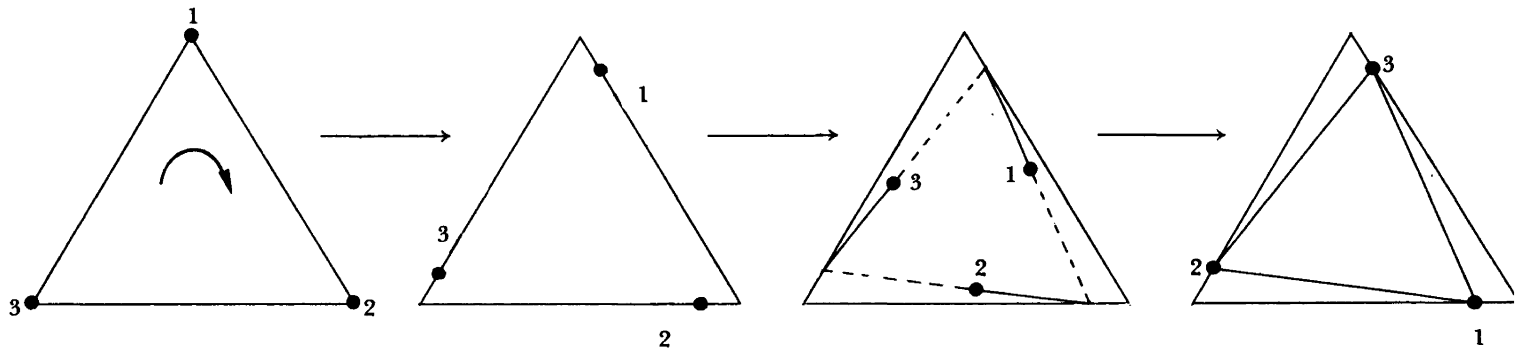
POURSUITES

Présentation numéro 2

Trois mouches organisent une course poursuite autour d'un triangle équilatéral.

Règlement de la course.

- A — Chaque mouche porte un dossard numéroté 1, 2 ou 3.
- B — Les mouches se placent chacune sur l'un des sommets d'un triangle équilatéral.
- C — Elles décident de tourner dans le même sens autour du triangle.

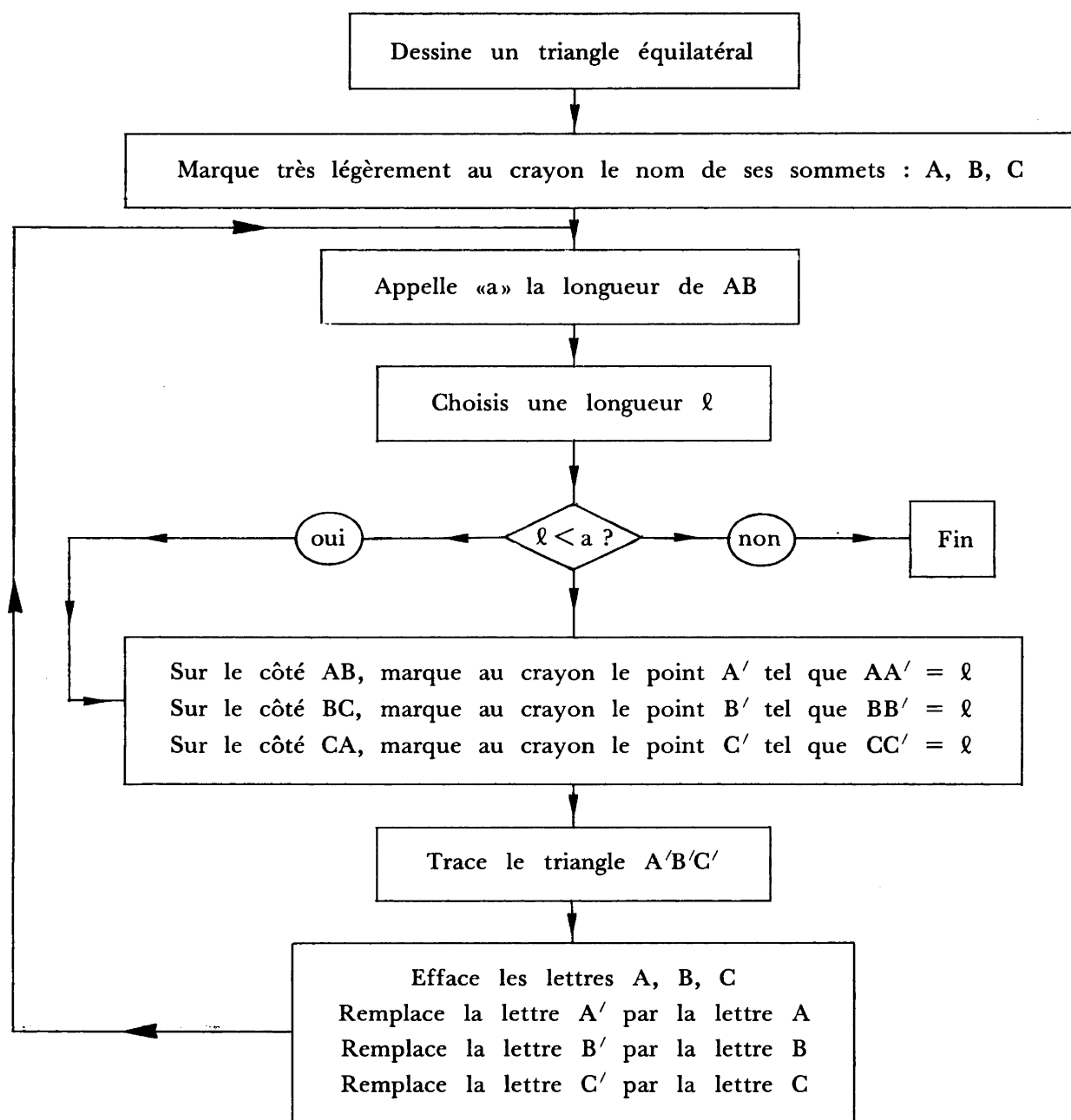


Par exemple : 1 poursuit 2 ; 2 poursuit 3 ; 3 poursuit 1.

- D — Chaque mouche avance un peu sur le côté du triangle pour rattraper en marchant celle qu'elle poursuit. (Les trois mouches avancent à la même vitesse).
- E — Puis chaque mouche s'envole, en ligne droite, en direction de la mouche qu'elle poursuit et se pose au point que celle-ci occupait au moment où elle s'est envolée.
- F — Les trois mouches se retrouvent alors sur les sommets du nouveau triangle équilatéral.

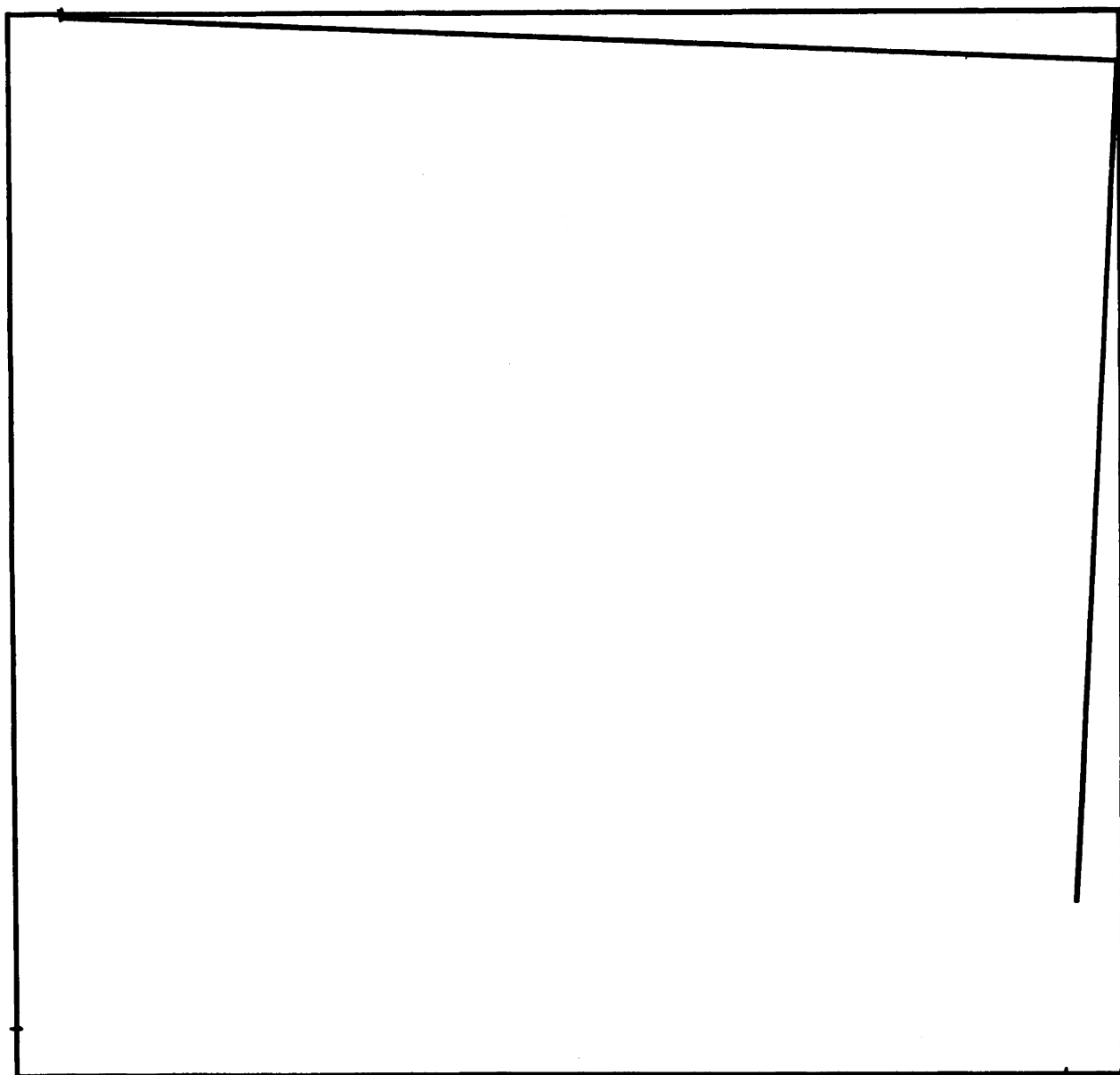
Elles recommencent alors leur poursuite autour du nouveau triangle de la même façon qu'autour du premier, et ainsi de suite...

POURSUITES
Présentation numéro 3
Organigramme



N.B. Comme il n'y a pas d'ambiguïté, nous avons noté AA' , la longueur du côté AA' .

POURSUITES



PAPPUS

Exercices de tracés de droites

Fiche signalétique

Cette activité a été proposée en 6ème. Le temps d'utilisation en classe a varié de 1 heure à 3 heures. Le travail a été quelquefois terminé «à la maison».

Pappus était un mathématicien d'Alexandrie (fin du III^e siècle après J.C.) auteur entre autres, de «collections mathématiques». Il a donné son nom au théorème illustré par ce tracé.

OBJECTIFS.

- Exercer à la lecture d'un énoncé et à l'exécution d'une suite de consignes précises.
- Amener l'élève à effectuer des tracés géométriques précis.

INTERETS.

Cette activité permet :

- de bien observer, et d'améliorer, la maîtrise qu'ont les élèves des tracés à la règle,
- d'habituer les élèves à nommer une droite par la donnée de deux de ses points,
- de «faire expérimenter» aux élèves la propriété suivante : «une droite ne se limite pas à son dessin». En particulier la droite AB ne se limite pas au segment AB.

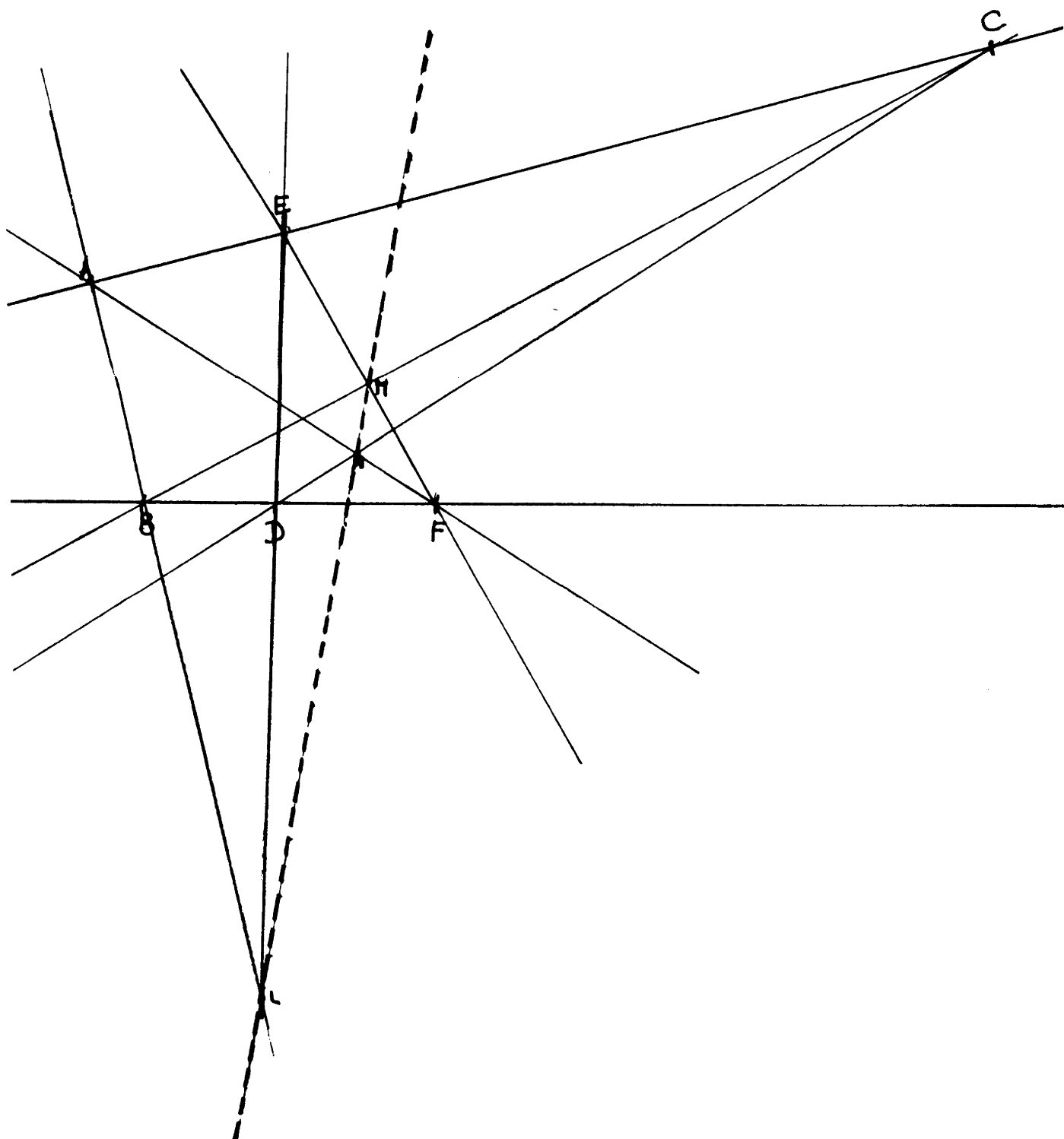
DETAILS PRATIQUES.

On aura intérêt à reproduire exactement le document élève de la page 88, si l'on veut que les points d'intersection des droites de la construction, apparaissent dans les limites de la feuille.

PROLONGEMENTS POSSIBLES.

Après avoir effectué le tracé de la droite LMN on peut permuter les points B, D et F et exécuter à nouveau le dessin. Il y a 6 dispositions possibles des points B, D, F. On peut être amené à tracer 6 droites distinctes (ces droites sont trois à trois concourantes). Les élèves réussissent assez bien le tracé des 6 droites contrairement à ce qu'on peut penser.

Ses droites **ab** et **de** se coupent en point **L**
 Ses droites **bc** et **ef** se coupent en point **M**
 Ses droites **cd** et **fa** se coupent en point **N**.



PAPPUS

Sur la feuille de dessin que tu as reçue sont tracées deux droites.

Sur l'une des droites trois points sont repérés par des traits ; à côté de chaque point j'ai écrit son nom : A, C, E.

Sur l'autre droite trois points sont repérés par des traits ; appelle B, D et F ces points, dans n'importe quel ordre (essaie de ne pas prendre le même ordre que tes voisins).

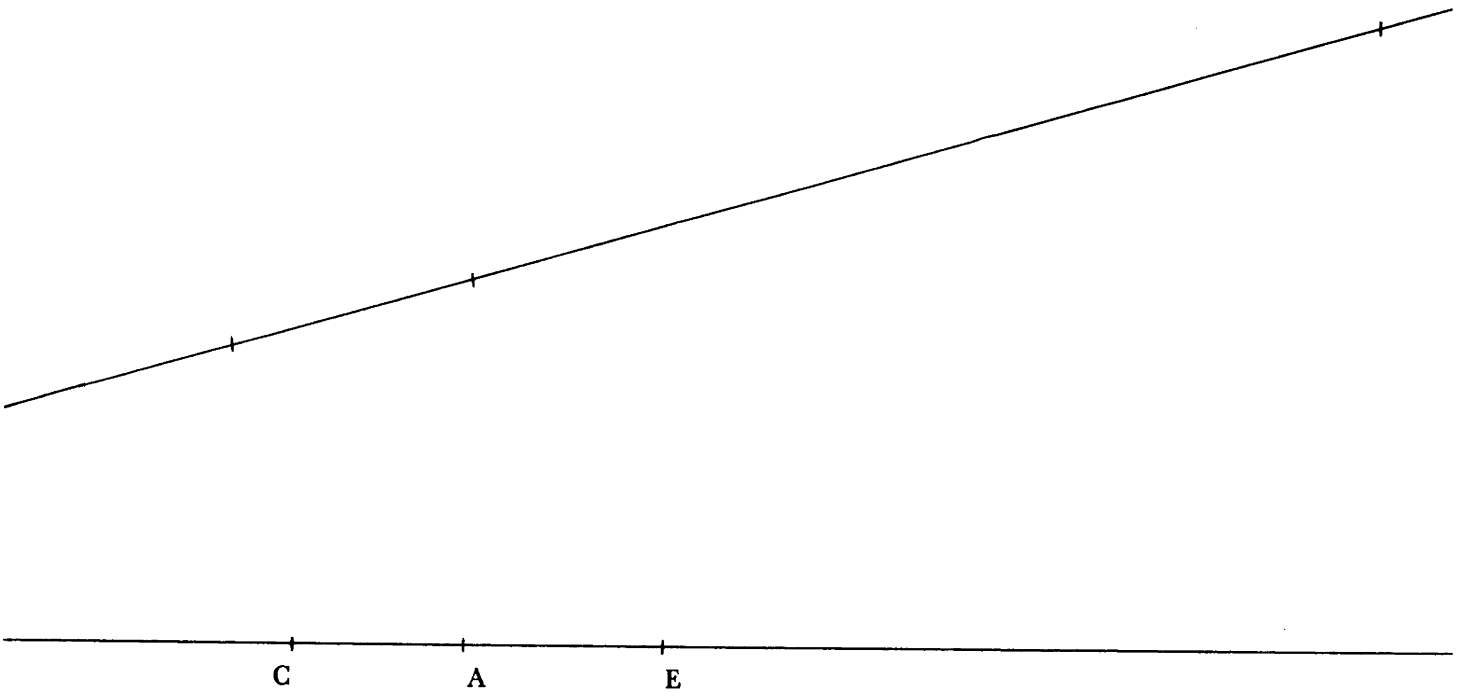
Trace les droites AB et DE : elles se coupent en un point qu'on appelle L.

Trace les droites BC et EF : elles se coupent en un point qu'on appelle M.

Trace les droites CD et FA : elles se coupent en un point qu'on appelle N.

Que remarques-tu pour les points L, M et N ? Compare avec ce que tes camarades ont obtenu.

PAPPUS



POLAIRE

Fiche signalétique

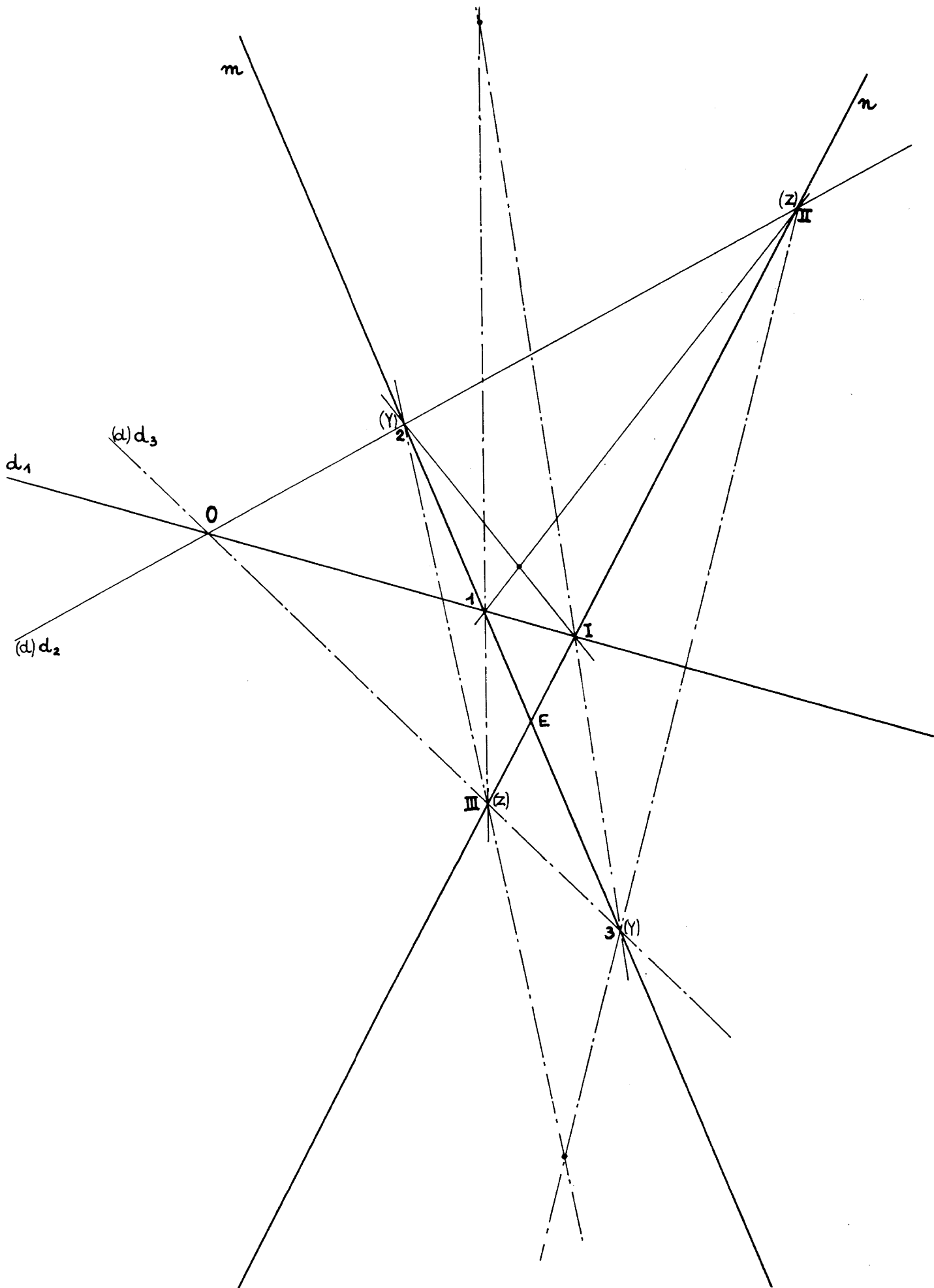
Cette activité a été présentée en classe de 6ème. Son temps d'utilisation a varié de 1 heure à 2 heures.

OBJECTIFS

- Apprendre à lire un énoncé géométrique
- Exécuter un travail propre et soigné (la présence de plusieurs droites sur le même dessin nécessite une certaine méthode de travail).
- Observer un dessin effectué et essayer de conclure.
- Introduire la notion de variable.
- Acquérir une certaine «prudence intellectuelle» : dans l'exercice proposé, voyant que 3 droites donnent 3 points bleus, bon nombre d'élèves auront tendance à induire hâtivement que 4 droites donnent 4 points bleus, ...

INTERETS DE L'ACTIVITE

- Faire préciser par les élèves la notion de «droites parallèles».
- Aborder un problème de dénombrement. .
- Faire sentir la nécessité d'un raisonnement lorsque le dessin n'est plus possible.



POLAIRE

I Sur le document numéro 1, deux droites sont tracées. On les appelle m et n . Elles se coupent en un point appelé E .

CONSIGNES :

a

Repasse, en traits fins rouges, les droites m et n .

Trace une droite d_1 , qui passe par O .

Elle coupe la droite m au point numéroté (en chiffre arabe) : 1
et la droite n au point numéroté (en chiffre romain) : I

b

Trace une autre droite d , qui passe par O .

Elle coupe m au point Y et n au point Z . (Ecris ces lettres au crayon).

c

Joins Y à un point numéroté en chiffres romains.

Joins Z au point qui porte le même numéro, mais écris en chiffres arabes.

Ces deux droites que tu viens de tracer se coupent en un point.
Marque ce point en bleu.

d

Efface les lettres Y , Z , d .

Remplace-les par 2, II, d_2 .

A partir des 2 droites d_1 et d_2 , tu as construit 1 point bleu.

II

Reprends la consigne b

Reprends la consigne c , en la répétant autant de fois qu'elle te permet de construire un nouveau point bleu.

Tu as pu suivre deux fois cette consigne.

Efface les lettres Y, Z, d
et remplace les respectivement par 3, III, d_3

A partir des droites d_1 et d_2 , tu avais obtenu 1 point bleu.

En ajoutant la droite d_3 , tu as dû obtenir 2 nouveaux points bleus.

A partir des 3 droites d_1 , d_2 , d_3 , tu as obtenu 3 points bleus.

Que remarques-tu ?

III

Réitère les consignes b et c

et remplace Y, Z, d
respectivement par 4, IV, d_4

Combien de points bleus obtiens-tu au total ?

Quelles remarques fais-tu ?

IV Recommence avec une 5ème droite, une 6ème droite, ... et compte à chaque fois tous les points bleus.

Complète le tableau suivant* :

Nombre de droites d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	t.....	
Nombre de points bleus	1	3											

* : Lorsque la figure devient trop difficile à faire, essaie de prévoir les résultats, en indiquant quels calculs tu as faits.

V Sur le document numéro 2, deux droites p et q sont tracées.

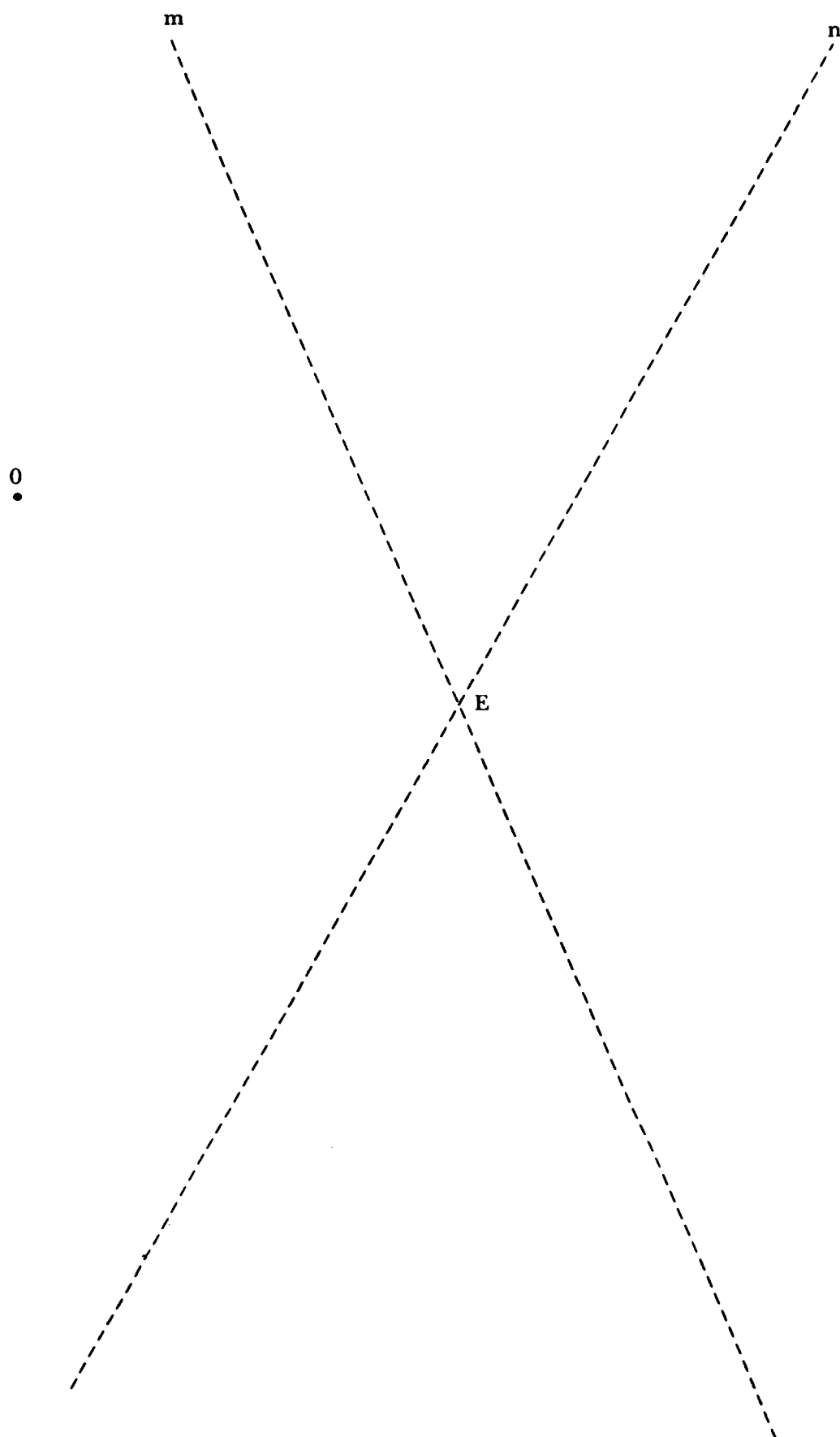
Elles sont parallèles.

Comment fais-tu pour le vérifier ?

Pour les droites p et q, suis les mêmes consignes que pour les droites m et n.

Fais-tu les mêmes remarques pour les points bleus ?

document numéro 1



document numéro 2

0.

p

q

SEGMENT ET DROITE

Fiche signalétique

Cette activité a été abordée en 6ème. Elle est un peu plus difficile que l'activité «Pappus». Elle peut très bien faire suite à cette activité. Le temps d'utilisation dans les classes a été de 2 h à 4 h, suivant les prolongements abordés.

Nous avons pris ici comme prétexte de tracés géométriques, la construction du conjugué harmonique d'un point par rapport à deux points donnés.

OBJECTIFS.

Les objectifs sont les mêmes que ceux de l'activité «Pappus» c'est-à-dire les objectifs pouvant être atteints dans une activité de tracés.

INTERETS DE L'ACTIVITE.

On retrouve les intérêts de l'activité «Pappus».

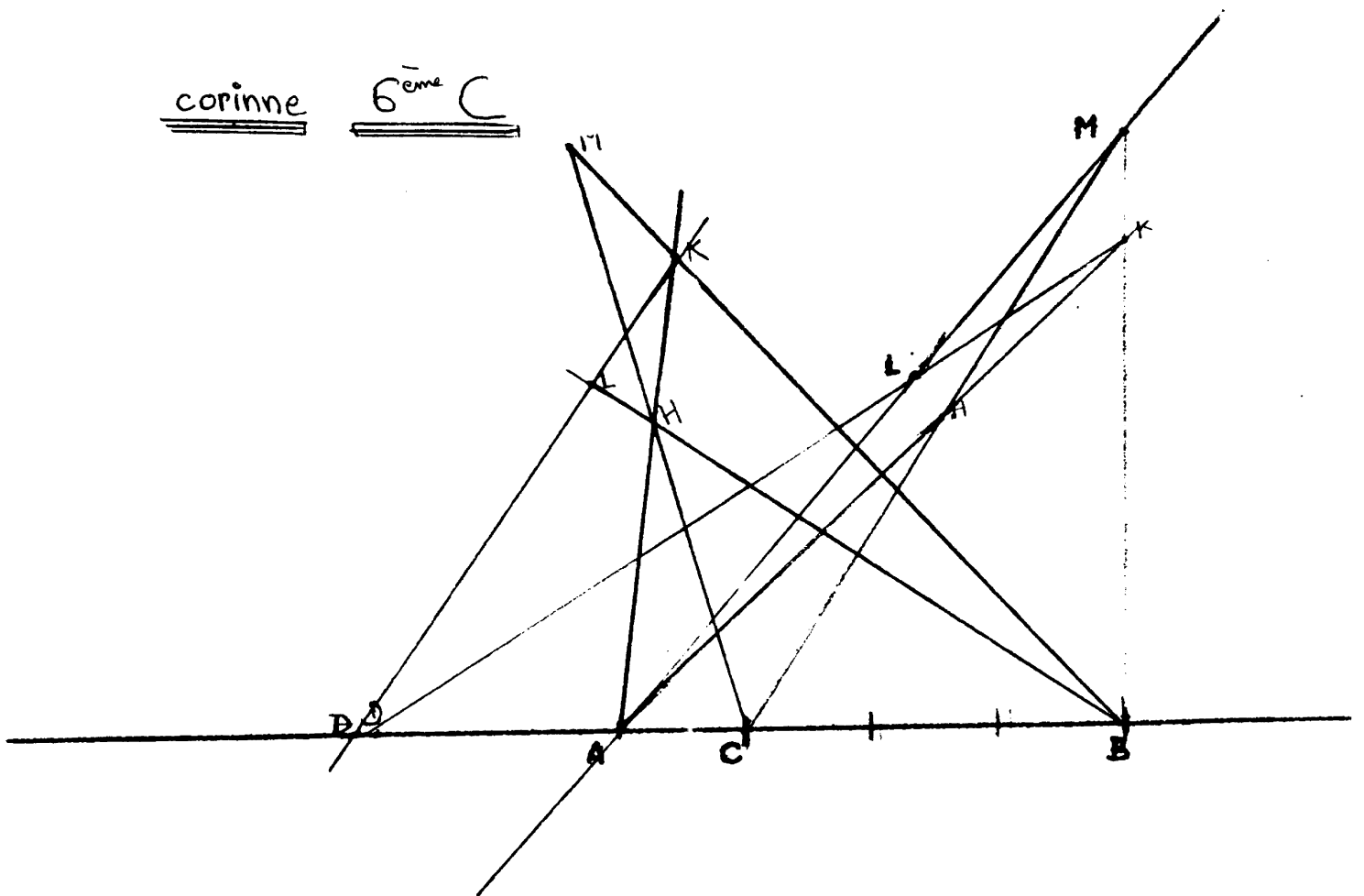
De plus, les élèves ont parfois des difficultés pour placer un point au tiers, au quart d'un segment. Cette activité permet de vérifier la compréhension de ces mots, puis de confronter les différentes méthodes de comparaison de longueur de segment : papier calque, compas, règle graduée, ...

PROLONGEMENT POSSIBLE.

Dans la partie «quelques développements», un paragraphe est consacré à diverses présentations et à divers développements de cette activité.

corinne

6^{ème} C



SEGMENT ET DROITE

Document élève n° 1

M *

L *

A

C

B

Les points A, L et M sont sur une même droite. Comment peux-tu le vérifier ?

Les points A, B et C sont sur une même droite. La longueur du segment BC est le double de la longueur du segment AC. Vérifie-le et explique comment tu l'as vérifié.

Trace au crayon (si tu ne l'as pas déjà fait) la droite LM. Passe-t-elle par le point A ?

Instructions de dessin.

- Trace au crayon les droites MC et MB, puis la droite LB.
La droite LB coupe la droite MC au point H. Marque ce point.
- Trace la droite AH. La droite AH coupe la droite MB au point K.
La droite LK coupe la droite AB au point D. Marque ce point D.
- Le point A est-il le milieu du segment BD ? Comment fais-tu ce contrôle ? Si ton dessin est parfait, A est le milieu du segment BD.
- Que penses-tu de ton dessin ?

SEGMENT ET DROITE

Document élève n° 2

Prends le dessin numéro 2.

Le point C est au quart du segment AB à partir de A. Comment peux-tu le vérifier ?

La droite AL passe-t-elle par M ?

Continue ton dessin, en suivant les instructions de dessin du document numéro 1.

Compare les longueurs des segments AD et AB.

SEGMENT ET DROITE

Document élève n° 3

Sur le dessin numéro 2.

Choisis un point M' . Marque-le en rouge. Trace la droite AM' et choisis un point L' sur cette droite. Marque-le en rouge.

Refais alors le même dessin en suivant les instructions de dessin du document numéro 1 (M' remplace M, L' remplace L etc...).

Que penses-tu du dessin obtenu ?

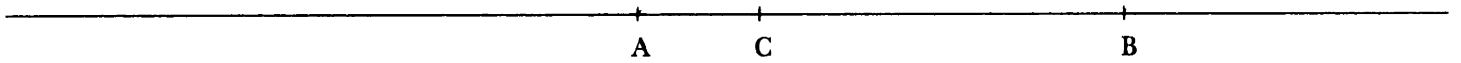
Recommence encore une fois en prenant un point M'' et un point L'' en dessous de la droite AB. As-tu des remarques à faire ?

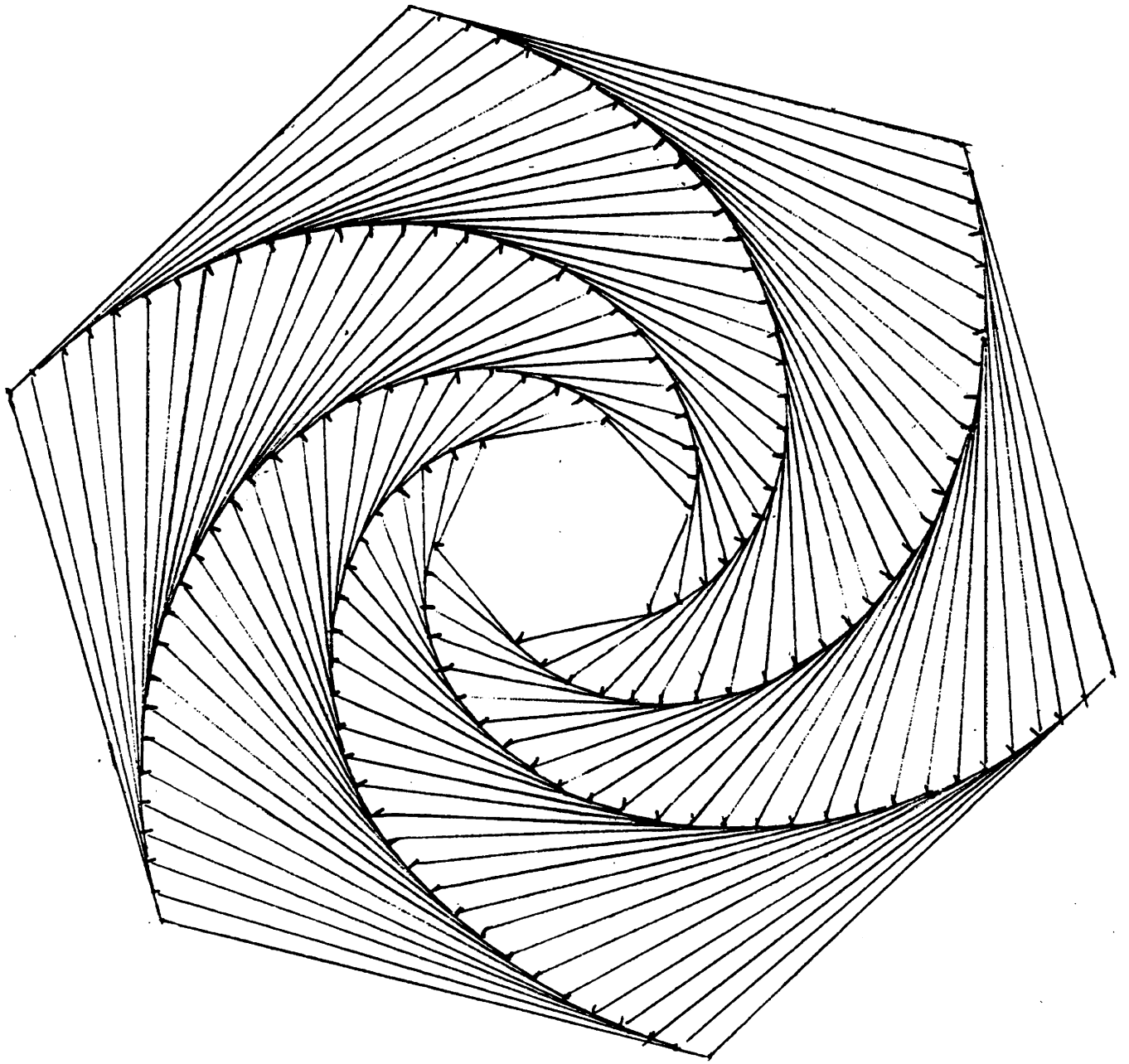
SEGMENT ET DROITE

Dessin numéro 2

M +

L +





IREM de GRENOBLE

«Activités 6ème-5ème»

Chapitre C

CERCLES

- RESEAU HEXAGONAL
- TRACES DE CERCLES
- MEDIATRICE
- LA GRUE ; LES RADIO-AMATEURS ; LA CHEVRE
ET UN EXERCICE DE GEOMETRIE.

RESEAU HEXAGONAL

Fiche signalétique

L'activité a été faite en classe de 6ème. Le temps d'utilisation en classe a été généralement de 1 heure.

Nous proposons 2 présentations de l'activité : énoncé classique et organigramme.

THEME.

Exercice de tracé de cercles.

OBJECTIFS.

- Distinction entre cercle et disque.
- Manipulation correcte du compas.
- Prise de conscience de la nécessité d'avoir un dessin précis.

INTERETS DE L'ACTIVITE.

- Parmi les activités de tracé que nous proposons, celle-ci est l'une des plus simples.
- Elle a sa place en début d'année scolaire, et ne demande pas de pré-requis.
- Elle permet aux élèves en situation d'échec scolaire de réussir aussi bien que les autres.
- L'esthétique du dessin pousse les élèves à refaire le tracé d'eux-mêmes, lorsque le dessin n'est pas réussi.
- La nature du tracé met en évidence l'importance de l'emplacement de la pointe sèche du compas (centre) et du maintien de son écartement (rayon).

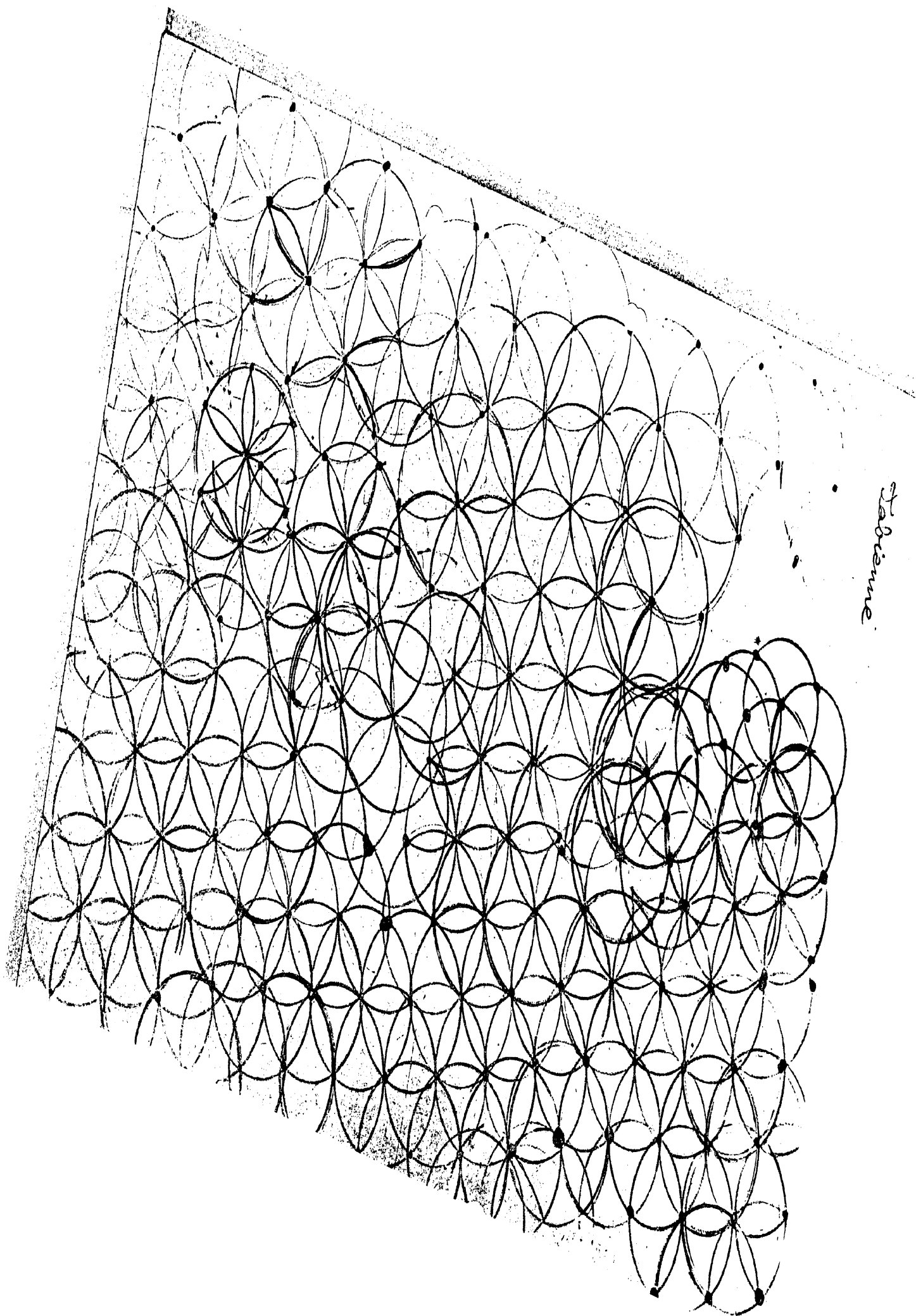
Ces prises de conscience doivent nécessairement précéder l'introduction de la définition mathématique du cercle : l'ensemble des points équidistants d'un point appelé centre.
--

PROLONGEMENTS POSSIBLES.

- Utilisation de différentes couleurs pour réaliser un dessin artistique.
- Recherche de divers réseaux de droites parallèles qui apparaissent sur le dessin.
- Mise en évidence de figures géométriques qu'il est possible d'obtenir à partir de différents points du réseau (ces figures étant connues des élèves, ou nouvelles pour eux : rectangles, parallélogrammes, hexagones, trapèzes, triangles équilatéraux ou isocèles ou rectangles...).

DETAIL PRATIQUE.

On remplit la page de cercles. On marque les centres à l'encre. Les points apparaissent au verso de la feuille. Ce réseau de points seuls (sans les cercles) facilite la recherche de figures géométriques : droites parallèles, polygones



RESEAU HEXAGONAL

Enoncé classique

Sur une feuille blanche marque deux points distants de 25 mm.

Pique la pointe de ton compas sur l'un des points marqués, fais coïncider la mine de crayon avec l'autre point et trace le cercle complet.

Recommence en mettant cette fois la pointe du compas sur l'autre point et en gardant le même écartement des branches du compas.

Observe la figure obtenue et note tes remarques.

Les deux cercles tracés se coupent en deux points que tu vas marquer à l'encre.

En gardant toujours le même écartement des branches du compas, recommence à tracer des cercles ayant pour centre un des points marqués à l'encre. Marque à l'encre tous les nouveaux points où les cercles se coupent.

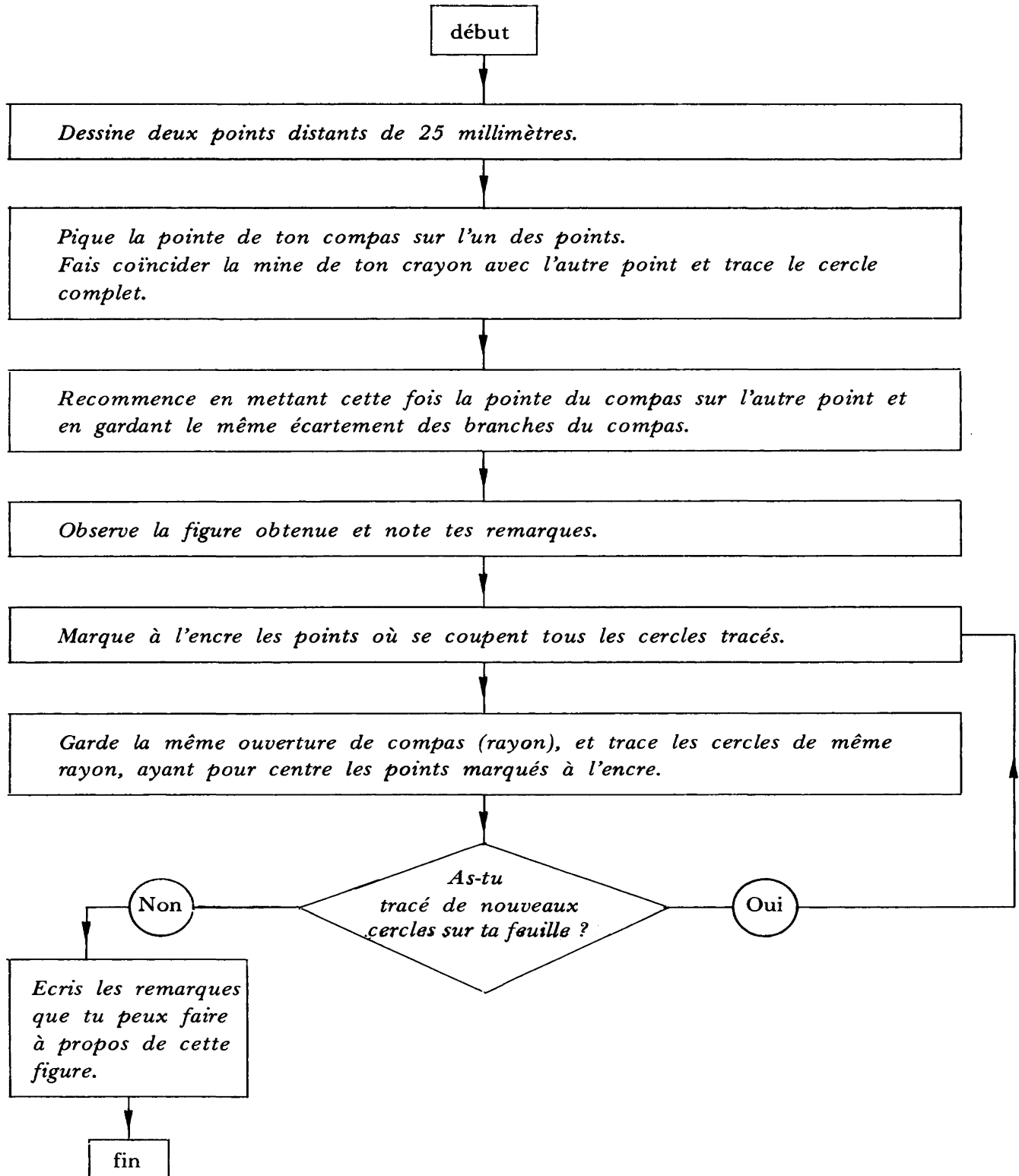
Continue à tracer des cercles ayant pour centres les points marqués à l'encre, et à marquer à l'encre tous les nouveaux points où les cercles se coupent.

Essaie d'obtenir la plus grande figure possible sur la feuille de papier, et écris toutes les remarques que tu peux faire à partir de cette figure.

Compare tes résultats à ceux qu'ont obtenus tes camarades.

RESEAU HEXAGONAL

Organigramme



TRACES DE CERCLES

Fiche signalétique

Activité pour la classe de 6ème.

Le temps d'utilisation en classe a été d'environ 3 heures.

OBJECTIFS.

- * Habituer les élèves à l'utilisation du compas.
- * Mettre les élèves en contact avec les propriétés du cercle.

INTERETS DE L'ACTIVITE.

* Ces tracés conduisent l'élève à bien distinguer «cercle», «centre du cercle», «rayon du cercle» (en particulier différencier «cercle passant par A» et «cercle de centre A»).

* La connaissance de ces propriétés, acquise à partir de ces tracés, est aussi bonne que la connaissance qu'ils pourraient acquérir à partir de définitions théoriques.

PROLONGEMENTS POSSIBLES.

* Cette activité peut donner l'occasion de parler de tangente (droite tangente à un cercle, cercles tangents), de symétrie autour d'une droite (paragraphe 3 et 4).

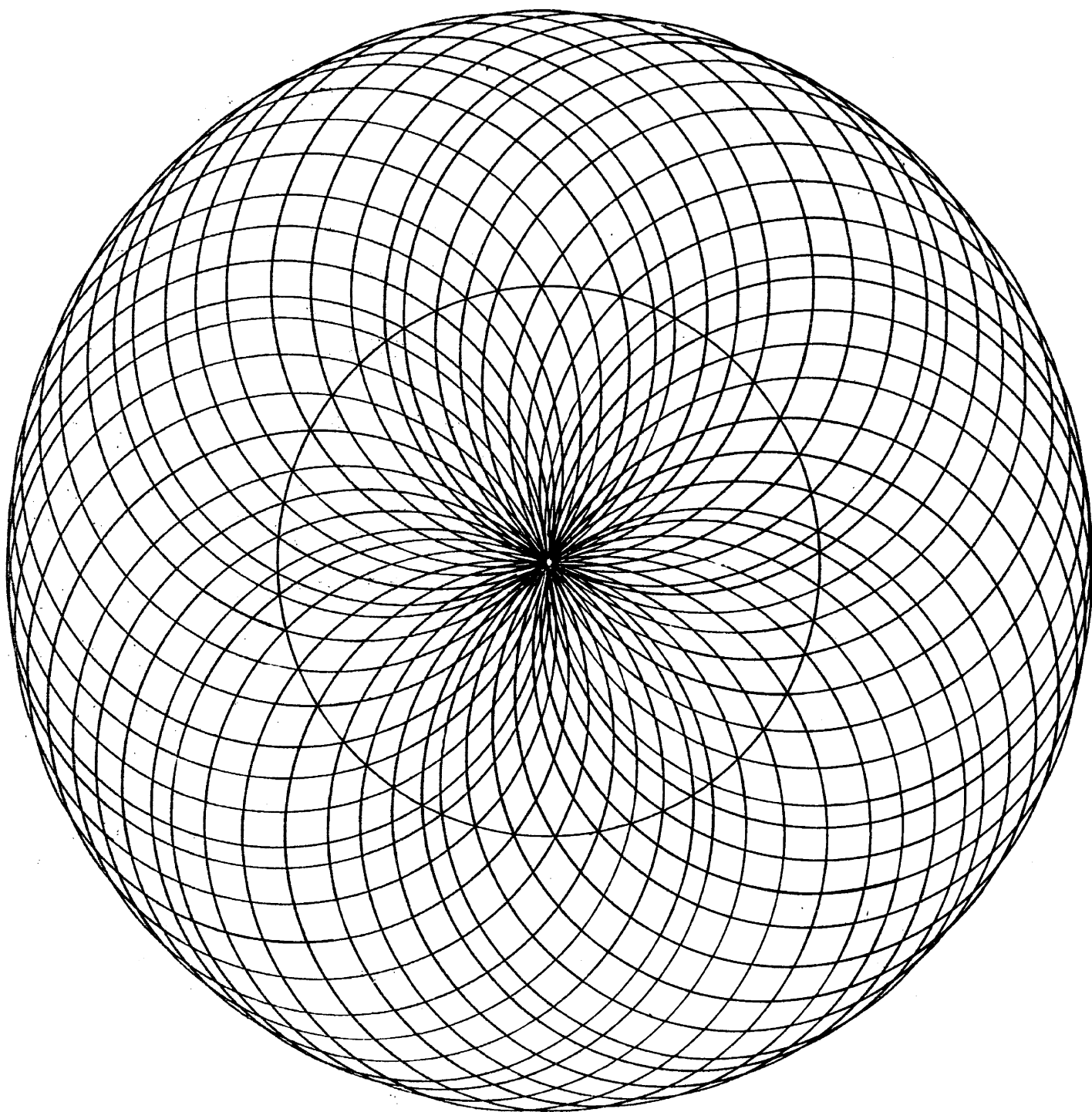
* On peut la prolonger par l'activité intitulée «médiatrice d'un segment».

DETAILS PRATIQUES.

- Il est souvent souhaitable de faire tracer un grand nombre de cercles (paragraphe 1 - 5 - 6) pour faciliter les observations.

- Dans le paragraphe 5, le passage *Peux-tu tracer deux droites dessin ?* est volontairement mal rédigé. Il serait surprenant que les élèves ne donnent pas le résultat attendu (les deux droites tangentes communes aux cercles). On reviendra ensuite sur la rédaction de ce passage avec les élèves.

Voir aussi «commentaires» du déroulement de l'activité dans des classes.



Commentaires sur l'activité TRACES DE CERCLES

Cette activité a été le plus souvent proposée en classe de sixième et parfois en classe de cinquième.

Cette activité permet :

- d'habituer les élèves au maniement du compas ;
- de les entraîner à la compréhension d'un texte géométrique et à l'observation de figures ;
- de leur faire découvrir et utiliser les propriétés du cercle.

Il semble intéressant de faire précéder cette activité par celle intitulée «Réseau hexagonal».

«Réseau hexagonal» donne l'occasion de développer l'habileté des élèves au maniement du compas.

PROLONGEMENTS DE L'ACTIVITE.

«Tracés de cercles» est une bonne préparation à l'activité intitulée «médiatrice d'un segment».

DEROULEMENT DE L'ACTIVITE EN CLASSE.

Le temps consacré en classe à cette activité, a été souvent d'au moins 3 heures (avec en plus finitions à la maison). Mais certains enseignants l'ont utilisée en 1 heure ou 2 heures de classe et ont proposé une partie du travail à la maison.

Généralement l'activité de dessin plaît beaucoup aux élèves. L'activité est d'autant plus motivante que les élèves disposent d'un compas correct (qualité et entretien posent souvent des problèmes !...).

Après avoir fait ce travail, ils ne se font pas prier pour reproduire en grand deux ou trois dessins : ils tracent avec soin des réseaux serrés de cercles et quelques-uns mettent des couleurs.

Au niveau des remarques écrites par les élèves, plusieurs portent sur l'aspect décoratif ou sur le relief :

1. *L'ensemble forme une grosse boule. (Fabienne-6ème).*
2. *La figure obtenue ressemble un peu à une pelote de laine ; on dirait deux cercles tordus et assemblés. (Rémi - 5ème).*
Si l'on continue, cela forme une citrouille. (Yamina - 5ème).
3. *Cela forme un papillon. (Serge - 6ème).*

Et pour conclure :

Tous ces dessins sont très jolis à voir. (Yamina - 5ème).

Pour certains élèves c'est une rencontre avec l'infini :

Cette figure (1.) ne se terminera jamais. (Bruno - 6ème).
Si je veux continuer à tracer des cercles, je peux en faire une infinité plus ou moins grande. (2. Liliane - 6ème).

Le vocabulaire géométrique des élèves est peu précis ; il est difficile d'obtenir des remarques bien formulées.

Voici ce que les enseignants ont pu observer :

1. Quelques élèves confondent le cercle et son centre : ils centrent le cercle sur A.

Les remarques les plus courantes sont :

Les points rouges forment un rond rouge autour de A.
Les points rouges sont sur un cercle.

Il faut solliciter les élèves pour qu'ils précisent le centre et le rayon de ce cercle.

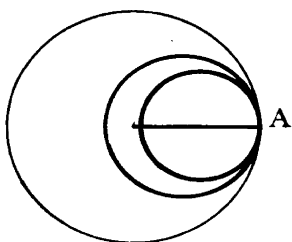
2. Quelques élèves lisent mal le texte : ils font un nouveau tracé numéro 1, en prenant un autre rayon.

3. On retrouve ici la confusion tenace chez certains, entre droite et segment. Le point A, hors de la droite d, peut alors se retrouver placé ainsi :



Au niveau de l'observation les élèves voient difficilement le second point commun aux cercles.

4. Plusieurs élèves ne tracent les cercles que d'un seul côté du point A (comme au numéro 3, la droite d s'est transformée en segment d'extrémité A)



Pour ceux qui ont réussi la figure, il s'en dégage une impression d'ordre :

Je remarque que les cercles sont en ordre. (Patrick - 6ème).

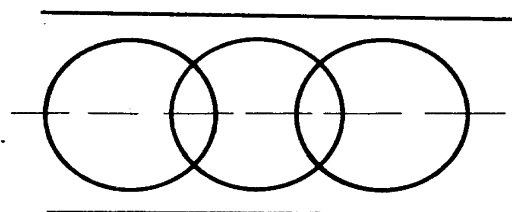
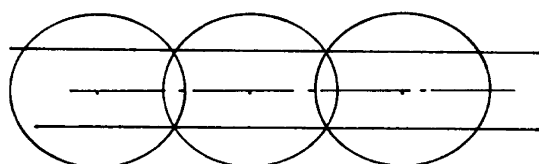
Plus on va à l'extrémité de la droite, plus les cercles s'agrandissent. (Cécile - 6ème).

Je remarque que A est toujours soit à droite, soit à gauche des cercles. (Rémi - 5ème).

5. Les deux droites ne sont pas toujours celles attendues, c'est-à-dire les droites tangentes à tous les cercles.

Certains voient des droites sécantes à ces cercles (peut-être guidés par certains points d'intersection des cercles...).

D'autres voient des droites extérieures.

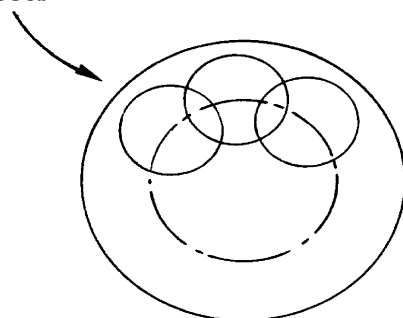


Ceux qui font un réseau serré de cercles remarquent :

Ce n'est pas la peine de tracer les deux droites ; elles se traceront toutes seules, si on continue à tracer des cercles. (Rémi - 5ème).

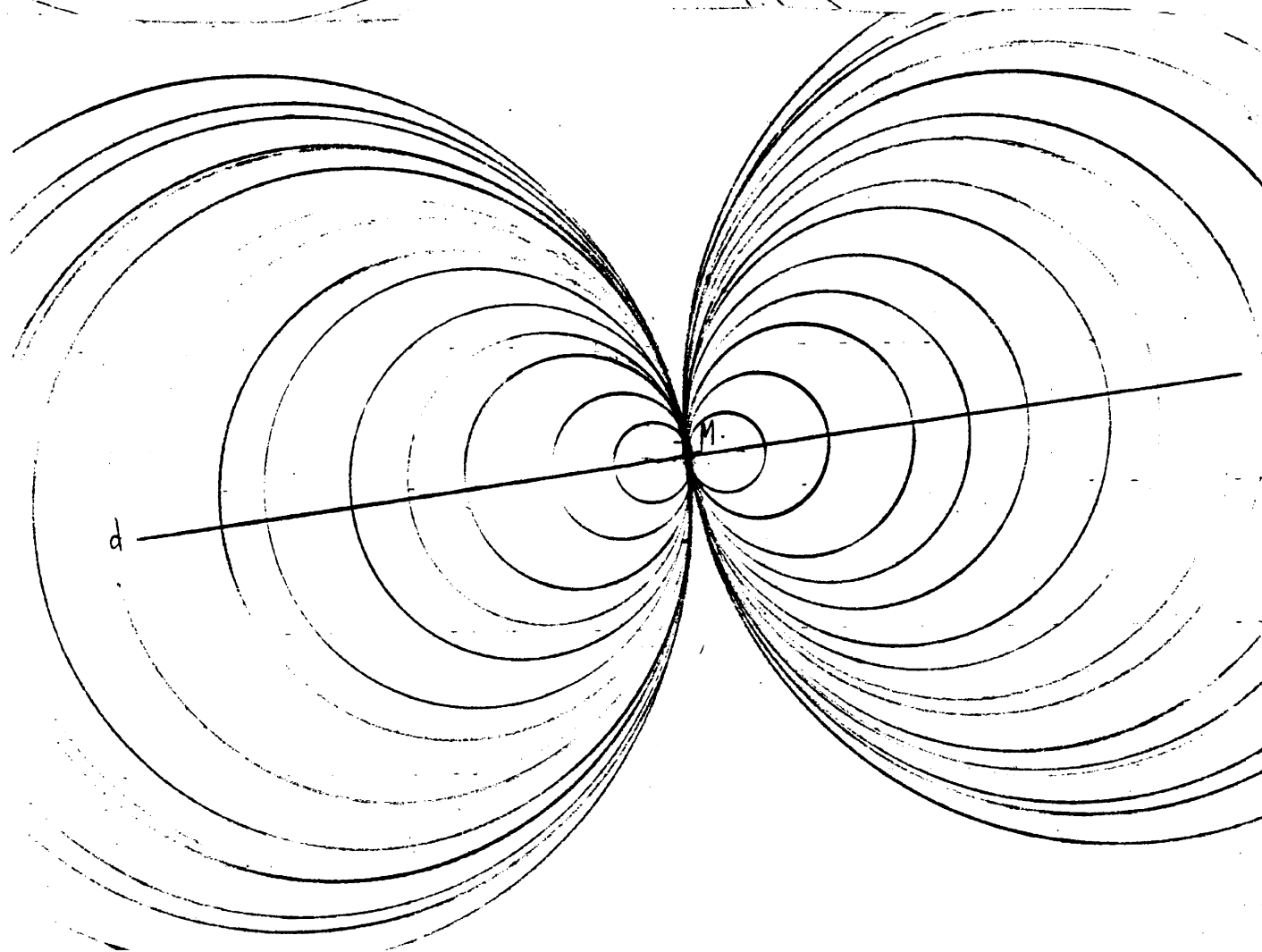
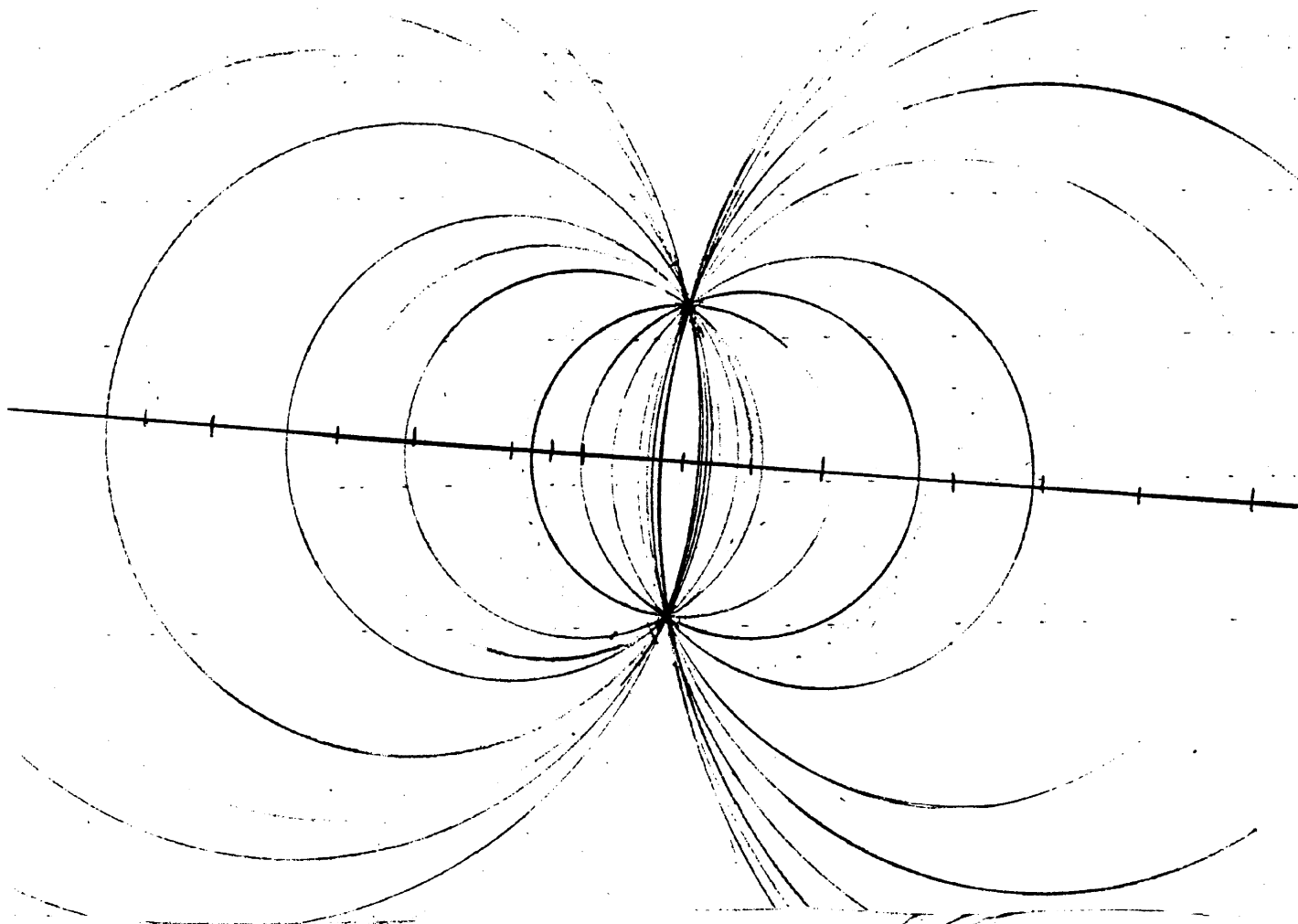
6. Remarques proches de celles faites pour le numéro 5.

On trouve ceci



Mais aussi :

Un cercle s'est fait tout seul, car en faisant tous nos petits cercles, on en a formé un petit. (Yamina - 5ème).



TRACES DE CERCLES

- 1**

Dessine en noir un point A.
Prends avec le compas une ouverture de 4 cm.
Trace un cercle passant par A et marque son centre en rouge.
EN GARDANT TOUJOURS UNE OUVERTURE DE 4 cm, dessine d'autres cercles passant par le même point A.
Marque leurs centres en rouge.
Que remarques-tu ? Ecris tes remarques.
- 2**

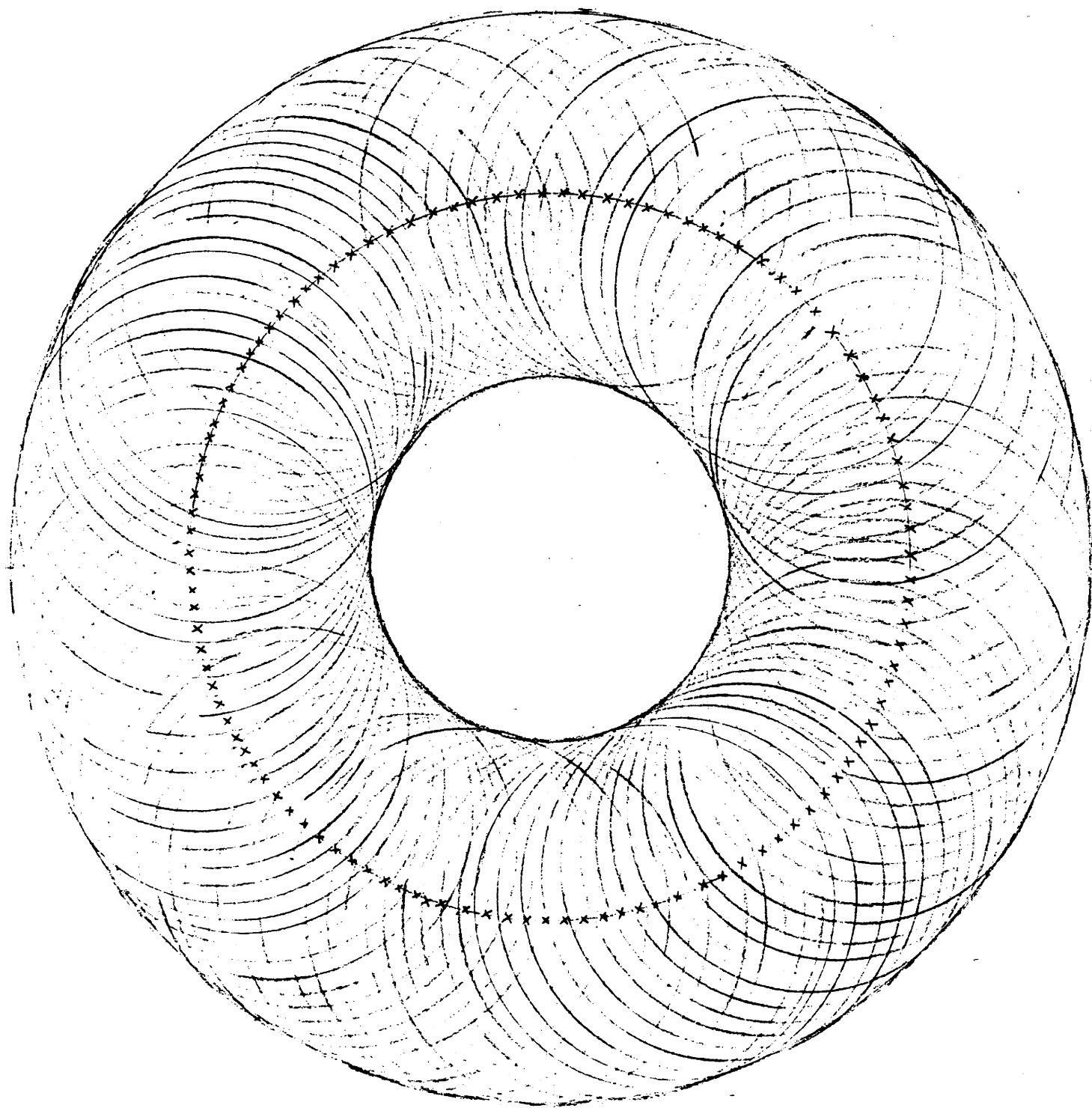
Dessine en noir un point A.
Trace des cercles passant par A, mais cette fois, CHANGE l'ouverture du compas pour chaque cercle.
Marque en rouge les centres de ces cercles.
Que remarques-tu ?
- 3**

Trace une droite d.
Place un point A hors de la droite d.
Dessine des cercles ayant leurs centres sur d et passant par A.
Que remarques-tu ?
- 4**

L'énoncé de cet exercice ressemble au précédent.
Trace une droite d, puis place un point A sur la droite d.
Dessine des cercles ayant leurs centres sur d et passant par A.
Que remarques-tu ?
- 5**

Trace une droite d, puis des cercles de 3 cm de rayon centrés sur d.
Peux-tu tracer deux droites entre lesquelles sont placés tous les cercles de ton dessin ?
Que peux-tu dire de ces deux droites ?
- 6**

Trace un cercle C de rayon 6 cm, puis des cercles centrés sur C de 2,5 cm de rayon.
Peux-tu tracer deux cercles entre lesquels sont placés tous les cercles de ton dessin ?
Explique où sont ces deux cercles.



MEDIATRICE

Fiche signalétique

Activité pour la classe de 6ème.

Temps d'utilisation en classe d'environ 2 heures.

OBJECTIFS

- * Entraîner les élèves à une bonne utilisation du compas.
- * Mettre en évidence la médiatrice comme ensemble de points équidistants de deux points donnés.

INTERETS DE L'ACTIVITE

L'activité conduit l'élève,

- à lire et utiliser un organigramme,
- à bien organiser un tracé ainsi que sa vérification,
- à bien préciser les notions : «cercle», «centre», «rayon», «points équidistants de deux points donnés», «milieu de deux points».

PROLONGEMENTS POSSIBLES

La médiatrice de A et de B ayant été définie comme «ensemble de points équidistants de A et de B», on peut ensuite faire rechercher des propriétés de cette médiatrice :

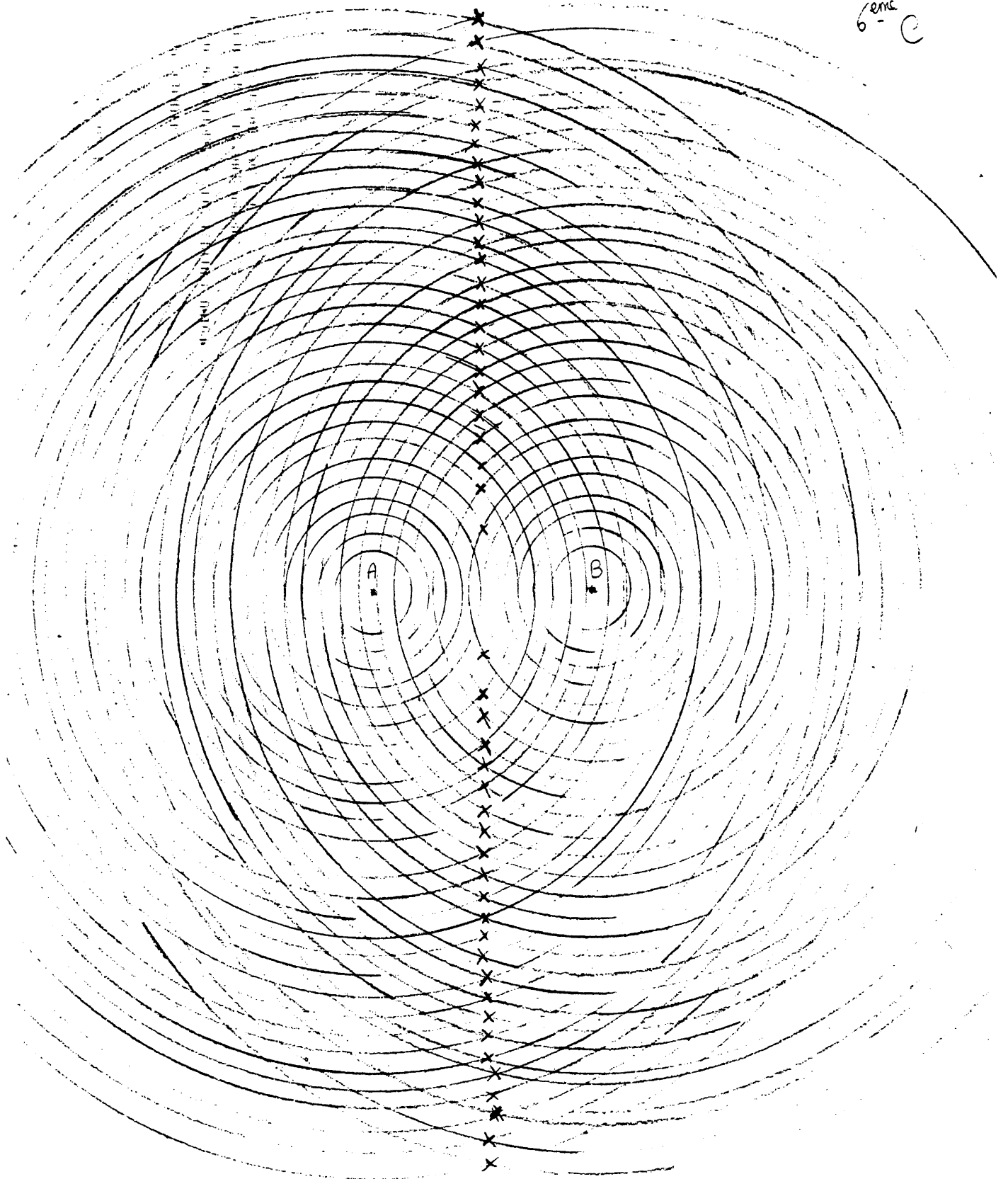
- Ses points paraissent alignés ; on admettra que «la médiatrice est une droite».
- «Le milieu des points A et B est un point de la médiatrice» : la définition permet de le montrer.
- Les élèves remarquent que la médiatrice est perpendiculaire à la droite AB.

Le pliage de la feuille, qui amène A sur B, permet de confirmer toutes ces observations.

CONSEILS PRATIQUES

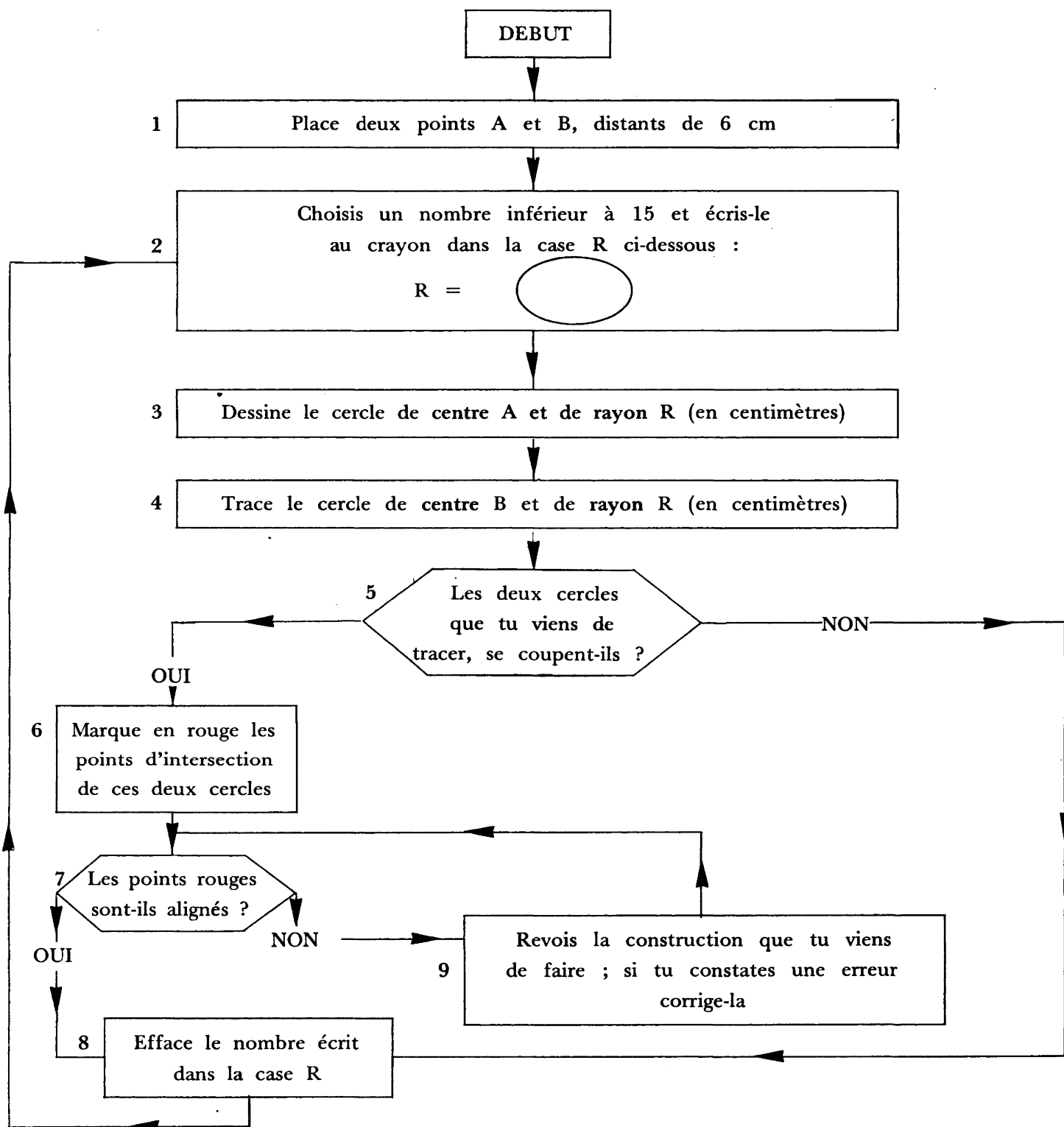
Il est souhaitable de présenter cette fiche après «TRACES DE CERCLES».

Valérie
6^{ème} C



MEDIATRICE

I - ORGANIGRAMME.



II

Si ton dessin est correct, tous les points rouges sont sur une même droite.

- Trace cette droite avec un crayon noir et appelle-la d .
- Pique la pointe de ton compas sur un point noir de cette droite d , puis trace le cercle ayant pour centre ce point et passant par A. Ce cercle passe-t-il par B ?

- Recommence plusieurs fois ce tracé, en prenant chaque fois un nouveau point noir de la droite d pour centre d'un cercle passant par A. Que constates-tu chaque fois ?

III

Imagine qu'une mouche se trouve sur un point rouge et qu'elle veuille aller en A ou en B.

A ton avis, duquel de ces deux points est-elle le plus près ? Pourquoi ?

QUAND UN POINT EST A LA MEME DISTANCE DE A ET DE B,
ON DIT QU'IL EST EQUIDISTANT DE A ET DE B.

Tous les points qui sont à la même distance de A et de B, dans le plan de ton dessin, forment une figure (ou un ensemble de points).

CET ENSEMBLE DE POINTS EQUIDISTANTS DE A ET DE B,
EST APPELE : LA MEDIATRICE DE A ET DE B.

IV

Les points rouges que tu as construits, sont-ils «à coup sûr» sur la médiatrice de A et de B ?

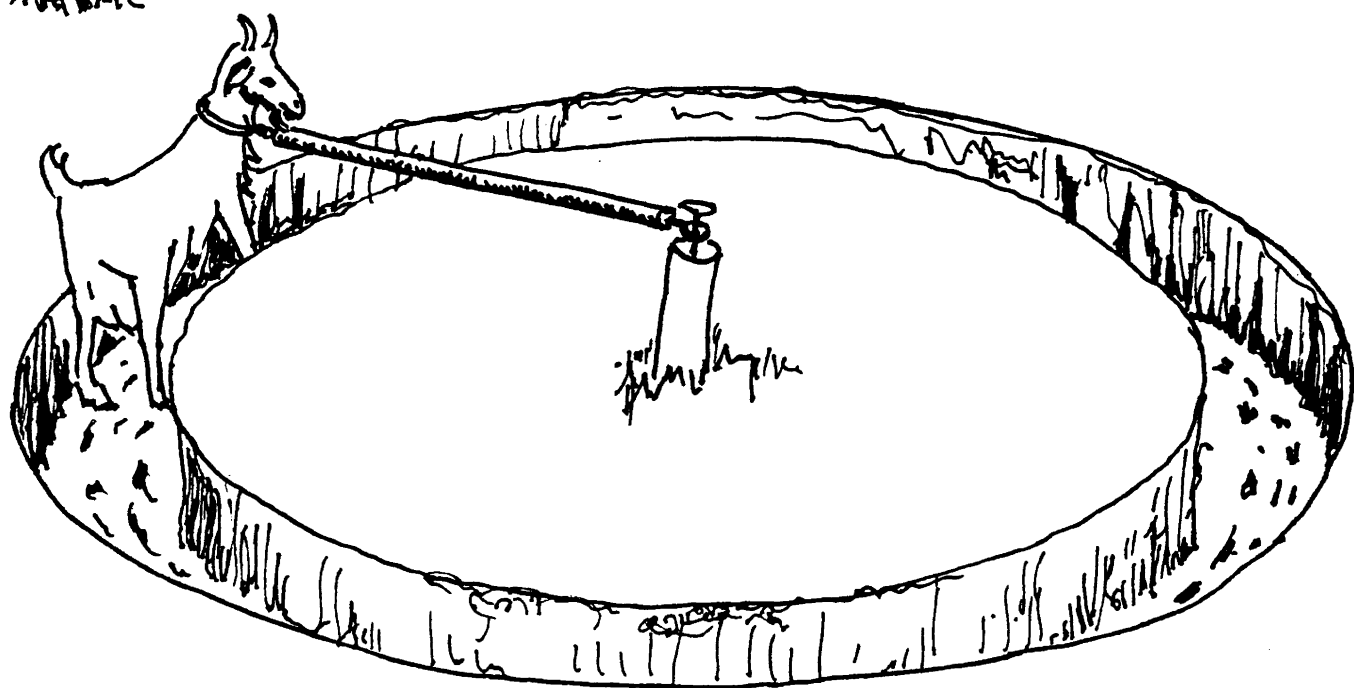
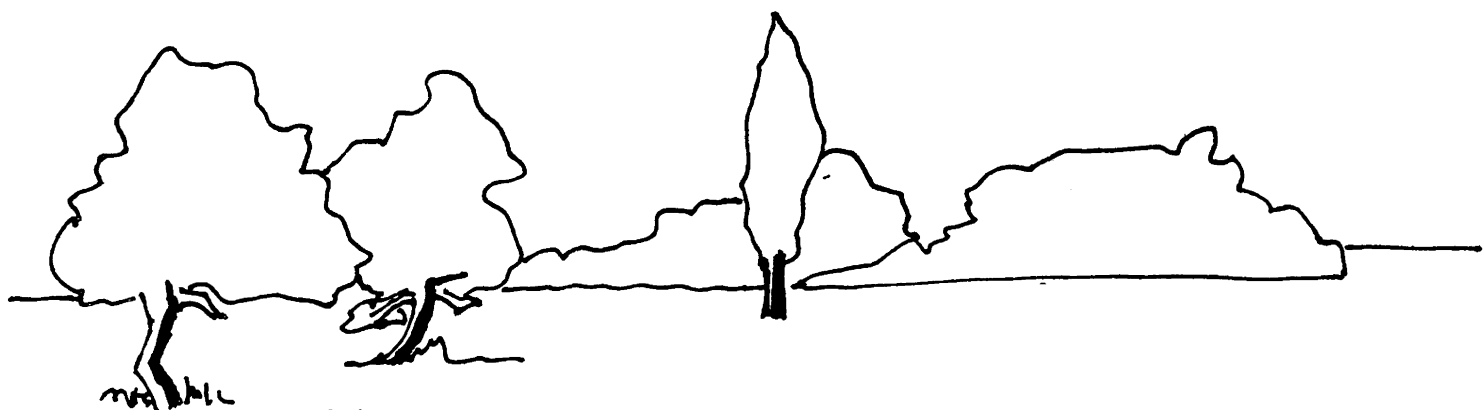
Peux-tu écrire ci-dessous les numéros des cases de l'organigramme qui te permettent d'affirmer que les points rouges sont équidistants de A et de B ? (si tu n'as pas fait d'erreurs de construction).

Peux-tu expliquer ce qui permet d'affirmer que les points rouges sont sur la médiatrice de A et de B ?

V

A ton avis, y a-t-il des points de la médiatrice de A et de B qui ne sont pas sur la droite d ?

Essaye d'expliquer ta réponse.



Ah! si son maître n'avait pas
peur des inégalités elle pourrait
enfin manger à satiété'.....



**«LA GRUE», «LES RADIO-AMATEURS», «LA CHEVRE»
ET «UN EXERCICE DE GEOMETRIE»**

Fiche signalétique

Il s'agit là de quatre activités indépendantes pouvant être présentées en 6ème, 5ème, 4ème. Les trois premières activités sont à support concret*, l'exercice de géométrie ne comporte par contre aucun habillage.

OBJECTIFS

— Permettre aux élèves d'effectuer des raisonnements relativement élaborés, à partir de situations concrètes simples, mais sur lesquelles les résultats n'apparaissent qu'après réflexion, simulations et constructions.

— Apprendre à modéliser des situations concrètes* : passage de la «flèche de la grue», «de la corde de la chèvre», de la «portée d'un poste émetteur» à la notion abstraite de rayon d'un cercle ou d'un disque ; passage du «pivot de la grue», du «piquet d'attache», de «l'angle du mur», du «poste émetteur» à la notion de centre du cercle ou du disque.

— Confronter les situations «totalement modélisées» (exercice de géométrie) aux situations dites «concrètes» (les trois premières activités).

INTERET DE CES ACTIVITES

— Utiliser la naïveté de la situation concrète pour inciter l'enfant à chercher lui-même une solution à un problème qui n'est pas évident a priori et qui serait compliqué, s'il était totalement formalisé. L'enfant se dit (consciemment ou non) : «Ce que la chèvre a découvert en tirant bêtement sur sa corde, je dois pouvoir le trouver en réfléchissant un peu !».

Le passage de la situation concrète au modèle peut se faire en classe avec une étape intermédiaire : La **simulation**. L'enfant peut en effet avec une punaise, une gomme, une ficelle, etc... simuler le travail de la chèvre et découvrir ainsi une ébauche de solution.

** Voir «commentaires» page 125.*

— Ces activités donnent l'occasion de sensibiliser positivement les enfants aux notions d'inégalité** et en particulier à l'inégalité triangulaire (cette dernière jouant quotidiennement un rôle fondamental dans ce que nous appelons communément des «évidences géométriques»).

— A propos de la confrontation entre «l'exercice de géométrie» et «les activités à support concret», il serait intéressant de remarquer avec les élèves que les raisonnements du modèle sont plus faciles à aborder, car aucun habillement ne risque d'introduire des confusions et des complications inutiles ; par contre, ce qui rend l'exercice du modèle difficile, c'est dans bien des cas l'absence de motivations !

MODALITES PRATIQUES.

Outre la possibilité d'intercaler l'exercice de géométrie entre deux activités à support concret, nous avons envisagé pour les trois premières activités plusieurs étapes dans la façon dont l'enfant pourra exprimer sa compréhension du problème.

1ère étape.

L'élève montre par le dessin les régions qui lui paraissent convenables. Ce procédé qui élimine les difficultés d'expression, met clairement en évidence ce que l'enfant a vu et ce qu'il n'a pas vu.

2ème étape.

L'élève décrit par oral (et ou) par écrit avec un vocabulaire approprié (je trace le cercle de centre P et de rayon 3 cm, ou, la chèvre décrit le disque de centre P et de rayon 3 m etc, etc...). Ceci lui permet une première abstraction, du dessin particulier vers une propriété plus générale.

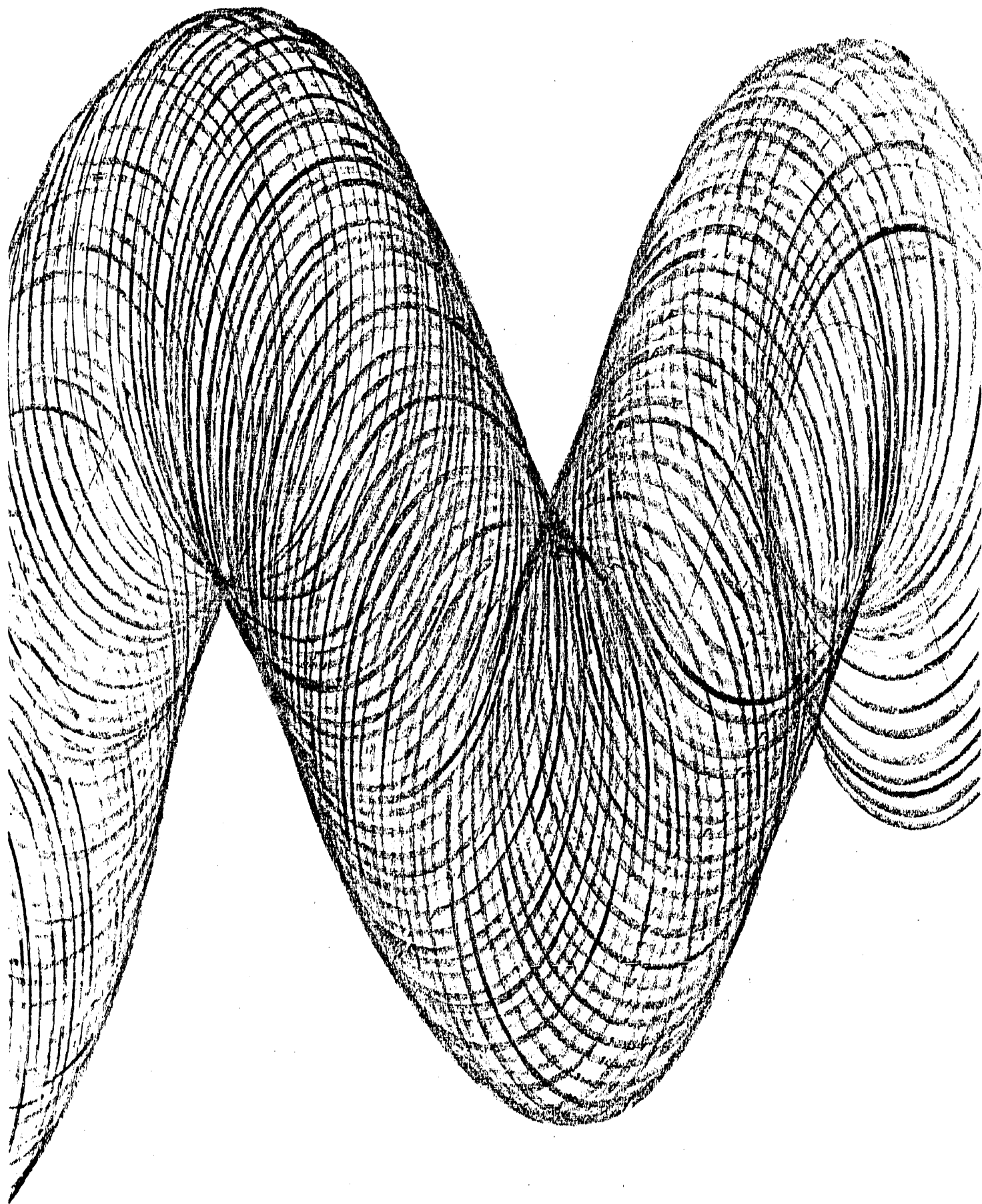
3ème étape.

L'enfant exprime à sa façon les raisons qui l'ont poussé à hachurer telle partie du dessin, et à ne pas hachurer telle autre.

4ème étape.

La classe essaye de rédiger collectivement un élément de démonstration reprenant les idées personnelles, tout en éliminant les imprécisions et les ambiguïtés des rédactions individuelles. (Voir un exemple de rédaction possible dans «commentaire sur l'inégalité triangulaire», situé dans la deuxième partie : «Quelques développements»).

** Voir «commentaires» page 125.

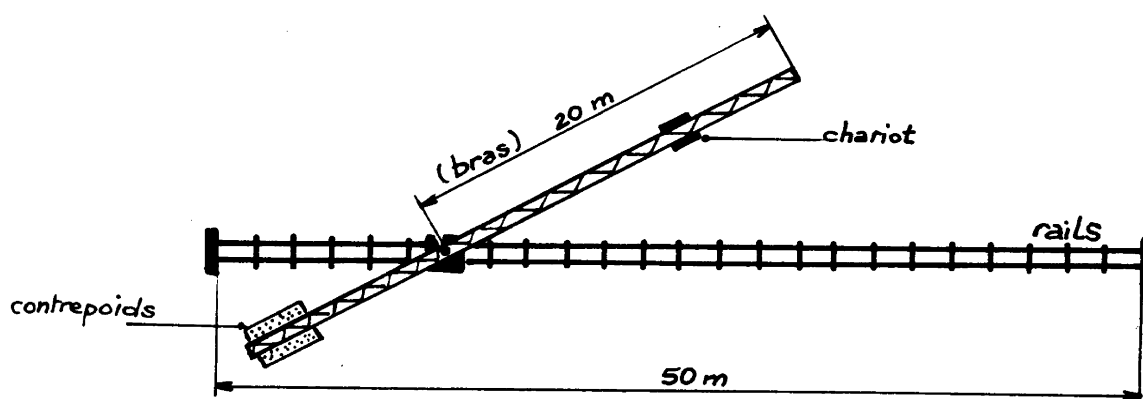


LA GRUE

- 1 Dans un chantier, une grue dont le bras mesure 20 mètres,
- peut tourner complètement sur elle-même,
 - peut se déplacer sur une voie ferrée de 50 mètres de long.

Un chariot, soutenant le crochet de levage, peut se déplacer tout le long du bras.

Voici une vue d'avion du chantier :



Fais un dessin, à l'échelle 1/500, pour représenter la région où la grue peut déposer des objets.

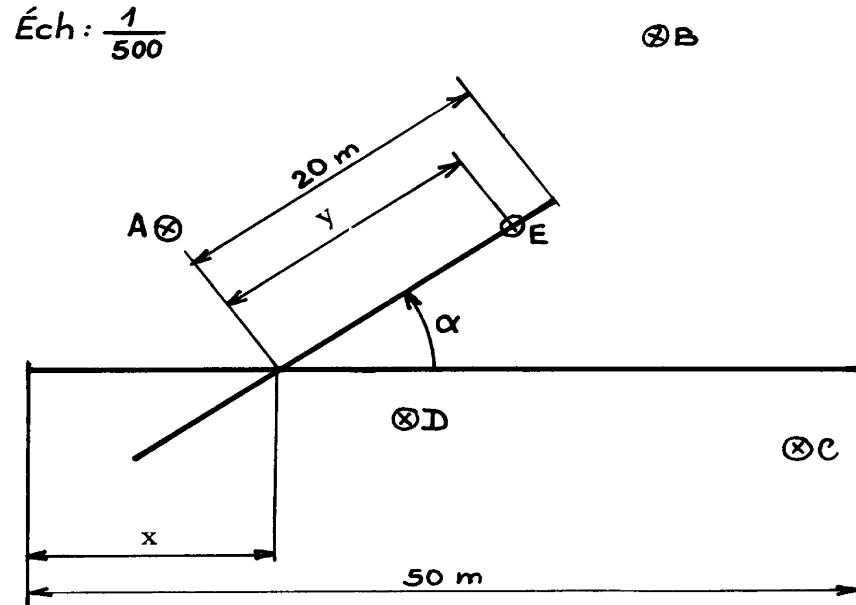
- 2 Le chariot soutenant le crochet est maintenant bloqué en bout de bras.

Fais un nouveau dessin, à l'échelle 1/500, pour représenter la région où la grue peut déposer des objets.

Explique ton dessin.

3 PROLONGEMENT :

Voici schématisée à l'échelle 1/500, la position de la grue, des rails et de certains objets déposés aux points A, B, C, D et E.



La grue peut-elle atteindre les objets placés en A, B, C et D ?

Un sac de pommes-de-terre a été placé en E.

Sur le terrain et sur le dessin ci-dessus, on peut repérer le point E par trois nombres $(\alpha ; x ; y)$:

- α est l'angle du bras de la grue et du rail ;
- x repère la position de la grue sur le rail ;
- y repère la position du chariot sur le bras.

Ces trois nombres sont appelés «coordonnées de E».

Ici sur le dessin on trouve pour E :

$$(\alpha = 35^\circ ; x = 3 \text{ cm} ; y = 3,4 \text{ cm}).$$

Es-tu d'accord ?

Peux-tu donner les coordonnées correspondant à ce point E sur le terrain ?

Un sac de bananes est situé en un point G, de coordonnées *sur le dessin* $(\alpha = 50^\circ ; x = 6 \text{ cm} ; y = 2 \text{ cm})$.

Un sac de caramels mous est situé en un point H, de coordonnées *sur le terrain* $(\alpha = 240^\circ ; x = 50 \text{ m} ; y = 15 \text{ m})$.

Sur le dessin ci-contre, place les points G et H.

La grue peut-elle prendre les trois sacs placés en E, G et H (pommes-de-terre, bananes, caramels mous) ?

Peut-elle déposer ces sacs dans un camion situé en C ?

Au moment d'effectuer ces manœuvres, le moteur qui commande le déplacement du chariot, tombe en panne et le chariot reste bloqué en bout de bras ($y = 20$ m).

Penses-tu que la grue puisse encore prendre chacun des trois sacs et les disposer ensuite sur le camion ?

Si tu crois les manœuvres possibles, explique pourquoi et donne les coordonnées correspondantes pour les points E, G, H et C.

LES RADIO-AMATEURS 1

1 — Prends la carte de la Drôme.

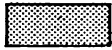
Un radio-amateur qui habite Montélimar a un poste émetteur d'une portée de 45 km.

Représente sur la carte la région de la Drôme où il est possible de l'entendre : tu feras un trait de couleur pour marquer la limite de cette région.

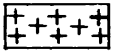
2 — Deux autres radio-amateurs sont situés :

- l'un à Valence, avec un poste émetteur de 30 km de portée ;
- l'autre à Die, avec un poste émetteur de 20 km de portée.

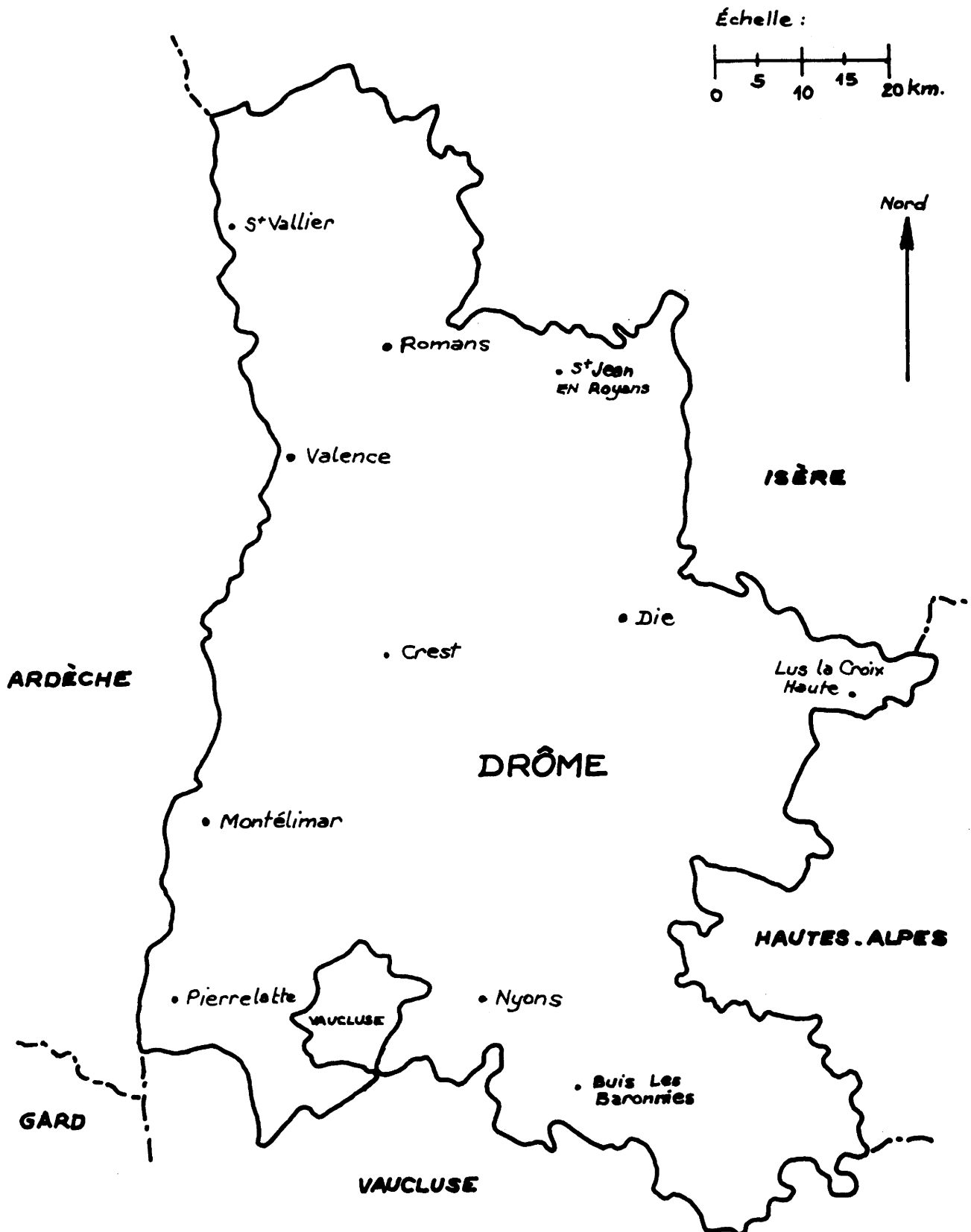
Tu vas représenter différentes parties de la Drôme :

en pointillés  celle où l'on n'entend aucun des 3 radio-amateurs ;

avec des rayures  celle où l'on entend un et un seul radio-amateur ;

avec des croix  celle où l'on entend deux des trois radio-amateurs ;

avec d'autres rayures  celle où l'on entend les 3 radio-amateurs.



LA CHEVRE 1

Tu effectueras tous les dessins avec précision à l'échelle 1/100 :

- 1 mètre sur le terrain correspond à 1 centimètre sur le dessin.
- 17 centimètres sur le dessin correspondent à 17 mètres sur le terrain.

Pour faciliter tes explications, on a placé une boussole à côté de chaque dessin.

Voici quatre consignes notées **A, B, C, D** :

- A** Effectue à l'échelle 1/100 le dessin représentant la partie du terrain que la chèvre peut brouter.
- B** Décris avec précision la partie accessible à la chèvre.
- C** Essaie d'expliquer pourquoi tu es sûr(e) de ta solution.
- D** Calcule l'aire de la zone accessible à la chèvre.

1

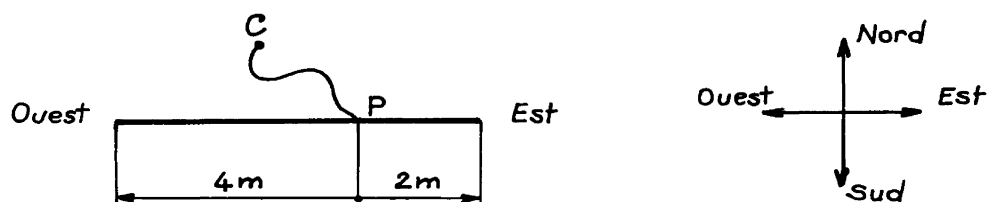
Une chèvre C est attachée dans un pré à un piquet P par une corde de 3 mètres.

Suis les consignes **A, B** et **D**.

2

La chèvre C est maintenant attachée en P, à une barrière (orientée Est-Ouest).

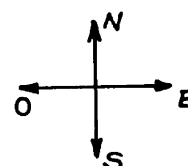
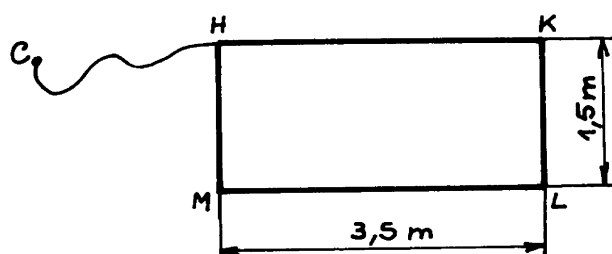
Suis les consignes **A, B** et **C**.



3

a) La chèvre C est maintenant attachée au coin H d'un hangar, avec la même corde.

Suis les consignes A, B et C.



b) La chèvre est toujours attachée au coin H du hangar, mais avec une corde de 5 mètres.

Suis les consignes A, B et D.

c) La chèvre est encore attachée au coin H du hangar, et cette fois la corde mesure 6 mètres.

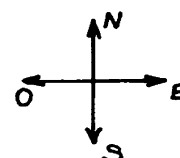
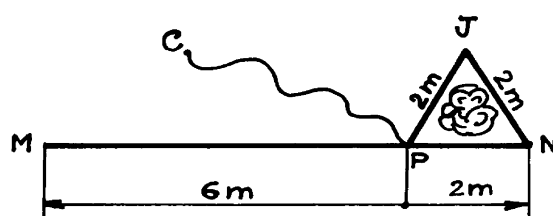
Suis la consigne A. Quelles remarques peux-tu faire ?

4

La chèvre C est attachée au coin P d'une palissade, disposée en triangle autour d'un arbre. De plus, comme le montre le dessin, une palissade de longueur 6 mètres limite le pré.

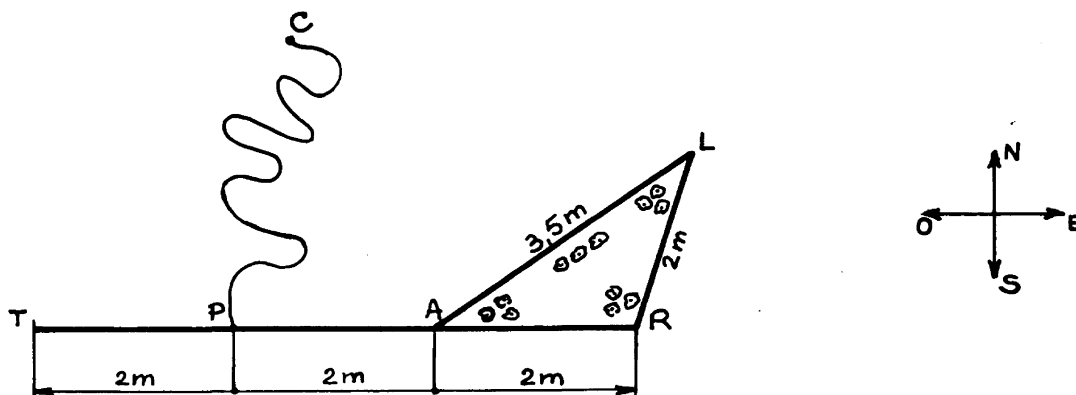
La corde a une longueur de 6 mètres.

Suis les consignes A et B.



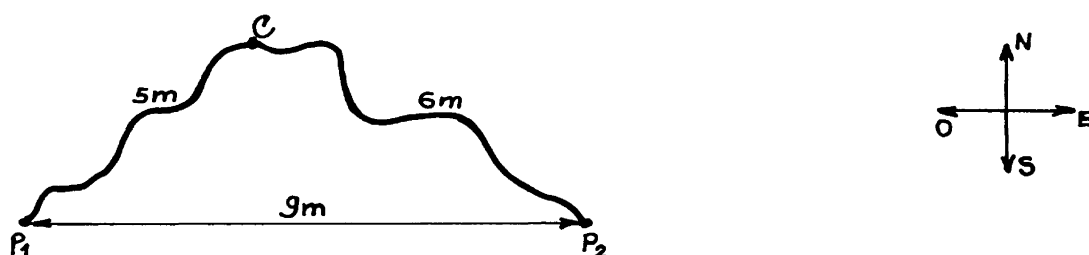
5

La chèvre C est attachée à une palissade en P.
 Cette palissade limite le pré, ainsi qu'un massif de fleurs.
 La corde a une longueur de 7,5 mètres.
 Suis les consignes A, B et C.



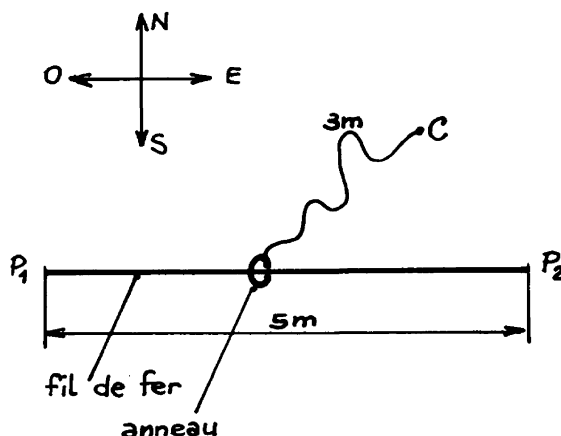
6

La chèvre C est attachée à deux piquets P_1 et P_2 distants de 9 mètres, par deux cordes de longueurs respectives 6 mètres et 5 mètres.
 Suis les consignes A et B.



7

Un fil de fer est tendu entre deux piquets distants de 5 mètres.
 La corde mesure 3 mètres. Une extrémité de la corde est fixée à un anneau, qui coulisse le long du fil de fer.
 L'autre extrémité de la corde est attachée à la chèvre.
 Suis les consignes A, B, C et D.

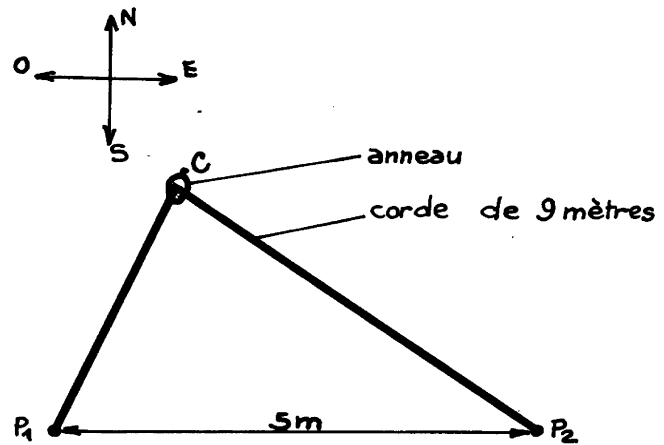


8

Une corde de 9 mètres est fixée par ses deux extrémités à deux piquets distants de 5 mètres.

La chèvre est maintenue à la corde par un anneau qui peut coulisser le long de la corde.

Suis la consigne A.



EXERCICE DE GEOMETRIE

Trace un segment de longueur 6 cm.
Appelle les extrémités de ce segment, A et B.
Trace le cercle de diamètre AB. Appelle O son centre.
Trace le cercle de centre B qui passe par O.
Marque en rouge les points d'intersection des deux cercles.
Appelle ces points D et E.
Trace la demi-droite d'origine A contenant D.
Trace la demi-droite d'origine A contenant E.

* Quelles remarques peux-tu faire à propos du cercle de centre B et de rayon BO ?

* Sans utiliser la règle graduée, donne des renseignements sur les côtés du triangle OBE. Explique ta réponse.

* Quelle est la nature du triangle OBE ?

* Que peux-tu dire du quadrilatère ODBE ?

AVERTISSEMENT

Ce chapitre ne se présente pas comme les autres : au lieu d'être la juxtaposition d'activités indépendantes portant sur un même thème, il se présente *un peu sous la forme d'un cours achevé* permettant de découvrir la notion d'angle (1ère partie), de l'exploiter (2ème partie), de l'utiliser pour mettre en évidence des propriétés qui, une fois admises, permettent d'en «démontrer de nouvelles» (3ème partie).

Il nous a paru intéressant de montrer comment l'esprit des activités, proposé dans les autres chapitres, s'adapte et a sa place dans le déroulement d'un cours structuré.

En effet, il nous est souvent objecté que l'esprit de nos activités, bien séduisant a priori et bien adapté à des cours exceptionnels de fin de trimestre ou de fin d'année (quand les élèves ne veulent plus rien faire de sérieux !), est totalement inopérant si l'on veut «*faire son cours et couvrir le programme*». Nous ne le pensons pas !

Bien au contraire, les expériences menées dans les classes nous ont montré que l'on pouvait traiter très sérieusement et très efficacement (même si la forme utilisée est souvent celle du jeu) les points essentiels du programme, en fournissant aux élèves des activités du genre de celle que nous proposons dans ce fascicule, et en «créant sur place son cours» à partir des réactions spontanées des enfants. Dans ces conditions et contrairement au schéma classique (où les explications du professeur précèdent les besoins des élèves), nous avons constaté que les apports théoriques du professeur sont beaucoup mieux perçus et enregistrés lorsqu'ils répondent à une interrogation, à une attente des élèves ; et ce, malgré le côté un peu décousu des diverses interventions (côté décousu qui gêne plus le professeur lui-même que ses élèves) ; c'est entre autres ce que «peut prouver» ce chapitre.

La première partie «Installation de la notion d'angle» s'adresse plus particulièrement aux élèves de 6ème ; mais elle peut très bien servir de test en 5ème, car elle est rédigée de telle façon que l'élève puisse essentiellement se débrouiller seul.

La deuxième et surtout la troisième partie correspondent mieux au niveau de réflexion d'une classe de 5ème. Les interventions du professeur et les mises en commun seront souvent nécessaires.

Chapitre ANGLES

Première partie : ROTATIONS ET ANGLES.

I – Rotation avec une boussole : Introduction de la notion d'angle par les rotations	1
II – Unités d'angle : Les fractions de tour complet, les degrés, les grades	4
III – Instruments de mesure des angles : Les rapporteurs didactiques circulaires	6
IV – Au bout du compte : un angle qu'est-ce-que c'est ?.....	9
V – Somme des angles. Angles complémentaire et supplémentaire : Applications aux rapporteurs du commerce	14
VI – Contrôle.	22
VII – Approfondissement. «Les angles opposés par le sommet» : Quelques raisonnements déductifs	23
VIII – Le ministre et son pilote : Jeu avec repérage en coordonnées polaires	26
Deuxième partie : LES ANGLES ET LES COTES D'UN TRIANGLE	30
Troisième partie : CHALMONT - Cas d'égalité des triangles	38
Prolongements	51

ANGLES

Fiche signalétique

OBJECTIF

- *Installer* solidement et concrètement la *notion d'angle* à partir des rotations et de très nombreuses mesures et constructions (1ère partie).
- *Faire découvrir* de façon quasiment statistique *quelques propriétés géométriques*, et découvrir *ce qu'est une propriété* (2ème et 3ème parties).
- *Apprendre à utiliser les propriétés* découvertes et admises, *comme des outils* permettant de découvrir et de démontrer de nouvelles propriétés (3ème partie).

INTERETS.

- L'introduction des angles par les *rotations* nous est apparu comme un choix particulièrement intéressant et nous nous en expliquons longuement dans les remarques qui suivent (c.f. page 143).
- Les activités proposées sont : soit individuelles et permettent de *respecter le rythme propre* de chaque enfant (1ère partie)
soit par binôme sous forme de jeu et conduisent à la *confrontation des idées* et des méthodes (2ème et 3ème parties).
La «forme jeu» que nous avons adoptée à plusieurs reprises doit permettre de libérer les énergies nécessaires pour surmonter les difficultés soulevées par des questions qui ne sont pas toujours faciles.
- Les *dessins, les découpages*, les mesures et constructions que l'on peut toujours placer au début de chaque séance *doivent permettre* à chaque fois de *remettre tout le monde en route*, même si à la fin de l'heure précédente, certains enfants ont été un peu dépassés par des raisonnements auxquels ils ne sont pas du tout habitués.



QUELQUES REMARQUES SUR LES CHOIX ET LES METHODES DE CE CHAPITRE

I – AU SUJET DE L'INTRODUCTION DES ANGLES PAR LES ROTATIONS.

Tout d'abord disons que tant pour le fond que pour la forme, nous *reprenons dans cette première partie* les méthodes utilisées dans les *fiches SMP**. Nous avons été nombreux à utiliser ces fiches dans les classes et elles ont donné des résultats très positifs.

Indépendamment de ce fait, voici résumées ici les *principales raisons de fond* qui nous *ont conduit à adopter les rotations* pour introduire les angles, et les raisons qui nous poussent à être très *réservés vis à vis* de la présentation des angles comme *classes d'équivalences de secteurs angulaires*, secteurs vus eux-mêmes comme intersection de demi-plans !

L'aspect dynamique de la rotation, qui suscite l'action chez l'enfant (action de se tourner d'une direction dans une autre), nous est apparu à l'usage comme un excellent moyen *d'aborder directement*, et dans son essence même, *la notion d'angle* ; notion simultanément abstraite et visuelle, objet d'un quotient, mais qui est pleinement représenté par chaque représentant.

Par exemple, le fait de demander à chaque enfant d'effectuer une «rotation du tableau vers la fenêtre» suscite chez bon nombre d'entre eux la question : «est-ce que je dois aller juste devant le tableau pour effectuer cette opération» ? Quand les enfants réalisent qu'ils effectuent tous la même opération (tourner d'un quart de tour) à partir d'emplacements très différents, *«ils sont déjà dans le quotient»*, c'est-à-dire qu'ils abordent l'angle directement dans ce qu'il est réellement.

A l'opposé, d'une façon apparemment «moins scabreuse» sur un plan mathématique, et qui a «l'avantage» de fournir un champ d'application au vocabulaire ensembliste, la présentation par les classes d'équivalence de secteurs angulaires *éloigne terriblement les enfants de la notion «d'ouverture»* d'un secteur angulaire, c'est-à-dire de la notion d'angle.

(*) S.M.P. : School - Mathematics - Project (Cambridge University Press).

Pour tous renseignements : S.M.P. office, Westfield College
London N.W.3.7.S.T.

En effet, puisqu'un *objet* qui «*naît d'un quotient*» reste pour la plupart des élèves, petits et grands, un objet «*insaisissable*» (même si en principe un passage au quotient est toujours simplificateur), dans cette présentation les enfants s'accrochent tout naturellement aux seuls objets tangibles en présence, c'est-à-dire à ceux qui existaient avant que l'on effectue le passage au quotient. Par suite, nous *craignons* que *cette présentation entraîne les enfants sur une fausse piste*, car elle les pousse à ne garder de l'angle que l'aspect secteur angulaire, c'est-à-dire *ensemble de points ayant une position déterminée dans le plan, et couvrant une certaine surface*. (cf. l'affirmation de Basile page 9).

Pour revenir à la présentation des angles par les rotations, les enfants sentent très vite que la distance du centre de rotation aux points que l'on vise n'a pas d'importance (notion de direction) : celui qui est juste devant le tableau ou juste à côté de la fenêtre doit fournir le *même effort, le même travail, passer autant de temps* que celui qui est à l'autre extrémité de la classe pour «*tourner du tableau vers la fenêtre*». C'est là encore, une façon concrète de saisir cette notion abstraite «*de combien on tourne ?*», «*quelle est l'amplitude de la rotation ?*».

Enfin et surtout, pour que *cette notion d'angle ne soit pas de ces notions* que l'on passe beaucoup de temps à introduire et dont on ne fait rien une fois qu'on les a, il nous a paru fondamental que l'aspect dynamique et gestuel de la rotation ne confère pas seulement à l'angle un aspect qualitatif, mais qu'il permette aussi de le quantifier : *il ne suffit pas de dire que l'on tourne ! Il faut pouvoir évaluer, mesurer de façon très précise de combien on tourne !* L'utilisation des différents rapporteurs circulaires et demi-circulaires, proposée tout au long du chapitre, n'a pas pour but l'apprentissage d'une technique par répétition ! Non, l'intention pédagogique, ici, est tout autre ! Pour nous, *mesurer un angle avec un rapporteur, trouver quelle est la fraction de tour balayée pour passer du Sud au Nord-Est, c'est, toujours, chercher à atteindre l'angle* dans ce qu'il est intrinsèquement.

Là encore, il nous semble que *l'introduction par les classes de secteurs conduit à une impasse*. Comment relier naturellement et rigoureusement la mesure au moyen d'un rapporteur (objet naïf et peu précis) avec l'intersection de deux demi-plans !!! Il suffit d'ailleurs de consulter les manuels pour constater que, dans la plupart des cas, après avoir passé un certain temps à regrouper les secteurs angulaires à l'aide d'une relation d'équivalence (ou tout autre sorte de pirouette) *on énonce une belle définition et puis on passe à autre chose !* c'est-à-dire *qu'on ne fait rien ou presque ...* et ce, précisément parce que l'objet, tel qu'il a été introduit, est inutilisable. D'autres manuels de premier cycle résolvent très élégamment ce problème des angles : *ils n'en parlent pas du tout !* Or, pour nous, *faire de la géométrie en refusant* (sous prétexte du programme ... etc ...) *de parler d'une donnée aussi fondamentalement présente dans toute figure géométrique, c'est refuser de prendre en compte*

les acquis des élèves et les données immédiates des situations. Nous nous sommes élevés avec force contre cette façon de faire dans l'introduction, car «cette nécessité de prendre en compte les acquis des enfants» est certainement une des convictions les plus profondes de notre groupe de travail.

Pour revenir à l'introduction des angles par les rotations et leurs mesures, nous avons *confondu* (de façon qui nous paraît parfaitement justifiée en 1er cycle, car cela n'induit pas de fausse représentation de l'angle), l'angle et sa mesure, l'angle et un *quelconque* de ses représentants.

Cela permet, par exemple, de parler très simplement et très naturellement de la *somme de deux angles*, aussi bien comme *composée de rotations*, que comme *juxtaposition de secteurs angulaires*, ou comme *somme de mesures*.

Alors que le secteur angulaire et l'angle correspondant sont deux objets de nature très distincte, l'angle, la rotation et la mesure (de cette rotation ou de cet angle) sont sur le même plan. Ceci nous a conduit à ne pas les distinguer au niveau de l'écriture. Ainsi nous estimons correcte la phrase suivante : «Je prends un «angle $\hat{A}$ », je le mesure et trouve 47° , alors j'écris : $\hat{A} = 47^\circ$! si maintenant je mesure un autre «angle $\hat{B}$ » et que je trouve encore 47° , j'écirai : $\hat{A} = \hat{B}$ et je dirai que les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont égaux !».

Ces confusions de terminologie et d'écriture sont critiquables sur un plan purement mathématique, elles nous sont apparues comme nécessaires si l'on voulait garder disponible chez les enfants suffisamment d'énergie pour qu'ils distinguent effectivement ce que représente véritablement l'angle, de ce qu'il ne représente pas. En particulier il nous semble fondamental que l'enfant arrive à percevoir l'angle :

- Indépendamment «de la longueur dessinée de ses côtés».
- Indépendamment du secteur angulaire qui l'a supporté.
- Indépendamment de l'instrument de mesure et de la position de cet instrument.
- Indépendamment de l'unité d'angle choisie (car on a la référence au tour complet).
- Indépendamment du sens de rotation*.

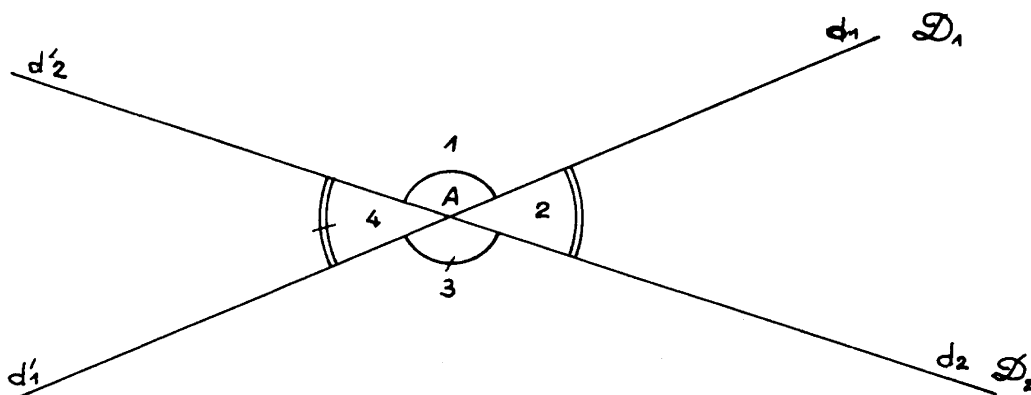
L'expérience montre que ces objectifs peuvent être atteints en 6ème-5ème, si l'on accepte de «perdre beaucoup de temps» à effectuer de très nombreuses constructions et mesures.

Nous croyons nécessaire de ne pas «ergoter» sur le vocabulaire et sur les notations à propos d'une notion qui est difficile en soi ; car une certaine imprécision dans l'écriture et le langage fournit la souplesse indispensable pour respecter la diversité de la classe.

* Cf remarque au verso.

Notre rôle consiste alors à utiliser le point de vue que l'élève aime bien (et qui n'est pas le même pour tous) pour l'aider à aborder le point de vue qu'il aime moins bien.

Par exemple, au § VII de la première partie, nous proposons de regarder la propriété «*Deux angles opposés par le sommet sont égaux*».



La *compréhension de l'angle par la rotation* rend cette propriété «quasi-évidente», car la rotation qui amène la demi-droite d_1 sur d_2 , c'est précisément celle qui amène d_1' sur d_2' . (Sinon $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont plus droites).

Nous suggérons aux enfants cette méthode qui apparaîtra comme une «évidence très nette» à certains et qui ne déclenchera rien chez d'autres. Pour tenir compte de ces derniers et pour proposer une autre méthode de travail aux premiers, nous donnons ensuite une «démonstration» *par les angles supplémentaires*, de nature très différente ; et nous pensons qu'il est important qu'aucun de ces deux points de vue ne soit rejeté.

* Remarque.

Notons que l'aspect rotation introduit a priori une *difficulté supplémentaire* : «*le sens dans lequel on tourne*», précision très utile dans certaines circonstances, mais qu'il faut oublier pour atteindre la notion d'angle.

D'une part, nous constatons que la difficulté introduite n'est pas considérable et, (à la limite) si les enfants persistent pendant un temps à attacher un sens de rotation à chaque angle, il n'y a là rien de très catastrophique !

D'autre part, nombreux sont les problèmes où l'angle orienté est nécessaire (orientation sur une carte, coordonnées polaires, dessin industriel et technologie, fonctions trigonométriques, etc...).

Il nous semble *plus facile d'oublier l'orientation* d'un angle quand ce renseignement ne sert à rien, que de le *rajouter après coup*.

Et que dire alors du problème soulevé par les rotations de plus d'un tour complet ! Problème qui n'est pas du tout pris en charge par les angles. (Heureusement qu'une voiture ne revient pas au point de départ à chaque tour de roue !).

DEROULEMENT DES ACTIVITES :

La première partie est suggérée ici sous forme de travail individuel ou par groupe de deux, *elle permet de respecter le rythme de chacun*. Pour éviter l'intervention permanente du professeur, *la progression est assez lente*. Bien entendu, surtout lorsqu'il s'agit d'élèves de 5ème, il est possible de supprimer des paragraphes. Mais il nous semblerait très néfaste de supprimer les activités de mesurages ou de les renvoyer à la maison pour ne garder que la partie plus théorique en classe : c'est l'esprit même dans lequel ont été écrites ces activités qui serait alors profondément altéré. *Les remarques et questions suscitées par ces activités de mesurage, lorsqu'elles sont répercutées sur le vif dans la classe, ont une portée très supérieure à tous les beaux discours qu'on pourra faire sur les angles*. La première partie se termine sur un jeu : «*Le premier ministre et son pilote*» ; il s'agit d'une activité mathématique qui serait certainement considérée par les élèves comme trop difficile, si elle n'était pas traitée effectivement sous forme de jeu.

Cette activité sur les coordonnées polaires doit permettre de vérifier la bonne compréhension de la notion d'angle, et peut contribuer à mettre au clair ce qui était encore un peu flou.

La deuxième partie «*Les angles d'un triangle*» fait le lien entre la première partie où l'on installe la notion d'angle et la troisième partie «*Chalmont ou les cas d'égalité des triangles*» où l'on utilise les notions d'angles pour aborder un autre problème : *la découverte de propriétés géométriques* et surtout la *découverte de ce qu'est une propriété* (géométrique).

Certains énoncés sont *découverts de façon quasi statistique* : répétitions par des personnes différentes, partant de figures différentes, de mesures et de constructions conduisant sur certains points aux «*mêmes résultats*» (aux erreurs et imprécisions près).

On constate qu'un autre énoncé, d'apparence similaire, peut être totalement faux ! d'où l'idée de *contre-exemple* et de prudence mathématique.

Ainsi : — la somme des angles d'un triangle est accompagnée d'une interrogation sur la somme des côtés d'un triangle (page 32).

— l'inégalité triangulaire est accompagnée d'une interrogation sur ce que pourrait être une «*inégalité angulaire*» dans un triangle ! (page 47).

— la connaissance d'un triangle par la longueur de ses trois côtés est comparée à la connaissance d'un triangle par la donnée de ses trois angles ! (page 45) etc ...

Toutes ces démarches relativement abstraites sont supportées par des constructions, des dessins, et surtout le jeu.

Chalmont est un jeu dans lequel chaque élève est tour à tour *un client* voulant acheter une maison, et *un architecte* construisant le plan de la maison choisie par un autre.

C'est de la *confrontation* entre les vœux des «clients» et les réalisations des «architectes» que naîtra l'idée de «bons cas d'égalité des triangles» (ceux qui permettent de transmettre sans risques d'erreur les vœux des clients) et de «mauvais cas d'égalité des triangles» (ceux qui permettent à l'architecte de construire un chalet autre que celui demandé par son client, tout en respectant scrupuleusement les consignes que ce dernier lui avait transmises).

Bien plus que les propriétés elles-mêmes (cas d'égalité qui ne sont pas explicitement au programme), c'est ce *que représente une propriété* qui est mis en lumière par une recherche qui peut à première lecture apparaître comme trop longue.

La fin du chapitre est consacrée à *l'utilisation des outils* «Propriétés découvertes et admises» pour fabriquer d'autres outils (théorème) et résoudre des problèmes inconnus, ou connus des enfants (mais dont la solution connue n'avait pas trouvé d'explication logique).

Par exemple, nous cherchons à *construire avec pour seuls instruments la règle et le compas* :

- Le partage d'un cercle en six, puis douze parties égales.
- La bissectrice d'un angle.
- Un angle égal à un angle donné.
- Des angles de 30° , 45° , 60° , 90° .

Dans chaque cas nous suggérons d'aider les enfants à expliciter le plus possible leurs démonstrations.

Apprendre aux enfants à expliciter et à formaliser, c'est à notre sens :

- fournir une méthode de travail et de recherche, quand l'enfant ne voit pas bien dans quelle direction chercher ?
- fournir une méthode de contrôle de ce qu'il a réellement compris, quand l'enfant croit avoir tout saisi !

Toutefois, et pour des raisons qui nous paraissent évidentes au niveau premier cycle, *nous n'avons jamais cherché à faire la distinction* entre «axiomes» et «propriétés clairement formulées et admises».

Ce qui nous paraît, par contre, fondamental à ce niveau, c'est que toute «*propriété à admettre*» naisse progressivement de l'expérimentation et *rende clairement compte des diverses expériences*. La difficulté ici, c'est de faire comprendre aux enfants, que la multitude des expérimentations ne peut en aucun cas «prouver la validité» d'un énoncé, alors qu'une seule expérience contredisant un énoncé «prouve» que cet énoncé ne sera jamais une propriété admise ou démontrée.

Ainsi, quand nous disons : «*Si tout le monde est d'accord, nous admettons cette propriété*», il faut prendre garde à ce que cette phrase *ne soit interprétée* comme l'implication : « Si (tout le monde pense que cela est vrai), alors (c'est vrai !) ».

Notre phrase a la signification suivante : *il ne peut être question* d'admettre comme « toujours vraie » une assertion qui ne serait pas bien comprise par certains d'entre nous et (ou) qui serait mise en doute par d'autres !

Une propriété admise n'ayant d'intérêt dans la classe que si elle est *comprise et reconnue comme vraisemblable par toute la communauté, il est* fondamental que s'expriment les objections et les doutes, qu'on en discute, et qu'on puisse surmonter les réticences ; *quitte à repousser le moment où l'on* pourra donner à cet énoncé le statut de *propriété admise par la classe* !

ROTATIONS ET ANGLES

I – ROTATIONS AVEC UNE BOUSSOLE.

1

Lève-toi. Mets-toi en face du tableau.

Tourne jusqu'à ce que tu sois à nouveau face au tableau.

Tu as fait un tour complet.

2

Mets-toi en face du tableau.

Tourne jusqu'à ce que tu sois en face du mur qui était derrière toi.

Quelle fraction de tour complet as-tu fait ?

3

Mets-toi en face du tableau.

Tourne jusqu'à ce que tu sois en face des fenêtres.

Quelle fraction de tour as-tu fait ?

Le sens dans lequel tu as tourné a-t-il de l'importance ?

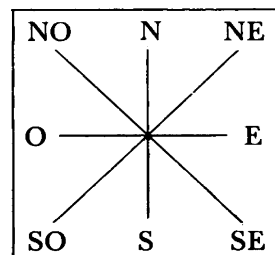
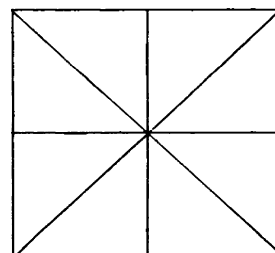
4

Découpe un carré de 16 cm de côté, dans une feuille de papier.

En le pliant en deux, de différentes façons, tu obtiens ces lignes de pliure.

Dessine ensuite ces lignes avec une règle pour transformer ton carré de papier, en une boussole.

Tu auras besoin de la boussole que tu viens de faire.



5

Imagine-toi debout, au milieu de la boussole, face au nord.

Tourne d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre : 

Tu es maintenant face à l'est.

Nous dirons que tu viens d'effectuer une rotation du nord à l'est, dans le sens des aiguilles d'une montre.

C'est une rotation d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre.

Si tu n'as pas compris, interroge-moi.

6

Imagine-toi au centre de ta boussole, face au nord.

Fais un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre : 

En face de quelle direction es-tu après cette rotation ?

7

Imagine-toi au centre de ta boussole, face à l'ouest.

Fais un demi-tour dans le sens des aiguilles d'une montre : 

En face de quelle direction es-tu après cette rotation ?

8

En face de quelle direction es-tu après chacune des rotations suivantes :

a) Mets-toi face au nord et fais trois quarts de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre : 

b) Mets-toi face à l'est et fais un quart de tour dans ce sens-ci : 

9

Quelle fraction de tour faut-il pour tourner de l'est à l'ouest, dans ce sens-là : 

10

Quand tu fais un quart de tour (par exemple du nord à l'est dans ce sens-ci :  ou du nord à l'ouest dans ce sens-là : ) on dit que tu effectues une rotation d'un angle droit.
Donne d'autres exemples de rotations d'un angle droit.

11

Quand tu fais un demi-tour (par exemple de l'est à l'ouest dans ce sens-ci :  ou ce sens-là : ) on dit que tu effectues une rotation d'un angle plat.
Donne d'autres exemples de rotations d'un angle plat.

12

A quel angle correspond chacune des rotations suivantes :

- a) du sud à l'ouest, dans ce sens-ci : 
- b) de l'ouest au sud, dans ce sens-là : 
- c) de l'est au nord, dans ce sens-là : 
- d) du nord-est au sud-ouest, dans ce sens-ci : 

II – UNITES D'ANGLES.

1

Avec quels instruments peux-tu reconnaître des angles plats ? des angles droits ?

Dessine un angle qui ne soit ni droit, ni plat.

Peux-tu évaluer la fraction de tour qu'il représente ?

Un petit test :

2

Peux-tu manger une tartine en $1/1000$ de jour ? en 1 minute ?

Si tu fais bouillir un œuf pendant $1/288$ de jour, sera-t-il à point ? mollet ? ou dur ? Et si tu le fais bouillir pendant 5 minutes ?

En rentrant chez toi, pose ces questions à tes proches, peut-être auront-ils du mal à répondre instantanément, car personne n'a l'habitude de parler en fraction de jour.

Par contre, si tu parles d'heure, de quart d'heure, de minutes, tout le monde voit bien de quoi il s'agit. Et pourtant il s'agit de fractions compliquées au départ.

En effet : 1 heure = $1/24$ de jour

1 minute = $1/60$ d'heure = ... de jour ?

1 seconde = ... de minute = ... d'heure = ... de jour ?



3

Quand on peut évaluer la fraction de tour représentée par un angle, on dit qu'on peut mesurer cet angle. Pour pouvoir «mesurer» facilement les angles, on va se donner :

1) des *unités d'angles* universellement reconnues (les Espagnols, les Russes, les Italiens, les Chinois, les Américains, ..., les utilisent comme nous) ce sont les **degrés** et les **grades**.

2) des *instruments de mesure* plus complets que la boussole, la règle ou l'équerre : ce sont les **rapporteurs circulaires** ou **demi-circulaires**.

Définition : Les Degrés et les Grades.

1) Si on découpe un tour complet en 360 parties égales, chaque partie s'appelle un degré. (On écrit 1°).

2) Si on découpe un tour complet en 400 parties égales, chaque partie s'appelle un grade. (On écrit 1 gr).

Quelle est la façon de découper qui te paraît la plus simple ? As-tu déjà entendu parler des degrés et des grades ? A quel sujet ?

4

Divise successivement 360 par : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Divise successivement 400 par : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Lequel de ces nombres, 360 ou 400, se divise le plus facilement par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 ?

Connais-tu un nombre qui soit divisible par tous les entiers inférieurs à 10 ?

5

Prends les rapporteurs circulaires (pages 5 bis et 6 bis). Regarde bien les différentes graduations qui figurent sur le bord. Quelles remarques peux-tu faire ?

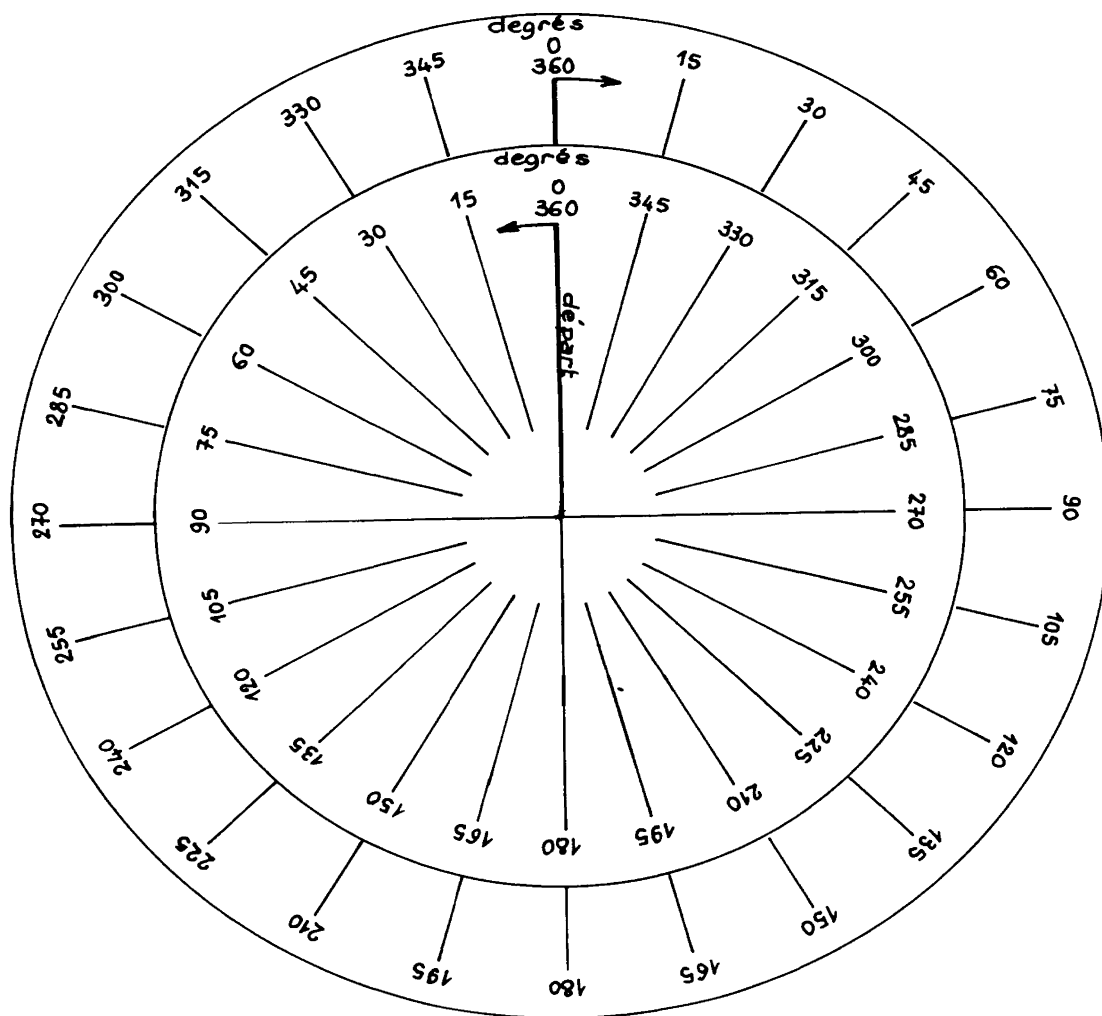
6

Combien de degrés vaut un demi-tour ? Un quart de tour ?

Qui est plus grand : un angle de 1 degré ou un angle de 1 grade ?

Qui est plus grand : un angle de 90 degrés ou un angle de 100 grades ?

Que vaut $1/8$ de tour, en degrés ? en grades ?



RAPPORTEUR CIRCULAIRE NUMERO 1

III – INSTRUMENTS DE MESURE DES ANGLES.

1

Tu auras besoin de ta boussole, du rapporteur circulaire numéro 1 et d'une punaise.

Mets ta punaise sur la table, pointe en l'air.

Pique dessus : – la boussole, en son centre
 – le rapporteur circulaire, en son centre
 – la flèche, au point A.

Tu peux aussi placer une gomme sur la pointe de la punaise pour maintenir le tout et éviter de te piquer.

Fais coïncider la direction Nord de la boussole,
 la ligne départ du rapporteur,
 et la flèche.

2

Tourne la flèche, et elle seule, d'un quart de tour dans ce sens-ci 
 La pointe de la flèche indique maintenant l'est.

Quel nombre lis-tu au bout de la flèche, sur la graduation extérieure ?
 Tu dois lire 90.

Cela signifie que la flèche a tourné, du nord à l'est, de 90° , dans ce sens-ci .

Nous dirons que la flèche a balayé un angle de 90° .

3

Place la flèche sur la ligne départ.

De combien de degrés la flèche tourne-t-elle dans la rotation :

- a) du nord au sud, dans ce sens-ci : 
- b) du nord à l'ouest, dans ce sens-ci : 
- c) du nord au sud-est, dans ce sens-ci : 

4

Place la flèche sur la ligne de départ.

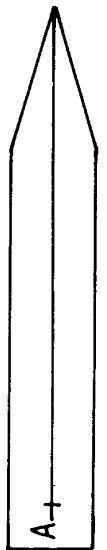
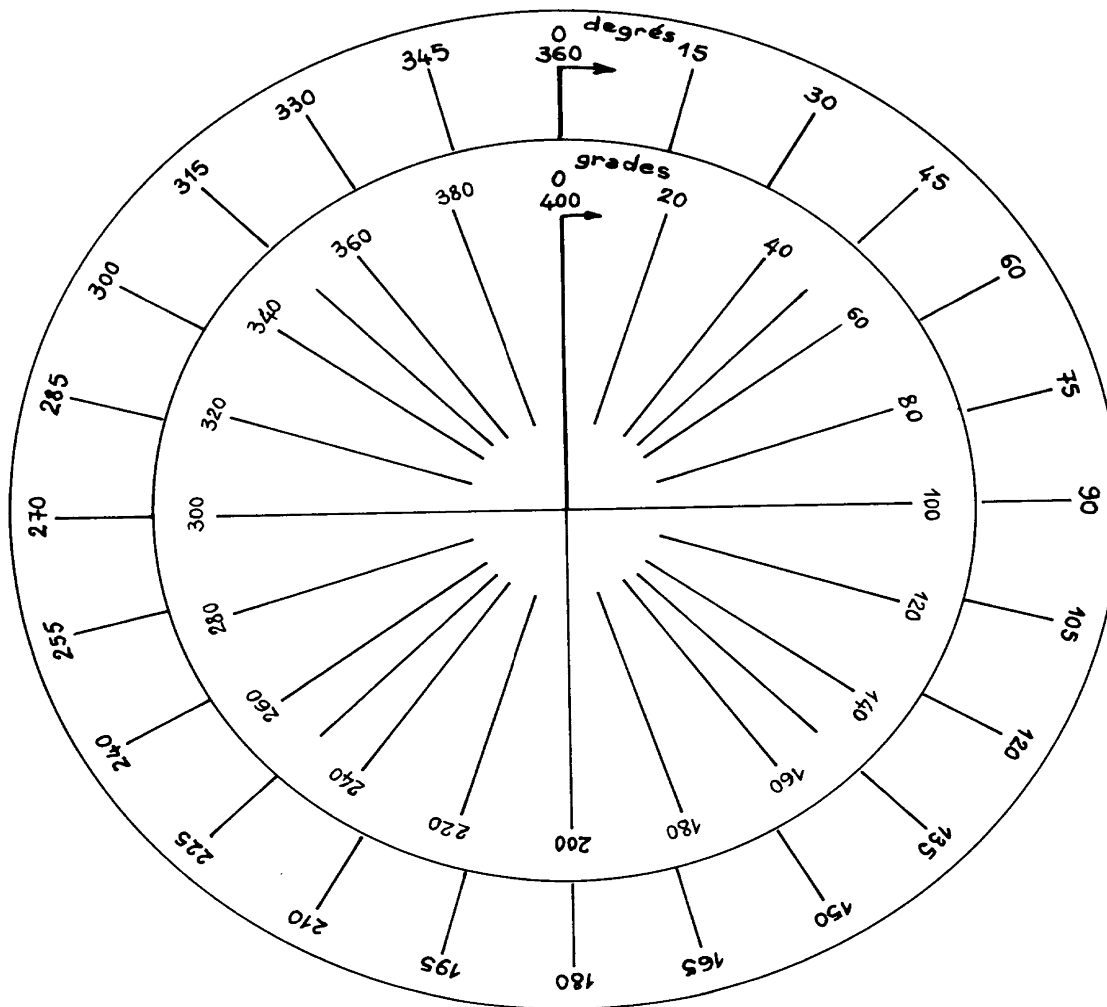
Tourne la flèche d'un quart de tour dans ce sens-là : 

La pointe de la flèche indique maintenant l'ouest.

Quel nombre lis-tu, au bout de la flèche, sur la graduation intérieure ?
 Tu dois lire 90.

Nous dirons que dans la rotation du nord à l'ouest dans ce sens-là :  on décrit un angle de 90° .

Est-ce le même angle que celui de la rotation du nord à l'ouest, dans ce sens-ci :  ?



RAPPORTEUR CIRCULAIRE NUMERO 2

5

De combien de degrés la flèche tourne-t-elle dans chacune des rotations suivantes. :

- a) du nord au sud-ouest dans ce sens-là : 
- b) du nord à l'est dans ce sens-là : 

6

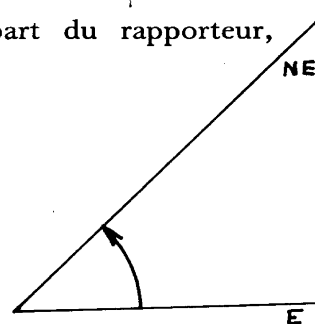
Tu vas placer maintenant la flèche sur la ligne de départ du rapporteur, mais face à l'est.

Tourne la flèche de l'est au nord-est dans ce sens-là : 

De combien de degrés la flèche a-t-elle tourné ?

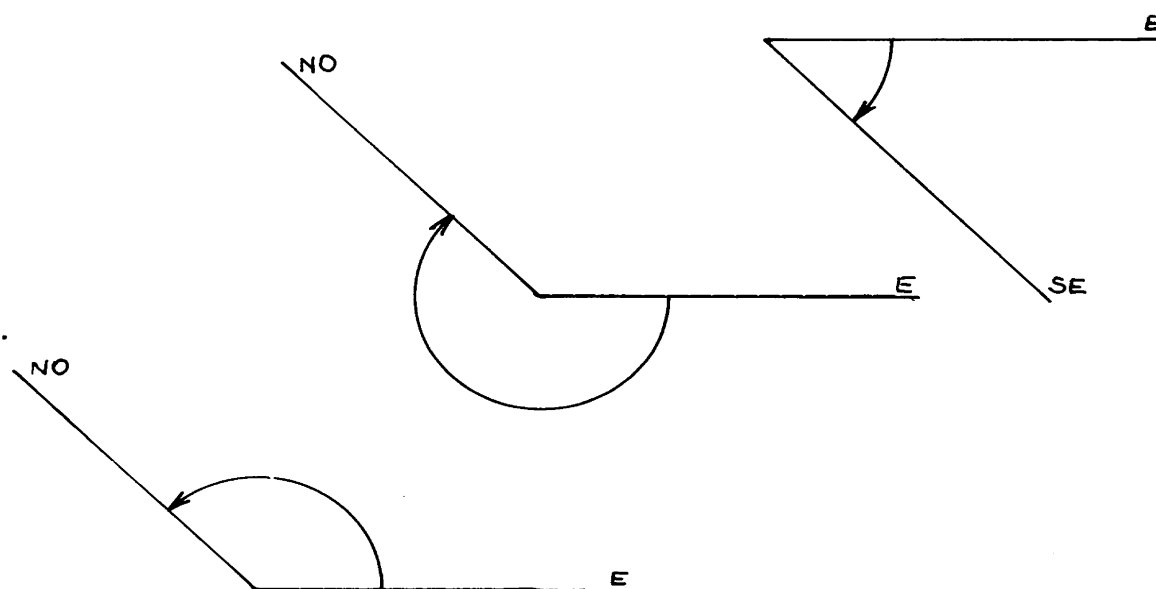
Tu dois trouver 45° .

La rotation de l'est au nord-est dans ce sens-là est d'angle 45° .



7

Mesure les angles correspondant aux rotations indiquées sur le dessin, par des flèches.



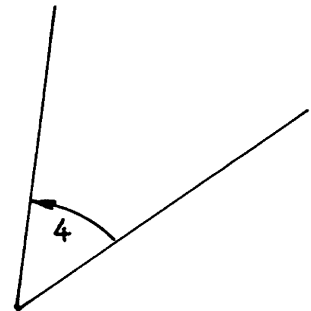
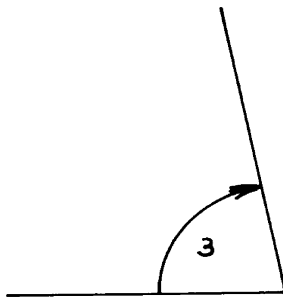
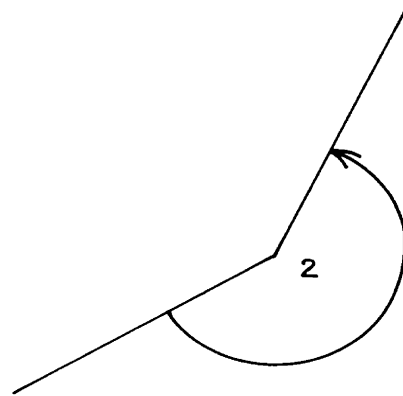
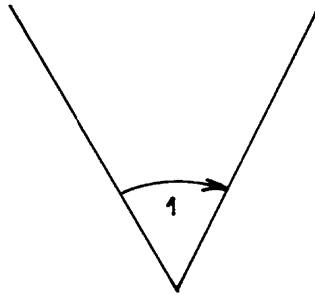
8

Quel angle correspond à la rotation du sud-est à l'ouest, dans ce sens-ci :  ? dans ce sens-là :  ?

Si tu as des difficultés, viens me voir.

9

Sans utiliser ton rapporteur, devine l'angle de chacune des rotations suivantes :



10

En utilisant éventuellement ton rapporteur circulaire numéro 2, donne à chaque fois en degrés et en grades l'angle correspondant à chacune des rotations suivantes :

- a) du nord-est à l'est, dans ce sens-ci :
- b) du sud-est au nord, dans ce sens-là :
- c) de l'ouest au sud-est dans ce sens-là :
- d) du nord-est au nord-ouest dans ce sens-là :
- e) du nord-est à l'est dans ce sens-ci :
- f) du sud-ouest au sud dans ce sens-là :

11

Après chacune des rotations suivantes, dans quelle direction te trouves-tu ?

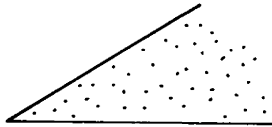
- a) à partir de l'ouest, rotation d'angle 90° dans ce sens-ci :
- b) à partir du sud, rotation d'angle 135° dans ce sens-ci :
- c) à partir du sud-ouest, rotation d'angle 45° dans ce sens-ci :
- d) à partir du sud, rotation d'angle 150° dans ce sens-ci :

IV – AU BOUT DU COMPTE : UN ANGLE, QU'EST-CE-QUE C'EST ?

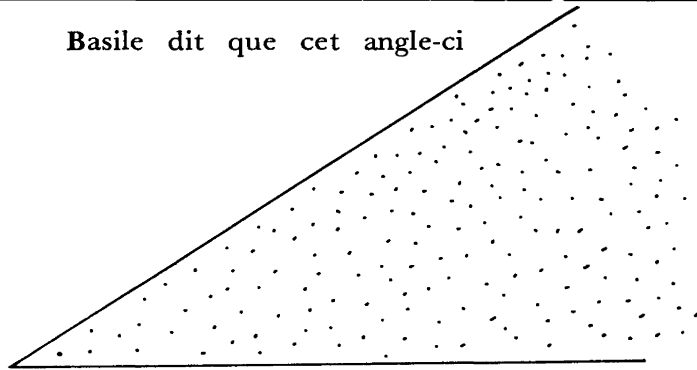
1



est plus grand que celui-là



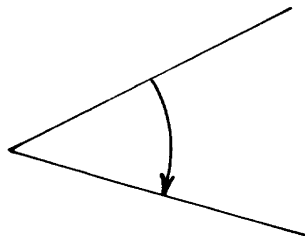
Basile dit que cet angle-ci



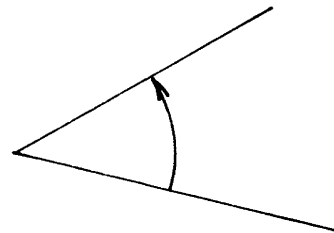
es-tu d'accord ? . Explique ta réponse.



est différent de cet angle là



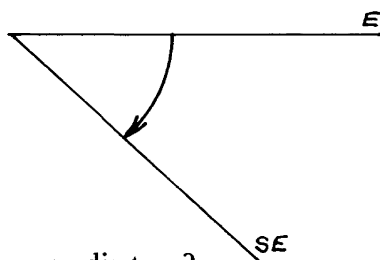
Hector dit que cet angle-ci



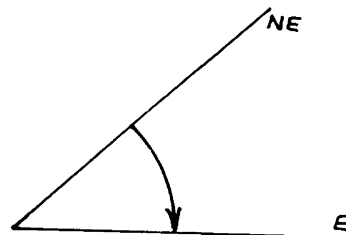
Qu'en penses-tu ?



est le même que celui-là.



Zaïus dit que cet angle-ci



et toi que dis-tu ?

Basile et Hector ont tort, par contre Zaiüs a vu juste.

Pour connaître la valeur d'un angle, il suffit de mesurer la rotation effectuée pour amener un côté sur l'autre. (Peu importe le sens de la rotation, seule «l'amplitude» compte).

2

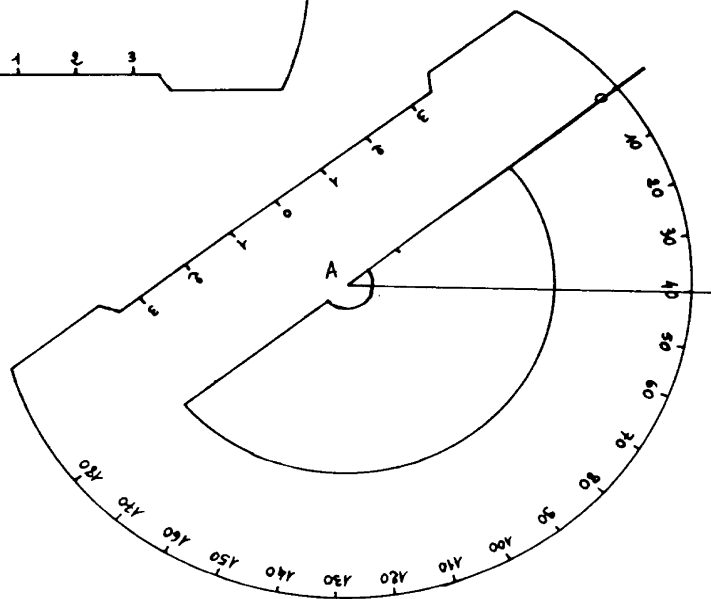
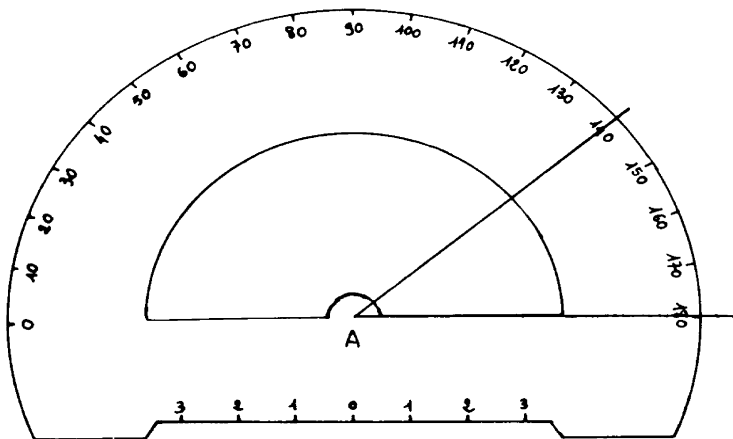
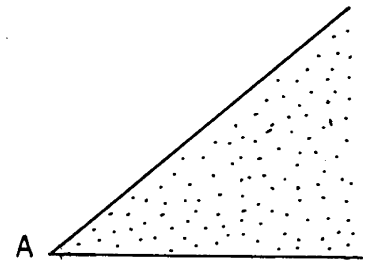
Pour mesurer les angles, tu vas maintenant utiliser ton rapporteur demi-circulaire du commerce.

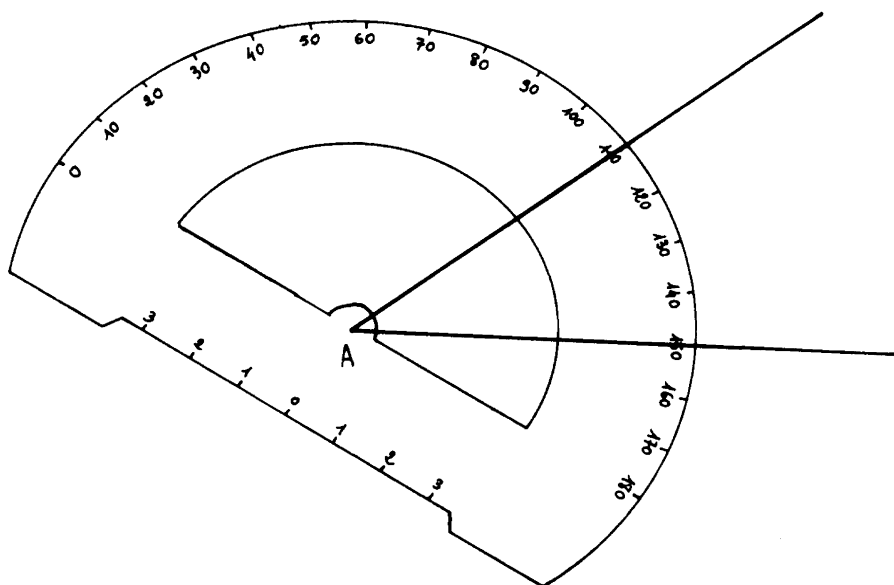
Repère bien le «centre» de ton rapporteur.

Regarde si la graduation extérieure de ton rapporteur varie de 0 à 180° , et si la droite qui passe par le 0 et le 180, passe aussi par le centre de ton rapporteur. Si tu n'as pas bien compris, viens me voir.

Sur les dessins suivants observe les différentes positions occupées par le rapporteur.

Est-ce qu'elles te permettent toutes de mesurer l'angle A ci-contre ?





Si tu penses que les trois positions permettent de mesurer l'angle $\hat{A}$, explique pourquoi !

Y a-t-il une position qui semble plus pratique que les autres ?

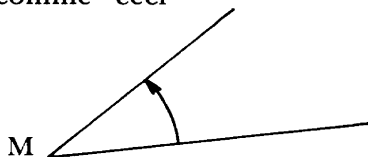
Trouve d'autres positions du rapporteur qui permettraient aussi de mesurer l'angle $\hat{A}$.

3

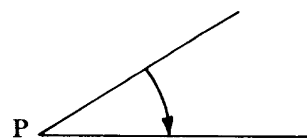
Désignation et notations.

Puisque l'angle ne dépend pas du sens de la rotation, on ne désignera plus l'angle par une flèche

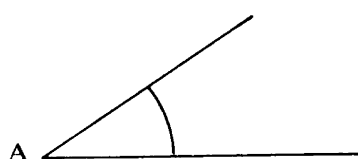
comme ceci



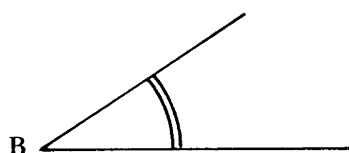
ou comme cela



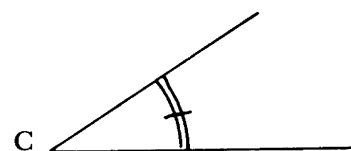
Mais par :



un trait



ou deux traits



ou encore par... etc...

Si plusieurs angles ont même sommet, on les note avec la même lettre suivi d'un numéro.

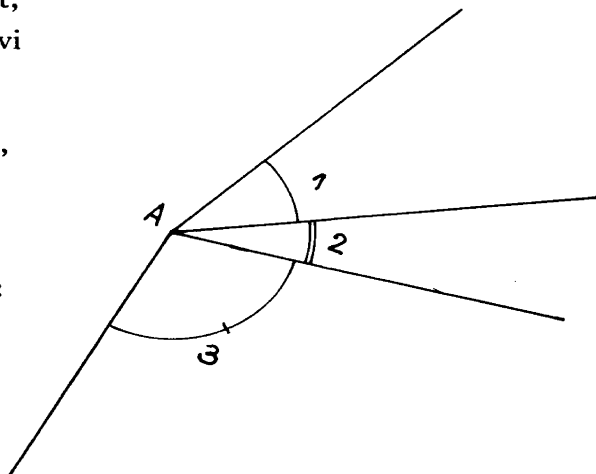
Ici par exemple $\hat{A}_1 = 37^\circ$, $\hat{A}_2 = 21^\circ$, $\hat{A}_3 = 104^\circ$.

Les angles qui ont un côté commun sont dits «adjacents», ici par exemple :

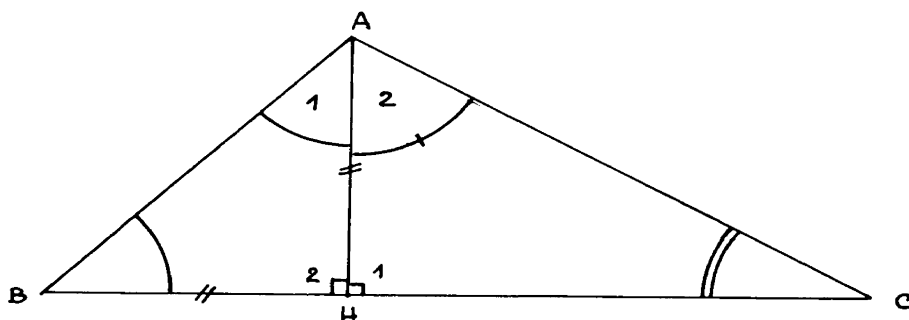
$\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont adjacents ;

$\hat{A}_1$ et $\hat{A}_3$ ne sont pas adjacents

que penses-tu de $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_3$?



Si sur une même figure on sait que deux angles sont égaux, on les repère par le même type de trait, par exemple :



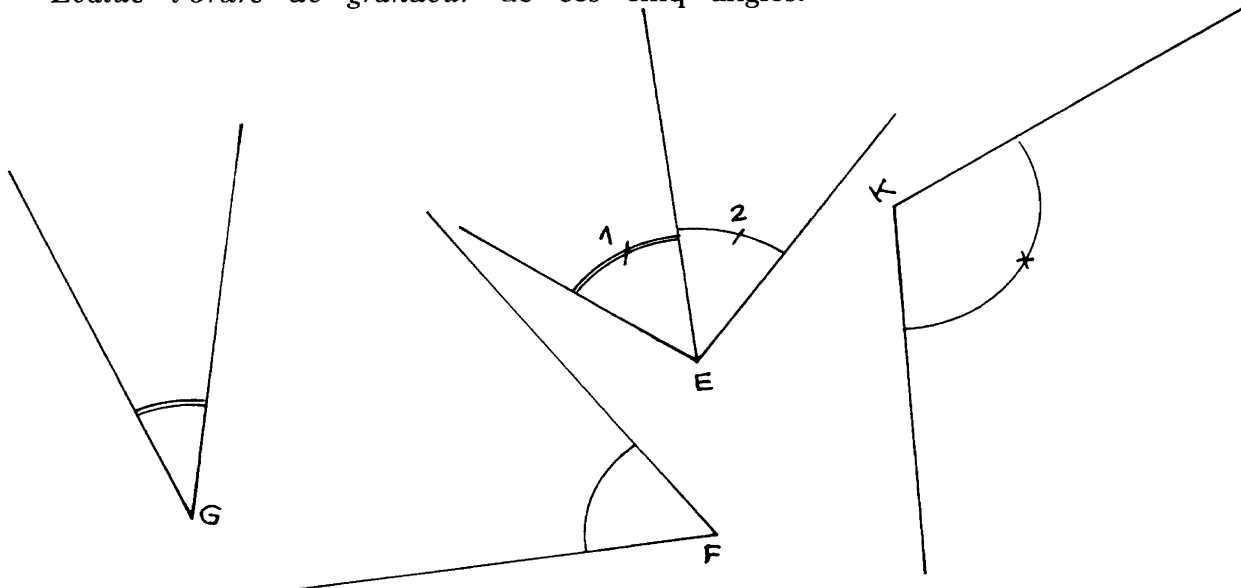
ici $\hat{B} = \hat{A}_1 = 45^\circ$
 $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

$\hat{A}_2 = 60^\circ$
 $\hat{C} = 30^\circ$.

Es-tu d'accord avec ces notations et ces mesures ?

4

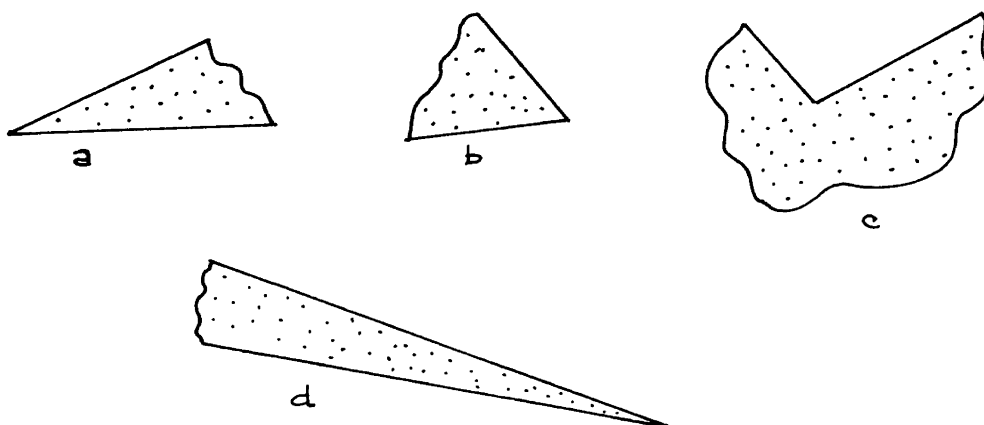
Evalue l'ordre de grandeur de ces cinq angles.



Prends maintenant ton rapporteur et effectue des mesures précises !
 Trouves-tu des résultats très différents de ceux que tu avais prévus ?

5

Ces portions de fromage représentent des angles de grandeurs différentes, classe-les du plus petit angle au plus grand angle.



6

Dessine des angles ayant les mesures suivantes :

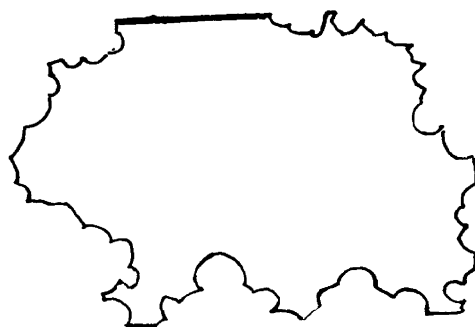
$$\hat{A} = 40^\circ \quad \hat{B} = 95^\circ \quad \hat{C} = 140^\circ \quad \hat{D} = 315^\circ \quad \hat{E} = 300^\circ$$

7

Mesure les angles des coins d'une page. Normalement tu dois trouver 90° ou 100° . Tu te rappelles que des angles de 90° représentent 1 quart de tour et qu'on les appelle des angles droits.

Peux-tu construire un angle droit en pliant convenablement une feuille de papier ? (même si les bords de la feuille ont été grignotés par une souris).

Par exemple avec une feuille de papier comme celle-ci :



8

Une 2 CV roule sous la pluie à 60 km/h. Ses balais d'essuie-glace parcourent la vitre 30 fois par minute.

Peux-tu trouver l'angle tracé sur le pare-brise par le balai qui fonctionne encore ?



V – SOMME DES ANGLES. ANGLES COMPLEMENTAIRE ET SUPPLEMENTAIRE.

1

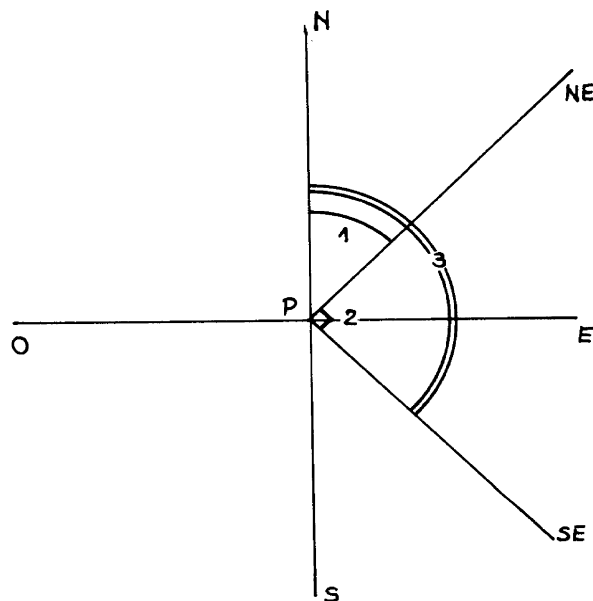
Quand tu es en P et que tu effectues une rotation du nord au nord-est dans ce sens-ci , tu balayes un angle noté ici $\widehat{P}_1$. Si tu effectues dans le même sens la rotation du nord-est au sud-est, tu décris un nouvel angle que nous appelons $\widehat{P}_2$.

Si maintenant tu effectues la rotation d'angle $\widehat{P}_1$, puis celle d'angle $\widehat{P}_2$, cela revient au même que si tu avais directement effectué la rotation d'angle $\widehat{P}_3$ du nord au sud-est dans ce sens-ci  ; c'est pourquoi on va appeler cet angle $\widehat{P}_3$ «la somme de $\widehat{P}_1$ et de $\widehat{P}_2$ » et on écrira :

$$\widehat{P}_3 = \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2.$$

Si tu mesures $\widehat{P}_1$ et $\widehat{P}_2$, tu dois trouver $\widehat{P}_1 = 45^\circ$ et $\widehat{P}_2 = 90^\circ$.

Si tu mesures $\widehat{P}_3$, tu peux constater qu'on a raison d'appeler $\widehat{P}_3$ la somme de $\widehat{P}_1$ et $\widehat{P}_2$! es-tu d'accord ?



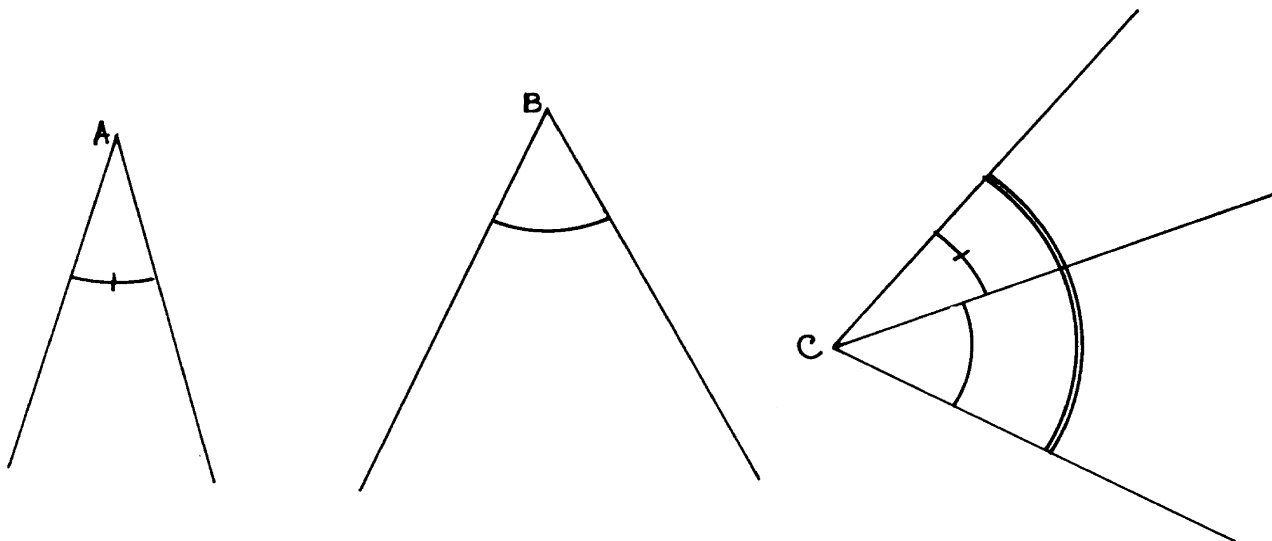
Angle saillant.

Les angles qui représentent *moins d'un demi-tour* sont dits *angles saillants*. Par exemple si $\widehat{A} = 179^\circ$ et $\widehat{B} = 198\text{gr}$, $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont saillants.

Si par contre $\widehat{C} = 185^\circ$ et $\widehat{D} = 250\text{gr}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ ne sont plus des angles saillants, on dit alors qu'ils sont «rentrants».

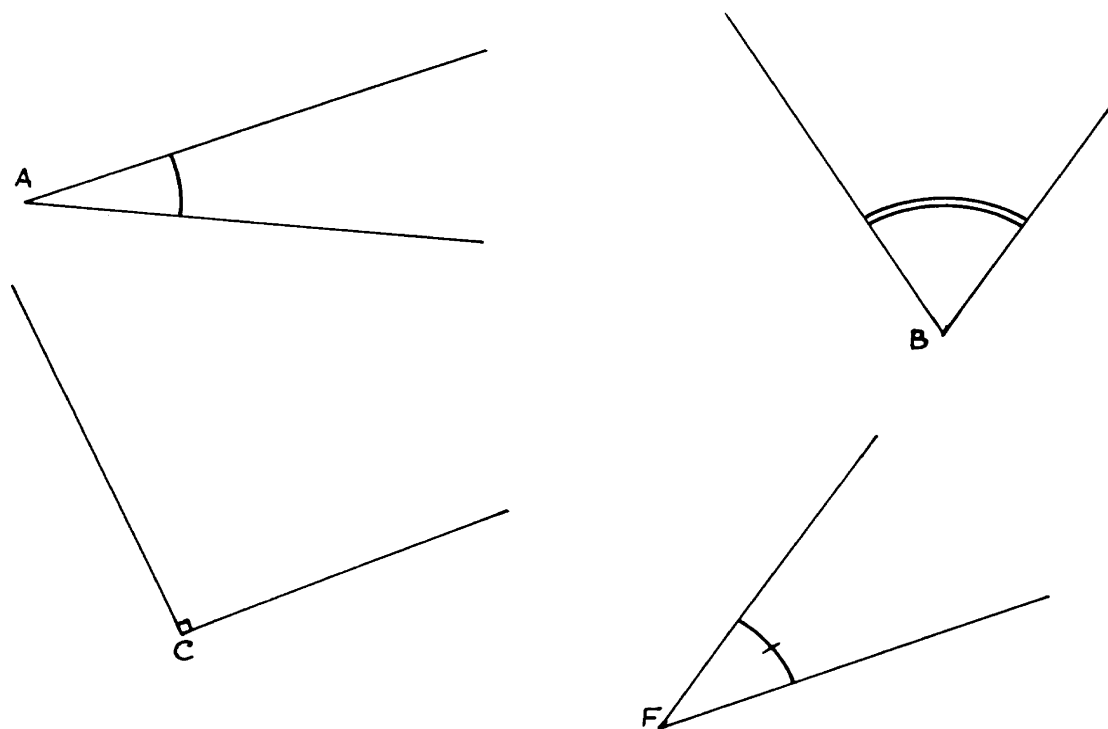
Somme de deux angles saillants.

On dit qu'un angle $\widehat{C}$ est la somme des angles saillants $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, si pour obtenir $\widehat{C}$ il suffit d'effectuer une rotation d'angle $\widehat{A}$, puis une rotation dans le même sens d'angle $\widehat{B}$.



2

Voici quatre angles saillants :



En effectuant les découpages nécessaires, peux-tu vérifier que :

$$\widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B}.$$

Construis un angle $\widehat{E}$ somme de $\widehat{C}$ et $\widehat{F}$.

3

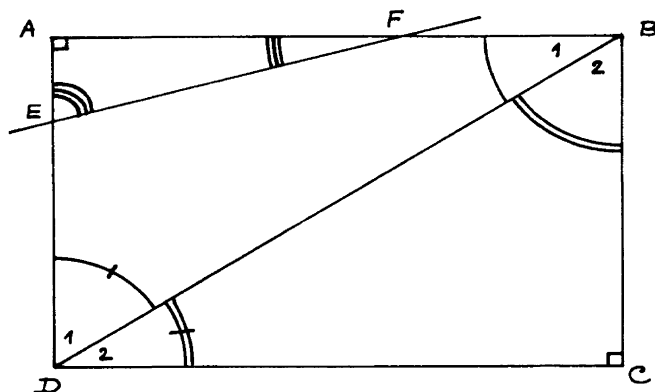
Prends une feuille rectangulaire. Note A, B, C, D ses quatre coins, trace la diagonale [B, D] puis une sécante quelconque [E, F] joignant les côtés [A, D] et [A, B]. Note les différents angles comme ci-contre.

Découpe ces différents angles de façon à construire les angles $\widehat{D}_1 + \widehat{B}_1$ puis $\widehat{E} + \widehat{F}$.

Que constates-tu ? et ton voisin ?

Construis aussi l'angle $\widehat{A} + \widehat{C}$, que constates-tu ?

Construis $\widehat{U} = \widehat{D}_1 + \widehat{B}_2$ et $\widehat{V} = \widehat{D}_2 + \widehat{B}_1$, puis construis $\widehat{U} + \widehat{V}$; pouvais-tu prévoir le résultat ?



Définition : Complémentaire - Supplémentaire

Quand deux angles ont pour somme un angle droit, ils sont dits «complémentaires».

Par exemple, $\widehat{D}_1$ et $\widehat{B}_1$ sont complémentaires. Donne d'autres exemples d'angles complémentaires.

Quand deux angles ont pour somme un angle plat, on dit qu'ils sont «supplémentaires».

Par exemple $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires; donne d'autres exemples d'angles supplémentaires.

Quand tu sais que : $\widehat{L}$ et $\widehat{M}$ sont complémentaires
tu peux aussi bien dire : $\widehat{L}$ est complémentaire de $\widehat{M}$
que : $\widehat{M}$ est complémentaire de $\widehat{L}$
ou encore tu peux écrire : $\widehat{L} + \widehat{M} = 90^\circ$.

De la même façon, si tu dis : $\widehat{N}$ et $\widehat{P}$ sont supplémentaires
tu peux aussi bien dire : $\widehat{N}$ est supplémentaire de $\widehat{P}$
que : $\widehat{P}$ est supplémentaire de $\widehat{N}$
ou encore tu peux écrire : $\widehat{N} + \widehat{P} = 180^\circ$.

4

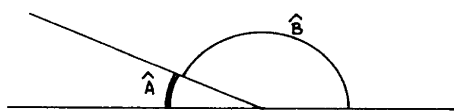


figure 1

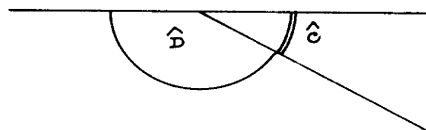


figure 2

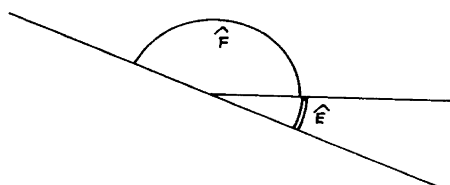


figure 3

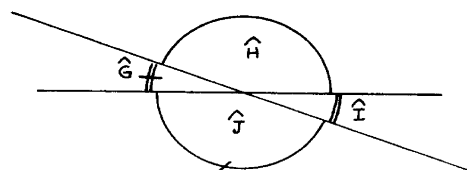


figure 4

Les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont-ils supplémentaires ?

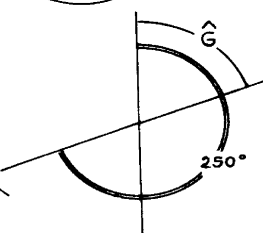
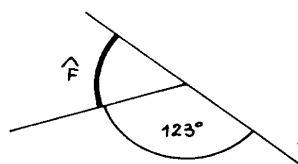
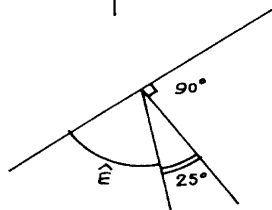
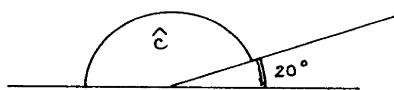
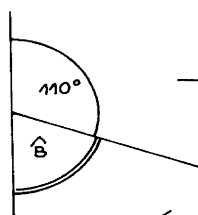
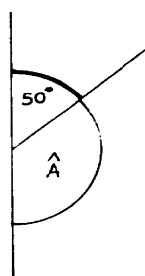
Quel est le supplémentaire de l'angle $\hat{D}$?

Que peux-tu dire des angles $\hat{E}$ et $\hat{F}$?

Trouve des angles supplémentaires dans la figure 4.

5

Dans les dessins suivants, certains angles sont désignés par une lettre. Essaie de trouver, sans te servir du rapporteur, la grandeur de ces angles.



6

Complète le tableau suivant, de telle façon que les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ soient complémentaires. (Attention ! Certaines mesures sont en grades).

$\hat{A}$	50°	40gr		70gr	75°		25°		
$\hat{B}$			20°			35gr		67°	67gr

7

Complète le tableau suivant, de telle façon que :

les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ soient supplémentaires,

$\hat{B}$ et $\hat{C}$ soient supplémentaires,

$\hat{C}$ et $\hat{D}$ soient supplémentaires.

$\hat{A}$	85°			90°		145°		77gr
$\hat{B}$		178°					45gr	
$\hat{C}$					1°			
$\hat{D}$			45°					

Que remarques-tu ?

Peux-tu faire une phrase qui résume tes observations ?

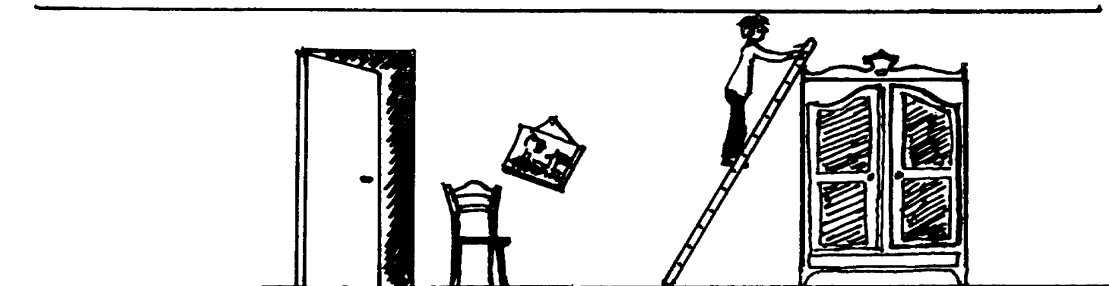
Les malheurs de Basile.

8

Comme Basile a de plus en plus de livres, il a décidé avec son père de déménager la grande armoire du salon pour la mettre dans sa chambre. Craignant que l'armoire ne soit trop haute pour passer par la porte, ils ont commencé à la démonter et puis Basile qui avait un match de foot a dit : «c'est trop bête de la démonter si elle passe, mesurons-là !». Et, il est vite allé chercher tous les mètres de la maison ; mais comme il les avait cassés en jouant, aucun d'eux n'était assez long pour mesurer directement l'armoire. Le père a regardé sévèrement Basile et puis il est monté sur son escabeau en grommelant : «pendant que monsieur fait des bêtises, moi je réfléchis» et il a mesuré la distance du sommet de l'armoire au plafond, il a trouvé 46 cm ; après quoi il s'est dirigé vers la chambre de Basile et a mesuré la distance entre le plafond et le sommet de la porte, il a trouvé 44 cm.

Zut ! a dit Basile, mon match de foot est «fout... !!

Ouf ! a dit le père, va vite chercher des chiffons de laine : on va les mettre sous l'armoire, et on la poussera tout simplement dans ta chambre.



Qu'en penses-tu ?

«Ça a marché !» Basile était un peu furieux que son père ait encore une fois raison, mais il était bien content pour le match.

De retour en classe, il a complété comme toi le tableau précédent et puis brusquement il a repensé au «coup de l'armoire» et il a dit :

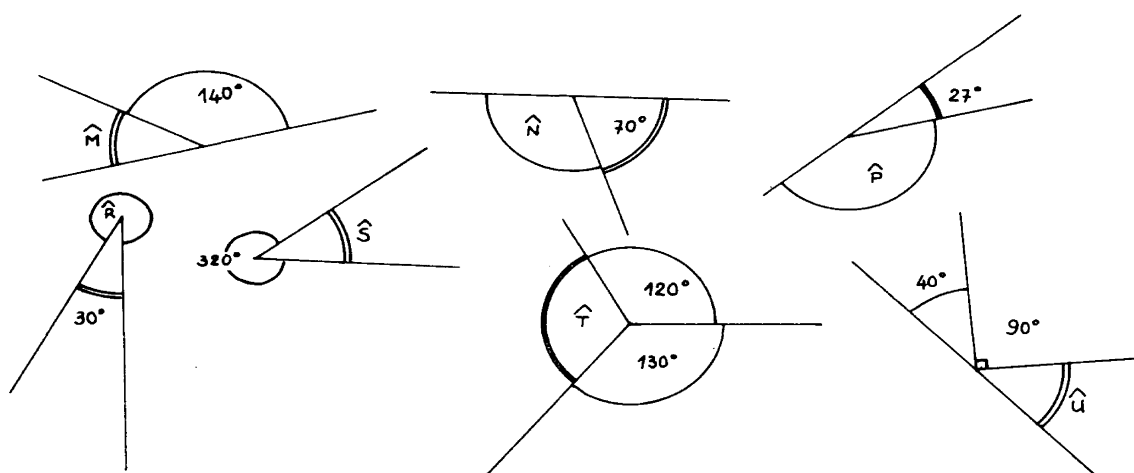
«Si deux angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ ont même supplémentaire $\hat{B}$, c'est qu'ils sont égaux».

Qu'en penses-tu ?

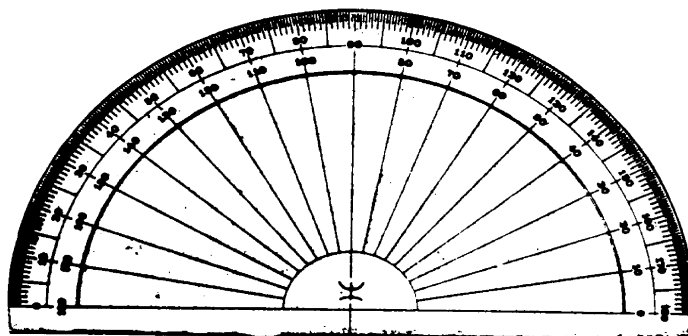
Peux-tu écrire une propriété semblable à propos des angles complémentaires ? Discutes-en avec tes camarades !

9

Trouve les mesures des angles désignés par des lettres.



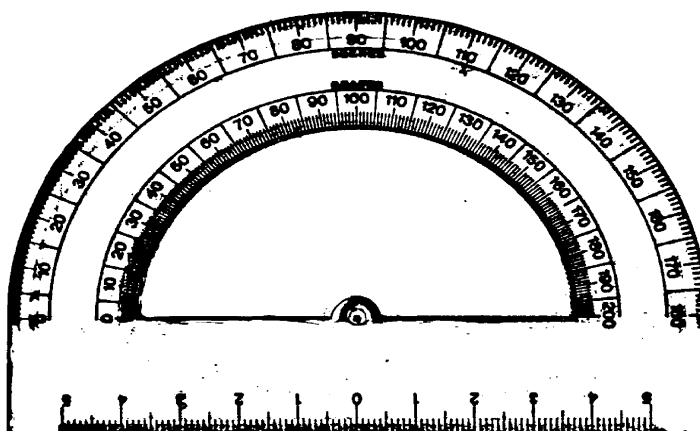
10



Sur ce rapporteur peux-tu expliquer les différentes graduations ?
Cela te permet-il de remplir sans difficulté le tableau de l'exercice 7 ?

11

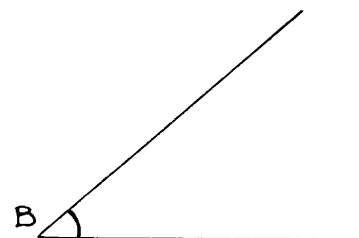
Regarde le rapporteur ci-dessous, qu'apporte-t-il de nouveau ?



Hector a mesuré l'angle ci-contre et il a écrit $\hat{A} = 100^\circ$. Qu'en penses-tu ?



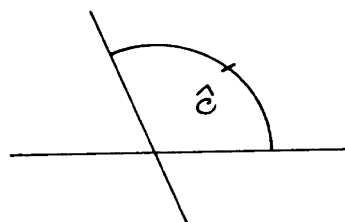
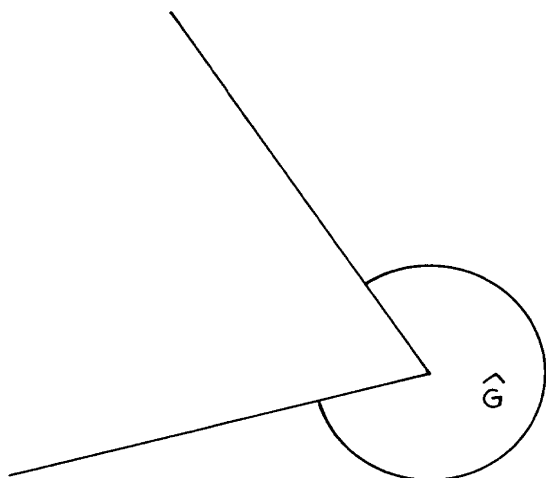
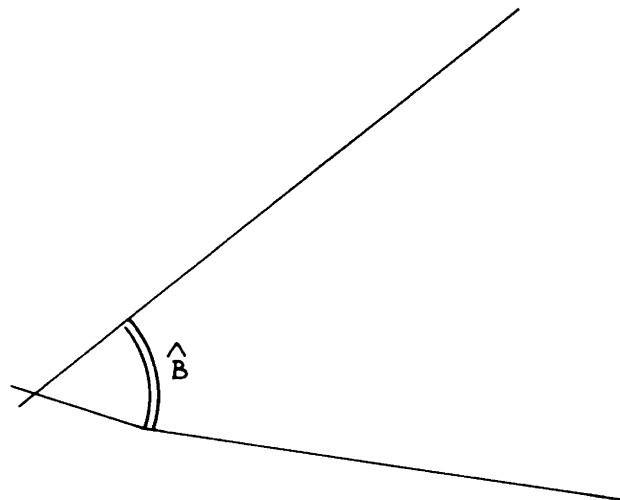
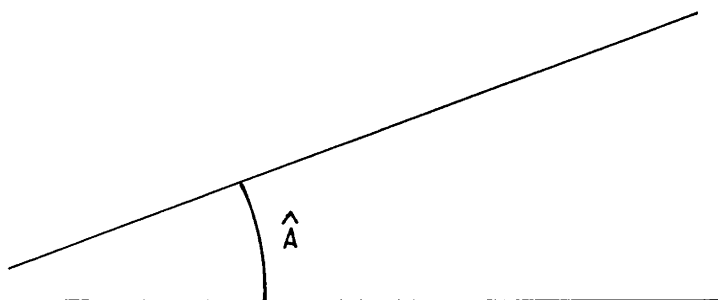
Zaius a mesuré cet angle-là et il a écrit $\hat{B} = 135^\circ$, Basile lui dit : «non, $\hat{B} = 135\text{gr}$!». Qu'en penses-tu ?



12

Peux-tu mesurer directement et avec précision les angles suivants, en te servant de ton rapporteur ?

Si tu dois faire des constructions supplémentaires, trace-les au crayon rouge.



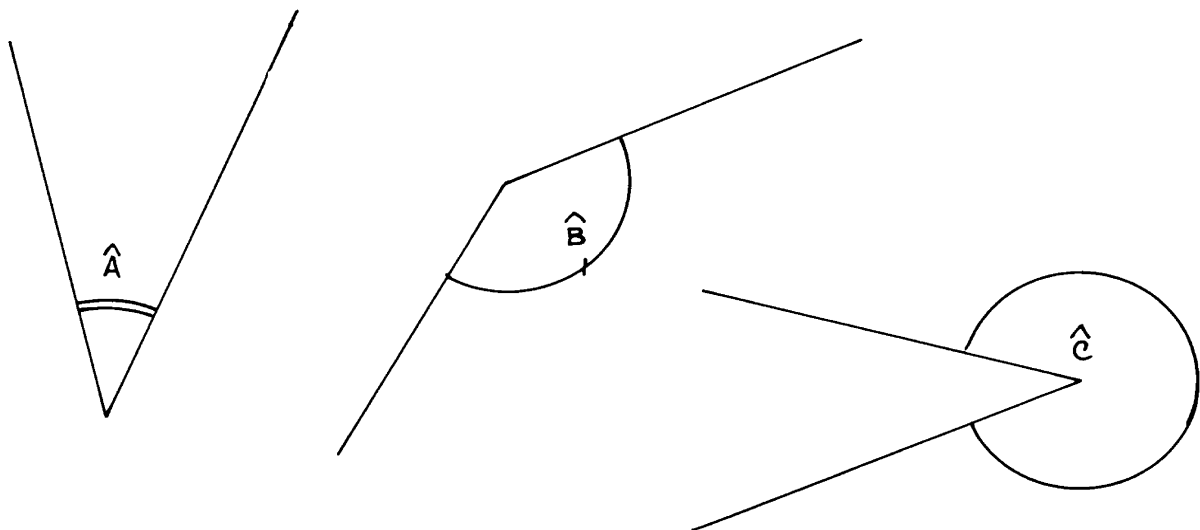
Compare tes résultats avec ceux de ton voisin.

Trouvez-vous la même réponse, à 1 degré près ?

VI – CONTROLE.

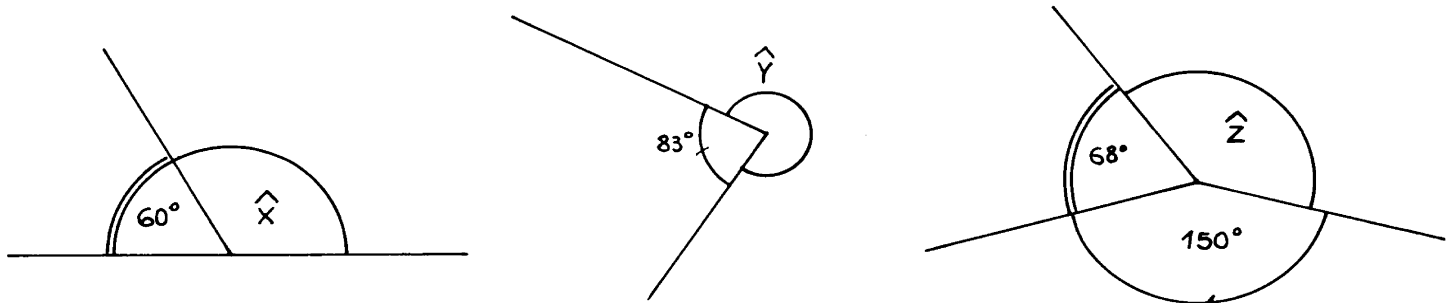
- 1 | Combien y a-t-il de degrés, pour un tour complet ?
Combien y a-t-il de grades, pour un demi-tour ?
- 2 | De combien de degrés as-tu tourné, pour aller du Nord à l'Est, dans le sens des aiguilles d'une montre ?
De combien de degrés as-tu tourné pour aller du nord à l'est, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ?

- 3 | A l'aide de ton rapporteur, mesure les angles suivants :



- 4 | Dessine des angles ayant les mesures suivantes :
 26° , 147° , 330° .

- 5 | Calcule la mesure des angles suivants :



VII – APPROFONDISSEMENT. Les angles opposés par le sommet .

Trace deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupant en un point A. On détermine ainsi quatre demi-droites notées ici : d_1 et d'_1 , d_2 et d'_2 quatre angles notés ici : $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$.

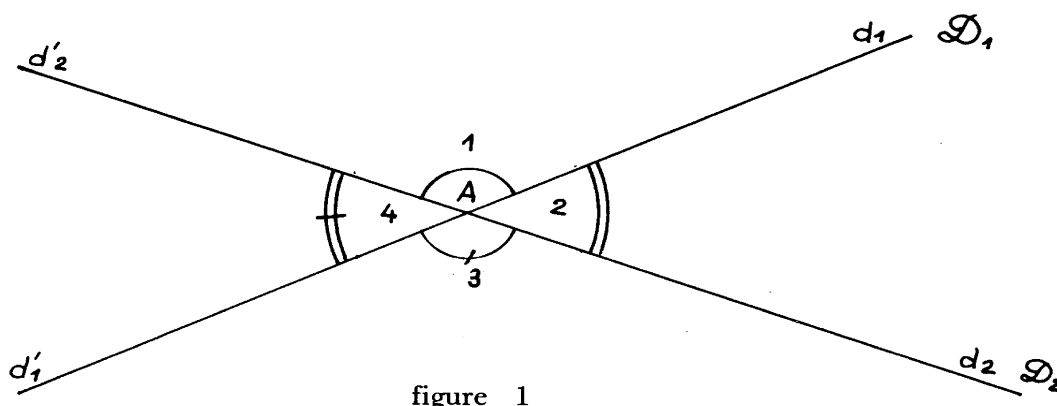


figure 1

Les angles qui ont un côté commun, par exemple $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ ou $\hat{A}_3$ et $\hat{A}_4$ ou $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_4$ etc, sont dits «adjacents».

Les angles qui n'ont pas de côté commun, par exemple $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_3$ ou $\hat{A}_2$ et $\hat{A}_4$, sont dits «opposés par le sommet».

- 1** Quelles observations peux-tu effectuer sur
les angles adjacents ?
les angles opposés par le sommet ?

Voici deux propriétés qui devraient résumer tes observations.

Propriété

Quand deux droites se coupent en un point, elles déterminent quatre angles qui, groupés deux à deux, vérifient :

- 1) Les angles adjacents sont supplémentaires
- 2) Les angles opposés par le sommet sont égaux.

Tu dois pouvoir montrer très simplement la première propriété.

- 2** Essaie maintenant de montrer la deuxième propriété :

Si tu ne vois pas très bien comment t'y prendre, rappelle-toi ceci : Pour connaître un angle $\hat{U}$ il suffit de connaître la rotation autour de U qui amène la demi-droite d_1 sur la demi-droite d_2 .

Maintenant observe bien la figure (1).

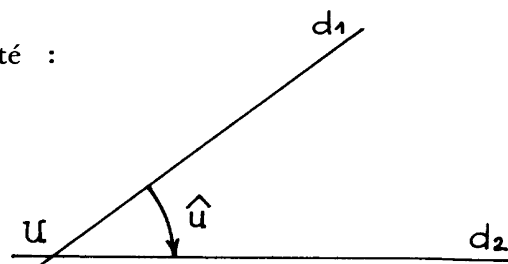


figure 2

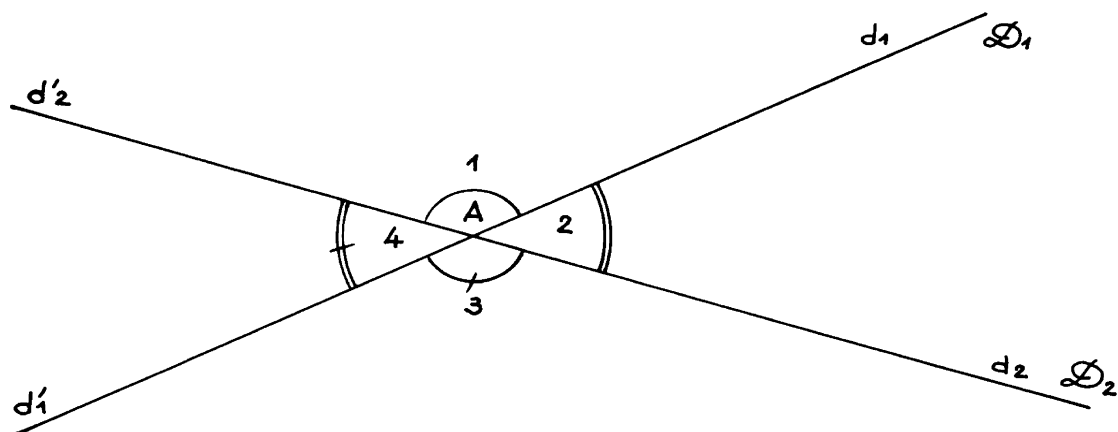


figure 1

Hector après avoir observé la figure (1) dit :
La rotation qui amène d_1 sur d_2 est la même que celle qui amène d'_1 sur d'_2 (sinon $\mathcal{D}_1$ ne serait pas « droite »), donc $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_4$.

Basile et surtout Zaiüs ne sont pas convaincus par cette explication ; ils ont cherché une autre façon de se persuader que $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$ ou $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_4$.



Anabelle, la grande soeur de Zaiüs, a écrit ci-dessous la démonstration qu'ils avaient trouvée tous les quatre ensemble :

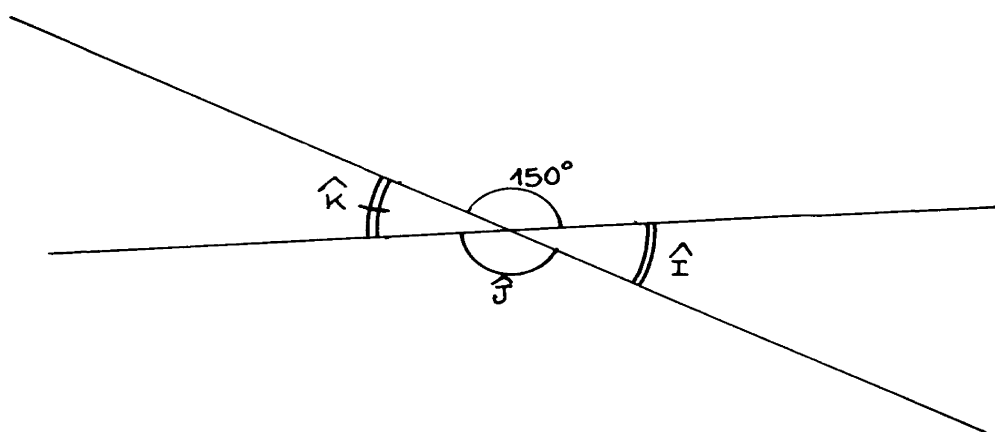
Hypothèse (Ce que nous savons) $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_3$ sont deux angles opposés par le sommet	Conclusion : ce que nous voulons montrer $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$
Démonstration : (Ce qui permet d'affirmer que la conclusion est vraie dès que l'hypothèse est vraie).  Zaiüs a observé : $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont supplémentaires, car ils sont adjacents (1ère propriété).  Hector a vu que : $\widehat{A}_3$ et $\widehat{A}_2$ sont supplémentaires (pour la même raison).  Basile se rappelle la propriété qu'il a observée : « Si deux angles ont même supplémentaire, ils sont égaux ». Anabelle a terminé la démonstration en disant : puisque $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_3$ ont même supplémentaire $\widehat{A}_2$, c'est qu'ils sont égaux ! et nous avons bien montré que $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$.	

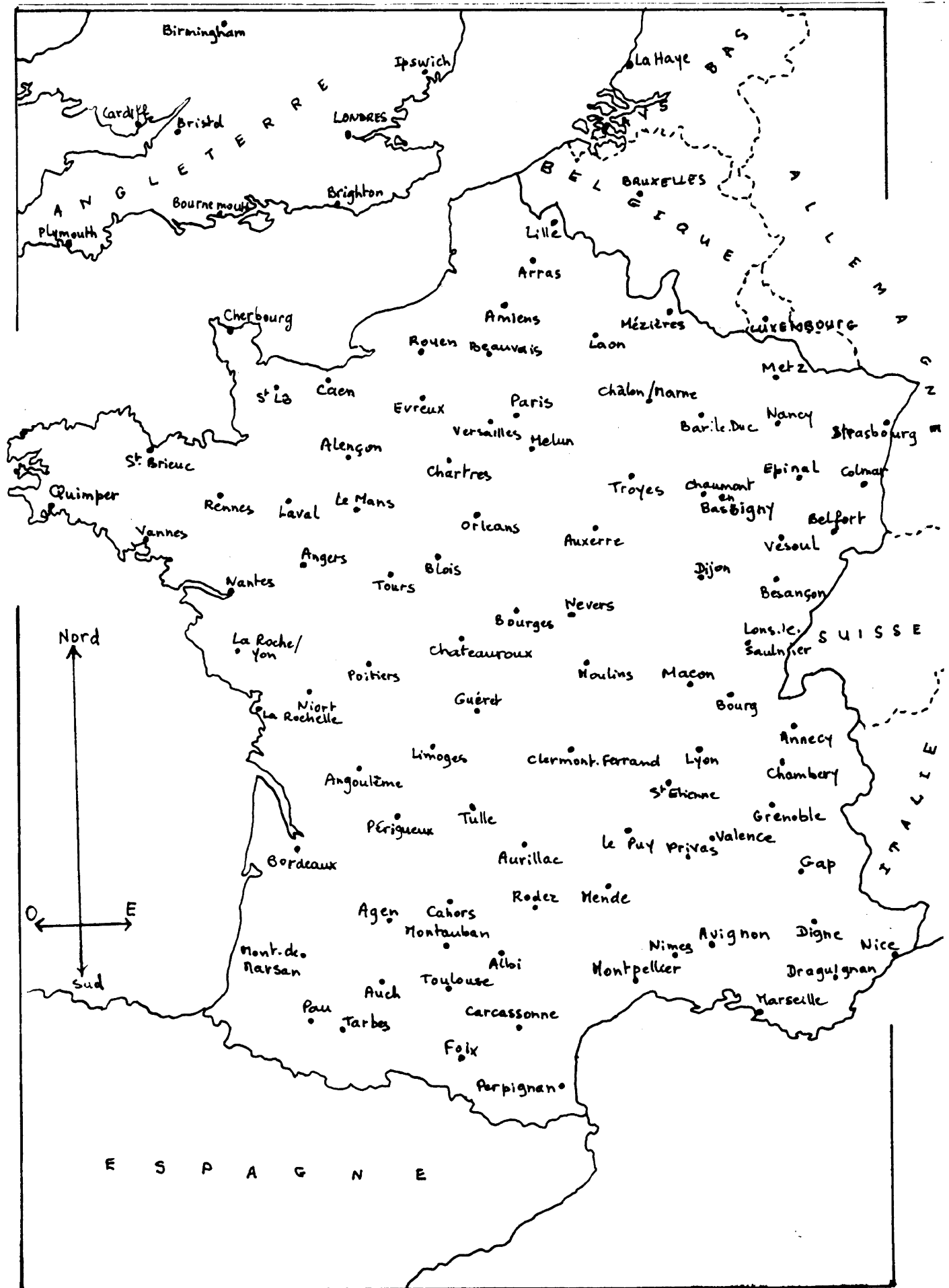
As-tu compris le raisonnement de nos quatre amis ? sinon discute-en avec ton voisin ou ta voisine ; regardez si vous ne trouvez pas encore une autre façon de montrer que $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$.

Essayez comme ci-dessus de montrer que les angles opposés par le sommet $\widehat{A}_2$ et $\widehat{A}_4$ sont égaux, et appelez-moi quand vous aurez écrit votre démonstration ou si vous ne voyez toujours pas comment vous y prendre.

3

Sans aucun instrument de mesure, trouve les angles $\widehat{I}$, $\widehat{J}$ et $\widehat{K}$ ci-dessous. Explique ta réponse !





Echelle 1:5 000 000

0 100 200km

VIII – LE MINISTRE ET SON PILOTE.

Les aviateurs et les marins qui doivent voyager jour et nuit, par tous les temps, savent naviguer à la boussole. Aussi prennent-ils l'habitude de «coder» leur voyage de la façon suivante :

Lorsqu'un aviateur effectue le voyage «Paris-Marseille en ligne droite» (figure 1) «il part de Paris, il prend le cap 159° , il le garde 660 km». Pour le voyage «Paris-Bordeaux, puis retour Bordeaux-Paris» (figure 2) «il part de Paris, il prend le cap 208° , il le garde 490 km, puis il prend le cap 28° ($208^\circ - 180^\circ$) et le garde 490 km».

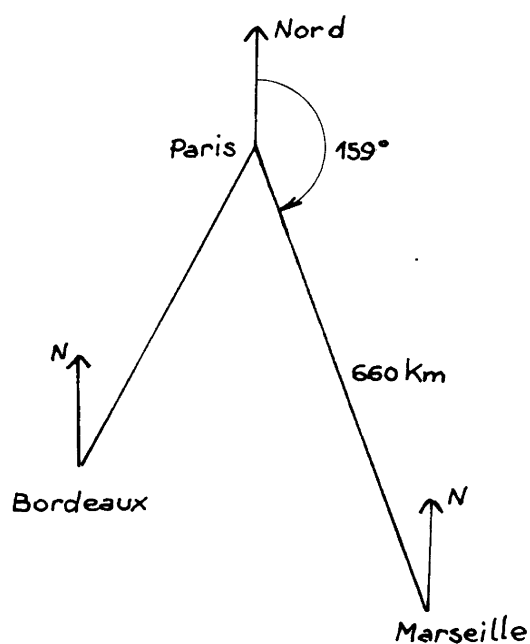


figure 1

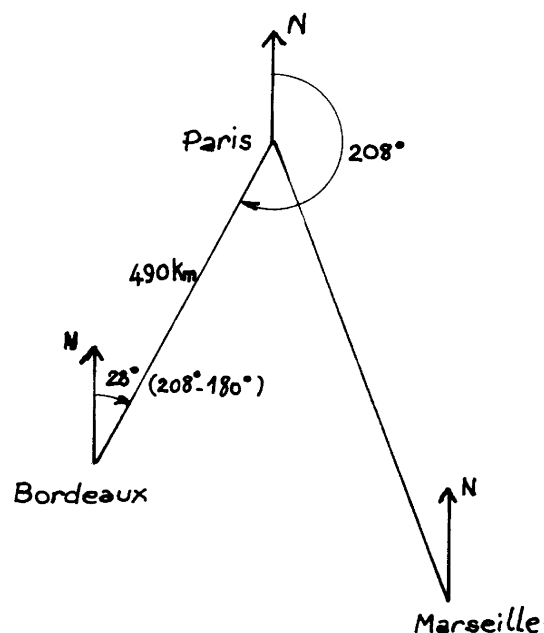


figure 2

1

Quand «tu relèves un cap», le sens dans lequel tu tournes a-t-il de l'importance ?

Tu es à Marseille. Donne le cap de Paris, puis le cap de Bordeaux.

Si tu n'as pas bien compris de quoi il s'agit, appelle-moi.

En fin de compte, quand tu veux relever le cap de Bordeaux en partant de Paris :

- tu te places à Paris,
- tu regardes le Nord,
- tu tournes dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à ce que tu voies Bordeaux,
- tu relèves l'angle de la rotation que tu viens d'effectuer, il te fournit le cap de Bordeaux à partir de Paris.

2

Observe la carte de France ci-jointe. L'échelle de cette carte est 1/5 000 000 (1 cm sur la carte représente 50 km sur le terrain).

Le premier ministre veut effectuer le voyage :

«Paris-Marseille, puis Marseille-Bordeaux, puis Bordeaux-Quimper, retour Quimper-Bordeaux, puis Bordeaux-Paris».

Es-tu d'accord avec le pilote qui a écrit son plan de vol de la façon suivante :

«Partir de Paris, tenir le cap 159° sur 660 km,
puis tenir le cap 291° sur 510 km,
puis tenir le cap 326° sur 440 km,
puis tenir le cap 326° sur 440 km,
puis tenir le cap 28° sur 490 km.

Si tu n'es pas d'accord, discutes-en avec tes camarades, et si vous pensez que cela est nécessaire, corrigez en rouge, puis appelez-moi.

3

Maintenant tu es premier ministre et tu dois effectuer le voyage «Paris-Bruxelles» pour t'entretenir avec le roi, après quoi tu dois aller à Marseille prendre le pastis avec le maire, puis rentrer à Paris pour rendre compte de tes voyages au président.

Code ton plan de vol et va le donner à Monsieur Voltoujours, directeur d'Air-Mer (ton professeur).

4

Maintenant tu es capitaine de vaisseau

Trouve le trajet correspondant au plan suivant :

«Partir de Cherbourg, tenir le cap 43° sur 170 km»

Où arriveras-tu ?

Quel cap dois-tu prendre pour revenir en ligne droite à ton point de départ ?

5

Tu es le premier ministre et tu voyages beaucoup pour préparer les prochaines élections.

Le programme prévu pour la semaine est le suivant :

- Lundi : départ de Paris, arrivée à Strasbourg
- Mardi : départ de Strasbourg, arrivée à Aurillac,
- Mercredi : départ d'Aurillac, arrivée à Paris.
- Jeudi à dimanche : week-end.

a) Code les plans de vol prévus pour lundi, mardi, mercredi.

La semaine avait bien commencé, les foules étaient chaleureuses, mais mercredi soir, au moment de repartir d'Aurillac, ton pilote constate une fuite dans le réservoir principal. Aussi décidez-vous pour le retour, de ne vous servir que du réservoir de secours. Avec ce réservoir, vous avez une autonomie de vol de 200 km.

b) Peux-tu très rapidement coder à ton pilote un plan de vol qui vous permettra de rentrer à Paris sans tomber en panne sèche ?

Compare le trajet effectué au retour à celui qui était initialement prévu.

Lequel de ces trajets est-il le plus avantageux ?

Explique ta réponse.

6

Tu es toujours premier ministre et tu prépares sérieusement ton brevet de pilote . Nous sommes jeudi. Tu as décidé de faire un voyage en hélicoptère, à travers la France, avec ta famille.

Pour établir ton plan de vol, tu auras besoin de ta carte de France, de «la fiche premier ministre» et des renseignements techniques ci-après, concernant l'hélicoptère.

Organise avec ta famille le voyage que vous désirez effectuer, et trace au crayon sur la carte le parcours que vous avez choisi ; à partir de là, remplis le formulaire «Fiche du premier ministre» sur lequel tu vas coder ton voyage.

Va trouver Monsieur Voltoujours et demande-lui de te fournir un pilote prêt à décoder ton plan de vol et à établir le devis correspondant. Quand ton pilote aura terminé, il te présentera sa fiche (côté pilote) et son devis, et tu devras vérifier s'il ne s'est pas trompé.

7

Le week-end suivant, tu décides de faire un stage de pilote à Air-Mer. Monsieur Voltoujours te procure le plan de vol d'un premier ministre stagiaire.

Décode le plan de vol de ton ministre-stagiaire et établis le devis correspondant.

N.B. Tu peux très bien être le pilote de ton premier ministre, en même temps que le ministre de ton pilote, car tout bien compté, ... quelle différence y a-t-il ...

Renseignements techniques concernant l'hélicoptère «Lama», recueillis à l'aéroport du Versoud (près de Grenoble) en octobre 1979 :

- Vitesse moyenne : 150 km/h.
- Autonomie : environ 350 km.
- Prix du litre de carburant (kérosène) : 1,20 F.
- Consommation moyenne de carburant : 180 l par heure.
- Prix de location de l'heure de vol (carburant non compris) : environ 2 500 F.
- T.V.A. sur location de l'appareil : 17,6 % pour transport de matériel.
5 % pour transport de passagers.

Remarque : Au bout de 800 h de vol (tous les trois mois), on démonte de nombreuses pièces de l'hélicoptère, pour vérification.

Au bout de 1 400 h de vol (tous les 6 mois) on démonte l'hélicoptère complètement. Ceci explique le prix de revient élevé, pour l'utilisation de cet appareil.

DEVIS DU VOYAGE

Nom du pilote :

Nombre total de kilomètres parcourus :

Nombre de litres de carburant :

Nombre d'heures de vol :

Location de l'appareil (H.T)	
pour les heures de vol	F

T.V.A. (..... %)		F
-------------------	-------	---

Location de l'appareil (T.T.C.)	F
---------------------------------------	---

Prix du carburant	F
-------------------------	---

Prix du voyage (T.T.C.)	F
-------------------------------	---

Date et signature du pilote

FICHE DU PREMIER MINISTRE

Nom du premier ministre :

{ Jour de départ :
 { Heure de départ :
 { Lieu de départ :

Première étape

Cap :° sur km

Escale de heures

Deuxième étape

Cap :° sur km

Escale de heures

Troisième étape

Cap :° sur km

Escale de heures

Quatrième étape

Cap :° sur km

Escale de heures

Date et signature du premier ministre

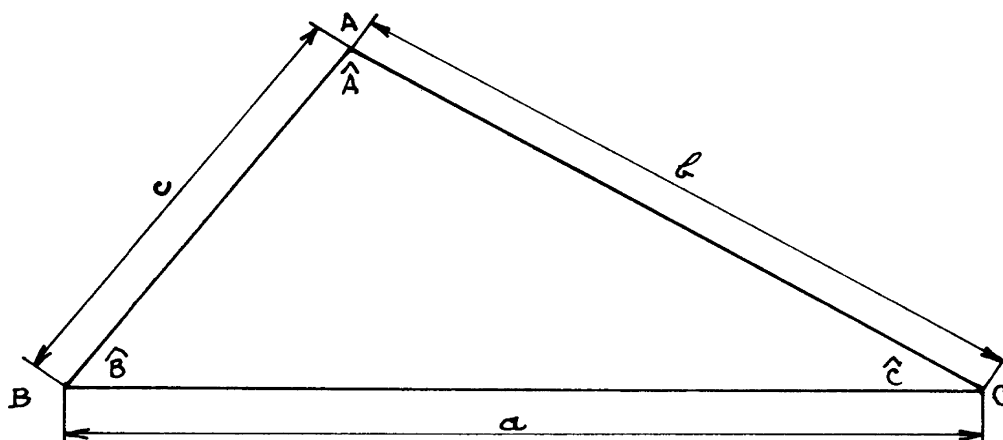
FICHE DU PILOTE

Nom du pilote :

	Lieu de départ	Jour et heure de départ	Lieu d'arrivée	Jour et heure d'arrivée	Distance parcourue (en km)
1ère étape					
2ème étape					
3ème étape					
4ème étape					

Date et signature du pilote

LES ANGLES ET LES COTES D'UN TRIANGLE



1

a) Observe attentivement ce dessin et note tes remarques.

b) Mesure les angles et les côtés de ce triangle.

c) Nous avons effectué ces mesures et nous avons trouvé, au degré près et au mm près

en degrés : $\hat{A} = 95$

$\hat{B} = 54$

$\hat{C} = 31$

en cm : $a = 11$

$b = 8,8$

$c = 5,6$

Es-tu d'accord ? sinon appelle-moi.

A-t-on placé au hasard les lettres a, b, c pour désigner la longueur des côtés ?

A ton avis, pourquoi n'a-t-on pas noté «a» la longueur du segment AC ou celle du segment AB ? Discutes-en avec tes voisins.



Pour pouvoir échanger nos renseignements, nous adopterons tous la convention :

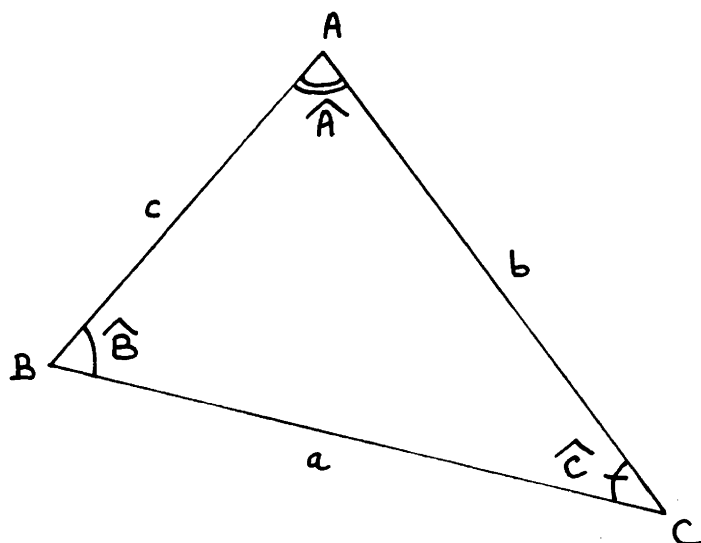
a désigne la longueur, en cm, du seul côté qui est en face du sommet A.

b désigne la longueur, en cm, du seul côté qui est en face du sommet B.

c désigne la longueur, en cm, du seul côté qui est en face du sommet C.

2

Voici un nouveau triangle (que nous notons encore ABC).



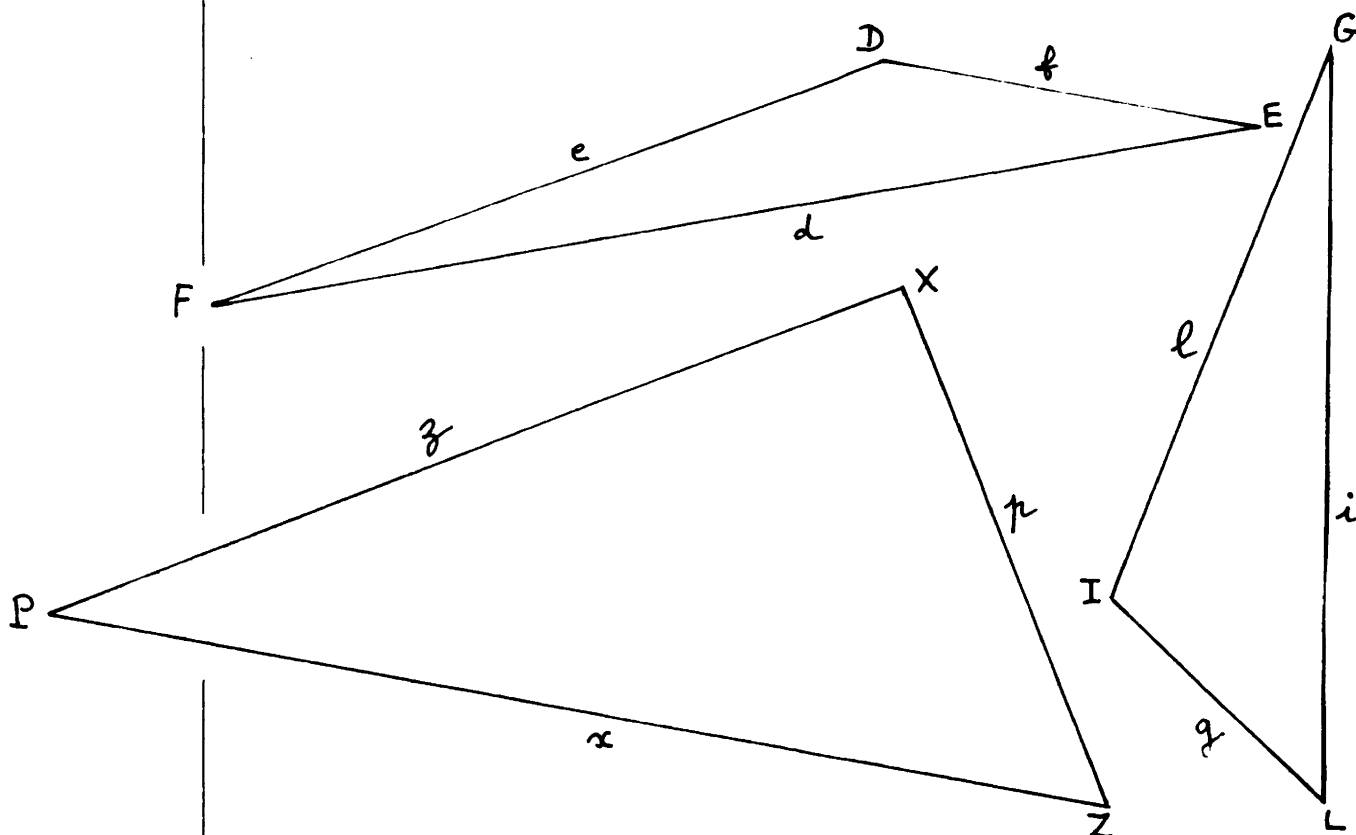
Mesure avec précision (au degré près et au mm près) :

— les trois angles (en degrés) $\hat{A} =$ $\hat{B} =$ $\hat{C} =$
 — les trois côtés (en cm) $a =$ $b =$ $c =$

Calcule la somme des angles (en degrés) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$
 la somme des côtés (en cm) $a + b + c =$

3

Recommence l'exercice précédent avec les 3 triangles suivants : DFE ; GIL ; PZX.



Chaque fois que tu as terminé l'étude d'un triangle, va au tableau écrire dans la colonne convenable, le résultat de tes propres mesures :

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$ en degrés	$\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F}$ en degrés	$\widehat{G} + \widehat{I} + \widehat{L}$ en degrés	$\widehat{P} + \widehat{Z} + \widehat{X}$ en degrés	$a + b + c$ en cm	$d + e + f$ en cm	$g + i + l$ en cm	$p + z + x$ en cm
180							
179							
155							

Que constates-tu ? Ecris tes remarques.

4

Maintenant tu construis un triangle quelconque (comme tu veux).

Tu le nommes YTU, tu mesures ses angles et ses côtés, et tu vas écrire au tableau les deux nouveaux nombres :

en degrés : $\widehat{Y} + \widehat{T} + \widehat{U} =$

en cm : $y + t + u =$

5

Que penses-tu de la somme des mesures des angles d'un triangle ?

Que penses-tu de la somme des mesures des côtés (périmètre) d'un triangle ?

Peux-tu trouver des triangles dont le périmètre mesure 1 m ?
0,3 mm ? 100 000 km ? Construis un triangle de périmètre 13 cm.

6

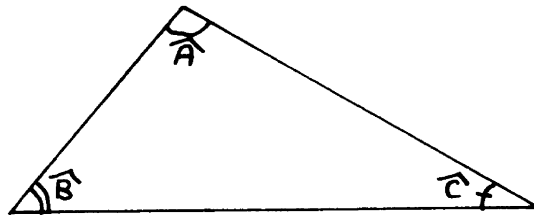
Par petits groupes, effectuez la moyenne des nombres qui se trouvent dans la colonne $(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$ ou $(\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F})$ ou $(p + z + x)$ ou $(\widehat{Y} + \widehat{T} + \widehat{U})$ ou $(y + t + u)$ ou...

Après mise en commun des résultats de chaque groupe, trouvez deux phrases qui résument les observations que vous venez de faire.

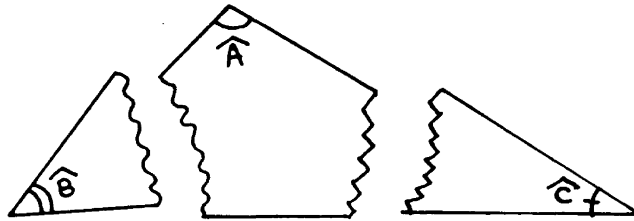
7

Voici une autre façon de retrouver la propriété observée sur la somme des mesures des angles d'un triangle :

a) Dessine un triangle ABC et marque bien chaque angle comme ci-dessous :

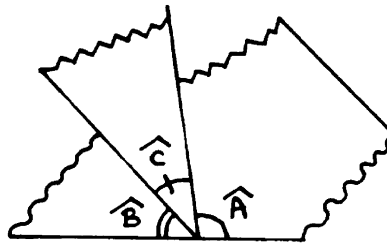


b) Découpe ton triangle et déchire le en trois morceaux :



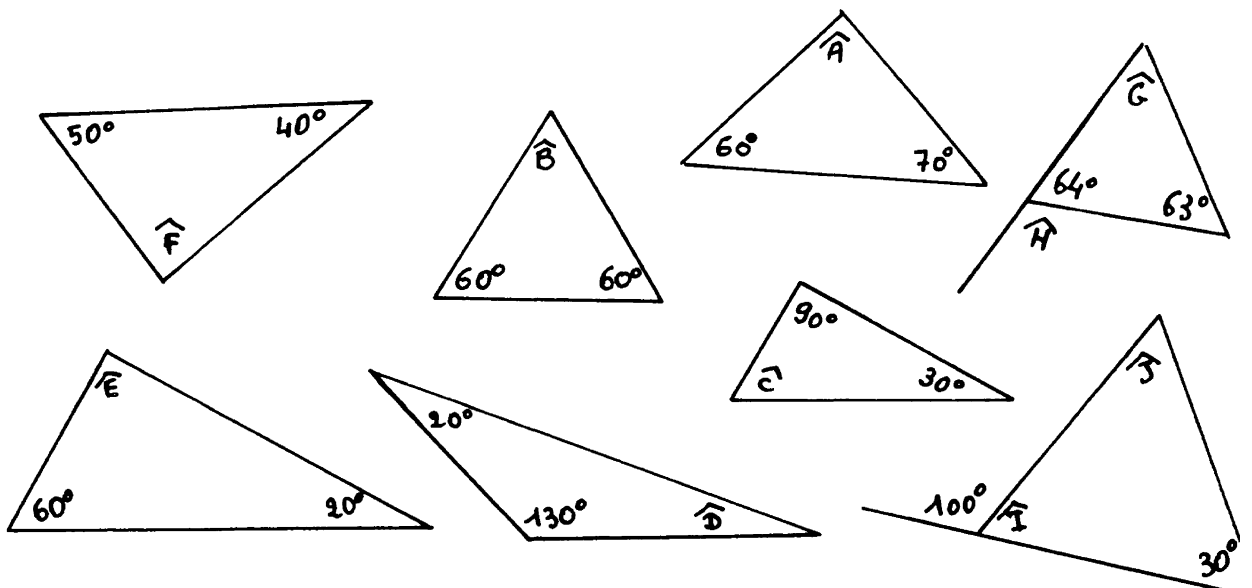
c) Place les 3 sommets A, B, C côte à côte :

Que remarques-tu ?



8

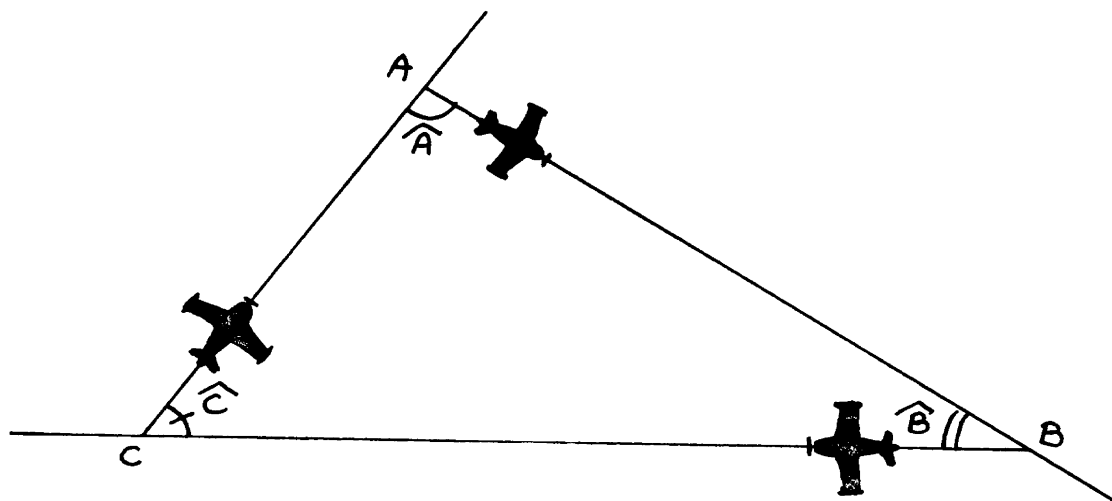
Trouve la mesure des angles de ces triangles sans utiliser de rapporteur.



«Une démonstration».

Voici une façon de montrer que la somme des mesures des angles d'un triangle équivaut à un demi-tour complet.

Dessine un triangle ABC, reproduis l'avion, et marque les mesures (en degrés) des angles.



L'avion, placé en A, est tourné dans la direction de A vers B. Lorsque cet avion arrive en B, il tourne d'un angle $\widehat{B'}$ pour se diriger en ligne droite vers C. Marque cet angle $\widehat{B'}$ sur ton dessin.

Cet angle $\widehat{B'}$ est-il égal à l'angle $\widehat{B}$? Cet angle $\widehat{B'}$ peut-il s'exprimer «en fonction de $\widehat{B}$ » ? (remarque bien que, arrivé en $\widehat{B}$, si l'avion effectue un demi-tour, il va retourner en A).

Arrivé en C, l'avion effectue une rotation d'un certain angle $\widehat{C'}$ pour se diriger en ligne droite vers A. Marque cet angle $\widehat{C'}$ sur ton dessin et essaye de l'exprimer en fonction de $\widehat{C}$.

Enfin indique sur le dessin l'angle $\widehat{A'}$ de la rotation effectuée par l'avion lorsqu'il arrive en A pour reprendre sa position de départ.

Cela te permet-il de démontrer que la somme des angles d'un triangle est un angle de 180° ?

Voici deux phrases qui résument les observations que nous venons de faire :

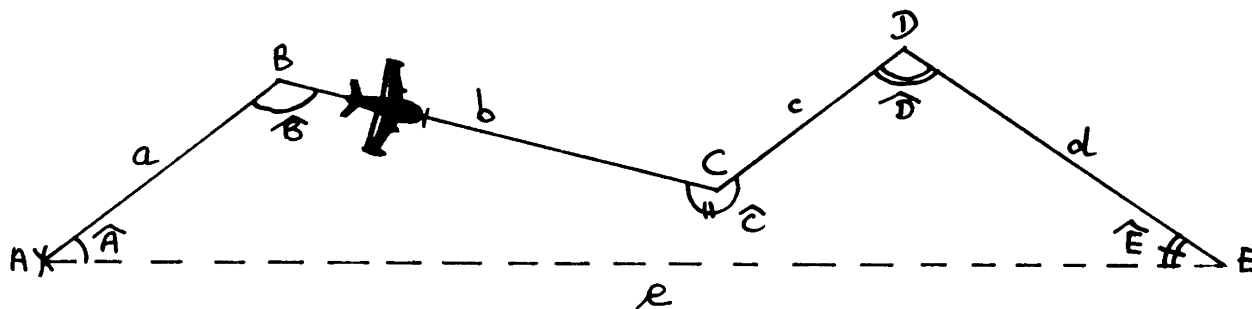
La somme des mesures des trois angles d'un triangle est toujours 180° .

La somme des mesures des trois côtés d'un triangle est quelconque !

11

Comment pourrais-tu convaincre quelqu'un que la somme des mesures des angles d'un pentagone est 540° ?

12



Un avion part de A, va en B, puis en C, puis en D, puis en E, puis revient en A.

Zaius dit : « l'avion est parti de A et il est revenu en A, donc il a fait un tour complet :

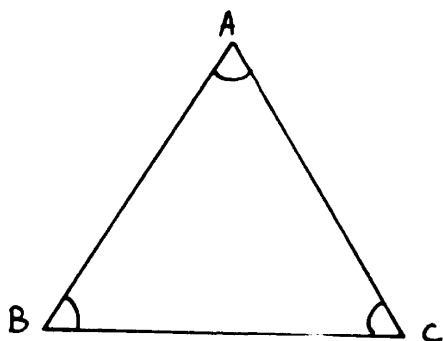
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 360^\circ.$$

Es-tu d'accord avec Zaius ? Discutes-en avec tes camarades. (Mise en commun souhaitable).

13

«Les angles de quelques triangles remarquables».

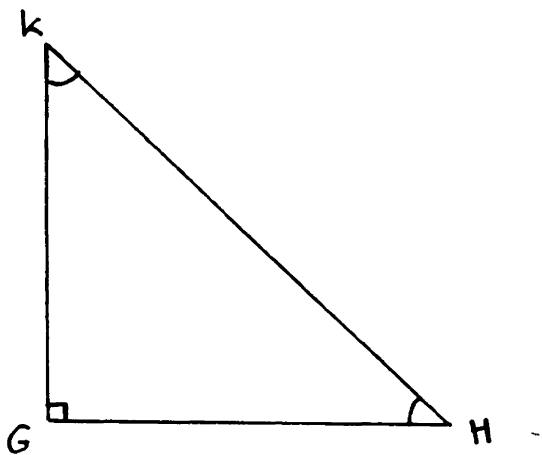
Observe les triangles ci-dessous et essaye de trouver la mesure des angles inconnus.



On sait que : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ (Hypothèse)

Complète : $\hat{A} =$
 $\hat{B} =$ (Conclusion)
 $\hat{C} =$

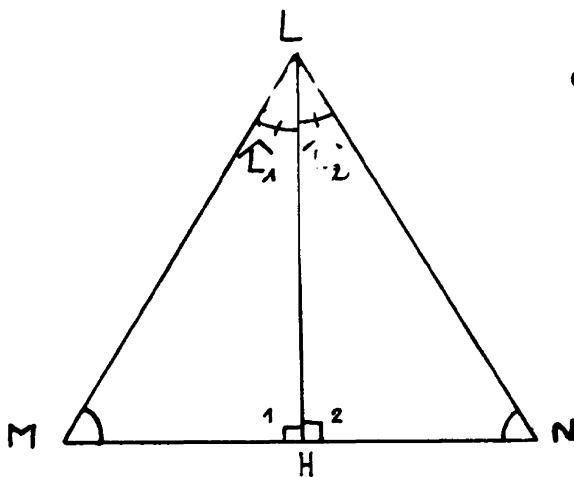
Explique :



On sait que : $\widehat{G} = 90^\circ$ (Hypothèse)
 $\widehat{K} = \widehat{H}$

Complète : $\widehat{K} =$ (Conclusion)
 $\widehat{H} =$

Explique :



On sait que : $\widehat{L}_1 + \widehat{L}_2 = \widehat{M} = \widehat{N}$ (Hypothèse)
 $\widehat{H}_1 = 90^\circ$

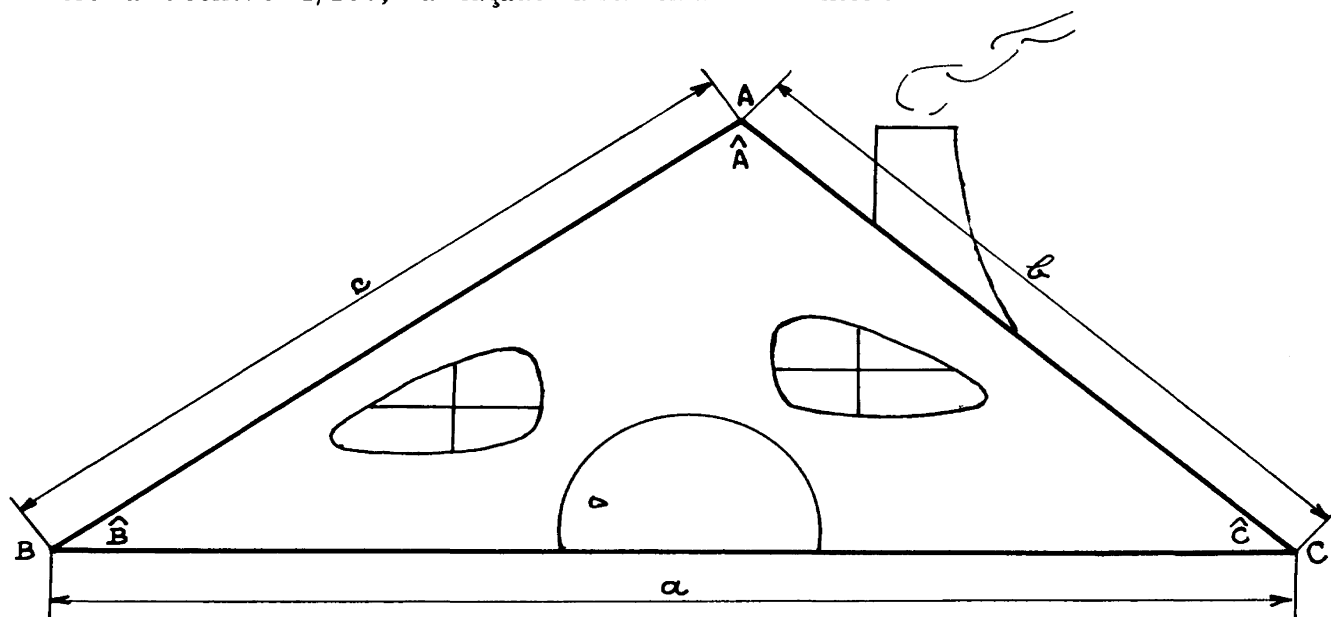
Complète : $\widehat{H}_2 =$ (Conclusion)
 $\widehat{L}_1 =$
 $\widehat{L}_2 =$

Explique :

CHALMONT

Cas d'égalité des triangles

Chalmont est le nom d'une usine de chalets préfabriqués. Voici représentée à l'échelle 1/100, la façade d'un chalet Chalmont :



Ici : $\hat{A} \approx 104^\circ$

$\hat{B} \approx 35^\circ$

$\hat{C} \approx 41^\circ$

$a \approx 15,2 \text{ cm}$

$b \approx 9 \text{ cm}$

$c \approx 10,2 \text{ cm}$

Remarque bien «le côté de mesure a, est en face du sommet A»,
 «le côté de mesure b, est en face du sommet B»,
 «le côté de mesure c, est en face du sommet C»,
 puis vérifie : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \approx 180^\circ$.

L'entreprise Chalmont se lance dans la vente par correspondance ; pour que chaque client puisse commander sans difficulté et sans faire d'erreurs son «chalet sur mesures», le directeur de Chalmont cherche à mettre au point un bon formulaire.

Le sous-directeur, Monsieur Rigolo, a proposé le formulaire suivant :

CHALMONT			
NOM DU CLIENT :			
MESURES DES ANGLES	$\hat{A} \approx \dots\dots\dots$	$\hat{B} \approx \dots\dots\dots$	$\hat{C} \approx \dots\dots\dots$
MESURES DES COTES	$a \approx \dots\dots\dots$	$b \approx \dots\dots\dots$	$c \approx \dots\dots\dots$
DATE ET SIGNATURE			

Voyant cette fiche, le directeur a dit à Monsieur Rigolo : «votre fiche, cher Monsieur Rigolo, est très précise mais trop compliquée à remplir ; aussi les clients qui n'auront pas le courage de compléter notre formulaire iront acheter leur chalet ailleurs».

Après plusieurs jours de grand travail, Monsieur Rigolo propose la fiche que voici :

CHALMONT	
NOM DU CLIENT :	
TEMPERATURE EXTERIEURE LE JOUR DE LA COMMANDE	
MESURE DE LA BASE $a \approx \dots\dots\dots$	
DATE ET SIGNATURE	

1 Que penses-tu de cette nouvelle fiche ? Ecris tes remarques.

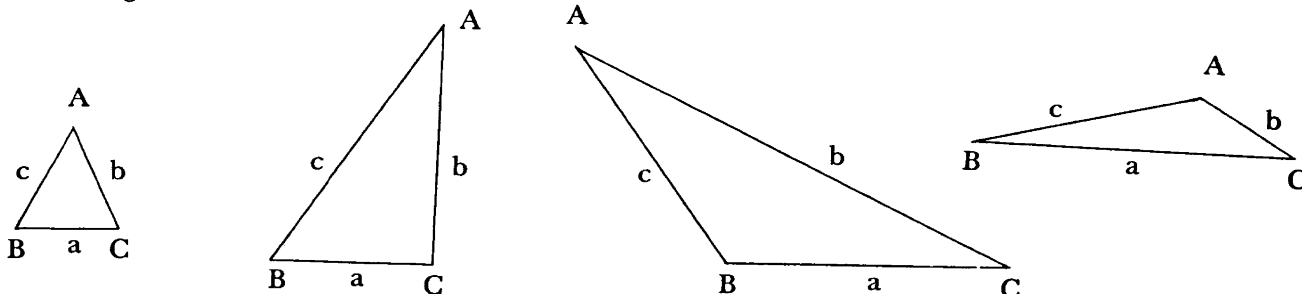
Monsieur Chalmont n'est pas très content de la trouvaille de Monsieur Rigolo, et il a besoin de toi pour trouver un nouveau formulaire.

2 Inscris sur une feuille (de format 16,5 cm $\times$ 22 cm) :

- ton nom
- la date d'aujourd'hui
- chalmont numéro 1

Puis dessine un triangle qui représente la façade d'un chalet à ton goût.

Tu peux, par exemple, reproduire des formes semblables à celles ci-dessous mais agrandies :



Maintenant, effectue avec soin les six mesures (trois angles et trois côtés) et inscris-les sur ta feuille.

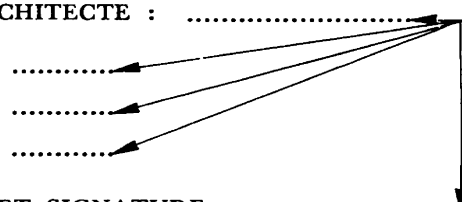
Calcule la somme des mesures des angles : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$; si tu trouves un nombre qui diffère de plus de 2 degrés de 180° , alors tes mesures n'ont pas été assez précises et il faut recommencer avant de poursuivre le travail.

Veille bien à ne pas faire de confusions de lettres !

Vérifie deux fois les mesures obtenues !

3

Prends une nouvelle feuille, pour écrire :

CHALMONT numéro 1	
NOM DU CLIENT : (ton nom et ton prénom)..... ADRESSE : $\hat{B} \approx$ (mesure de l'angle B de ton chalet) $\hat{C} \approx$ (mesure de l'angle C de ton chalet) $a \approx$ (mesure du côté BC de ton chalet) DATE ET SIGNATURE (de ce jour) (la tienne)	
NOM DE L'ARCHITECTE : (n'écris rien ici) $\hat{A} \approx$  $b \approx$ $c \approx$ DATE ET SIGNATURE	

Vérifie que tu as bien donné les renseignements ($\hat{B}$, $\hat{C}$ et a) qui correspondent à ton chalet, et porte cette fiche à Monsieur Chalmont (ton professeur).

Conserve dans ton cahier la feuille du dessin de ton chalet.

Monsieur Chalmont va trouver dans la classe un architecte : il lui donnera ta fiche.

Puis Monsieur Chalmont va chercher un autre client dans la classe et il lui demandera sa fiche, pour te la donner.

Afin de faciliter les échanges dans la classe, la même personne peut être à la fois ton architecte (cette personne reçoit ta fiche) et ton client (cette personne te remet sa fiche). Mais vous ne devez pas être assis à côté l'un de l'autre.

4

Tu as maintenant reçu la fiche de ton client et tu deviens son architecte.

Essaye de construire le chalet qu'il désire.

5

Si tu as pu construire ce chalet, effectue les mesures manquantes : ($\hat{A}$; b ; c) et remplis alors la partie de fiche te concernant (partie ARCHITECTE).

6

Ton «architecte-client» a-t-il également terminé ? Si oui, rencontrez-vous et comparez les mesures $\hat{A}$, b, c trouvées par les architectes, avec celles des clients.

7

• Si vous êtes d'accord, au degré près et au millimètre près, alors réfléchissez à la fiche Chalmont numéro 1 : Est-ce «une bonne fiche» à proposer aux clients ?

Résumez les observations que vous venez de faire à propos des triangles.

• Si vous n'êtes pas d'accord et si vous avez des résultats très différents, cherchez-en la raison :

– avez-vous bien utilisé vos rapporteurs ? la somme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ est-elle très voisine de 180° ?

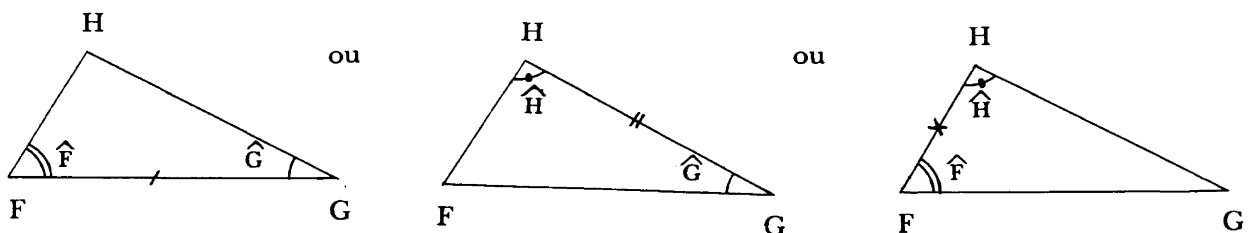
– la longueur «a» correspond-elle bien au côté BC ?

Il est prévu une prochaine réunion des architectes et de Monsieur Chalmont.

8
?

Auparavant, réfléchis à la proposition suivante :

«Pour connaître un triangle, il suffit de connaître la longueur d'un côté et les mesures des deux angles adjacents à ce côté».



Es-tu d'accord ? Explique ta réponse.

Réunion chez Monsieur Chalmont.

Pour continuer à trouver de «bonnes fiches», tu vas essayer une nouvelle fiche.

9

Prends une nouvelle feuille (16,5 cm X 22 cm) ;

Inscris

- ton nom
- la date
- Chalmont numéro 2.

Dessine un triangle (différent de celui de la fiche Chalmont numéro 1).

10

Prends une autre feuille pour fabriquer cette fiche, dont tu complètes la partie client :

CHALMONT numéro 2

NOM DU CLIENT :

$\hat{A} \simeq$ $\hat{B} \simeq$ $a \simeq$

DATE ET SIGNATURE :

NOM DE L'ARCHITECTE :

$\hat{C} \simeq$ $b \simeq$ $c \simeq$

DATE ET SIGNATURE :

11

Porte cette fiche à Monsieur Chalmont qui te trouvera un «architecte-client».

Essaye de construire le chalet de ton nouveau client.

Si tu rencontres des difficultés, réfléchis bien à ce que tu as observé sur les angles d'un triangle.

12

Avant la réunion des architectes et de Monsieur Chalmont, réfléchis à la proposition suivante :

?

«Pour connaître un triangle, il suffit de connaître la mesure d'un côté et les mesures de deux angles».

Lorsque tout le monde sera d'accord avec cette nouvelle proposition, on pourra admettre qu'elle est toujours vraie. Et comme c'est une propriété très utile, car elle rend compte de la réalité quotidienne, nous allons lui donner un nom ! on appellera cette propriété : **Cas d'égalité des triangles.**

Réunion chez Monsieur Chalmont.

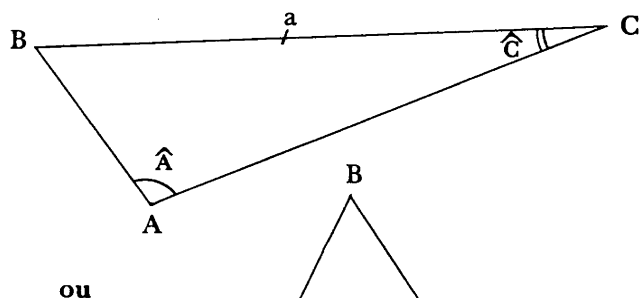
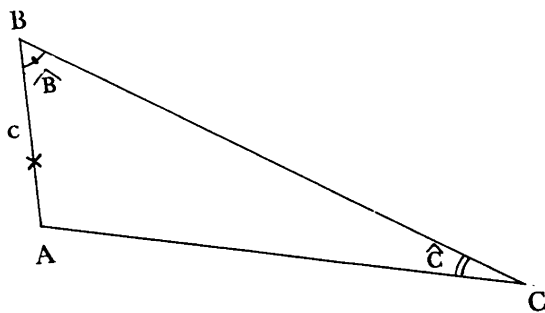
Au cours de cette réunion on pourra :

► *Énoncer la propriété suivante :*

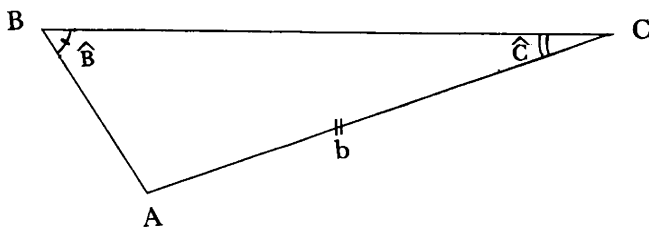
Propriété. Cas d'égalité des triangles.

Pour connaître un triangle il suffit de se donner la mesure d'un côté et les mesures de deux angles.

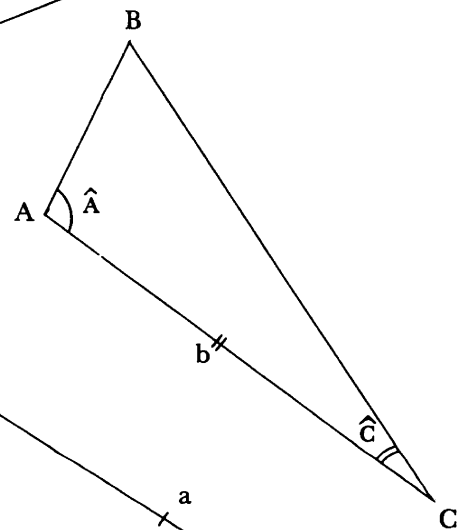
► *Expliciter tous les cas de figures.*



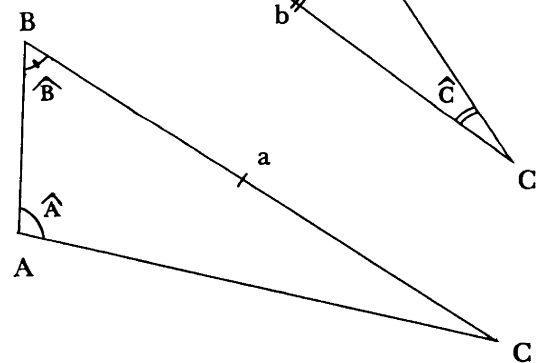
ou



ou ?



ou ?



ou ?

ou ?

► *Se poser la question suivante :*

Peut-on «dédire» cette propriété de celle que l'on a énoncée au paragraphe (8) et de la propriété sur la somme des angles d'un triangle ? (Penser au «coup de l'armoire»).

Afin de trouver d'autres «cas d'égalité des triangles», traitons comme les fiches 1 et 2, les fiches suivantes :

13

CHALMONT numéro 3

NOM DU CLIENT :

 $\hat{A} \approx$ $\hat{B} \approx$ $\hat{C} \approx$

DATE ET SIGNATURE :

NOM DE L'ARCHITECTE :

 $a \approx$ $b \approx$ $c \approx$

DATE ET SIGNATURE :

Si tu as trop de problèmes avec ton client, voyez d'autres architectes.

Si les difficultés persistent, demandez alors une réunion générale à Monsieur Chalmont.

14

CHALMONT numéro 4

NOM DU CLIENT :

 $a \approx$ $b \approx$ $c \approx$

DATE ET SIGNATURE :

NOM DE L'ARCHITECTE :

 $\hat{A} \approx$ $\hat{B} \approx$ $\hat{C} \approx$

DATE ET SIGNATURE :

Si tu n'arrives pas à construire le chalet de ton client, réfléchis bien et discutes-en avec d'autres architectes. Peux-tu t'aider de ton compas ?

15

??

Avant la réunion des architectes, réfléchis aux deux propositions suivantes :

- «Pour connaître un triangle, il suffit de connaître les longueurs de ses trois côtés».
- «Pour connaître un triangle, il suffit de connaître les mesures de ses trois angles».

Réunion des architectes et de Monsieur Chalmont.

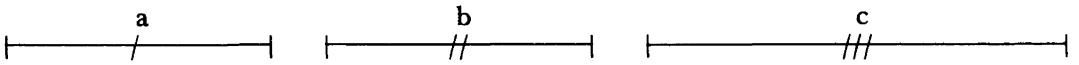


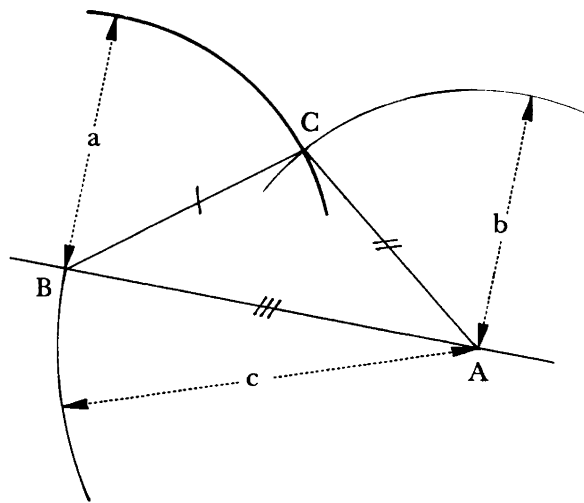
16

Lorsque tout le monde sera d'accord, on pourra admettre le cas d'égalité suivant :

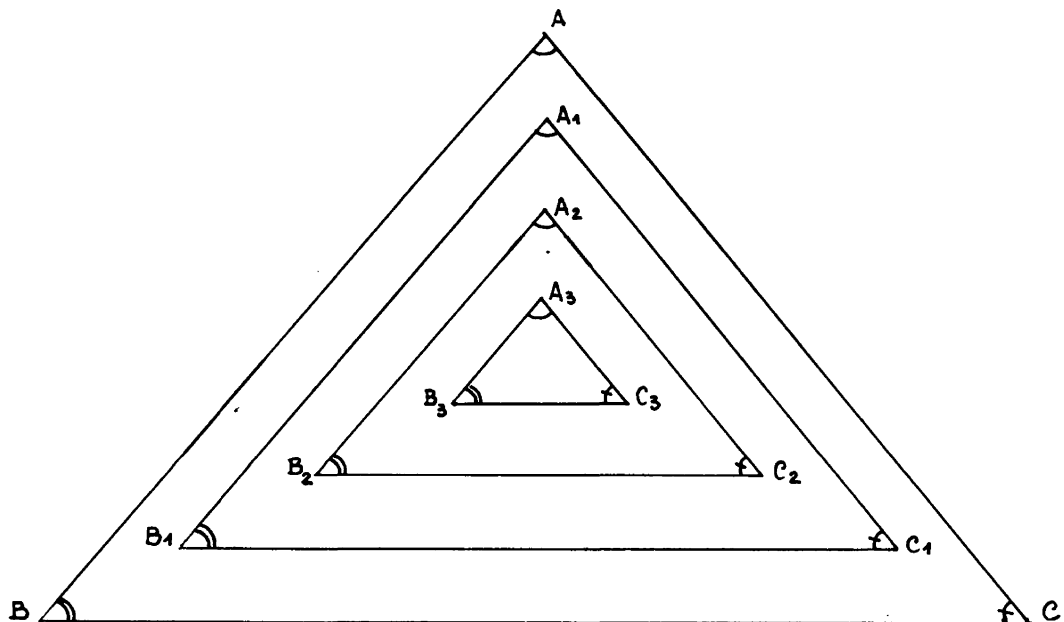
Propriété : Cas d'égalité des triangles.

Pour connaître un triangle il suffit de se donner la mesure de ses trois côtés .

Soit : 



Par contre on se rappellera que des triangles peuvent avoir des angles égaux et être de grandeurs très différentes. (On dit alors que ces triangles sont semblables).



17

Essaye de construire un triangle tel que :

$$a = 5 \text{ cm}, \quad b = 6 \text{ cm}, \quad c = 12 \text{ cm}$$

si tu n'y arrives pas, essaye d'en construire un autre tel que :

$$a = 10 \text{ cm}, \quad b = 5 \text{ cm}, \quad c = 3 \text{ cm}$$

ou bien encore un autre :

$$a = 5 \text{ cm}, \quad b = 20 \text{ cm}, \quad c = 12 \text{ cm}$$

Dans chaque cas, qu'est-ce qui te gêne pour construire le triangle ?

18

Prends trois nombres au hasard. (Par exemple 10, 100, 1000 ; ou bien 50, 300, 10).

Peuvent-ils représenter les longueurs des côtés d'un triangle ?

19

Reprends les nombreux triangles que tu as construits et compare :

$$a \text{ et } b + c,$$

$$b \text{ et } a + c,$$

$$c \text{ et } a + b.$$

Tu constates que toujours :

$$a + b \geq c$$

$$b + c \geq a$$

$$c + a \geq b ; \text{ cela t'étonne-t-il ?}$$

20

Voici une lettre d'un client de la maison Chalmont :

Monsieur l'ECARTELÉ
88888888, Chemin de l'impossible
38888 NYPENSEZPAS.

Cher Monsieur le Directeur,

Vos chalets triangulaires me plaisent beaucoup ; toutefois ma femme est très frileuse, aussi avons-nous horreur des grands toits, ils coûtent cher et provoquent une importante déperdition de chaleur. Je vous prie donc de nous faire parvenir un grand chalet triangulaire ayant un petit toit. A notre avis la base devrait faire au moins 15 mètres et chaque pan du toit devrait faire au plus 5 ou 6 mètres.

Nous vous remercions à l'avance de la rapidité avec laquelle vous pourrez satisfaire notre commande. Veuillez agréer, Cher Monsieur le Directeur, l'expression de mes sentiments distingués.

Ernest l'Ecartelé

Peux-tu répondre à la lettre de Monsieur l'ECARTELÉ ?

21

?

Réfléchis aux deux propositions suivantes :

• INEGALITE A :

«Dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés».

?

• INEGALITE B :

«Dans un triangle, la mesure d'un angle est toujours plus petite que la somme des mesures des deux autres angles».

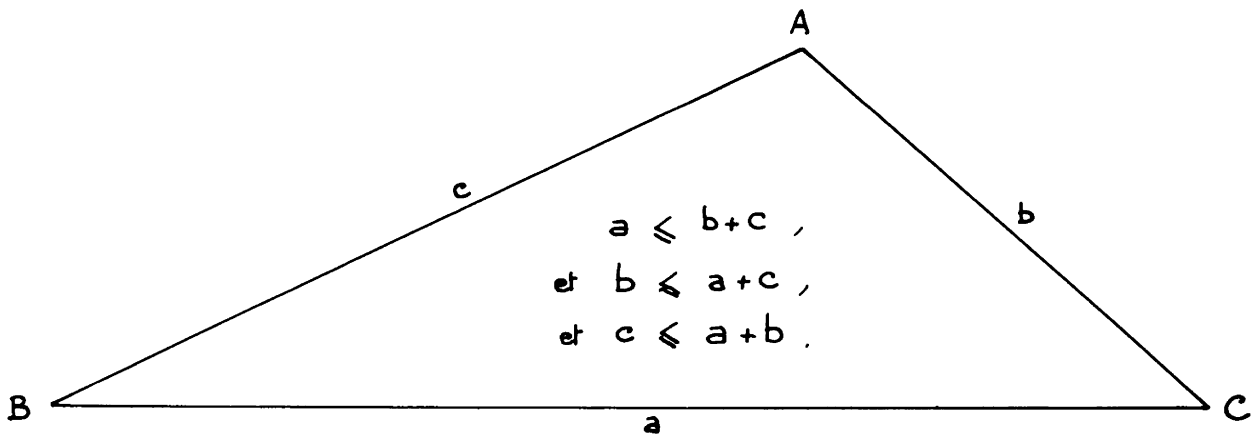
Es-tu d'accord avec ces deux propositions ?

Si tu n'es pas d'accord avec l'une ou l'autre de ces deux propositions, construis un «contre-exemple» ; c'est-à-dire un exemple de triangle où la propriété annoncée ne se vérifie pas !

Lorsque tout le monde sera d'accord avec l'INEGALITE A, on admettra qu'elle est toujours vraie.

Propriété INEGALITE TRIANGULAIRE:

«Dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés».



22

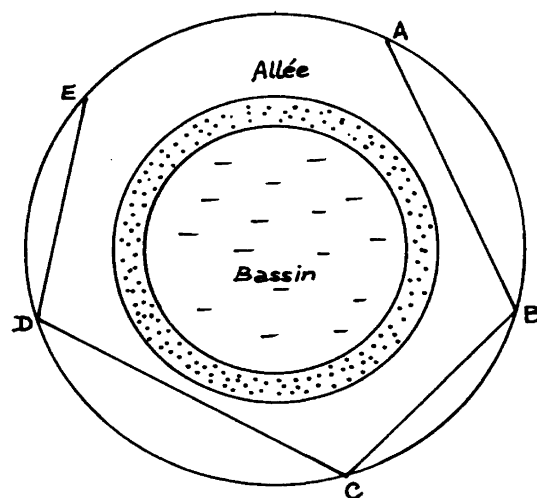
Hector et Zaïus doivent installer, autour d'un bassin, un fil électrique pour alimenter les lampadaires A, B, C, D et E.

Le sol est dur à creuser ; le fil électrique coûte cher. Aussi les deux amis réfléchissent pour savoir quel chemin prendre. Zaïus propose de suivre la ligne brisée ABCDE. Hector pense qu'il vaut mieux suivre l'arc de cercle ABCDE. Comme toujours, personne n'a de bonnes raisons pour convaincre l'autre, mais chacun est persuadé qu'il détient la meilleure solution.

As-tu de bons arguments pour les aider à se mettre d'accord ?



Mise en commun nécessaire.



23

Si tu en as encore le temps, tu traiteras les deux fiches Chalmont suivantes :

CHALMONT numéro 5

NOM DU CLIENT :

$a \simeq$ $b \simeq$ $\hat{C} \simeq$

DATE ET SIGNATURE :

NOM DE L'ARCHITECTE :

$c \simeq$ $\hat{A} \simeq$ $\hat{B} \simeq$

DATE ET SIGNATURE :

CHALMONT numéro 6

NOM DU CLIENT :

$a \simeq$ $b \simeq$ $\hat{A} \simeq$

DATE ET SIGNATURE :

NOM DE L'ARCHITECTE :

$c \simeq$ $\hat{B} \simeq$ $\hat{C} \simeq$

DATE ET SIGNATURE :

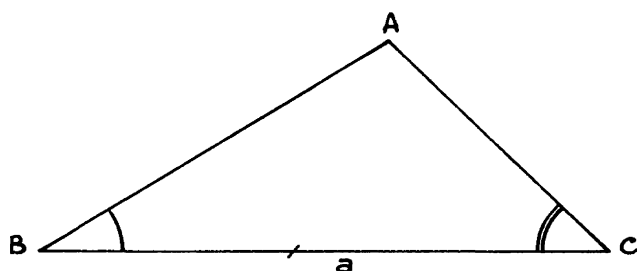
Penses-tu qu'à partir de ces fiches on découvre un nouveau cas d'égalité des triangles ? Si oui, énonce-le.

CAS D'EGALITE DES TRIANGLES.

Il y a beaucoup de cas d'égalité des triangles (par exemple, rappelle-toi la première fiche proposée par Monsieur Rigolo), mais les trois cas les plus intéressants sont les suivants :

* PREMIER CAS (Chalmont numéro 1 et numéro 2)

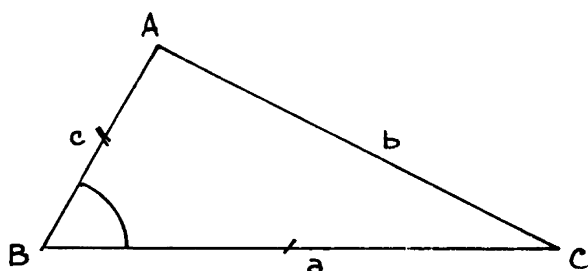
Pour connaître un triangle, il suffit de se donner la mesure d'un côté et les mesures de deux angles.



$a, \hat{B} \text{ et } \hat{C}$
 ou $a, \hat{B} \text{ et } \hat{A}$
 ou $a, \hat{A} \text{ et } \hat{C}$
 ou $b, \hat{A} \text{ et } \hat{B}$
 ou ...

* DEUXIEME CAS (Chalmont numéro 5).

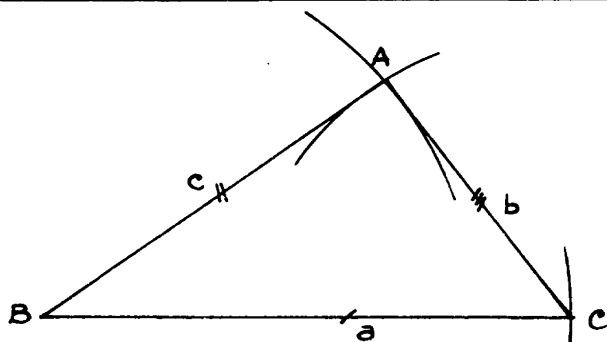
Pour connaître un triangle, il suffit de se donner les mesures de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ces deux côtés.



$\hat{B}, a \text{ et } c$
 ou $\hat{C}, a \text{ et } b$
 ou $\hat{A}, b \text{ et } c$

* TROISIEME CAS (Chalmont numéro 4)

Pour connaître un triangle, il suffit de se donner les mesures de ses trois côtés.



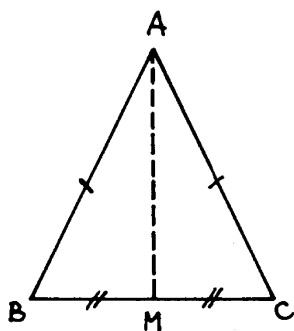
$a, b \text{ et } c$

A partir de ces propriétés observées et admises, essayons d'en découvrir d'autres que nous «démontrons».

26

Tu vas essayer de démontrer la propriété numéro 2. Tu peux prendre modèle sur la démonstration qui vient d'être faite pour la propriété numéro 1.

Pour montrer la propriété numéro 2, tu peux écrire :



Hypothèse $b = c$	Conclusion $\hat{B} = \hat{C}$
Construction Soit M le milieu de BC. Je construis la médiane AM.	
Rédige une démonstration :	

Les propriétés numéro 1 et numéro 2 permettent de dire :

«Un triangle est isocèle, s'il a deux côtés de même longueur»
aussi bien que :

«Un triangle est isocèle, s'il a deux angles de même mesure».

Montre que :

* «Si un triangle a ses trois angles de même mesure, alors ses trois côtés ont même longueur».

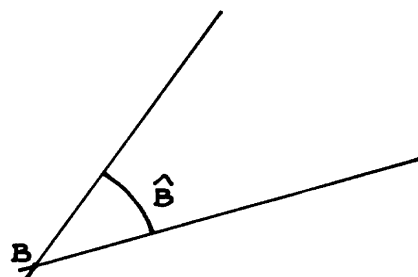
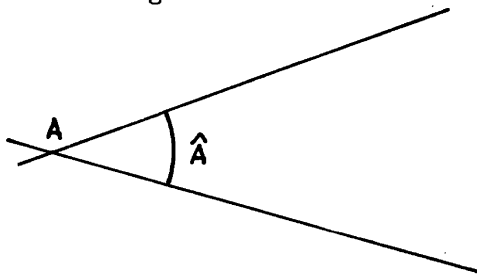
* «Si un triangle a ses trois côtés de même longueur, alors ses trois angles ont même mesure».

Un tel triangle est dit **EQUILATERAL**.

27

28

Peux-tu vérifier avec un compas, ou une règle que ces deux angles ont même mesure ? Explique comment.



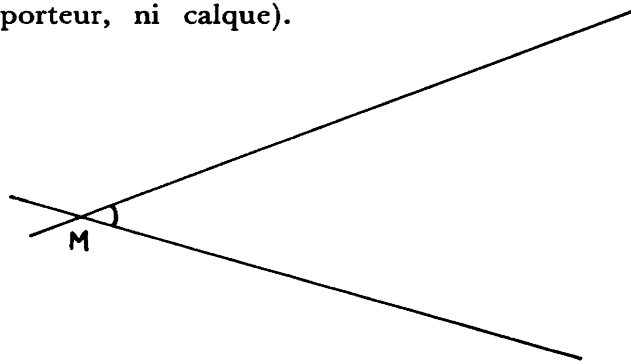
29

Sans rapporteur et sans papier calque, construis en D un angle de mesure $\hat{A}$.



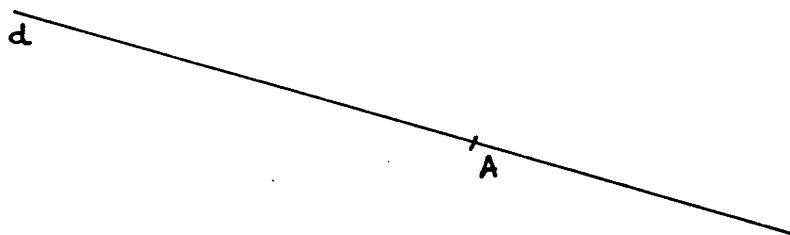
30

Peux-tu partager l'angle M, en deux angles égaux (sans rapporteur, ni calque).



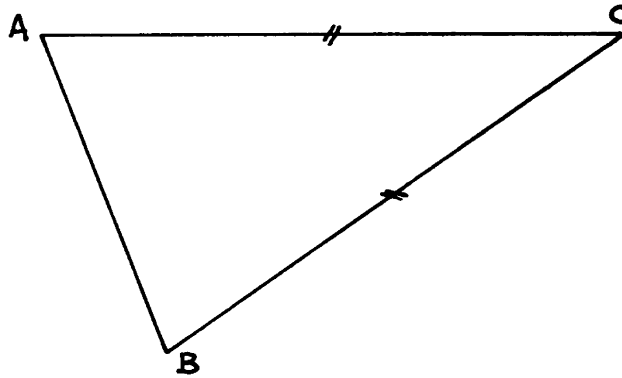
31

Peux-tu construire la perpendiculaire à la droite d, passant par le point A (avec seulement crayon, règle et compas).



32

Par construction, le triangle ABC est isocèle et $AC = BC$



Trace le cercle de centre A et de rayon AC.

Trace le cercle de centre B et de rayon AB.

Ces deux cercles se coupent en D et E.

Trace les triangles ADC et BCE.

Ecris toutes les égalités dont tu es sûr(e) :

Par exemple peux-tu écrire :

$$\boxed{CD = CE = BA}$$

Si oui, pourquoi ?

Ou bien, en utilisant un cas d'égalité peux-tu écrire :

$$\boxed{\widehat{CAD} = \widehat{CAE}} \quad ?$$

Continue (essaye d'écrire des démonstrations).

33

La détection des feux de forêts.

Dans la forêt de pins des Landes, des tours de guet permettent la surveillance et facilitent la détection rapide des incendies.

Un début d'incendie peut être repéré par plusieurs guetteurs, qui avertissent un poste central par radio.

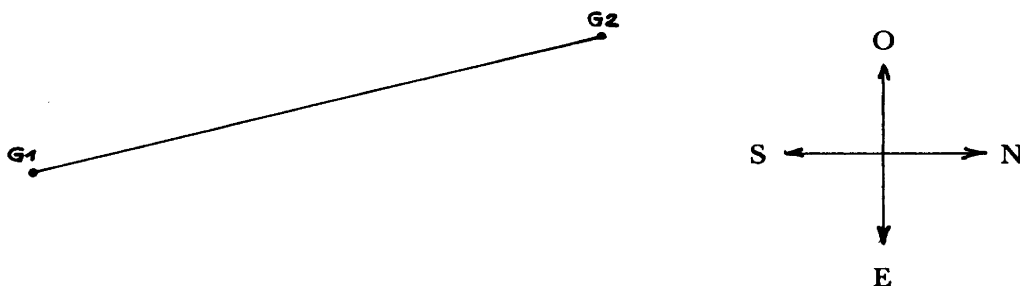
Sur le dessin (vue d'avion) sont représentées deux tours de guet G_1 et G_2 .

Un incendie se déclare au point de la forêt que l'on désigne par I.

Dans la tour G_1 , le guetteur aperçoit l'incendie dans une direction Nord-Est. Il vise G_2 , puis vise I, et relève 42° .

Dans la tour G_2 , le guetteur aperçoit l'incendie dans une direction Sud-Est. Il vise G_1 , puis vise I, et relève 70° .

En utilisant ces renseignements, peux-tu compléter le dessin pour situer avec précision le point I d'incendie ?



Par radio les deux guetteurs communiquent leurs angles de visée à la caserne centrale des pompiers. Munis de ces renseignements, les pompiers peuvent-ils localiser avec certitude l'emplacement du feu sur la carte ? Si oui, pourquoi ?

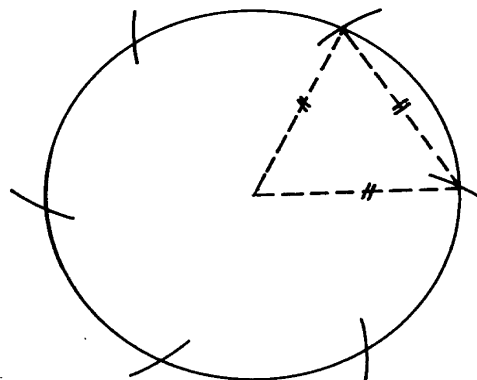
34

Le cadran de l'horloge.

Pour construire le cadran horaire d'une pendule circulaire, il faut pouvoir découper avec précision un cercle en douze portions égales.

Peux-tu effectuer ce découpage avec pour seuls outils la règle et le compas ? (sans rapporteur).

Les propriétés précédentes doivent te permettre de découper avec précision un cercle en 6 parties égales, puis de découper chaque partie en deux parties égales.



Chapitre H

DISTANCE ET ORTHOGONALITE

- LE PLUS COURT CHEMIN
- LE MEME PROBLEME VU SOUS UN «AUTRE ANGLE»
- ANGLE DROIT – ORTHOGONALITE
- PERPENDICULAIRE ET HAUTEUR
- LE JEU DU BERET – MEDIATRICE
- FAISONS LE POINT
- JEUX SUR LES DISTANCES

DISTANCE ET ORTHOGONALITE

Fiche signalétique

C'est une activité qu'on peut adapter, suivant les besoins, à la classe de 6ème ou à celle de 5ème.

OBJECTIFS DE L'ACTIVITE.

Cette activité permet l'approche et l'utilisation des notions de :

- distance d'un point à une droite
- orthogonalité
- hauteur d'un triangle, d'un quadrilatère, d'un polygone
- médiatrice de (A, B) comme ensemble des points équidistants de A et de B
comme droite perpendiculaire au milieu de (A, B) .

INTERETS DE L'ACTIVITE.

* Chacune des notions est abordée à l'occasion d'une situation concrète, montrant qu'il est nécessaire de se donner des outils et certaines définitions.

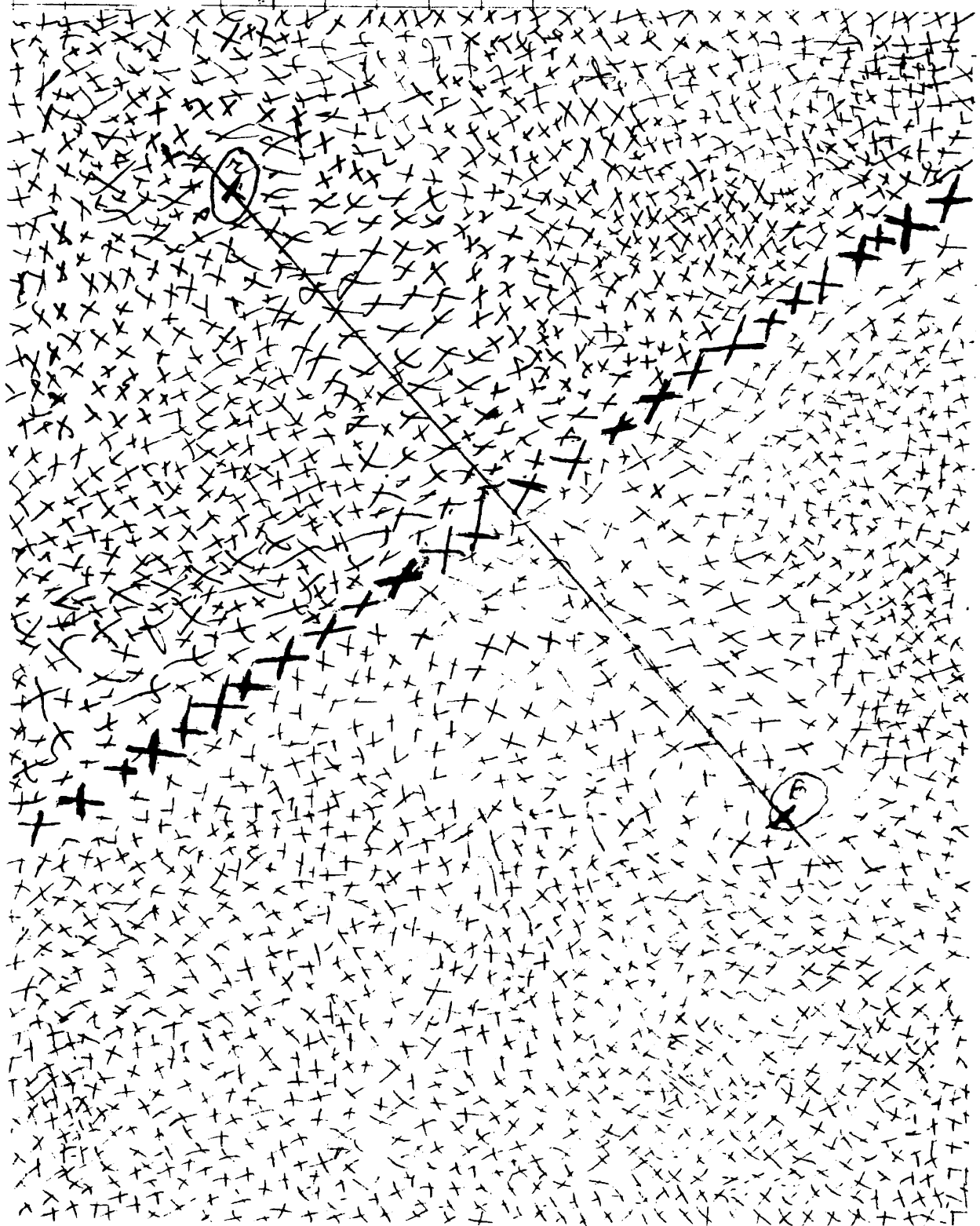
* Chacune des notions est réutilisée pour étudier de nouvelles situations. De nouveaux aspects peuvent alors être précisés. Certains lieux communs ou fausses évidences (plus court chemin, trajet le plus court...) sont précisés ou déjoués. Par exemple le trajet parcouru dans le temps le plus court peut, dans certaines situations, ne pas être un trajet en ligne droite.

Les élèves sont amenés à faire bien attention aux conditions dans lesquelles s'appliquent les notions étudiées.

* Cette activité montre que les notions de distance usuelle et d'orthogonalité ne peuvent pas être considérées comme indépendantes (1).

(1) Voir publication de l'IREM de Grenoble : du plan affine au plan euclidien.

JEU DU BERET



QUELQUES COMMENTAIRES.

1 – Le chemin le plus court.

La situation présentée : «à quelle distance es-tu de la rivière» conduit à préciser la notion de distance d'un point à une droite. L'approche en est intuitive. Une mise au point collective s'avère très vite nécessaire. Elle permet alors au professeur d'établir une définition précise.

2 – Orthogonalité.

Nous avons cherché à débusquer la confusion entre vertical et orthogonal (I - b)).

Un angle droit est présenté aussi bien comme la moitié d'un angle plat (II) que comme le quart d'un tour complet (III).

A propos de cette dernière présentation, on a insisté sur le fait que 4 angles, mis côte à côte constituant un tour complet, ne sont pas obligatoirement 4 angles droits. C'est l'occasion ici de sensibiliser les élèves aux exigences du raisonnement et de chercher avec eux d'autres exemples de faux raisonnements similaires.

3 – Hauteurs.

La notion de hauteur est présentée comme permettant d'évaluer «l'encombrement» d'un triangle. On entrevoit ainsi tout de suite le rôle de la hauteur dans l'évaluation de l'aire d'un triangle. Rappelons que les élèves ont eu en CM l'occasion d'évaluer l'aire d'un triangle comme la moitié de l'aire d'un parallélogramme. Les trois dispositions possibles des triangles mis en bande montrent bien l'existence des 3 hauteurs et leurs rôles similaires.

Nous avons eu le souci de donner à chaque élève l'occasion de dominer les diverses difficultés de tracés en multipliant les exemples.

4 – Médiatrice.

Nous avons donné quelques exemples de travaux d'élèves pour convaincre les enseignants qui, après une première lecture, jugerait trop long et trop fastidieux le coloriage des points bleus et des points rouges proposé page 231. L'expérience dans les classes a montré combien il est intéressant de faire apparaître ce qu'est la médiatrice, en précisant de plus en plus ce qui «n'est pas l'ensemble des points équidistants de deux points».

Le pliage d'une feuille amenant le point A sur le point B, «démontre» bien qu'il est «naturel» d'admettre comme vraie la propriété caractéristique de la médiatrice de (A, B) : c'est la droite perpendiculaire à AB, passant par le milieu de (A, B).

5 — Jeux sur les distances.

Il nous a paru très important de multiplier les situations du jeu de bérét et de présenter aussi d'autres situations où la ligne droite n'est plus le plus court chemin. A propos du «Hold-up du siècle», il nous a paru intéressant de développer les remarques suivantes.

«La ligne droite est le plus court chemin entre deux points». C'est ce que dit l'inégalité triangulaire, lorsqu'on utilise la distance usuelle (voir commentaire sur la chèvre dans la 2ème partie). Cette assertion est par contre fausse, si on utilise la pseudo-distance «temps mis pour aller de A vers B» ; et c'est ce qu'ont fort bien compris certains bandits, qui, tout comme la lumière, doivent chercher le «chemin optique». Rappelons le principe général de l'optique géométrique énoncé par le mathématicien Fermat : Pour aller d'une source A vers un observateur B, la lumière suit toujours le trajet minimum (au sens du temps). Ce trajet est appelé «Chemin optique».

En particulier, si A et B sont dans un milieu homogène, sa vitesse étant constante, la lumière se propage en ligne droite.

Plus généralement, si les points A et B sont situés respectivement dans des milieux homogènes (I) et (II) dans lesquels la vitesse de la lumière est respectivement V_1 et V_2 , et si la frontière séparant les deux milieux est plane, le principe de Fermat permet d'établir que la lumière se réfracte suivant les lois de Descartes :

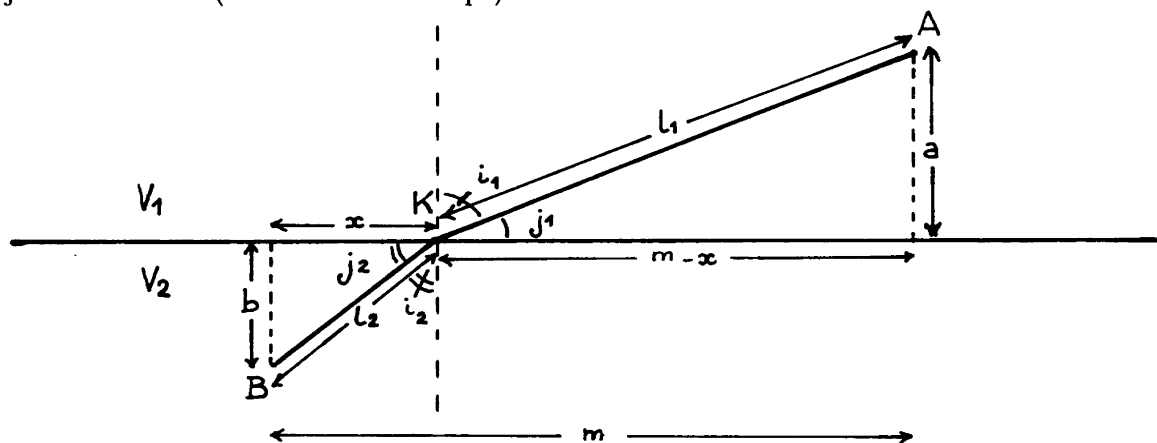
— le rayon incident, le rayon réfracté et la normale au plan d'incidence sont dans un même plan.

— les angles d'incidence et de réfraction sont liés par la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$n_1 = \frac{c}{V_1} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{c}{V_2} \quad c \text{ désignant la vitesse de la lumière dans le vide.}$$

Les bandits sont confrontés au même problème. Ils avancent à la vitesse de 3 km/h dans la neige et de 9 km/h sur la piste déneigée. Ils doivent trouver le trajet minimum (au sens du temps).



Montrons que le trajet des bandits vérifie :

$$V_1 \sin i_2 = V_2 \sin i_1$$

Il n'est pas difficile de se persuader que le trajet le plus court correspond à des valeurs du paramètre x comprises entre 0 et m .

Comme A et B sont fixes, a, b et m sont des constantes.

Par contre la position de K , les angles j_1 et j_2 et les longueurs l_1 et l_2 sont des fonctions de x .

Notons-les $K(x)$, $j_1(x)$, $j_2(x)$, $l_1(x)$ et $l_2(x)$.

Appelons $T(x)$ le temps mis pour aller de A en B en suivant la ligne brisée $A, K(x), B$.

$$T(x) = \frac{l_1(x)}{V_1} + \frac{l_2(x)}{V_2}$$

Comme l_1 et l_2 sont des fonctions dérivables de x , on peut, pour minimiser $T(x)$, calculer sa dérivée $\frac{dT}{dx}$.

$$l_1(x) = \sqrt{a^2 + (m-x)^2} \qquad l_2(x) = \sqrt{b^2 + x^2}$$

donc :

$$(1) \quad \frac{dT}{dx}(x) = \frac{x-m}{V_1 \times l_1(x)} + \frac{x}{V_2 \times l_2(x)}$$

Pour $x=0$: $\frac{dT}{dx}(0) = \frac{-m}{V_1 \times l_1(0)} < 0$, et pour $x=m$: $\frac{dT}{dx}(m) = \frac{m}{V_2 \times l_2(m)} > 0$.

Si on arrive à montrer qu'il existe une unique valeur $x_0 \in [0, m]$ pour laquelle $\frac{dT}{dx}(x_0) = 0$, on pourra, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires* à la fonction $\frac{dT}{dx}$, affirmer que T est décroissante sur $[0, x_0]$ et croissante sur $[x_0, m]$. Le chemin $A, K(x_0), B$ sera donc le «chemin optique» cherché.

Or pour que $\frac{dT}{dx} = 0$, il faut et il suffit que : $\frac{x V_1}{l_2(x)} = \frac{V_2(m-x)}{l_1(x)}$ c'est-à-dire :

$$(2) \quad V_1 \cos(j_2(x)) = V_2 \cos(j_1(x)).$$

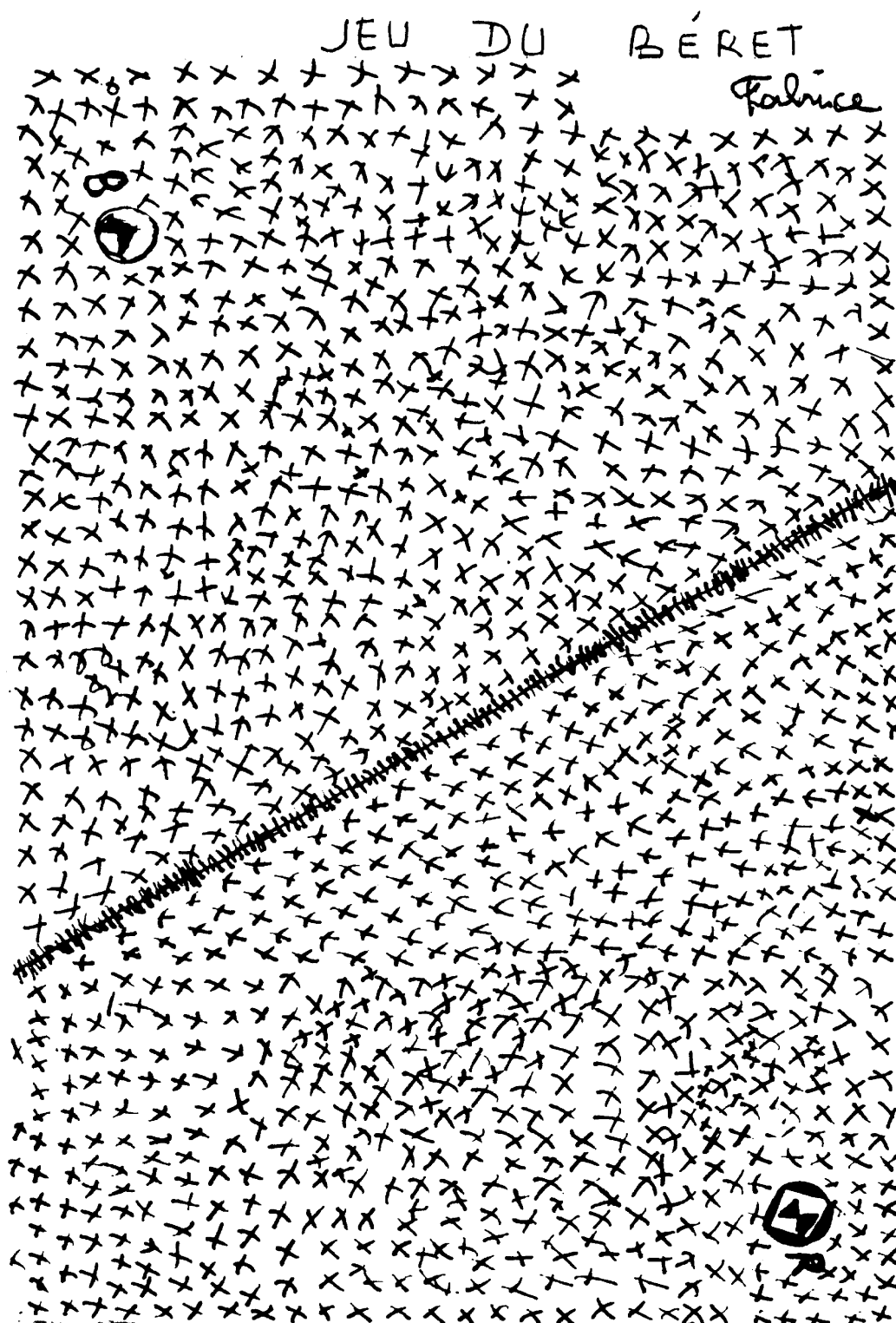
Lorsque x croît de 0 à m , $V_1 \cos(j_2(x))$ croît strictement et continûment de 0 à $\frac{V_1 m}{\sqrt{m^2 + b^2}}$ et $V_2 \cos(j_1(x))$ décroît strictement et continûment de $\frac{V_2 m}{\sqrt{m^2 + a^2}}$ à 0 ; il existe donc une unique valeur $x_0 \in]0, m[$ vérifiant (2).

* le théorème des valeurs intermédiaires : «si $z \in [f(a), f(b)]$ il existe $c \in [a, b] : f(c) = z$ » s'applique non seulement aux fonctions continues mais aussi à toute fonction qui admet une primitive.

Si i_1 et i_2 sont les angles (complémentaires de j_1 et j_2) habituellement considérés en optique, (2) s'écrit alors :

$$V_1 \sin i_2 = V_2 \sin i_1.$$

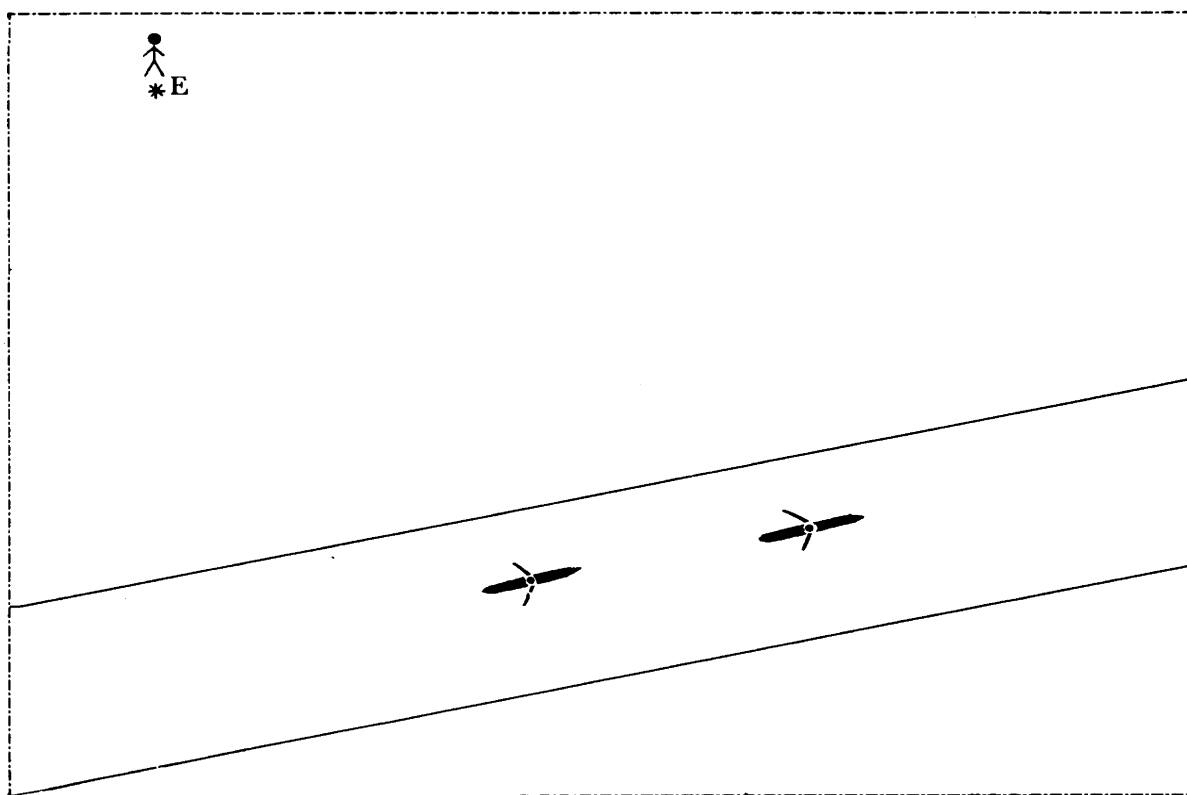
Avec des calculatrices possédant les fonctions trigonométriques on peut (en classe de 3ème) calculer «à tâtons» le chemin optique et vérifier ces formules.



DISTANCE ET ORTHOGONALITE

I – LE PLUS COURT CHEMIN.

a) Voici une vue de dessus d'une rivière. 1 cm représente 5 m.



Tu te trouves en E.

A quelle distance es-tu de la rivière ?

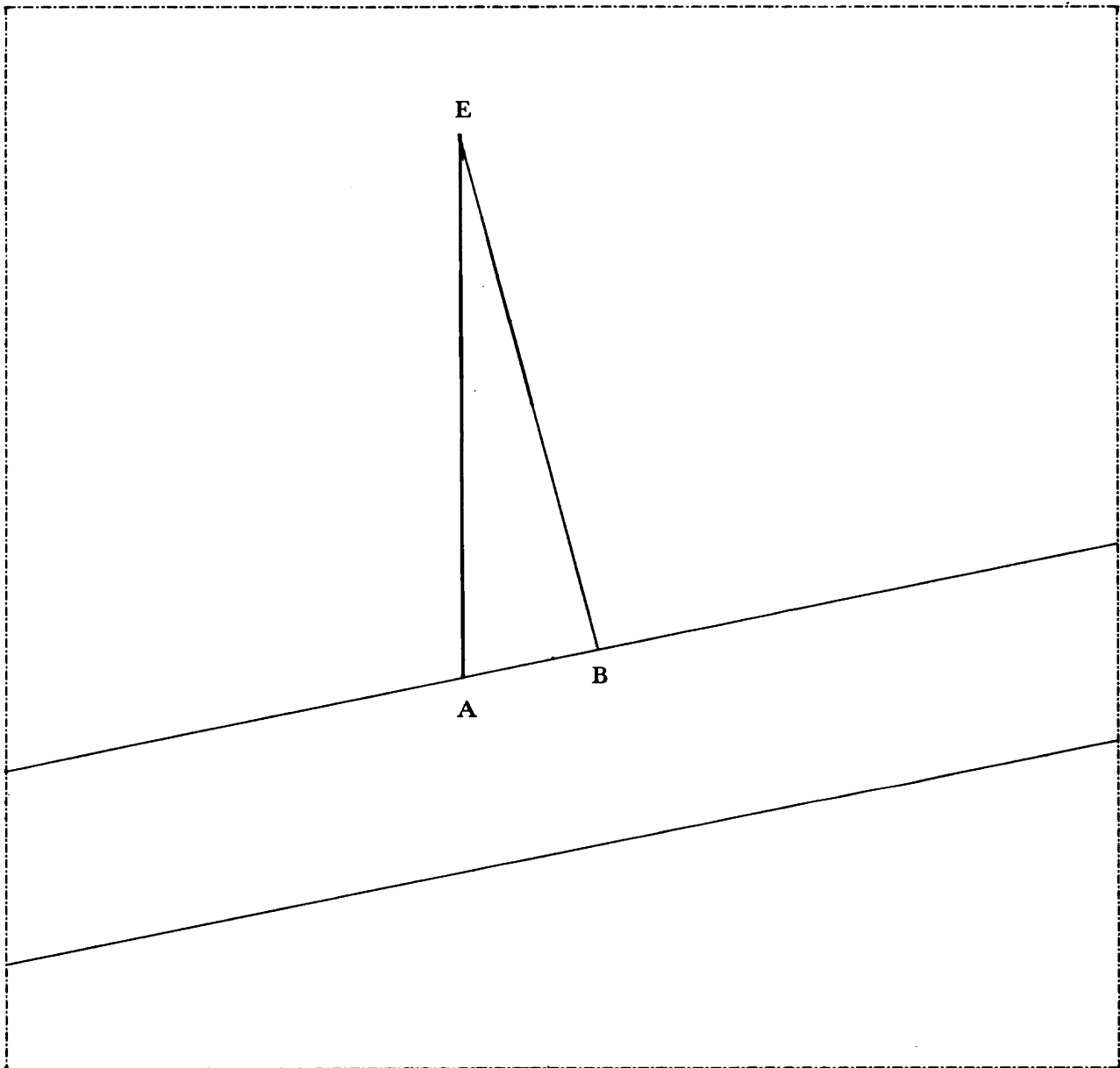
Explique ce que tu fais.

Pour aller de E à la rivière, y a-t-il un chemin plus court que les autres ? Si oui, dessine-le.

b) Après avoir répondu à la question précédente, Zaius et son voisin Hector se disputent.

Zaius prétend que le chemin le plus court est représenté par le segment EA. Hector prétend que c'est le segment EB

Que peux-tu dire pour les mettre d'accord ?



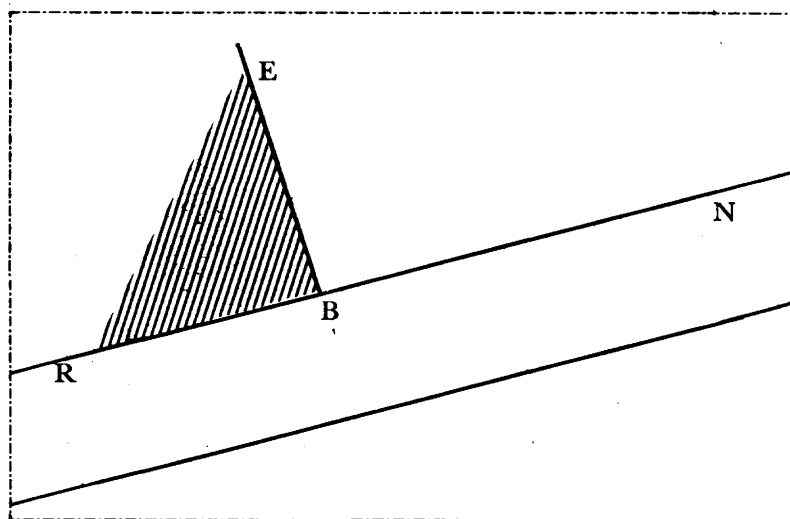
c) Si tu leur donnais une ficelle, pourraient-ils se mettre d'accord plus facilement ?

Peux-tu leur suggérer d'autres instruments ?

Mets-toi d'accord avec ton voisin pour savoir s'il y a une distance plus courte que les autres.

II – LE MEME PROBLEME VU SOUS UN «AUTRE ANGLE».

a) Nous avons reproduit ici le dessin d'Hector.



Prends un morceau de papier calque.

Décalque l'angle $\widehat{EBR}$ (c'est-à-dire décalque la partie hachurée).

Place le calque de l'angle $\widehat{EBR}$ sur l'angle $\widehat{EBN}$.

Tu vérifies ainsi que le segment EB détermine avec le bord de la rivière deux angles égaux.

b) *Sur ta feuille, dessine une droite. Marque un point E qui ne soit pas situé sur cette droite.*

Dessine un chemin qui te paraît le plus court, reliant le point E à la droite.

III – ANGLE DROIT – ORTHOGONALITE.

a) *Prends la feuille annexe.*

- Découpe les angles représentés en 1, 2, 3 et 4.

- Vérifie que ces angles sont les mêmes. Comment fais-tu ?

- Colle côte à côte ces 4 angles sur ton cahier. Obtiens-tu un tour complet ?

L'un de ces angles représente-t-il un quart de tour ?

b) *Prends la feuille annexe*

- Découpe les angles représentés en 5, 6, 7 et 8.

- Vérifie que ces angles sont les mêmes.

- Colle côte à côte ces 4 angles sur ton cahier. Que remarques-tu ?

L'un de ces angles représente-t-il un quart de tour, plus d'un quart de tour ou moins d'un quart de tour ?

Lorsqu'un angle représente un quart de tour, on dit que c'est un **angle droit**.

Si 2 droites du plan déterminent 4 angles droits, elles sont **perpendiculaires** ou **orthogonales**.

c) *Prends une feuille de copie. Découpe les 4 coins de cette feuille.*

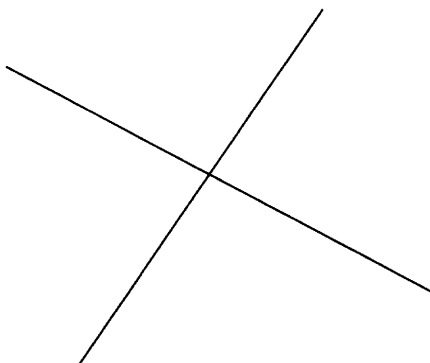
Vérifie qu'avec ces 4 coins, tu peux représenter : 4 angles égaux, un tour complet.

Que peux-tu dire de chaque coin de ta feuille ?

d) *Prends une feuille de papier. Plie-la une seconde fois. Déplie-la. Les plis forment-ils 4 angles droits ?*

Sinon, comment peux-tu faire le pliage pour obtenir 4 angles droits ?

e) *Est-ce que ces deux droites déterminent 4 angles droits ? Pourquoi ?*



f) Hector a découpé les angles représentés en 9, 10, 11 et 12. Il a écrit sur son cahier : «Je les ai mis côte à côte, ils font un tour complet. CONCLUSION : l'angle 12 est droit».

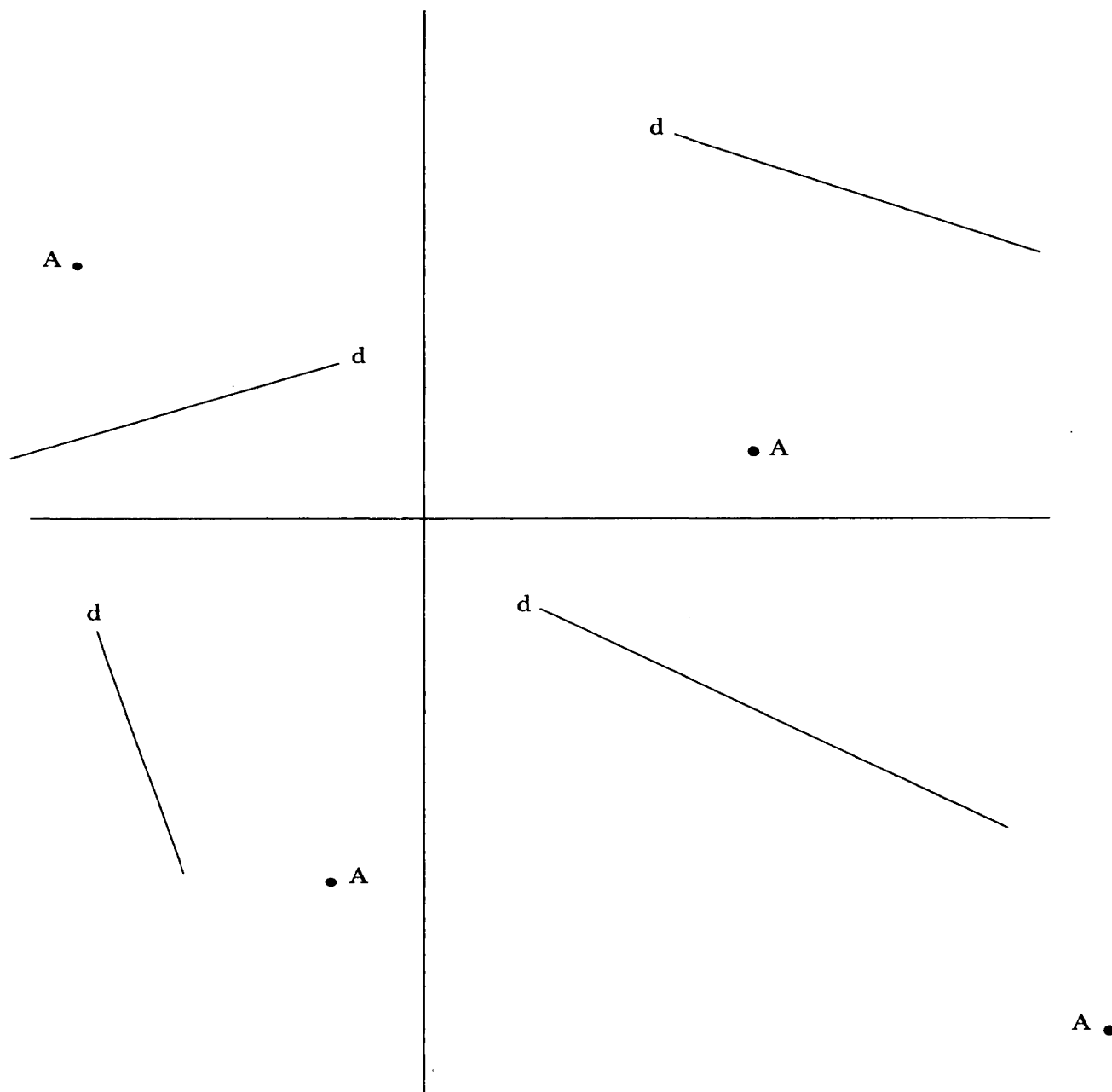
Zaius a découpé les angles représentés en 13, 14, 15 et 16. Il a écrit sur son cahier : «J'ai vérifié qu'ils sont égaux. Je les ai mis côte à côte, et ils font un tour complet. CONCLUSION : l'angle 16 est droit».

Que penses-tu des raisonnements de Zaius et d'Hector ?

Discutes-en avec tes camarades.

IV – PERPENDICULAIRE ET HAUTEUR.**1 - Perpendiculaire.**

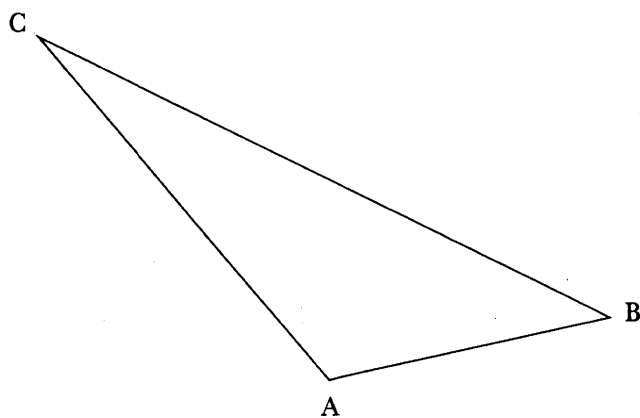
Dessine la perpendiculaire du point A à la droite d dans chacun des cas suivants :



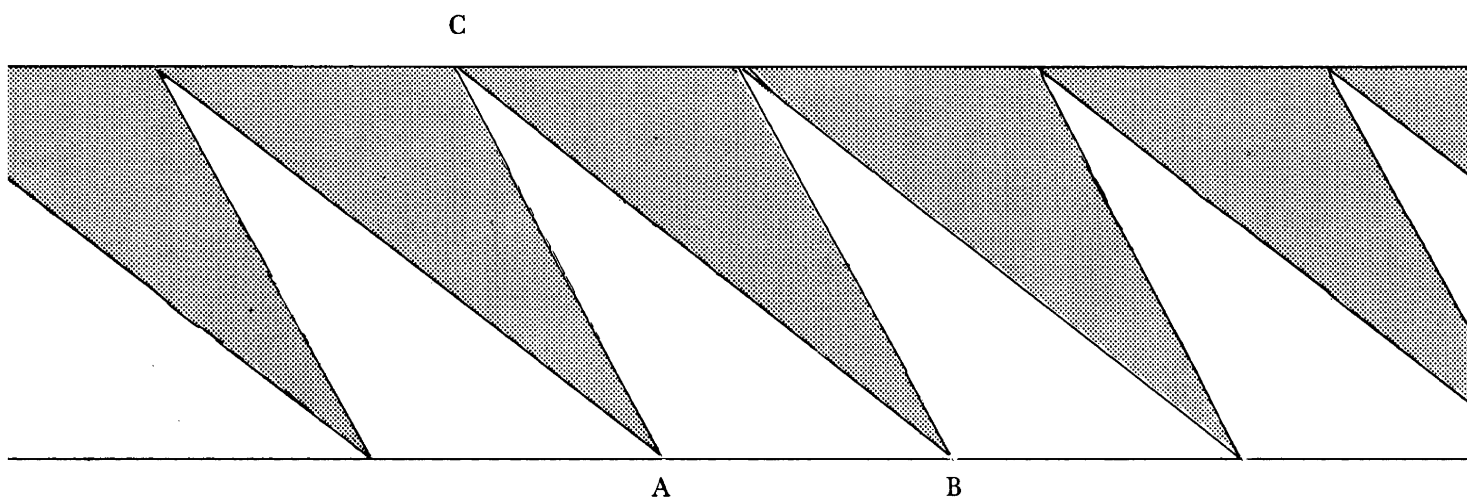
2 - La bande à Zaius.



a) Voici un triangle ABC. Zaius veut découper plusieurs triangles comme celui-ci dans une bande de papier, sans perdre de papier.

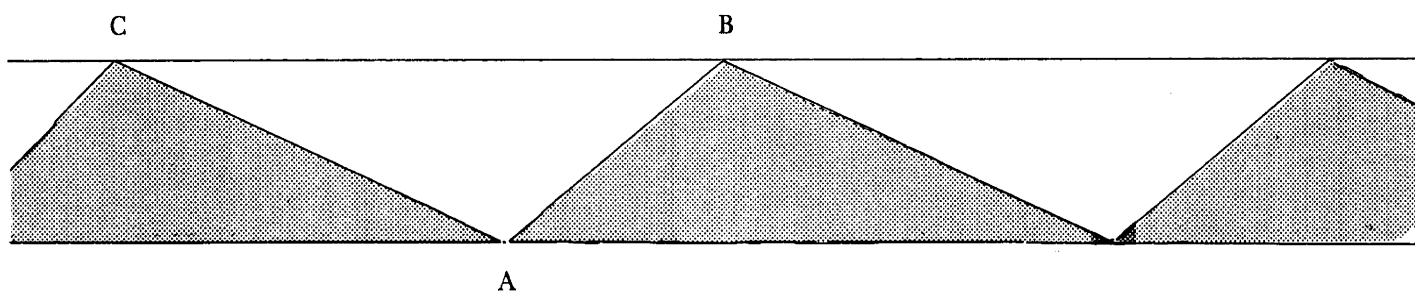


- Basil lui a proposé pour largeur de bande 5,4 cm, et il a le dessin suivant :



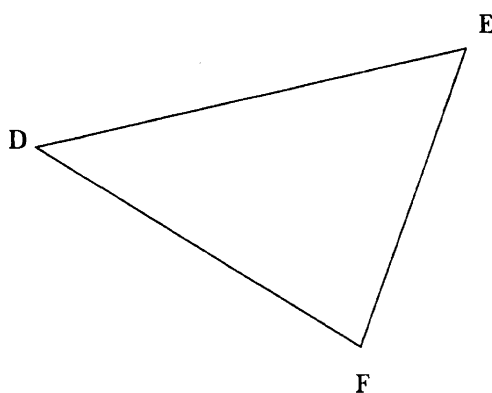


- Penny lui a proposé pour largeur de bande 2,4 cm, et elle a fait le dessin suivant :



Trouve une autre largeur de bande qui te permette de résoudre le problème.

b)



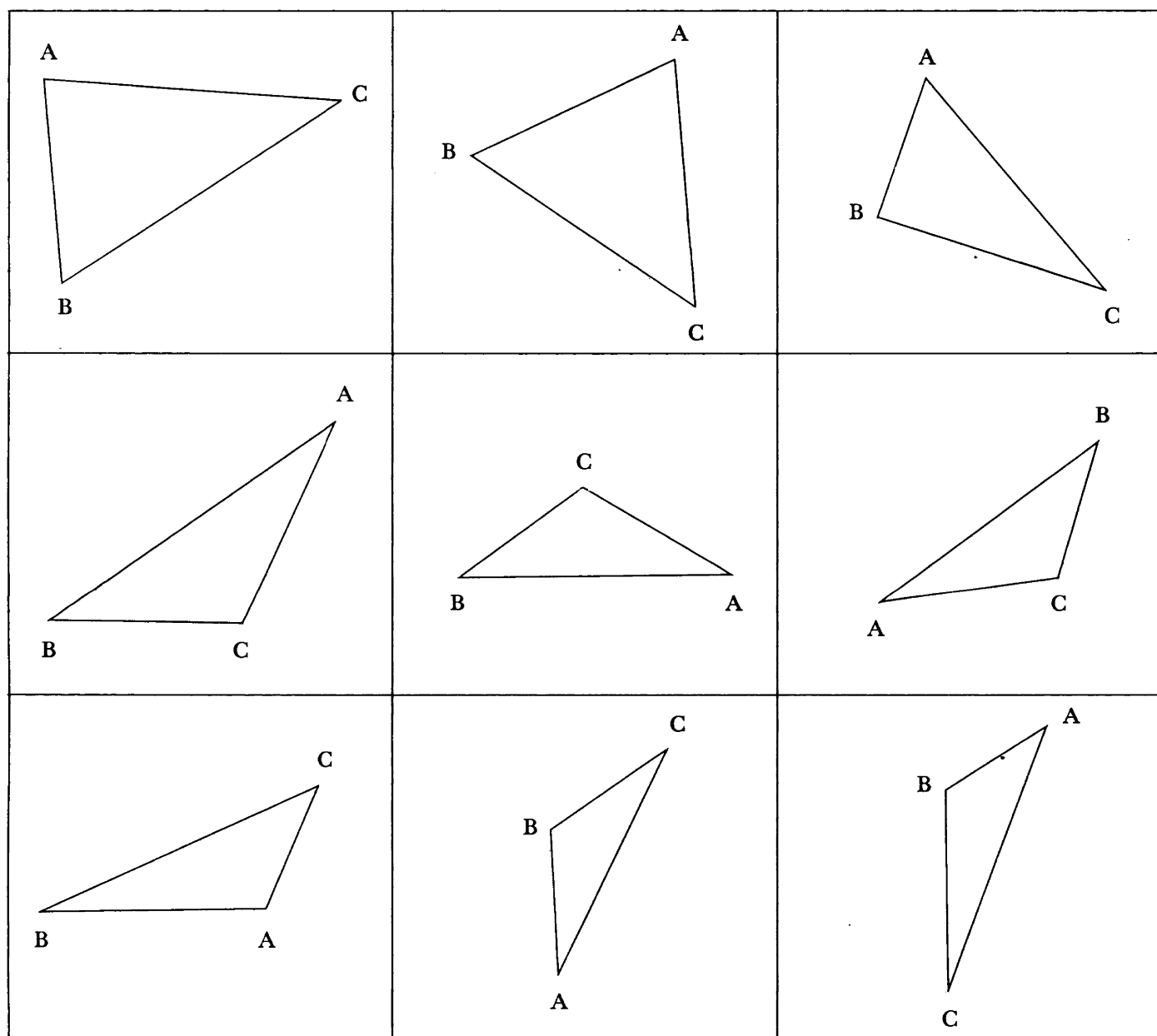
Aide Zaius à choisir une largeur de bande pour que l'on puisse y découper plusieurs triangles comme DEF, sans perdre de papier. Y a-t-il plusieurs solutions possibles ?

3 - Hauteurs.

3.1 - Hauteurs d'un triangle.

Dans un triangle ABC , on appelle **hauteur issue du sommet A , relative au côté BC** , la perpendiculaire à la droite BC , qui passe par A .

Sur chacune des figures suivantes, construis la hauteur passant par A , relative au côté BC .

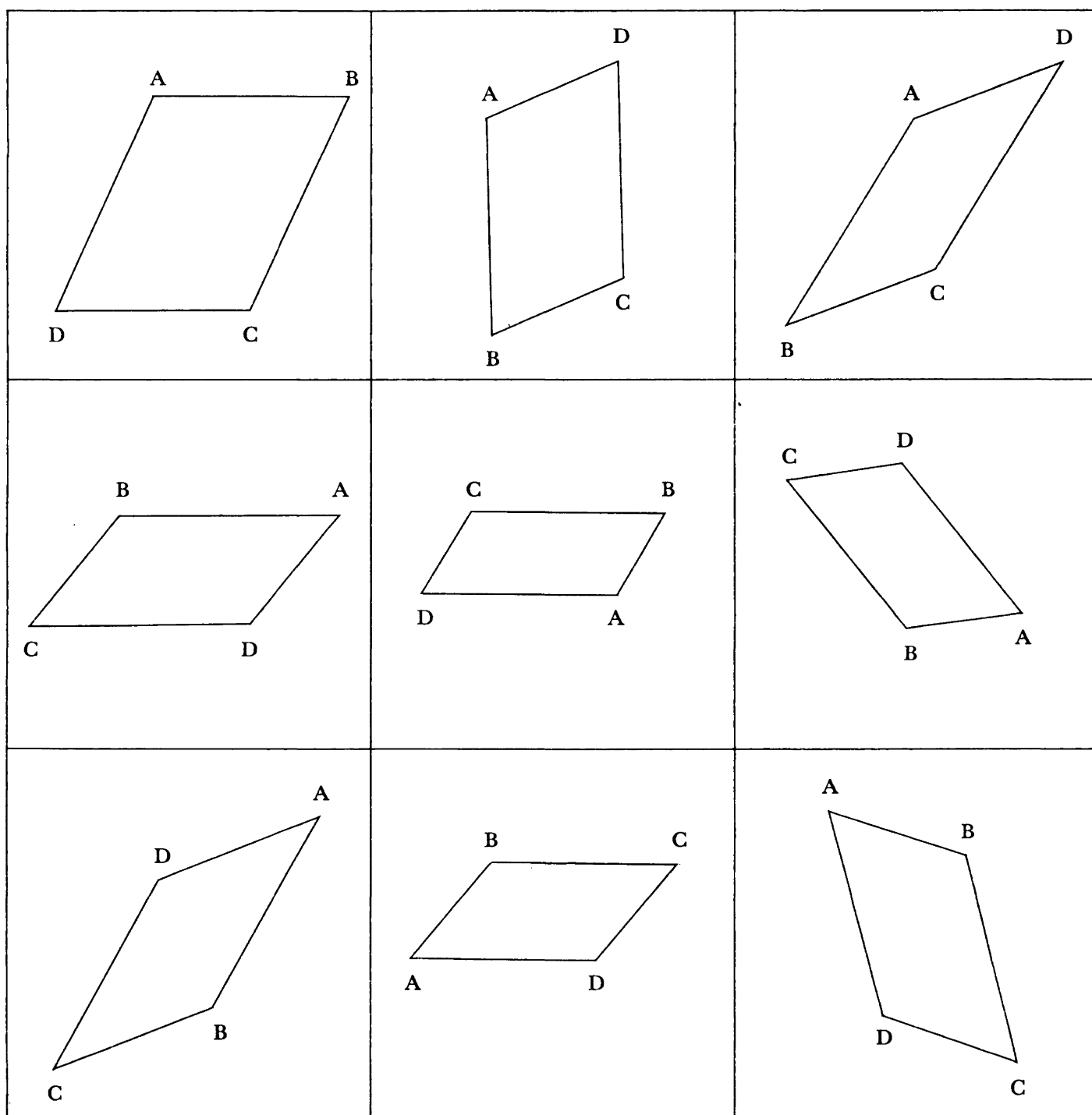


Regarde à nouveau le problème de «La bande à Zaius» ! Qu'en penses-tu ? Ecris tes remarques à ce sujet.

3.2 - Hauteurs d'un parallélogramme

Dans un parallélogramme ABCD, la hauteur issue du sommet A, relative au côté CD, est la perpendiculaire à la droite CD, passant par A.

Sur chacun des parallélogrammes suivants, trace la hauteur issue de A, relative au côté CD.



3.3 - Hauteur d'un polygone.

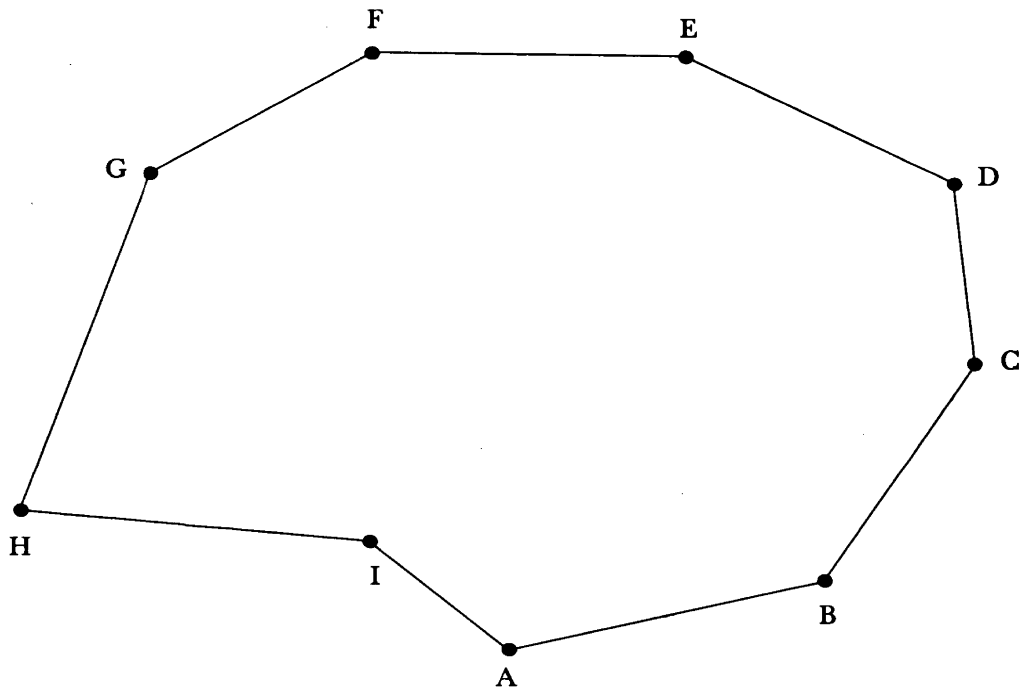
Voici un polygone. On appelle **hauteur** issue du sommet A, relative au côté EF, la perpendiculaire à la droite EF, qui passe par A.

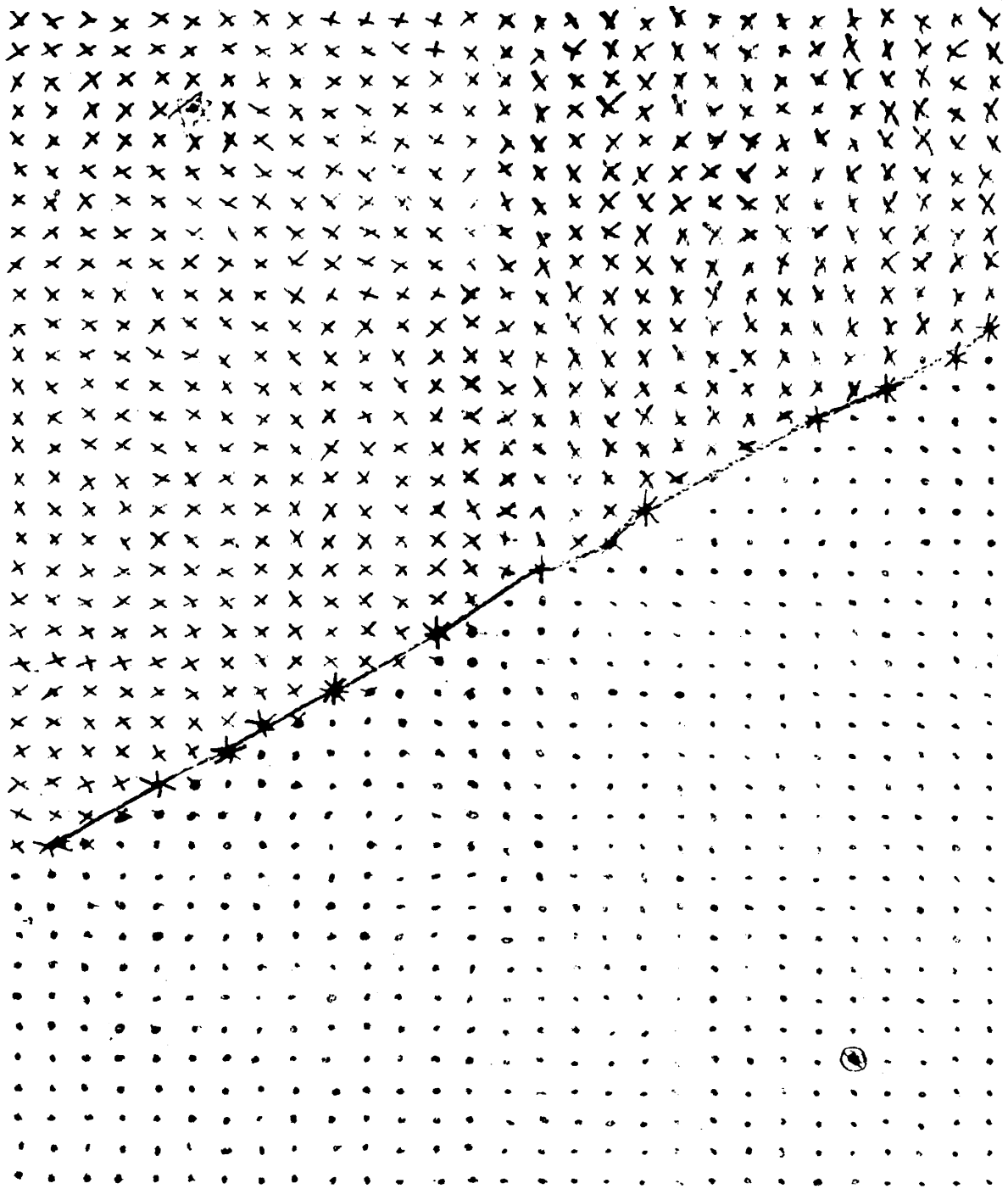
Dessine cette hauteur en rouge.

Dessine en vert la hauteur issue du sommet G, relative au côté EF.

Dessine en bleu la hauteur issue du sommet A, relative au côté DC.

Dessine en noir la hauteur issue du sommet A, relative au côté IH.





J'ai pris mon compas et j'ai pointé la pointe sur un point et j'ai regardé si c'était la même distance et quand c'est la même distance je mets point et j'ai tracé la droite avec une règle.

V – LE JEU DU BERET – MEDIATRICE.

A. Le jeu du Béret.

Bruno et Robert veulent jouer à deux au béret. Pour que tout se passe bien, ils ont demandé à Zaiüs d'être l'arbitre ; malheureusement, chaque fois que Zaiüs pose le béret à un endroit, Bruno ou Robert, ou les deux à la fois, se mettent à crier, car ils croient que la position du béret les désavantage.

Pour mettre tout le monde d'accord, Zaiüs propose la chose suivante :

— faisons des croix un peu partout sur le sol ; à partir du centre de chaque croix, je mesurerai avec une ficelle pour voir si cette position avantage Bruno ou Robert. Si elle avantage Bruno, je disposerai une myrtille bleue au centre ; si elle avantage Robert, je disposerai une framboise au centre.

Au début Bruno et Robert ne comprennent pas très bien à quoi cela peut servir, mais après avoir longuement discuté avec Zaiüs ils semblent tout contents et se mettent au travail.

Que penses-tu de l'idée de Zaiüs ? Discutes-en avec tes camarades.

Quand tu auras bien discuté toi aussi, tu te mettras au travail pour réaliser sur la feuille ci-jointe un travail «analogue» à celui qu'ont effectué Bruno, Zaiüs et Robert sur leur terrain de jeu.

1. Sur la feuille 11 bis, les points B et R représentent les positions respectives de Bruno et Robert [*marque B en orange et R en vert*]. Chaque nœud du quadrillage représente la position d'un point du terrain.

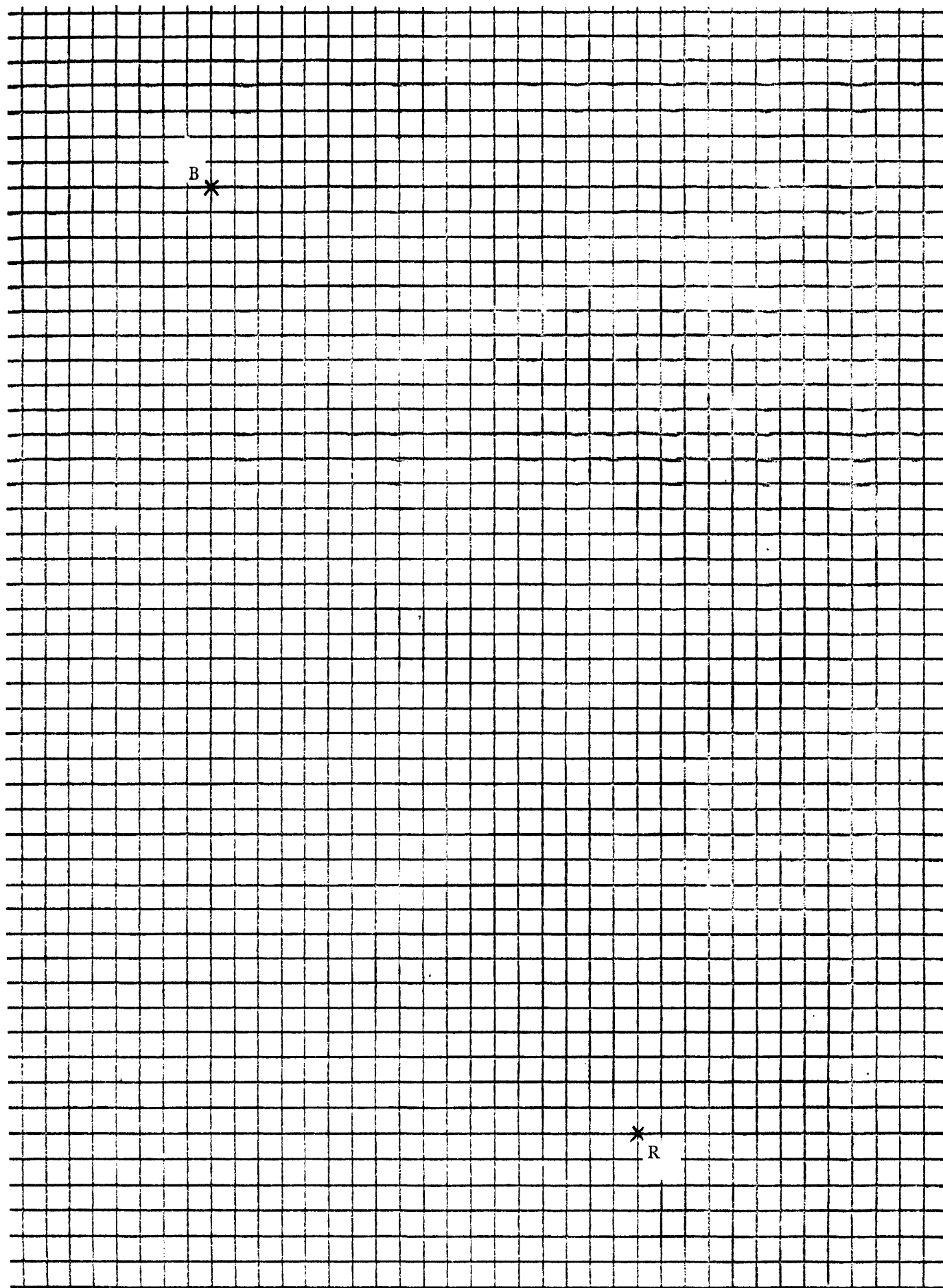
Si ce point est plus près de B que de R, marque-le en bleu.

Si ce point est plus près de R que de B, marque-le en rouge.

Effectue ce travail avec beaucoup de soins, il y a des nœuds du quadrillage pour lesquels il est facile de décider. Il y en a par contre pour lesquels il faut utiliser un instrument de mesure.

Si tu as des idées qui te permettent d'éviter de faire de nombreuses mesures, discutes-en avec ton voisin et appelez-moi après vous être mis d'accord.

Colorie ainsi au moins 500 nœuds du quadrillage (par exemple 250 bleus et 250 rouges).



2. Maintenant que tu as colorié cinq centaines de nœuds, penses-tu que ce procédé va te permettre de trouver les emplacements du béret qui rendent le jeu équitable ?

Si un point M est à la même distance de B et de R , on dit que :
« M est équidistant de B et de R ».

Des points équidistants de B et de R sont-ils intéressants pour le jeu du béret ?

Comment proposes-tu de colorier les nœuds du quadrillage qui sont équidistants de B et de R ?

A ton avis : Paris est-il équidistant de Marseille et de Fontainebleau ?

La lune est-elle équidistante de la terre et du soleil ?

Ton cœur est-il équidistant de ton pied droit et de ton pied gauche ?
Et ton nez ?

Continue à colorier les nœuds de ton quadrillage en cherchant à trouver ceux qui sont équidistants de B et de R .

3. Peux-tu trouver un ou plusieurs procédés qui te donnent à coup sûr des points équidistants de B et de R ? Lesquels ?

Y a-t-il un point M équidistant de B et de R et dont la distance à B est 20 cm ?

Y a-t-il un point K équidistant de B et de R dont la distance à B est 1 m ?

Y a-t-il un point L équidistant de B et de R dont la distance à B est 1 km ?

Y a-t-il un point O équidistant de B et de R dont la distance à B est 2 000 000 000 km ?

B. Milieu et médiatrice.

On dit que M est sur la «médiatrice» de B et de R, si M est équidistant de B et de R

On dit que M est «au milieu» de B et de R, si

- * M est sur le segment qui joint B à R, et si
- * M est équidistant de B et de R (M est sur la médiatrice de B et de R).

1. Si le béret est sur la médiatrice de B et de R, est-ce que le jeu est équitable ?

Si Bruno et Robert sont contents de la position du béret, est-ce que le béret est obligatoirement au milieu de B et R ?

Si Bruno et Robert sont contents de la position du béret, est-ce que le béret est obligatoirement sur la médiatrice de B et de R ?

Comment vas-tu colorier les points de la médiatrice de B et de R ?

Y a-t-il beaucoup de points sur la médiatrice de B et de R ?

Y a-t-il beaucoup de points au milieu de B et de R ? Discutes-en avec tes voisins.

2. Sur ton dessin de la page 11, bis choisis deux points situés sur la médiatrice de B et de R. Tu peux noter ces deux points Y et Z ; arrange-toi pour que leur distance soit au moins égale à 15 cm. Trace la droite passant par ces deux points Y et Z ; que remarques-tu ?

3. Plie avec soin ta feuille en amenant le point B sur le point R ; quel rapport vois-tu apparaître entre la ligne de pliage et la médiatrice de B et de R, peux-tu expliquer pourquoi ?

4. Es-tu d'accord pour admettre et utiliser la propriété suivante :

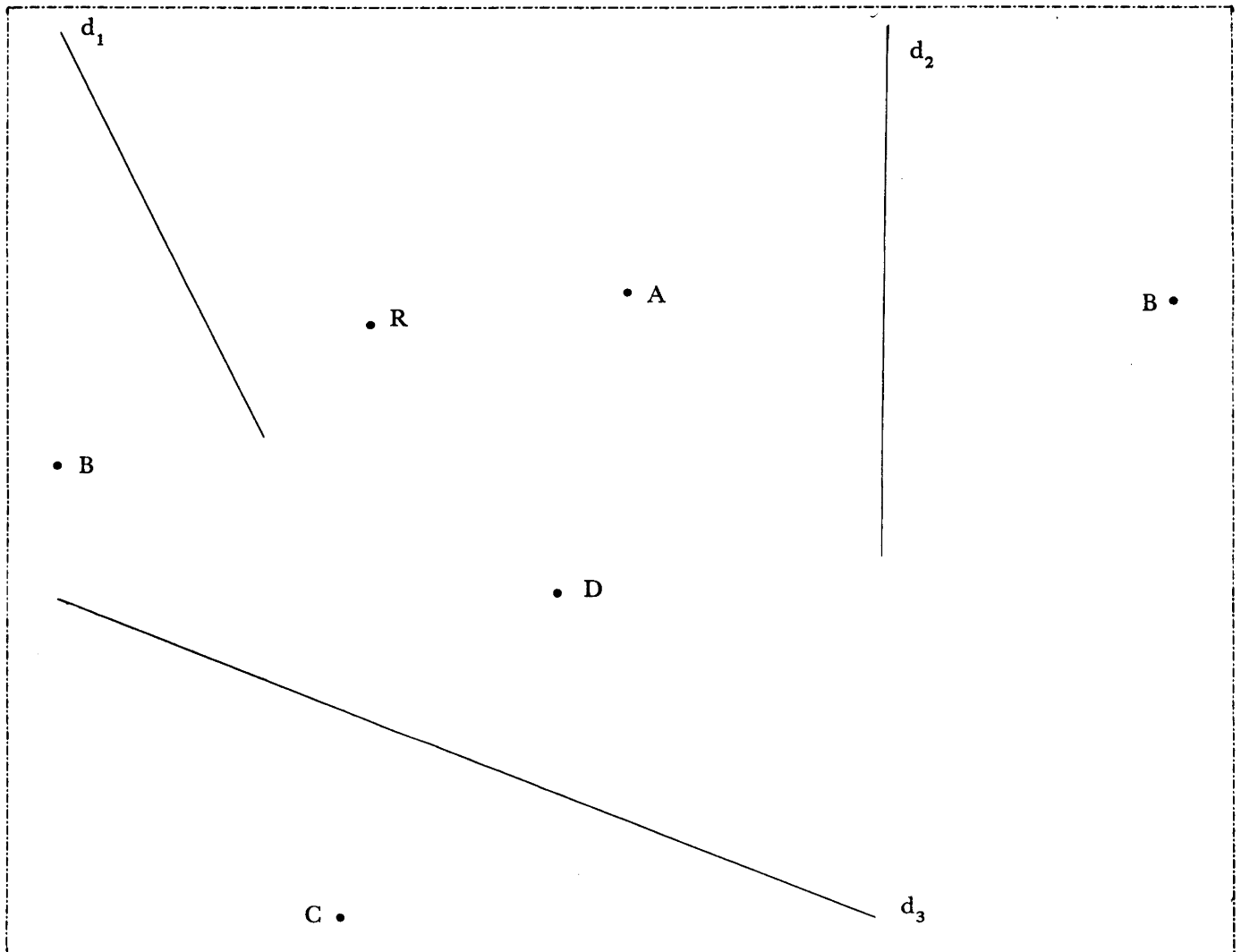
La médiatrice de deux points distincts B et R est une droite.
 Cette droite coupe $[B, R]$ en son milieu.
 Cette droite est perpendiculaire au segment $[B, R]$.

Sinon appelle-moi !

A ton avis d_1 est-elle la médiatrice de B et R ?

A ton avis d_2 est-elle la médiatrice de A et B ?

A ton avis d_3 est-elle la médiatrice de C et D ?



Explique tes réponses.

VI — FAISONS LE POINT.

ANGLE DROIT. C'est l'angle représenté par un quart de tour.

Si le tour complet mesure 360° , combien mesure le quart de tour ?

Si le tour complet mesure 400 grades, combien mesure le quart de tour ?

Deux droites qui forment 4 angles droits sont perpendiculaires ou orthogonales.

Dessine un angle droit en utilisant :

- une feuille de papier pliée en quatre ;
- une équerre ;
- un rapporteur.

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE.

En menant du point A la perpendiculaire à une droite d, on a remarqué qu'on obtenait un plus court chemin de A à d.

On admettra que le segment partant du point A et perpendiculaire à la droite d réalise le plus court chemin de A à d. Sa longueur est la distance de A à la droite d.

MEDIATRICE D'UN SEGMENT MP : c'est l'ensemble des points qui sont à la même distance de M et de P.

Les activités précédentes ont permis de vérifier que c'est la droite qui passe par le milieu du segment MP et qui lui est perpendiculaire.

Dessine un segment MP, puis sa médiatrice, en utilisant une équerre et un double-décimètre.

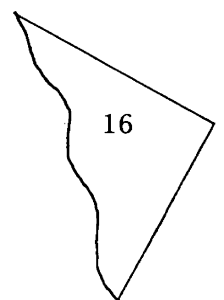
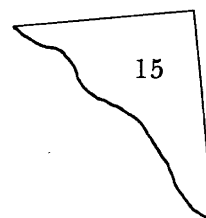
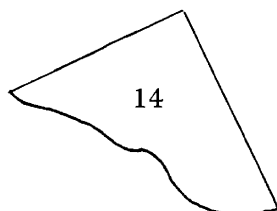
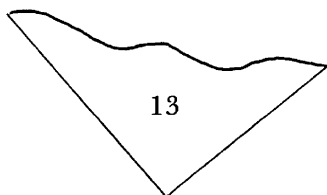
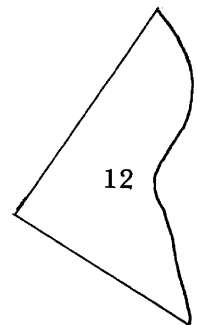
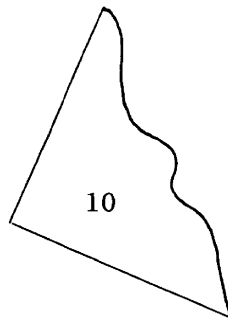
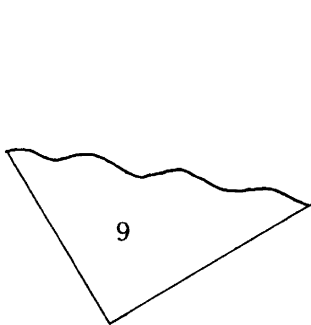
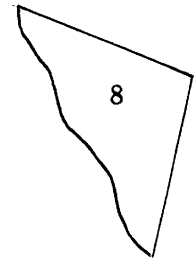
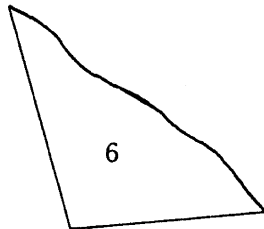
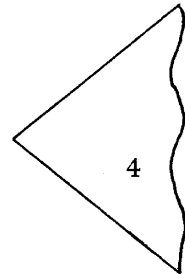
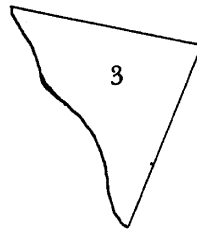
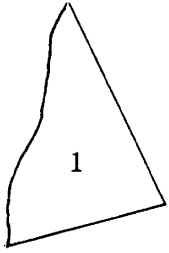
Dessine un segment LV, puis sa médiatrice, en utilisant un compas et une règle non graduée.

Dessine un segment XY, puis sa médiatrice en faisant un pliage.

Dessine un angle droit en utilisant un compas et une règle non graduée.

Dessine un segment AB, puis son milieu en utilisant un compas et une règle non graduée.

FEUILLE ANNEXE

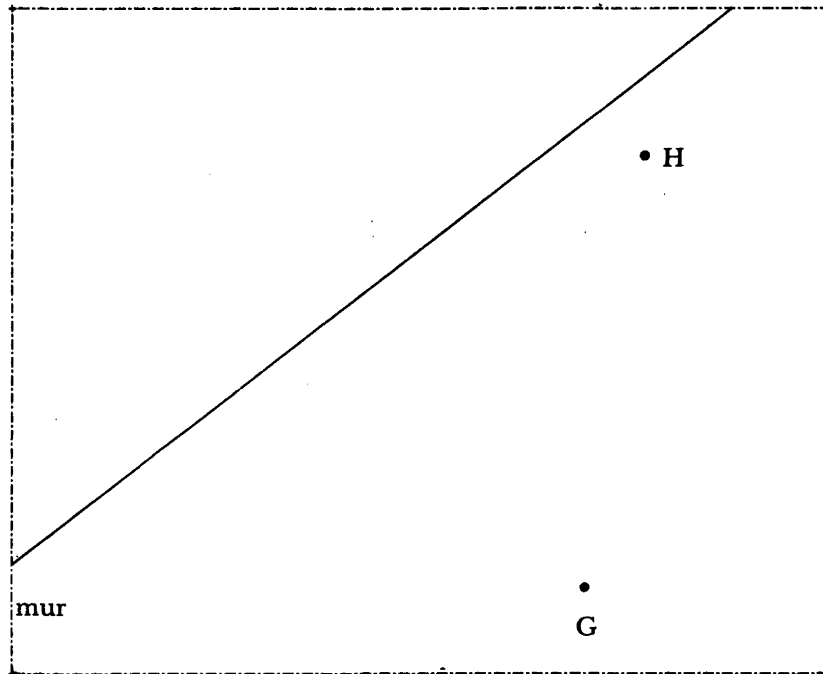


VII – JEUX SUR LES DISTANCES.

A. Le jeu du bérêt.

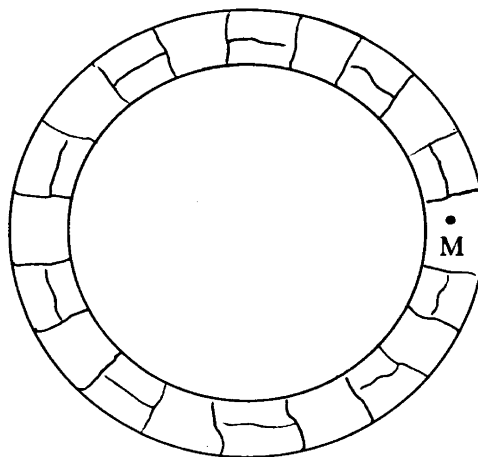
1. Deux enfants jouent au bérêt dans la cour de l'école. Ils se trouvent en G et H, et veulent placer le bérêt sur le mur de l'école.

Dessine en rouge la position B du bérêt pour que le jeu soit équitable.



2. Deux enfants jouent au bérêt. Rachel est en R, Barnabé en B. Sur le terrain se trouve un puits.

R
•



B •

Barnabé propose de placer le béret en M, sur la margelle du puits. Rachel proteste car elle se déclare gênée par le puits, et demande de placer le béret en dehors de la margelle.

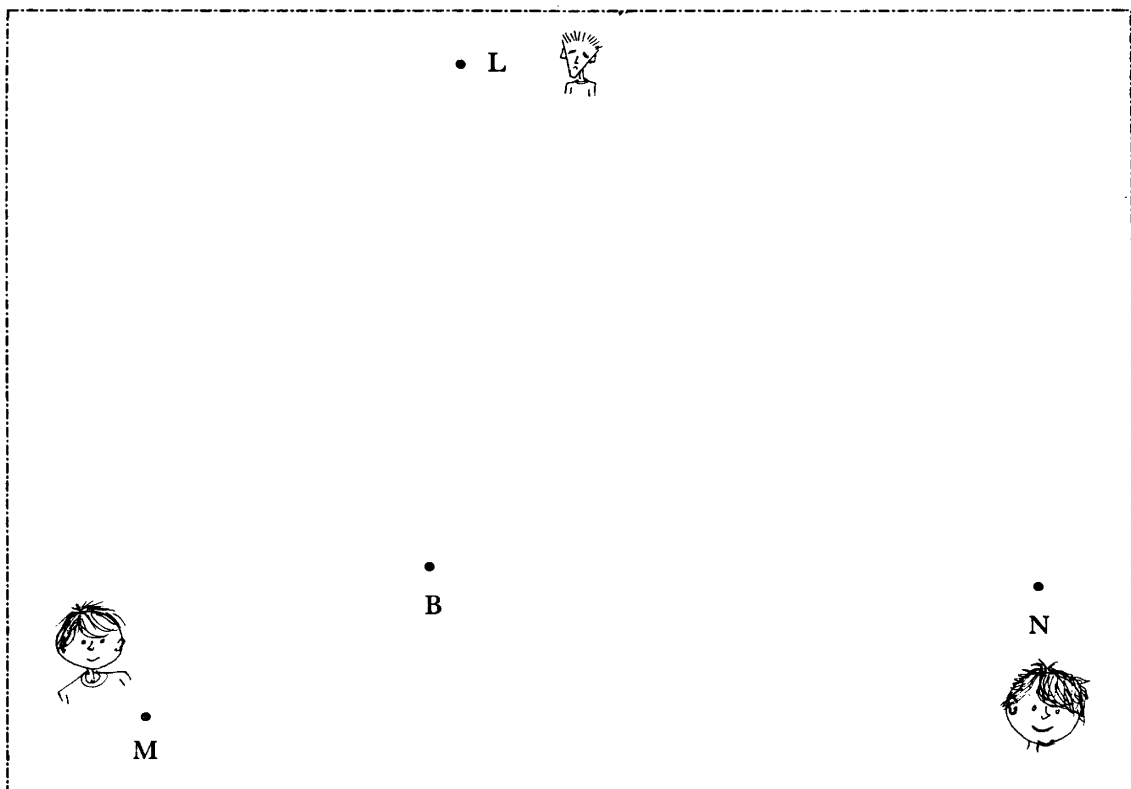
Sur le dessin, marque en rouge une position M' possible du béret, de façon à ce qu'aucun des deux joueurs ne soit désavantagé.

Explique comment tu as fait.

Y a-t-il plusieurs positions possibles pour M' ? Explique comment tu fais pour les trouver.

Es-tu bien sûr de ton résultat ?

3. Trois enfants jouent au béret et sont placés en L, M, N.



a) On place le béret en B. Les joueurs placés en L et N protestent.

Qu'en penses-tu ?

Dessine en rouge une position B' que doit avoir le béret pour que le jeu soit équitable.

Y a-t-il deux, ou plusieurs positions de B' qui conviennent ?

b) Les trois joueurs ayant trouvé «la» position équitable B' , arrive un quatrième joueur.

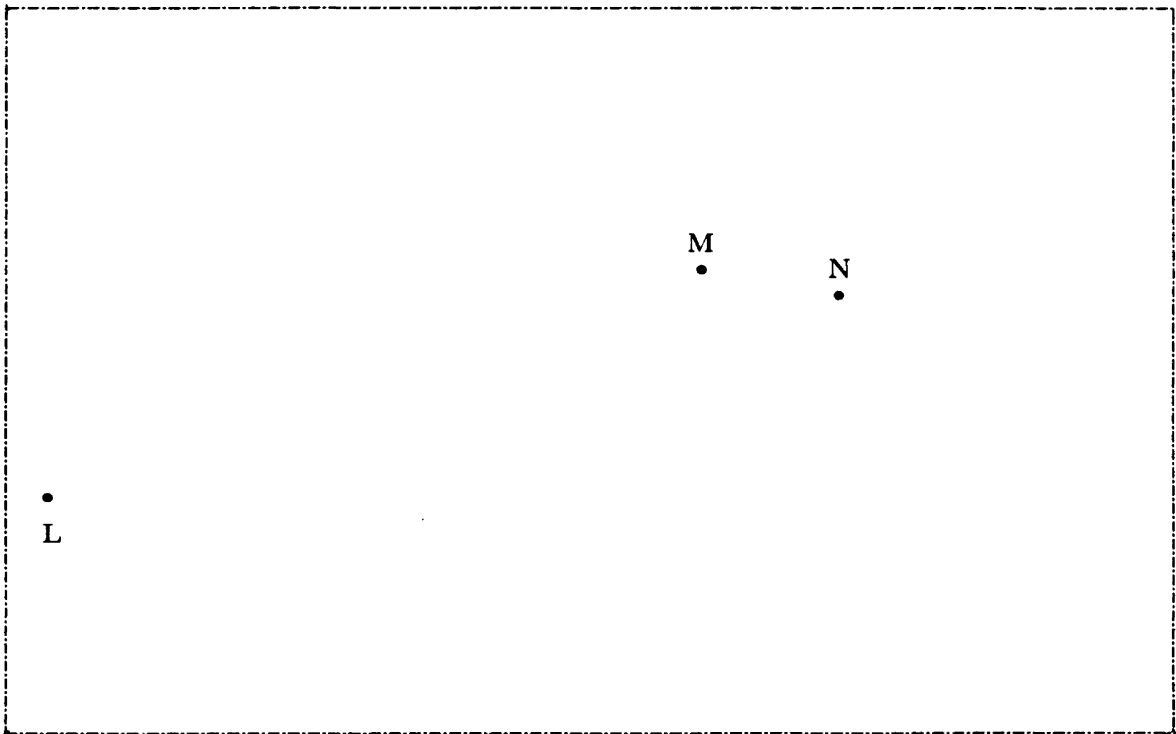
Peut-il se placer n'importe où ?

Sur le dessin, marque en vert un point P où pourra se placer cet enfant.

c) Arrive un cinquième joueur, qui veut jouer avec les quatre précédents.

Sur le dessin, marque en bleu un point Q où pourra se placer ce cinquième joueur. Y a-t-il plusieurs places possibles pour Q ?

4. Trois enfants jouent au bérét et sont placés en L , M , N .



a) Léonce, placée en L , prétend qu'il n'y a pas de position équitable pour le bérét.

Si tu penses pouvoir trouver une position pour le bérét, explique comment tu fais.

b) En définitive, Martine située en M a trouvé une position B pour le béret, qui a été acceptée par Noémie (située en N) et par Léonce.

Arrive Hortense qui veut jouer aussi.

Peut-elle se placer n'importe où ? Explique ta réponse.

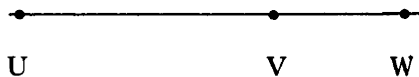
c) Arrive un cinquième joueur, qui veut jouer avec les quatre précédents.

Sur le dessin, marque en bleu un point Q où pourra se placer ce cinquième joueur.

A ton avis combien de joueurs peuvent jouer au béret ? Trouve toutes les positions possibles pour les joueurs.

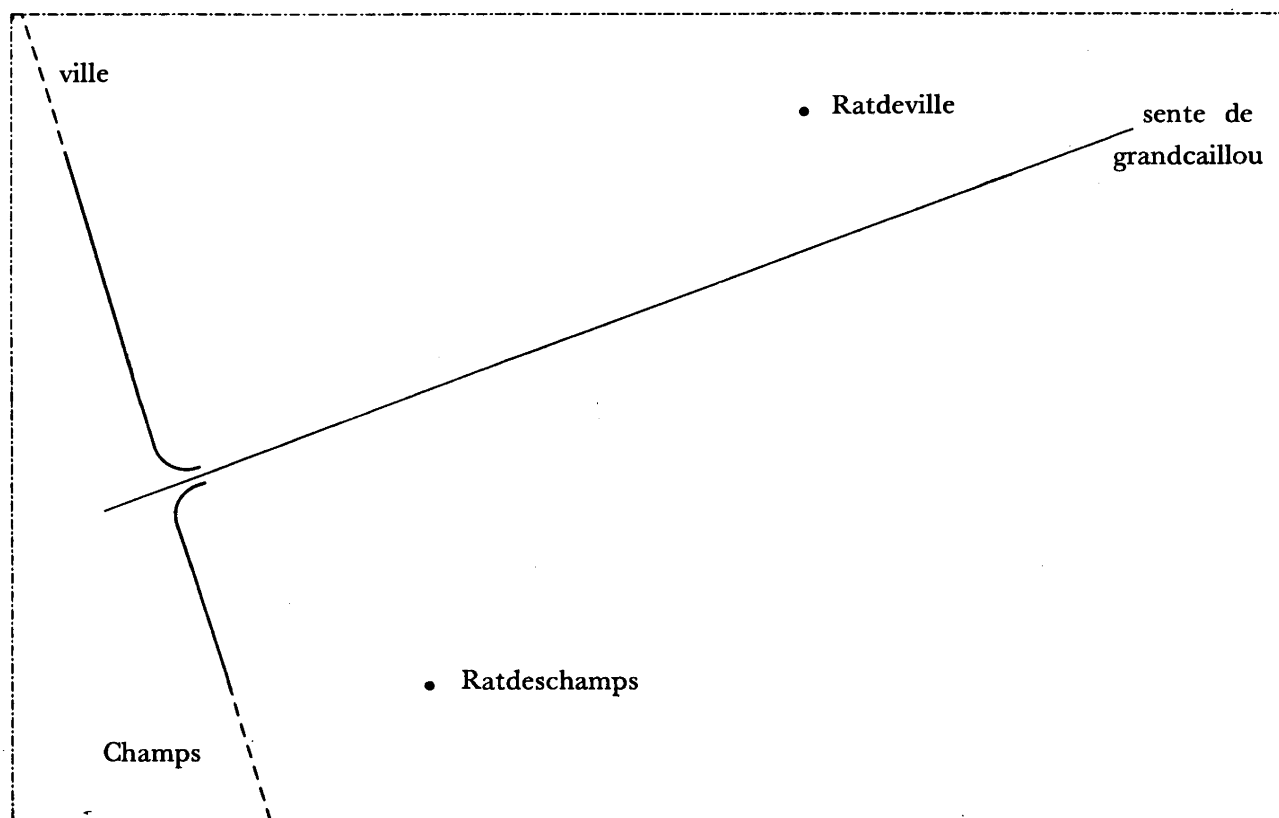
5. Trois enfants jouent au béret et sont placés en U, V, W.

*Comment doit-on placer le béret pour que le jeu soit équitable ?
Peux-tu expliquer ta réponse ?*



B. Le plus court possible !

1 - Ratdeville et Ratdeschamps.



Nous avons marqué la maison de Ratdeville et la maison de Ratdeschamps.

A la limite de la ville et des champs, il y a la Sente de Grandcaillou.

- A Pâques, Ratdeschamps rend visite à Ratdeville, grippé, qui est alité.

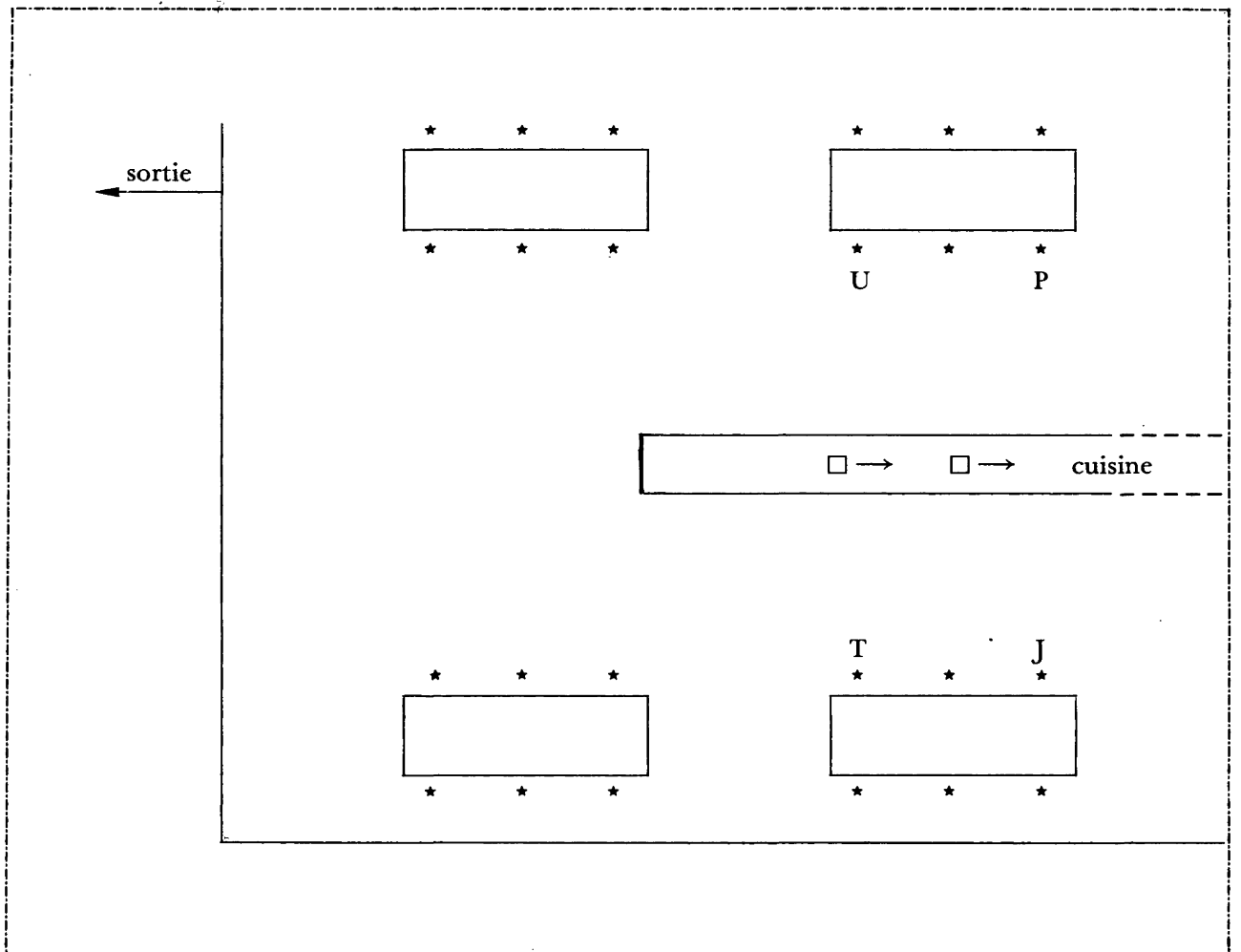
Les champs sont boueux, si bien que ce jour-là, Ratdeschamps prévoit de suivre le trajet le plus court possible à travers champs.

- Pour le 14 juillet, Ratdeville est invité chez Radeschamps, à l'occasion d'un bal champêtre. Il y a ce jour-là beaucoup de monde en ville, et la circulation y est difficile. Ratdeville décide alors que son trajet en ville sera le plus court possible. Au moment de se quitter, les deux compères, visiblement éméchés, s'interpellent : Ratdeville se plaint d'avoir eu un plus long chemin à faire que Ratdeschamps. Ratdeschamps soutient le contraire. La discussion s'éternisant, Ululi la chouette intervient et leur suggère une solution.

- Les deux amis se rencontreront le 1er janvier suivant, pour l'échange des vœux du nouvel an, à la Sente de Grandcaillou, en un point tel que chacun aura la même distance à parcourir.

Dessine ces différents trajets : - en rouge celui de Pâques, - en vert celui du 14 juillet - en noir celui du nouvel an.

2 - Self-service.



Nous sommes dans un self-service où l'on dépose son plateau sur un tapis roulant avant de partir (voir figure ci-dessus).

1. TERENCE est installé en T. Il est très en retard.

Peux-tu lui dessiner un chemin lui permettant de sortir le plus vite possible, tout en déposant son plateau sur le tapis roulant ?

2. *Peux-tu rendre le même service à Ursule qui est située en U ?*
3. *Peux-tu rendre le même service à Jérémie qui est situé en J ?*
4. *Peux-tu rendre le même service à Pancrace qui est situé en P ?*

3 - Le hold-up du siècle.

Mardi 6 mars 1979 : 14 heures.

Ali Cappone, Filou Clarip, Claude Finegachette et le grand-marquis écoutent la radio, ils apprennent que la politique d'austérité conduit le gouvernement à réduire de façon dramatique les moyens accordés aux I.R.E.M. (Si tu ne sais pas ce que c'est que l'IREM, appelle-moi).

A ce moment Zaius arrive en courant (Zaius est un petit garçon qui fait de très gros progrès, car son professeur est en stage à l'I.R.E.M.); il est très agité et dit : «je sais où ils ont caché l'argent, venez plus près de moi, je vais vous le dire, c'est un secret»

(tout bas) «ils ont caché l'argent sous une plaque d'égout près de l'Arc de Triomphe».

Nos quatre amis remercient Zaius et se réunissent sur le champ en assemblée générale pour décider de la stratégie à adopter.

Mardi 6 mars : 23 heures.

Nos quatre bandits soulèvent la plaque d'égout des Champs Elysées qui se trouvait sous la voiture de Gaspard, ils récupèrent un butin de 20 000 000 F. Ils foncent à Orly et déposent leur butin dans un avion situé en A sur la carte ci-jointe ; mais comme il neige très fort, l'avion ne peut décoller.

Craignant d'être surpris, nos quatre complices vont se réfugier dans le hangar situé en H, au milieu d'un champ de neige longeant la piste d'atterrissage.

Mercredi 7 mars : 7 heures.

Les services de l'aéroport déneigent les pistes ; à travers les trous du hangar les bandits regardent et chacun d'eux pense :

«dès que la piste sera déneigée, je me précipiterai vers l'avion, je m'envolerai sans attendre les autres, je donnerai la moitié du butin à Zaius, car on a beau être des vrais bandits, on ne peut quand même détruire quelque chose d'aussi chouette que les I.R.E.M. et je garderai l'autre moitié pour moi seul.

Mercredi 7 mars : 9 heures.

La piste étant déneigée d'un bout à l'autre, les bandits s'élancent vers l'avion.

Le grand-marquis qui n'aime pas finasser, part tout droit ; il emprunte le chemin HL dans la neige et LA sur la piste. (Voir figure page 24).

Ali Capone qui est un vieux routier, emprunte le chemin HC dans la neige et CA sur la piste.

Filou Clarip qui a tortillé sa moustache toute la nuit, décide de parcourir HP dans la neige et PA sur la piste.

Tandis que Claude Finegachette (prenant son air malicieux en pensant à la bêtise des autres) va droit vers la piste par HF puis par FA sur la piste.

Quand ils sont dans la neige, nos bandits ne peuvent réaliser plus de 3 km/h ; par contre sur la piste ils atteignent 9 km/h.

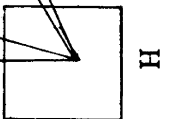
Peux-tu expliquer les raisons qui ont conduit chaque bandit dans le choix de son chemin ?

Peux-tu sans faire de calcul prévoir l'ordre d'arrivée des bandits ? Explique pourquoi ?

La carte sur laquelle est représenté le terrain est au 1/10 000 ; peux-tu donner l'heure exacte à laquelle chaque bandit arrivera en A ?

Au moment précis où nos bandits s'élancent, les services de sécurité de l'aéroport, ayant repéré des traces suspectes près de l'avion, téléphonent au commissaire Beau-Lac spécialiste des commandos d'instructeurs bénévoles.

Piste

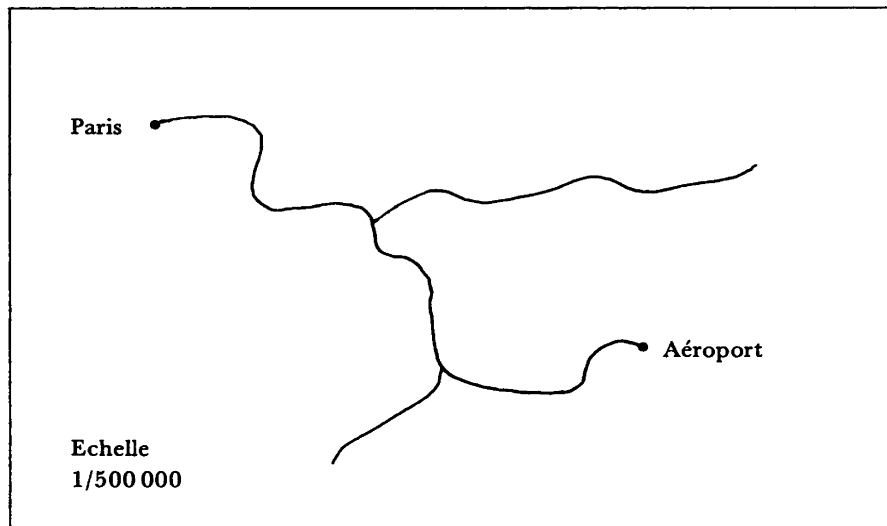


Mercredi 7 mars : 9 h 25 précises.

Le commissaire Beau-Lac et son équipe quittent la bouche d'égout des Champs-Élysées dans un hélicoptère qui vole à 140 km/h en direction du terrain.

La carte ci-dessous est à l'échelle 1/500 000.

Peux-tu nous raconter avec précision ce qui va se passer ?



Chapitre L

LIAISON GEOMETRIE- ARITHMETIQUE

- DESSINS AVEC DES CERCLES
- CARRES QUI ROULENT

DESSIN AVEC DES CERCLES

Fiche signalétique

C'est une activité pour la classe de 6ème ou de 5ème. Le temps d'utilisation varie de 2 h à 3 h.

Il y a deux façons d'aborder cette activité :

- * en insistant sur la détermination précise du centre des demi-cercles (en utilisant par exemple les propriétés de la médiatrice), et de leur rayon. C'est le cas de la présentation du document élève proposé.

- * en insistant sur l'observation des symétries et des rapports simples existant entre les mesures des divers éléments de la figure. En effet, les dessins proposés se prêtent particulièrement bien à cette dernière approche car aucun des éléments n'est «au hasard». Il n'est pas indispensable de faire des mesures précises ni de déterminer exactement le centre des demi-cercles, sur le dessin proposé, pour être capable de le reproduire. Cette activité illustre alors la notion de proportions.

OBJECTIFS DE L'ACTIVITE.

- * Détermination des éléments définissant un cercle (centre et rayon).
- * Analyse d'une figure géométrique simple, et recherche des rapports (la moitié, le quart...) existant entre les mesures des divers éléments.
- * Reproduction d'une figure semblable mais plus grande.

INTERET DE L'ACTIVITE.

- * Utilisation de constructions auxiliaires. Les dessins sont plus faciles à réaliser si on dessine certains éléments qu'il faudra effacer par la suite (ligne des centres, cercle, médiatrice, triangle ...).

- * Réutilisation des connaissances acquises sur le cercle et la médiatrice dans une situation différente (demi-cercle, arc de cercle).

- * Mise en évidence et utilisation des symétries.

- * Nécessité d'analyser la figure proposée afin de la reproduire à l'échelle demandée. Mesurer seulement ne suffit pas pour reproduire la figure : ce qui est essentiel c'est d'observer les proportions.

PROLONGEMENT DE L'ACTIVITE.

On peut multiplier les figures à reproduire. On peut utiliser d'autres éléments que des demi-cercles ou des arcs de cercles.

DETAIL PRATIQUE.

Il est particulièrement intéressant de faire reproduire les figures sur une feuille à carreaux notamment pour mieux utiliser les proportions simples et les symétries.

DESSINS AVEC DES CERCLES 1

Document élève

1 Plusieurs dessins sont donnés avec cette fiche ; chacun des dessins 1, 2, 3 et 4 est réalisé **uniquement** avec des demi-cercles.

Pour chacun des dessins : 1, 2, 3 et 4.

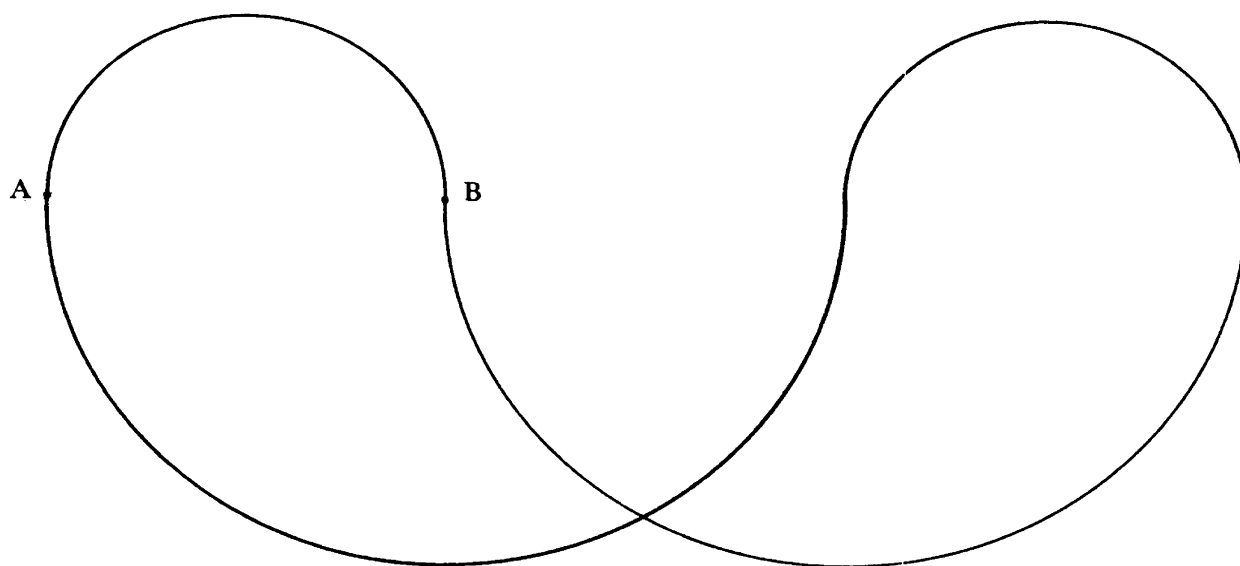
- a - Trouve le centre de tous les demi-cercles du dessin.
Explique en détail comment tu fais.
Vérifie chaque fois que le point trouvé est le centre d'un cercle. Explique.
- b - Compare les rayons de tous les demi-cercles d'un dessin.
- c - Essaie de reproduire sur ton cahier ces dessins en te servant des remarques et résultats des questions a et b.

N'oublie pas de faire ce travail pour les 4 premiers dessins.

2 Le dessin numéro 5 est aussi réalisé avec des arcs de cercles : **MAIS** ce ne sont pas des demi-cercles.

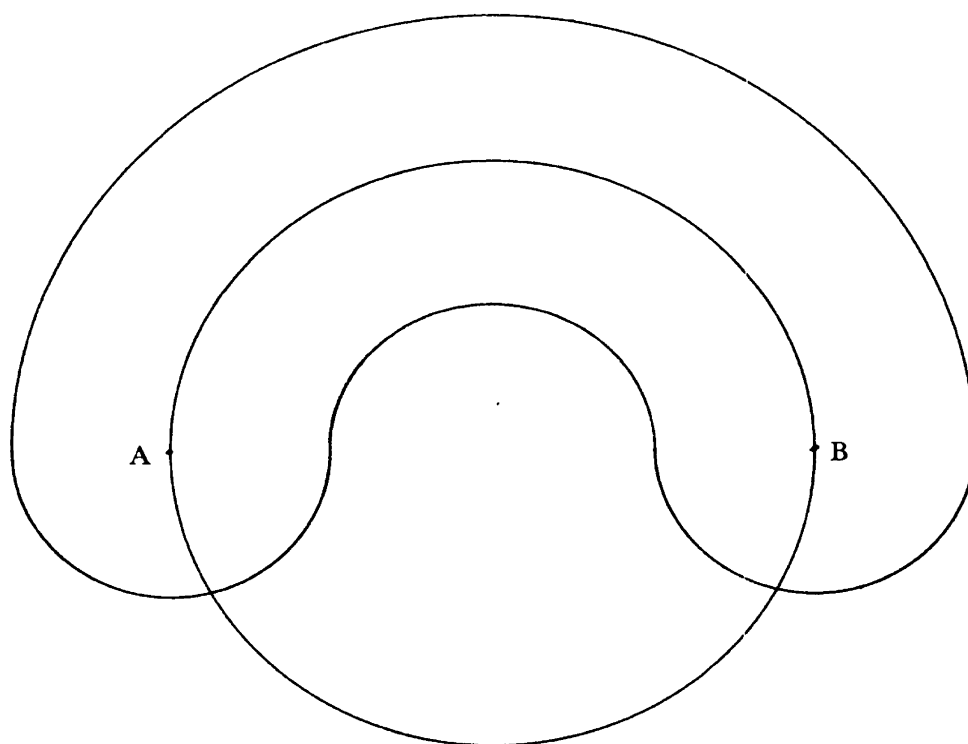
- Trouve le centre de chacun des six cercles des dessins.
Explique comment tu fais.
- Compare les rayons de ces cercles et fais les remarques que tu veux sur ce dessin.
- Essaie de reproduire ce dessin sur ton cahier.
Explique comment tu fais.

1



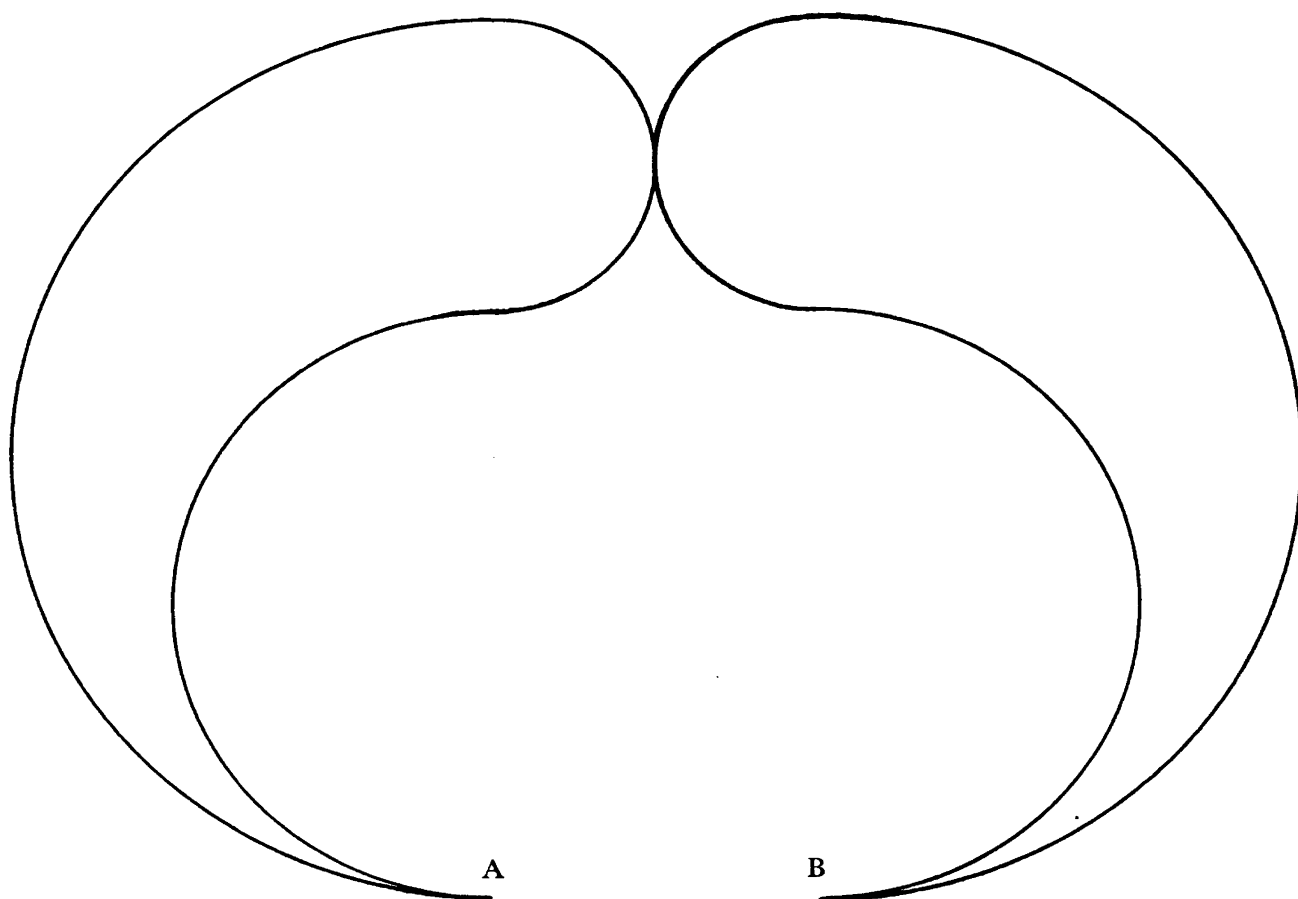
Reproduis ce dessin sur ton cahier de façon que le segment AB mesure 4 si tu choisis pour unité le côté d'un grand carreau. (Prends 8 pour mesure du segment AB, si tu utilises des feuilles à petits carreaux).

2



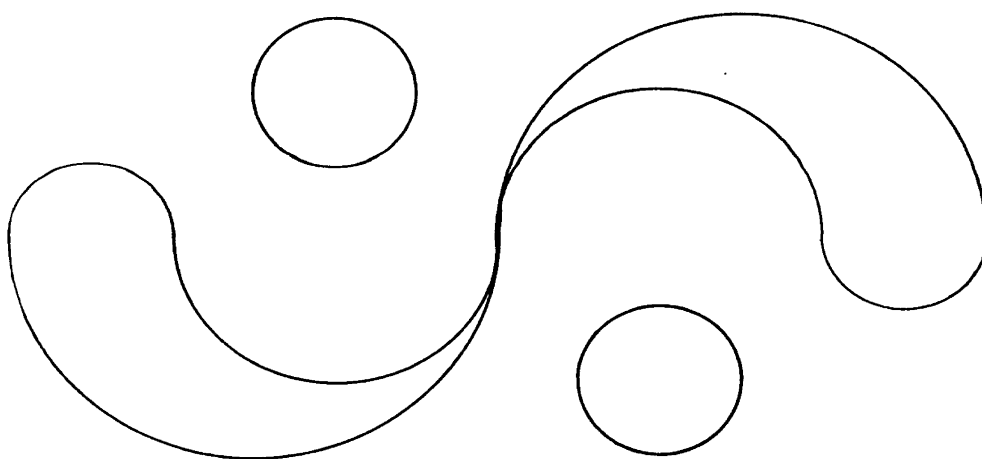
Reproduis ce dessin de façon que le segment AB mesure 10, si tu choisis pour unité le côté d'un grand carreau.

3



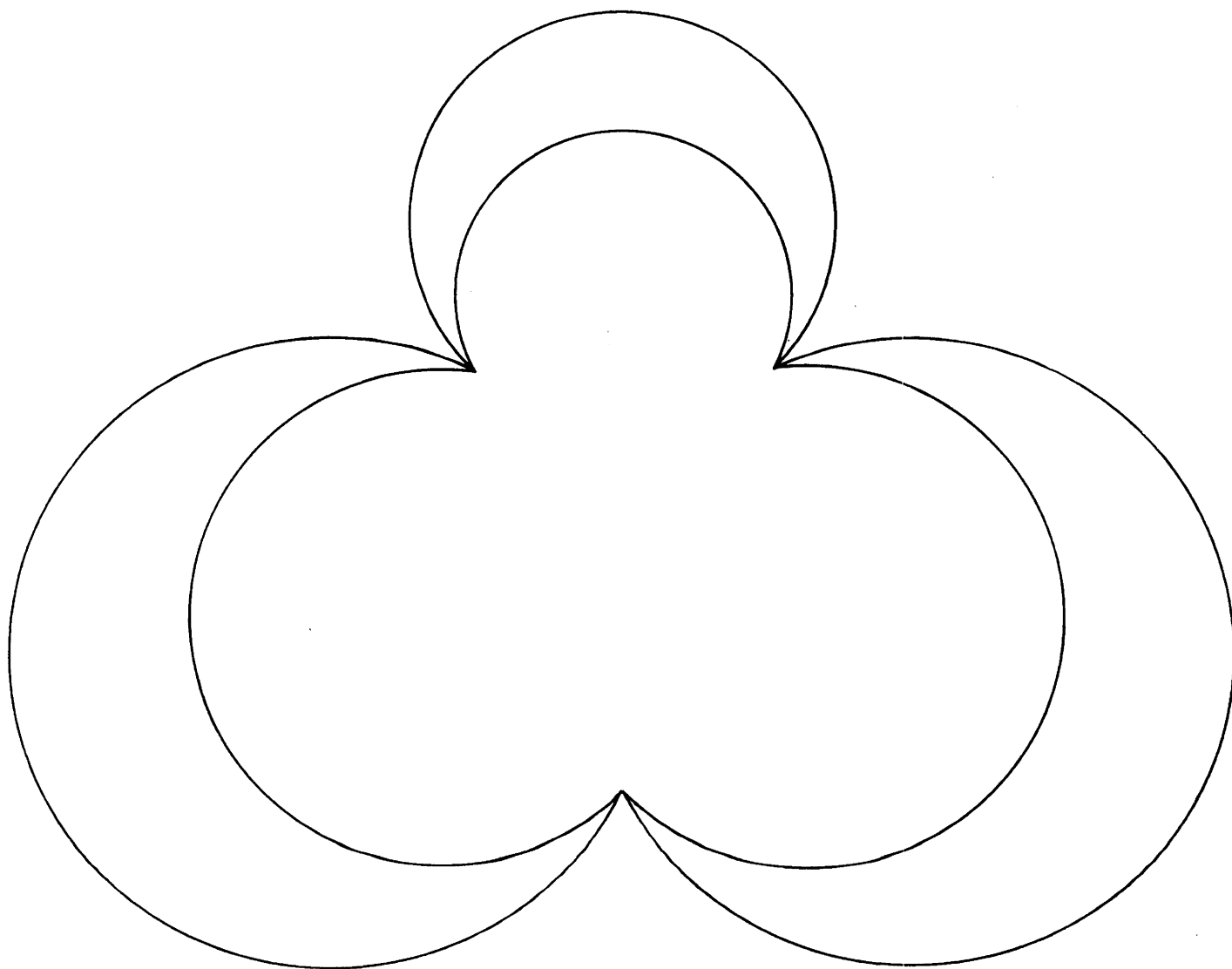
Reproduis ce dessin de façon que le segment AB mesure 3, si tu choisis pour unité le côté d'un grand carreau.

4



Reproduis ce dessin de façon que les deux cercles aient un diamètre mesurant 3, si tu choisis pour unité le côté d'un grand carreau.

5



Reproduis sur ton cahier ce dessin en vraie grandeur. Essaie de ne pas décalquer ni d'utiliser ton double-décimètre.

DES TRIANGLES, DES CARRES QUI «ROULENT»

Fiche signalétique

C'est une activité de 6ème ou de 5ème. En 5ème, cette activité peut être liée à l'arithmétique. Le temps d'utilisation varie de 2 heures à 3 heures (sans les prolongements).

OBJECTIFS.

- * Reconnaître, dans des courbes, des arcs de cercles qui n'apparaissent pas explicitement comme tels.
- * Passer de la manipulation dans la situation (le carré qui roule) à l'analyse du modèle (tracé au compas et alternance des arcs de cercle).

INTERETS DE L'ACTIVITE.

- * L'élève a toujours la possibilité de revenir à la situation de départ (un petit bout de carton et un crayon) s'il ne maîtrise pas encore le modèle. Il ne peut rester inactif.
- * Il est possible de bien mettre en évidence quelques analogies entre situation et modèle : coin de carton et pointe de compas, côté ou diagonale du carton et rayon du cercle.
- * De fortes motivations esthétiques incitent l'élève à prolonger de lui-même la recherche.

PROLONGEMENTS POSSIBLES.

- * Il est possible de prolonger cette activité par la mise en évidence des symétries obtenues.
 - * On peut étendre cette situation à un hexagone, un octogone... roulant sans glisser. On peut diversifier les figures autour desquelles on roule.
- Remarquons l'analogie existant entre cette activité et celle de cardioïde où on envisage dans les commentaires un cercle roulant sans glisser autour d'un cercle. La réalisation pratique de ce roulement est difficile et on a du mal à imaginer la trajectoire d'un point du cercle qui roule sans glisser. La situation du polygone roulant sans glisser autour d'un polygone est plus facile bien que très similaire.
- * On peut aussi développer cette activité en liaison avec l'arithmétique : on cherche à prévoir le nombre de tours sur lui-même effectués par le carré roulant autour d'un polygone donné.

DES TRIANGLES, DES CARRES QUI «ROULENT»

Commentaires

Feuille 1.

Il s'agit de familiariser l'élève avec l'activité proposée. Une séance d'une heure sera sans doute nécessaire à la compréhension de la manipulation dans un premier temps, à la modélisation ensuite qui conduit à l'utilisation du compas. Les difficultés essentielles auxquelles se heurtent les élèves sont

— pour le premier temps :

- * réaliser un «roulement» sans glissement
- * ne pas changer de coin en cours de tracé
- * prendre conscience du «temps mort» lorsque le coin est pivot.

— pour le second temps :

- * voir que le sommet marqué décrit un arc de cercle de centre le sommet pivot et de rayon le côté du triangle
- * réaliser correctement l'enchaînement des arcs de cercle.

Les autres situations proposées (carré, hexagone) permettent un entraînement des élèves tout en introduisant de nouvelles difficultés (changement de rayon des arcs de cercle en cours de tracé).

Des remarques seront faites par les élèves sur les formes obtenues, sur le nombre d'arcs constituant le motif initial, sur la répétition de ce motif, etc...

Feuille 2.

On fait maintenant «tourner» un carré autour de carrés de différentes dimensions. Les élèves obtiendront des dessins esthétiquement satisfaisants qui leur donneront peut-être envie de rechercher «les tracés» pour d'autres carrés, des rectangles, des parallélogrammes, etc ...

L'observation des dessins obtenus peut conduire à des remarques (donc à des prolongements éventuels)

- sur le nombre de tracés différents pour un même carré
- sur les éléments de symétrie des figures obtenues.

Feuille 3.

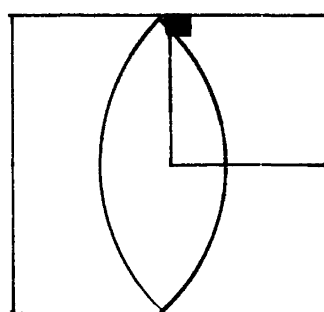
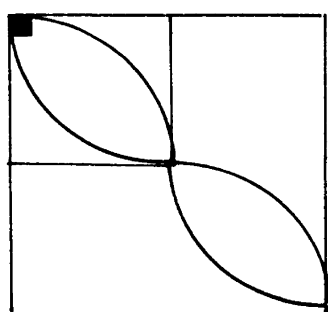
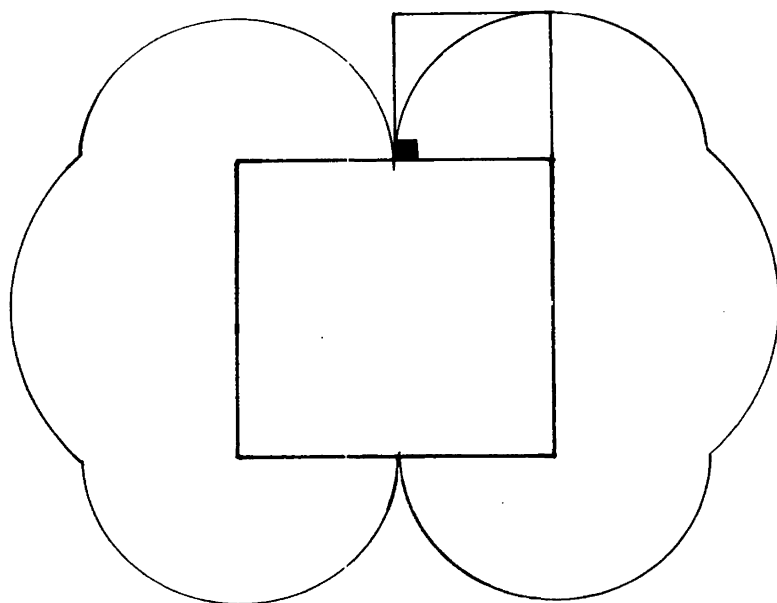
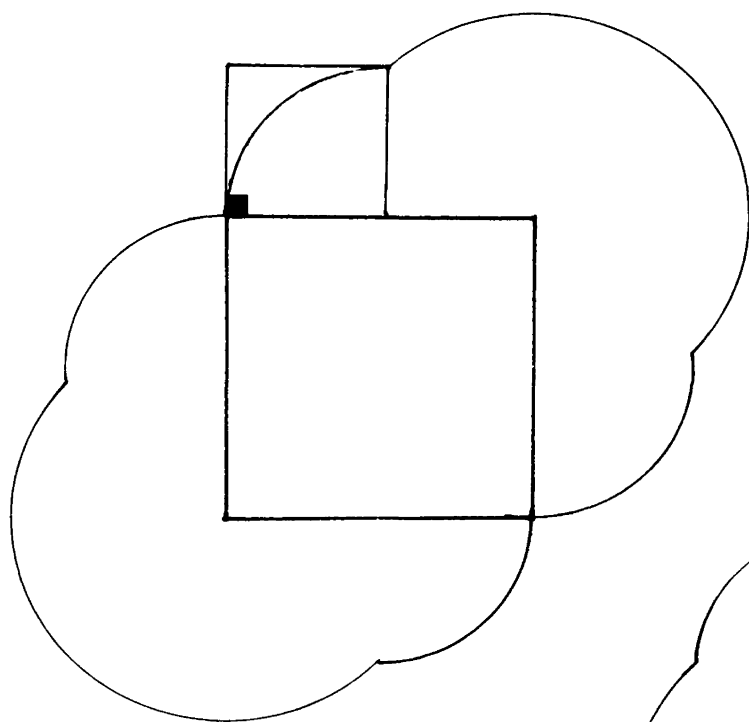
On fait tourner le carré à l'intérieur de carrés de différentes dimensions. La difficulté est ici de ne pas sortir du carré, et de réaliser comment se poursuit le mouvement, lorsque le petit carré arrive dans un coin du grand.

Il est possible d'établir une relation entre les dessins obtenus à l'extérieur et à l'intérieur d'un carré (voir illustration pour le carré 3 sur 3).

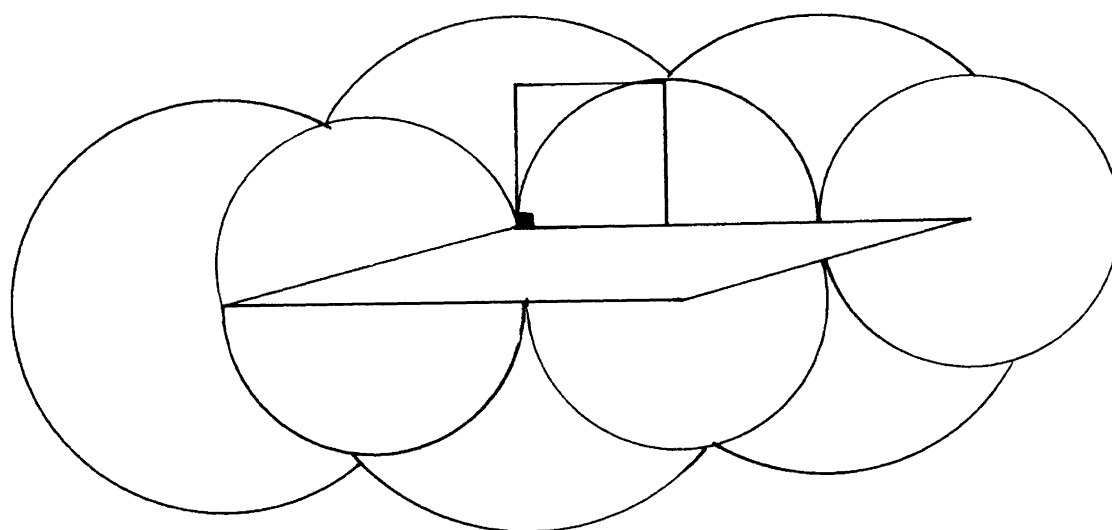
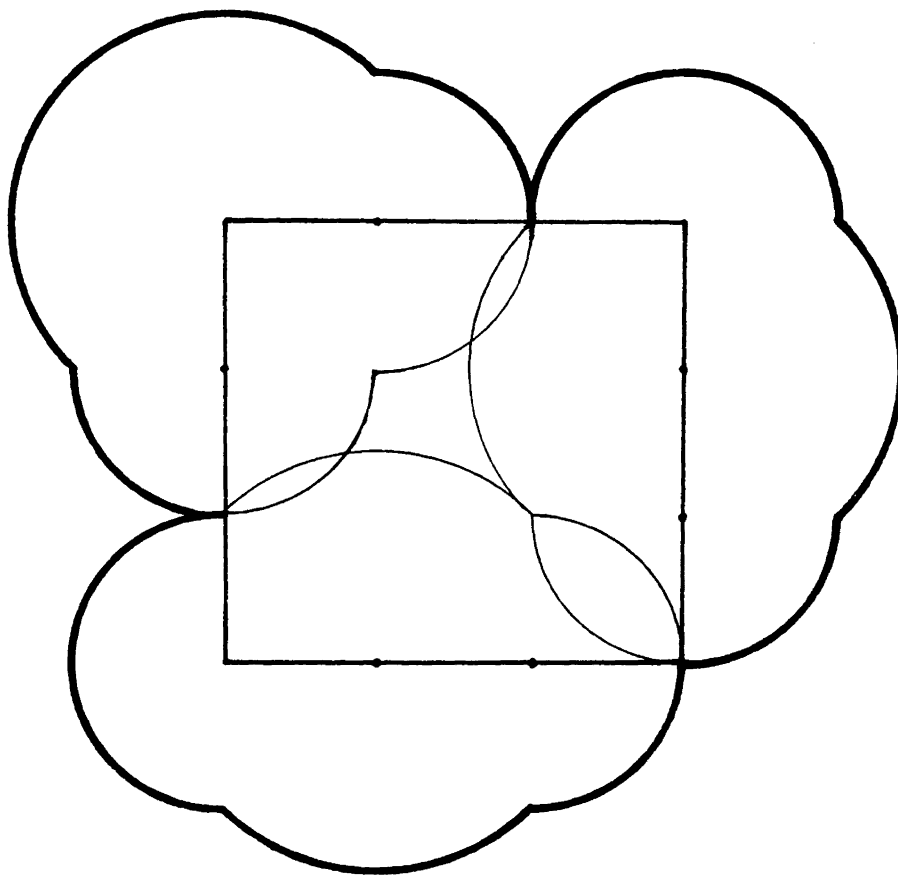
Feuille 4.

Le carré tourne autour d'un triangle. Les traces sont ici plus compliquées, puisqu'il faut faire plusieurs tours (deux pour le triangle de côté 2, quatre pour le triangle de côté 3), avant que le carré ne retrouve sa position de départ. Les élèves auront sans doute des difficultés à bien faire les tracés (en particulier ils arrêtent le tracé dès qu'il recoupe le tracé initial), mais ce peut être l'occasion d'un prolongement intéressant : « Peut-on prévoir au bout de combien de tours le carré retrouve sa position de départ ? »

- un tour pour les carrés étudiés. Est-ce toujours vrai ? oui, puisque le périmètre est un multiple de 4.
- un ou deux tours pour les rectangles (le périmètre est au moins un multiple de 2).
- un, deux ou quatre tours pour les triangles équilatéraux.
- Que se passerait-il si l'on faisait tourner un autre polygone régulier ?

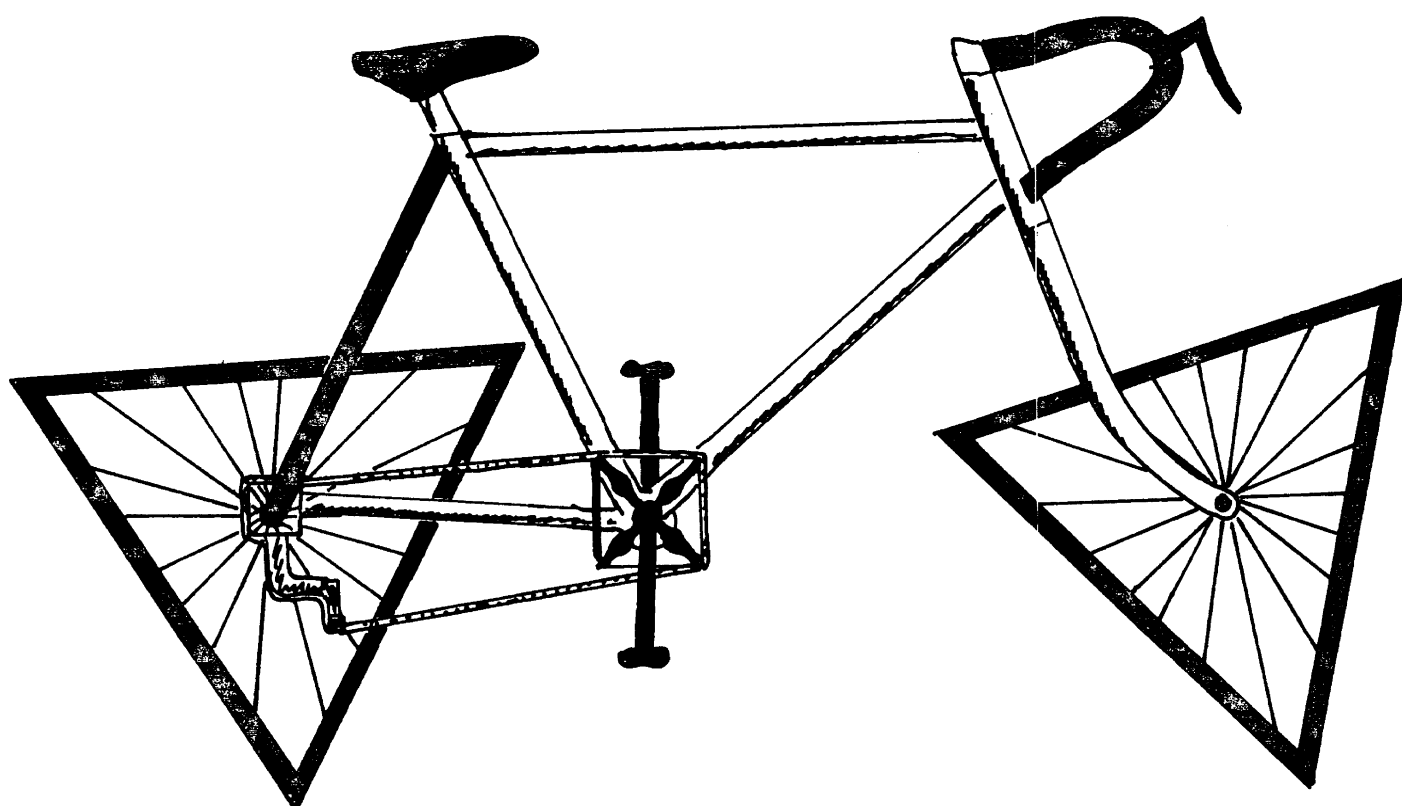


Quelques illustrations (suite ...)

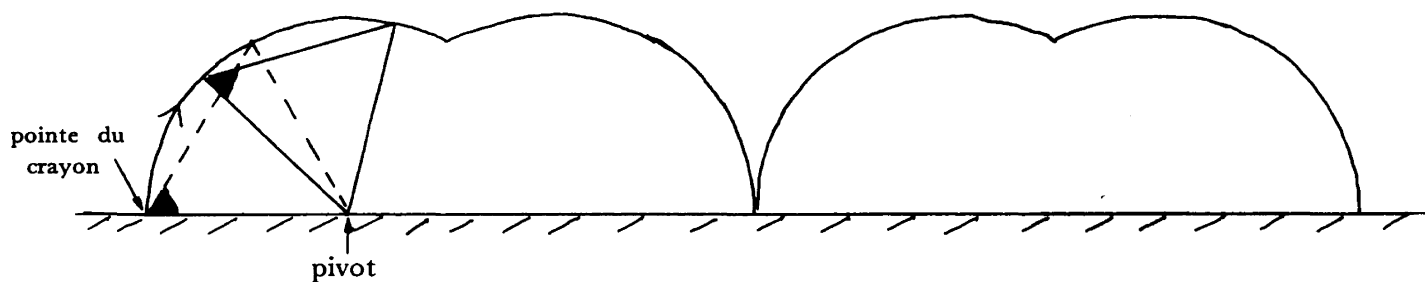


DES TRIANGLES, DES CARRES QUI «ROULENT» 1

Fiches élèves



J'ai fait «rouler» sur une droite un triangle équilatéral découpé dans du papier. J'ai suivi avec un crayon le déplacement du sommet marqué en noir et j'ai obtenu le dessin ci-dessous :



Dessine un triangle équilatéral, découpe-le, colorie l'un de ses coins. Trace une droite et fais «rouler» le triangle sur cette droite. Dessine le chemin suivi par le sommet marqué.

Dessine un carré, découpe-le, colorie un de ses coins. Essaie de le faire «rouler»



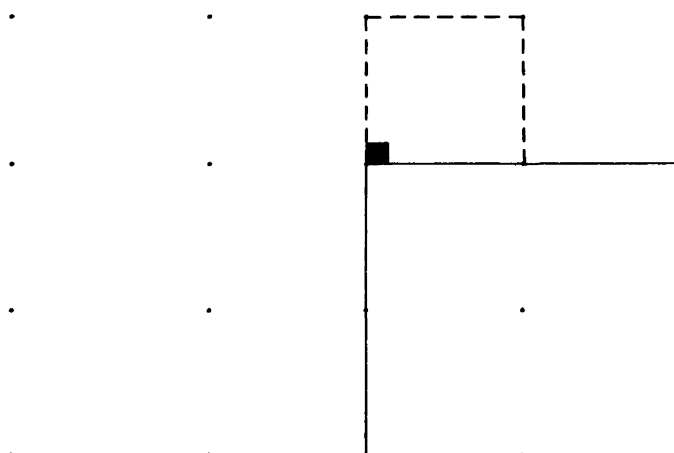
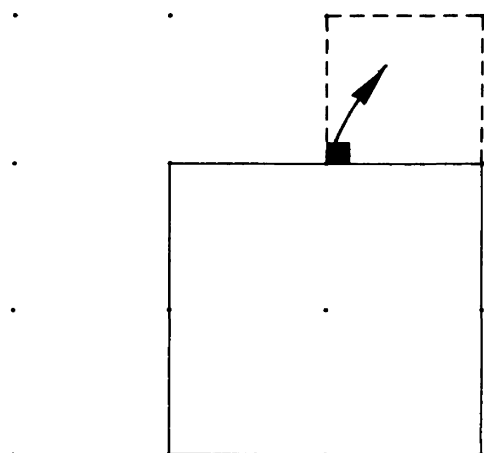
Fais le même travail avec un hexagone.



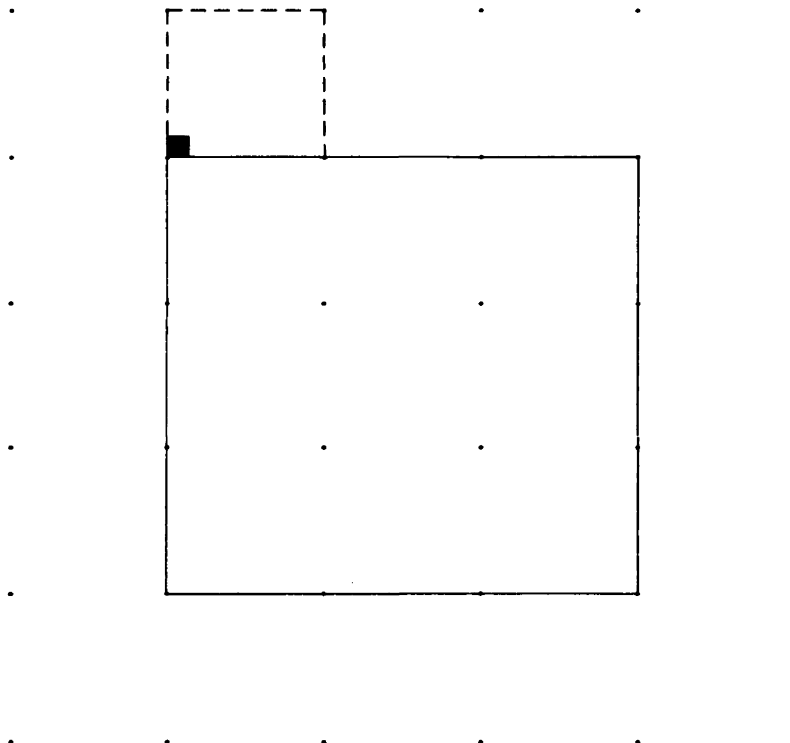
Ecris les remarques que tu fais.

Fais «rouler» le carré autour du carré plus grand.

Recommence.



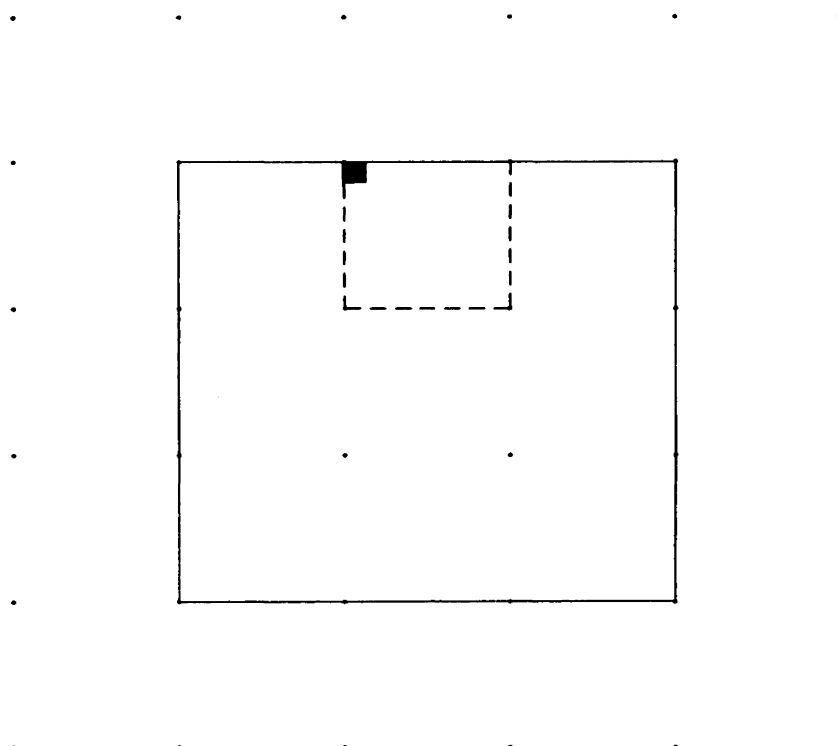
Recommence, en faisant rouler ton carré sur un carré de 3 sur 3.



Que remarques-tu si tu prends une autre position de départ, comme tu l'as fait pour le carré de 2 sur 2 ?

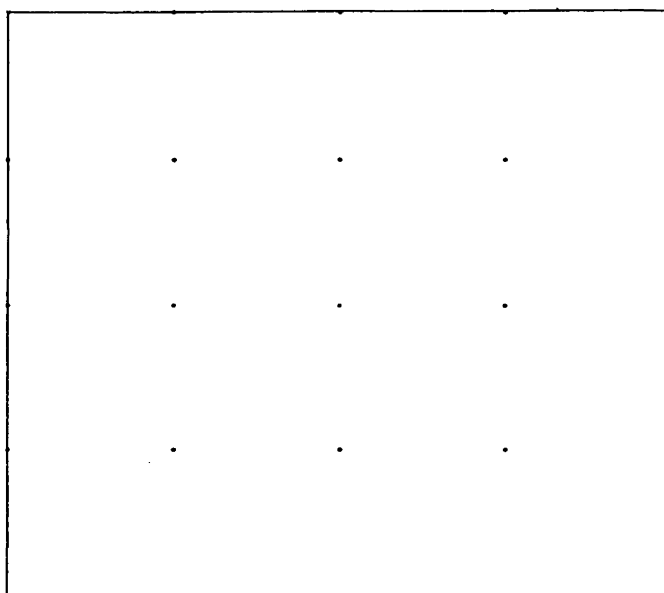
Si cela t'intéresse, regarde ce qui se passe autour de carrés plus grands.

Cette fois-ci tu vas faire rouler ton carré à l'intérieur du grand carré 3 sur 3.



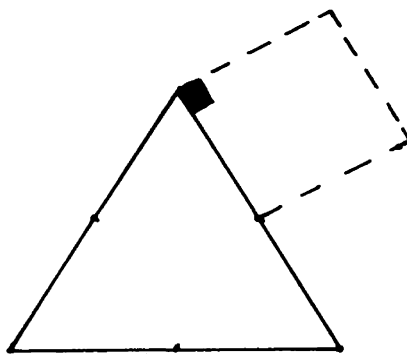
Que remarques-tu si tu prends une autre position de départ ?

Fais le même travail en faisant rouler ton carré à l'intérieur d'un carré 4 sur 4.

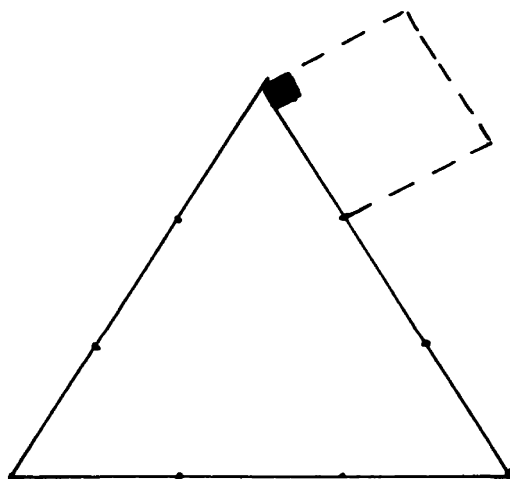


Recommence avec des carrés d'autres dimensions si tu en as envie.

Fais rouler ton carré autour d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est le double de celle des côtés du carré.



Recommence avec ce triangle.



Que remarques-tu ?

DEUXIEME PARTIE

QUELQUES DEVELOPPEMENTS

DIVERSES PRESENTATIONS DE L'ACTIVITE SEGMENT ET DROITE.

1

* De quoi s'agit-il ?

Au départ d'une simple activité de tracés. Nous avons utilisé les propriétés (rappelées ci-après) du conjugué harmonique d'un point par rapport à deux autres comme prétexte à un tracé. Il ne s'agit évidemment pas de vouloir introduire en classe cette notion de conjugué.

Soit A, B, C trois points alignés. En se donnant deux points L et M alignés avec A, on peut construire le conjugué harmonique de C par rapport aux points A et B de la façon suivante :

On trace les droites LB et MC qui se coupent en H (figure 1).

La droite AH coupe la droite MB en K (figure 2).

Les droites LK et AB se coupent en D (D est le conjugué harmonique de C par rapport à A et B).

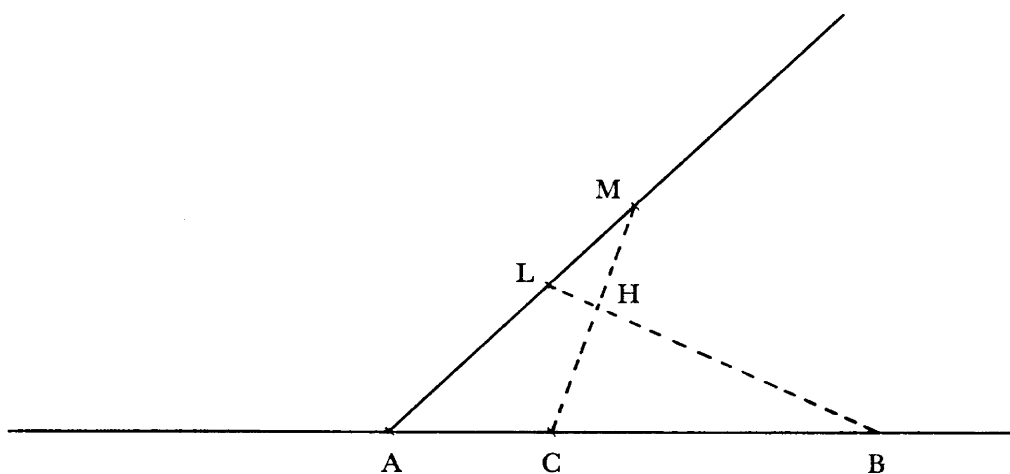


figure 1.

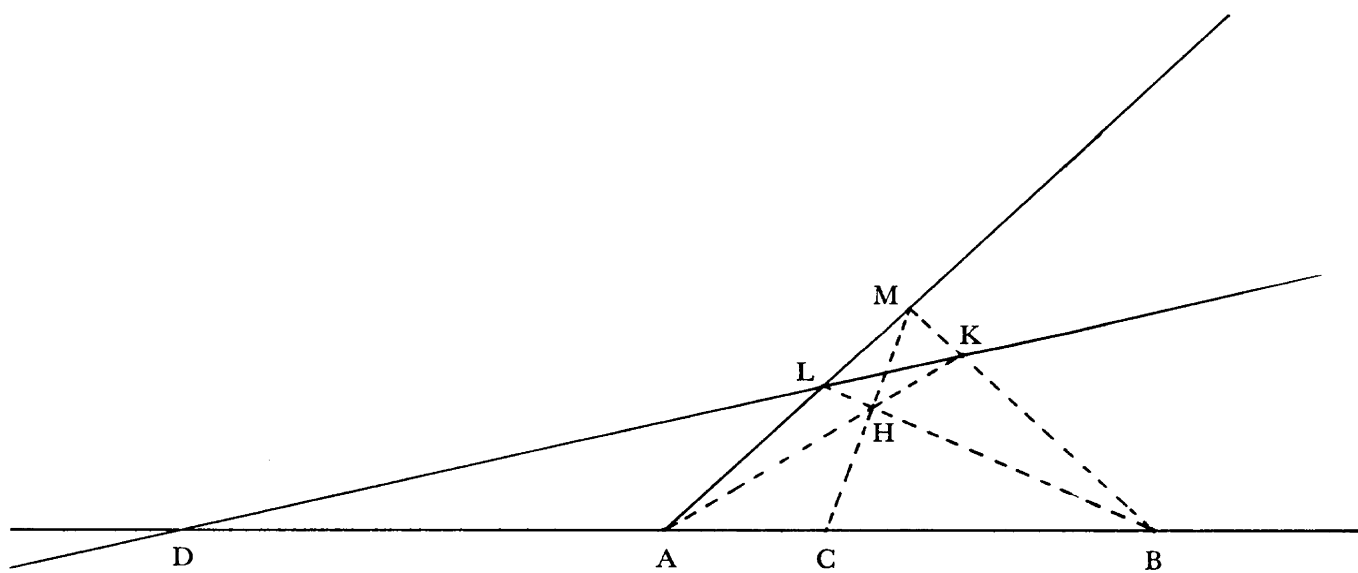


figure 2.

Si on choisit une position particulière de C par rapport à A et B, on obtient une position remarquable de D. Ceci nous fournit un moyen simple de vérification de l'exactitude du tracé. Par exemple, si C est au tiers de AB à partir de A, alors A est le milieu de DB.

QUELQUES RAPPELS DU POINT DE VUE MATHEMATIQUE.

Conjugué harmonique.

- Soit A, B, C, D 4 points alignés.

D est le conjugué (harmonique) de C par rapport à A et B si

$$(1) \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = - \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

En écrivant $\overline{DA} = \overline{DB} + \overline{BA}$ on obtient immédiatement à partir de (1)

$$(2) \quad \overline{DB} \left(1 + \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \right) = - \overline{BA}$$

ce qui montre qu'en dehors du cas $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$ (C est au milieu de (A, B)), il existe un unique point D vérifiant :

$$\overline{DB} = \frac{- \overline{BA}}{1 + \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}}.$$

Dans le cas où C est au milieu de (A, B) on peut considérer le «point à l'infini» comme conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

- Soit A, B, C, D 4 points alignés.

Si D est le conjugué de C par rapport à A et B, on dit que (A, B, C, D) forme une division harmonique.

- Si (A, B, C, D) forme une division harmonique il en est de même de (B, A, C, D).

FAISCEAU HARMONIQUE.

On désignera ici par faisceau, 4 droites d'un même plan concourantes ou parallèles.

Par Thalès on obtient sans difficulté le résultat suivant :

- Si un faisceau est coupé par une sécante suivant une division harmonique, alors il est coupé par toute autre sécante suivant une division harmonique. On dit dans ce cas que le faisceau est harmonique.

POINTS CONJUGUES PAR RAPPORT A DEUX DROITES.

Soit d et d' deux droites d'un plan.

Soit M et M' deux points de ce plan.

M est dit conjugué de M' par rapport à d et d' si la droite MM' coupe d et d' en P et P' et si (M, M', P, P') forme une division harmonique.

POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A DEUX DROITES.

Par Thalès, on obtient le résultat suivant :

Soit d et d' deux droites d'un plan.

Soit C un point du plan n'appartenant pas à l'intersection de d et d' .

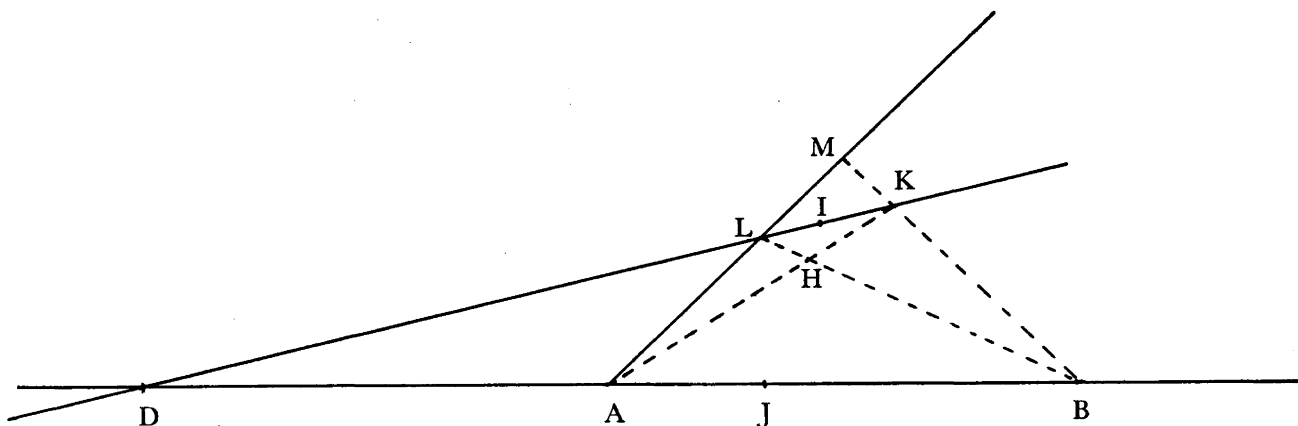
L'ensemble des points conjugués de C par rapport à d et d' est une droite passant par le point d'intersection de d et d' ou parallèle à d et d' si ces droites sont parallèles.

Cette droite est appelée la polaire de A par rapport à d et d' .

Revenons au tracé géométrique que nous avons proposé : pour montrer que le tracé proposé fournit bien le conjugué harmonique de C par rapport à A et B prenons le problème à l'envers.

Désignons par I le conjugué de D par rapport à L et K

J le conjugué de D par rapport à A et B .



Puisque (I, D, L, K) et (J, D, A, B) forment des divisions harmoniques

I et J appartiennent à la polaire de D par rapport à LB et KA

I et J appartiennent aussi à la polaire de D par rapport à LA et KB .

La droite IJ étant la polaire de D par rapport à LB et KA , elle passe par l'intersection de ces droites, c'est-à-dire par H .

La droite IJ étant la polaire de D par rapport à LA et KB , elle passe par l'intersection de ces droites, c'est-à-dire par M .

La polaire de D par rapport aux droites LA et LB est donc la droite MH .

D est donc le conjugué de C par rapport à A et B .

Pour revenir aux préoccupations correspondant à une classe de 6ème.

QUELQUES REMARQUES SUR LES TRACES.

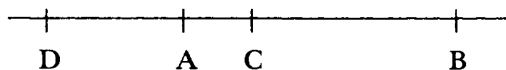
Les quelques remarques suivantes devraient permettre de mieux distinguer les différentes options possibles pour présenter ces tracés :

1) La construction du point D n'est pas «stable». Une très légère imprécision dans le tracé de LK entraîne une forte dispersion du point D .

2) La position du point D est indépendante de celle des points L et M . (à condition toutefois que A , L et M soient alignés). Mais au niveau du tracé il n'en est pas de même. La position relative des points L et M peut avoir une influence sur les risques d'imprécision. Par exemple si L est très près de M , il sera très difficile d'obtenir un tracé précis.

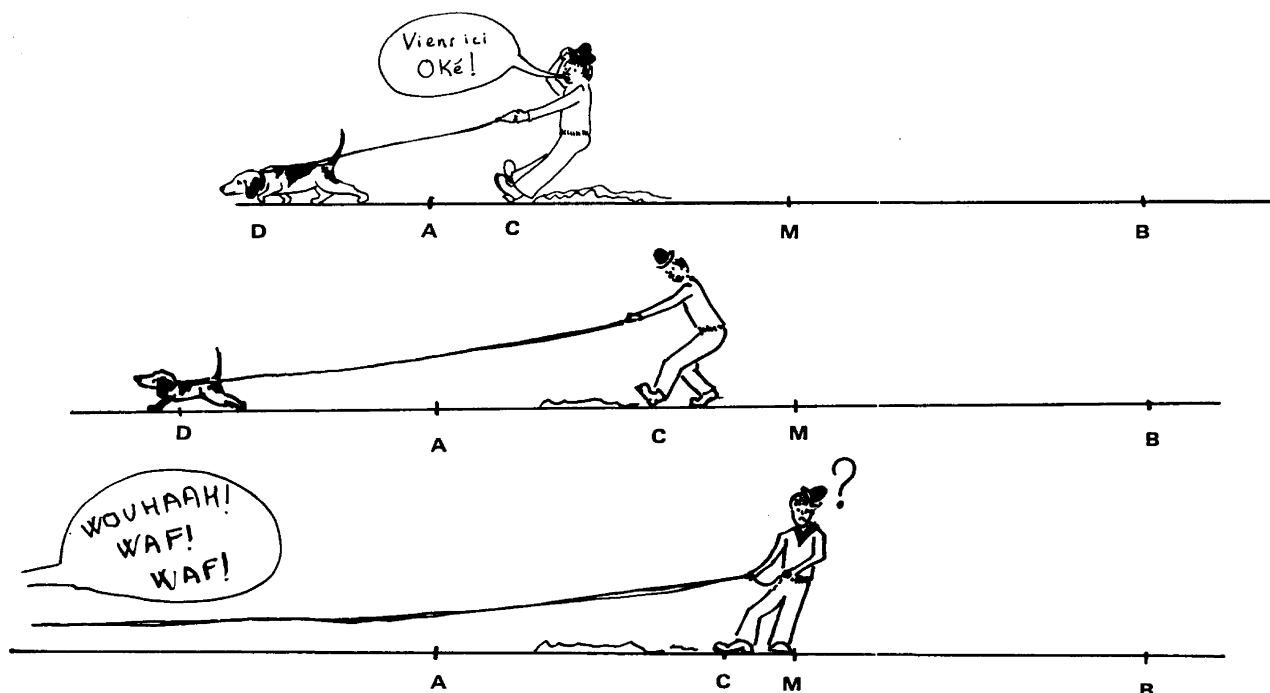
3) La position du point D est fonction de celle du point C

- Si C est entre A et B proche de A, alors D est à l'extérieur du segment AB à proximité de A.



- De même si C est entre A et B proche de B, alors D est à l'extérieur du segment AB à proximité de B.

- Si C est proche du milieu de (A, B), alors D est très éloigné de A et de B ; D est du côté de A si C est plus près de A que de B, sinon D est du côté de B.



- Enfin si C tend vers le milieu de (A, B), D part à l'infini. (les droites LK et AN tendent à être parallèles).

2 La présentation proposée dans le dossier.

On trouve :

- Une construction avec C situé au tiers de AB à partir de A. Dans ce cas A est le milieu de DB. Cette position particulière permet de contrôler plus facilement la rigueur du tracé. Elle donne l'occasion de faire reconnaître un milieu ; de faire préciser ce que représente le tiers de ..., le quart de ... et de confronter les méthodes de vérification utilisées par chacun.

- Une construction avec C situé au quart de AB à partir de A. Dans ce cas la longueur de DA est la moitié de la longueur de AB.

- Deux autres constructions en gardant C fixe mais en choisissant d'autres points L et M. Il s'agit ici pour nous de susciter avant tout un tracé précis. Il n'est pas question de «prouver» que la construction de D ne dépend pas des positions de ces points.

Le problème de notation des points L et M s'est posé :

- Faut-il appeler L' et M' les deux autres positions de ces points ?
ou bien faut-il les appeler à nouveau L et M ?
- Faut-il faire utiliser des couleurs pour mieux distinguer les différentes positions tout en montrant bien l'analogie existant entre ces positions ?

Quelle que soit la solution adoptée, c'est ici l'occasion d'une sensibilisation à la notion de variable en géométrie.

3 D'autres présentations possibles en classe de 6ème.

Nous ne donnerons pas ici toute une série de documents élèves illustrant les présentations que nous avons pu envisager. Nous les suggérerons simplement en indiquant leurs idées directrices et en précisant leurs différences par rapport à la présentation figurant dans le dossier.

On peut imaginer d'autres façons de présenter :

- 1) les instructions de dessin
 - le texte des instructions de dessin peut être élaboré par l'ensemble de la classe d'après un tracé réalisé au tableau par le professeur.
 - les instructions de dessin peuvent être présentées sous forme d'organigramme. Cet organigramme peut être donné par l'enseignant ou bien élaboré par les élèves.

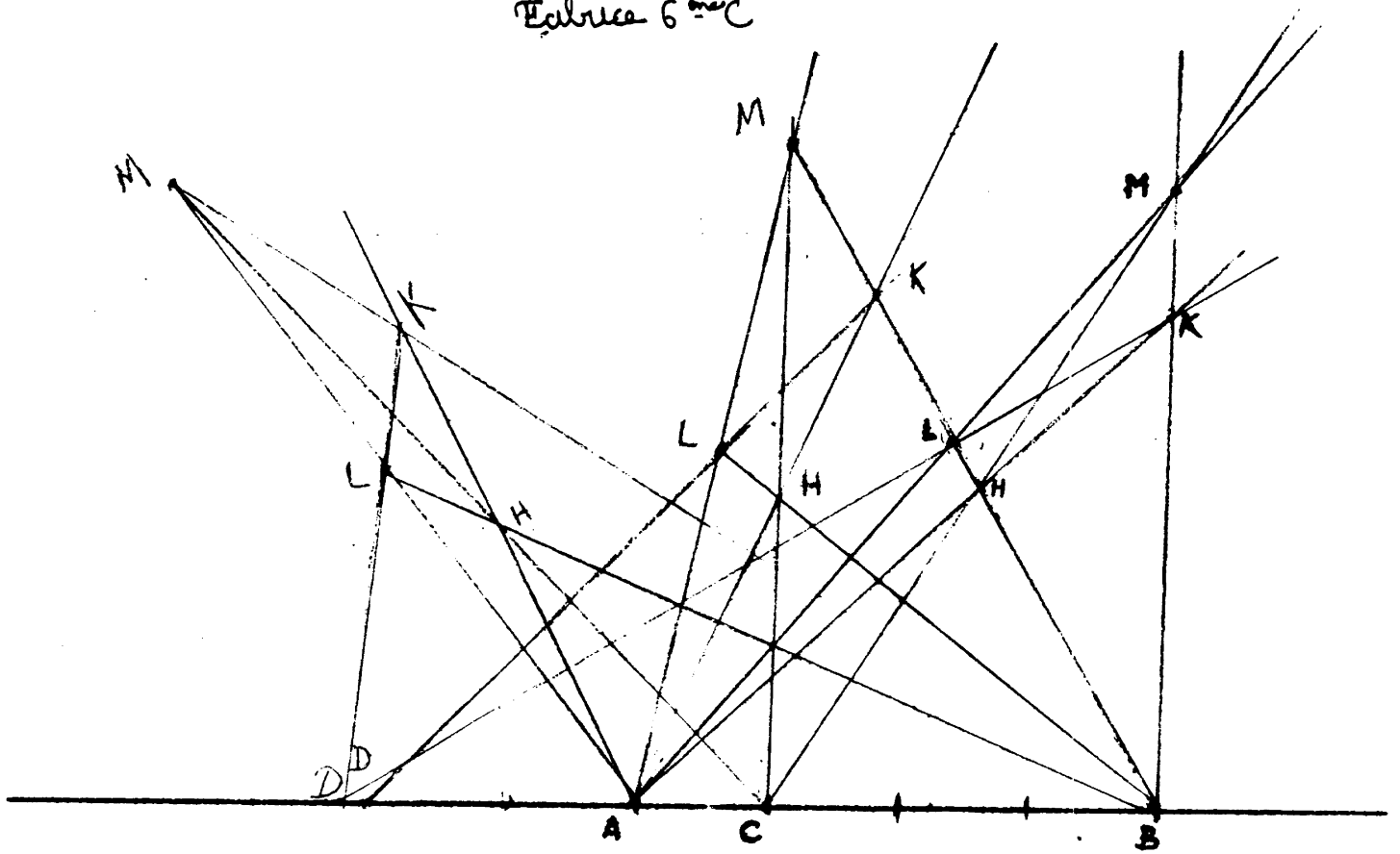
- 2) divers tracés correspondant à plusieurs positions des points L et M. Ces divers tracés peuvent suggérer que la construction du point D est indépendante des points L et M alignés avec A.

Mais on se heurte alors à la difficulté suivante : il est impossible de réaliser sur une même feuille les tracés relatifs à plus de 2 ou 3 positions des points L et M.

- on peut utiliser le papier calque. Les tracés sont comparés par superposition.
- on peut reproduire sur plusieurs feuilles la même disposition des points A, B et C. La comparaison des positions obtenues pour D est plus difficile.

Dans tous les cas, la majorité des élèves ne voit pas que, malgré le changement de feuille, il s'agit du même problème. Ils ont du mal à réaliser que ce sont plusieurs constructions faites à partir d'une seule situation de départ (les points A, B et C). Avec une classe de 6ème il est difficile d'aller très loin dans cette direction. Par contre avec une classe de 5ème ou de 4ème, on peut raisonnablement envisager d'aller plus loin : les élèves maîtrisent mieux les tracés ; ils passent donc plus facilement d'un dessin à un autre, d'un cas

Figura 6^{ma} C



de figure à un autre ; ils perçoivent mieux les invariants entre les différents tracés.

3) Divers tracés correspondant à plusieurs positions du point C.

Ces divers tracés, réalisés sur une même feuille, ou sur plusieurs feuilles à partir d'une situation semblable, peuvent suggérer aux élèves que la position du point D est fonction de celle du point C.

On retrouve ici les difficultés précédentes à propos de la comparaison des différentes constructions. Au niveau de 6ème il n'est guère possible d'aller au delà d'une ou deux positions remarquables du point C. Il n'en est pas de même au niveau 4ème comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

4 Evolution de l'activité vers d'autres objectifs pédagogiques sur les fonctions, les fonctions réciproques, les régionements et les positions limites (4ème).

1) Fonction.

En 4ème, il est possible de sensibiliser les élèves au fait que le point D est l'image du point C par une certaine fonction ainsi qu'à certaines propriétés de cette fonction. Cette sensibilisation ne se fait pas sur le plan théorique mais sur la pratique de multiples tracés.

Lorsqu'on aborde les fonctions numériques en fin de 1er cycle, on se heurte à une grande difficulté : les élèves n'appréhendent pas bien la notion de fonction. Ils confondent une fonction et l'image de x par cette fonction. Ils identifient surtout la notion de fonction à l'écriture d'une expression algébrique. Par exemple : soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $x \longrightarrow (x + 2)^2$. On doit écrire $f(x) = (x + 2)^2$. Les élèves ont beaucoup de mal à bien comprendre pourquoi il est incorrect de dire la fonction $(x + 2)^2$ et ils écrivent d'ailleurs souvent $f = (x + 2)^2$ au lieu de l'égalité précédente. C'est la notion même de fonction qui fait difficulté.

En prolongeant l'activité «segment et droite» on peut améliorer notablement la compréhension de la notion de fonction et mieux distinguer une fonction et les images de cette fonction. En effet, pour la fonction f , définie dans l'ensemble des points d'une droite, qui à un point C associe le conjugué de C par rapport à A et B, la fonction et les images se confondent moins.

Quelques tracés correspondant à différentes positions du point C sur la droite AB montrent bien qu'à chacun de ces points on peut associer un point D en appliquant la série de consignes données. Ces consignes constituent un procédé de description de la fonction qui se distingue nettement des images qui, elles, sont les points D trouvés. Cette série de consignes concrétise bien dans un premier temps la notion de fonction.

Il n'en est pas de même pour $x \longrightarrow (x + 2)^2$. $(x + 2)^2$ constitue la description de la fonction ; $(x + 2)^2$ est aussi l'image de x par la fonction. Par analogie, il faudrait décrire la fonction $x \longrightarrow (x + 2)^2$ comme étant la fonction qui à chaque nombre associe le nombre obtenu de la façon suivante :

on ajoute 2 au nombre de départ et on prend le carré du résultat. La série de consignes apparaît alors, mais il est trop facile d'écrire $(x + 2)^2$ pour s'en priver.

2) Plusieurs descriptions d'une même fonction.

D'autres prolongements de la même activité ne sont pas moins intéressants : ils conduisent à décrire de plusieurs façons la même fonction «conjugué harmonique».

Considérons tout d'abord l'exemple numérique :

la fonction $x \longrightarrow (x + 2)^2$ peut être définie aussi par $x \longrightarrow x^2 + 2x + 4$.

$x^2 + 2x + 4$ est un autre algorithme permettant d'obtenir chaque image.

Revenons à l'activité «segment et droite» : il suffit de permuter les lettres L et M dans la série de consignes du tracé. Le tracé n'est plus le même, mais à un même point C correspond le même point D. (L'algorithme n'est plus le même : tracé différent, mais la fonction f est bien la même).

Nous reproduisons ci-dessous le premier tracé (figure 1) et le tracé obtenu après permutation de L et M dans la série de consignes. C'est une étape supplémentaire dans l'approche de la notion de fonction.

Il est possible d'obtenir aussi une description de la fonction en considérant les points L et M alignés avec B. Cette description illustre le fait que A et B jouent le même rôle dans ce problème de conjugué harmonique.

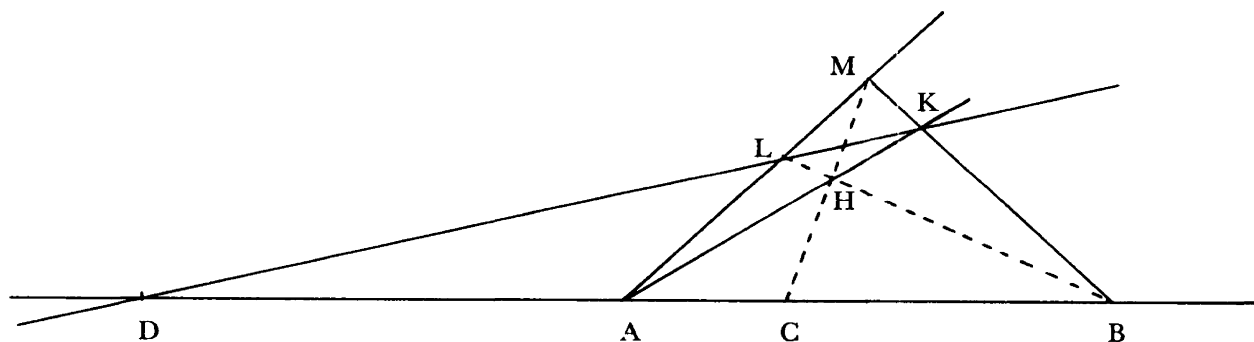
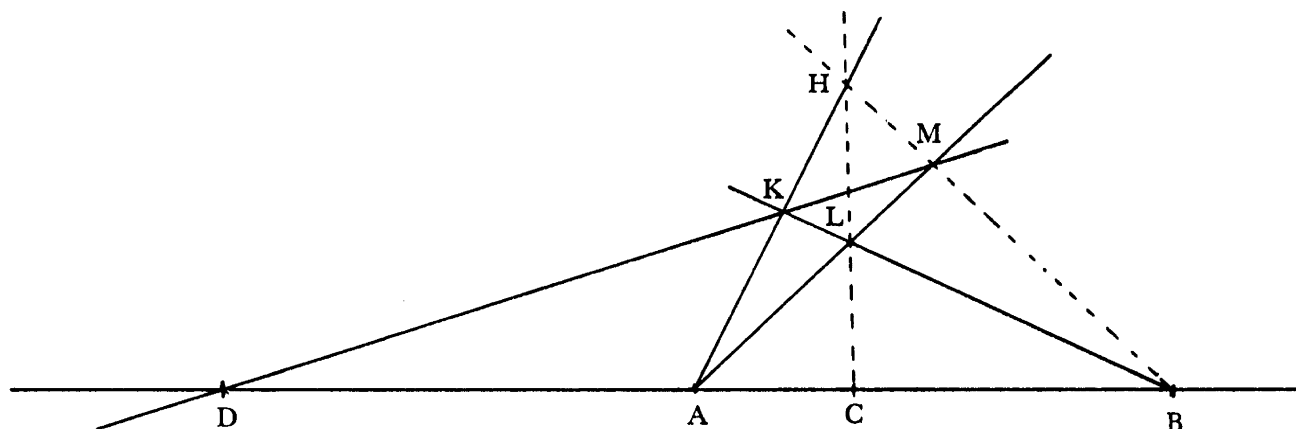


figure 1



Plusieurs tracés correspondant à différentes positions des points L et M pourront mettre en évidence le fait que la détermination de la fonction qui à C fait correspondre D ne dépend pas des points L et M.

On peut alors envisager de permuter les points A et B. Le tracé qui détermine D à partir de C, étant donnés A et B, n'est pas le même que celui qui détermine D à partir de C, étant donnés B et A. Mais le point D obtenu est le même.

3) Fonction réciproque.

Il est très facile de poser le problème de la construction de C à partir du point D. On arrive là à la notion de fonction réciproque.

Il nous paraît intéressant d'aborder cette activité de 2 façons :

- a) demander aux élèves eux-mêmes, à partir du premier tracé, d'établir des consignes permettant d'obtenir le point C à partir de D.
- b) Suivre exactement les mêmes consignes que pour la construction de D en substituant D à C. Il est alors possible d'obtenir C à partir de D, car la fonction qui, à C associe D, est égale à sa propre réciproque.

Cette propriété apparaît facilement par le calcul algébrique. Si la droite AB est munie d'un repère tel que l'origine soit le milieu de AB, et si a , x et y désignent les abscisses de A, C et D, (A, B, C, D) est une division harmonique si et seulement si $xy = a^2$.

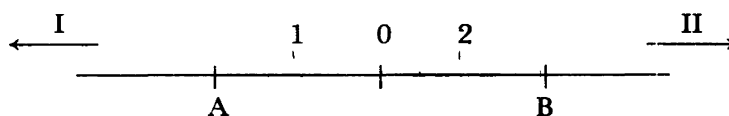
Cette relation montre aussi que (A, B, C, D) est encore une division harmonique si on permute A et B ou bien C et D.

C'est pour cela qu'on dit parfois que C et D sont les conjugués de A et B.

4) Régionement, positions limites

Il est facile, en 4ème, d'aboutir aux remarques suivantes qu'il sera très intéressant de faire formuler.

- Si C appartient au segment AB, alors D n'appartient pas à ce segment.
- O étant le milieu de AB, si C appartient au segment AO, alors D est du côté de A.
- Si C est voisin de A, alors D est voisin de A.
- Si C est voisin de B, alors D est voisin de B.
- Si l'un des points est voisin d'une extrémité du segment AB, alors l'autre est aussi voisin de cette même extrémité.
- Si C est voisin du milieu du segment AB, D est très éloigné des extrémités A et B. Il est facile de faire apparaître la position de C au milieu du segment AB comme une position limite.



En effet lorsque C passe de la région 1 à la région 2, la droite LK passe d'une position à une autre très différente : dans le premier cas, LK coupe la droite AB du côté de A ; dans le deuxième cas, LK coupe AB du côté de B. Le passage par une position particulière : celle où les droites LK et AB sont parallèles, apparaît donc comme nécessaire. Cette position correspond à celle de C au milieu du segment AB. On peut débattre de l'existence de D dans cette position.

Cette façon d'aborder la notion de parallélisme (comme position limite de sécantes) est très riche. En particulier elle montre bien pourquoi on envisage en géométrie les traits à la règle comme pouvant être prolongés aussi loin que l'on veut ; c'est-à-dire pourquoi on envisage la notion de droite et non exclusivement la notion de segment.

QUELQUES COMMENTAIRES SUR L'INEGALITE TRIANGULAIRE A PROPOS DE LA CHEVRE

«La ligne droite est le plus court chemin entre deux points»

Telle est l'expression de l'inégalité triangulaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et c'est ce que la chèvre a fort bien compris !

Cependant une telle affirmation, bien qu'elle soit considérée par tous comme une évidence, devient totalement fausse si, pour mesurer les choses, on fait l'économie d'un ou plusieurs axiomes d'une métrique. Par exemple, si nous considérons la pseudo-distance : «temps mis pour aller de A à B», il suffit d'aller se promener en montagne ou dans les bois et d'emprunter des soi-disant raccourcis, pour se voir infliger de cruels démentis à l'inégalité triangulaire. C'est d'ailleurs pour satisfaire au principe du «plus court chemin» que la lumière ne se propage pas toujours en ligne droite. (cf. P. 218).

«Le Hold-up du siècle», situé à la fin de l'activité «distance et orthogonalité», fournit une bonne illustration de cette recherche du «chemin optique».

Ici, le point de départ de notre réflexion se situe autour des activités «la chèvre», «les radio-amateurs», «la grue», proposées dans la 1ère partie.

Dans ces activités, nous demandons d'abord à l'enfant de résoudre intuitivement un problème de géométrie pratique, puis nous lui demandons progressivement d'explicitier ce qui fait «marcher les choses» et là nous tombons inévitablement sur «l'inégalité triangulaire» ! C'est cette explicitation à propos d'un des exercices de la «chèvre» que nous effectuons à titre d'exemple dans le dernier paragraphe.

Mais tout d'abord nous rappelons dans le paragraphe 1 ce qu'est une métrique et, dans le paragraphe 2, nous expliquons les raisons qui nous conduisent à mettre en exergue l'inégalité triangulaire.

(1) Une métrique sur un ensemble E ; c'est une fonction qui associe à chaque couple (A, B) de points de E un nombre réel positif noté $d(A, B)$ ou plus simplement $|A, B|$ et appelé distance de A à B .

Pour que cette fonction soit considérée comme une distance sur E (c'est-à-dire pour qu'elle se comporte de façon très semblable à la distance que nous avons l'habitude de considérer dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$) il faut qu'elle satisfasse aux trois conditions suivantes :

- La première condition, dite de **séparation**, signifie que deux points ne peuvent être à distance nulle que s'ils sont confondus :

$$(|A, B| = 0) \iff (A = B) \text{ quel que soit } A.$$

- La deuxième condition, dite de **symétrie**, signifie que la distance de A à B est la même que celle de B à A (ce qui n'est pas le cas par exemple quand on considère le temps mis pour aller de A en B).

$$\text{soit : } |A, B| = |B, A| \text{ quels que soient } A \text{ et } B.$$

- La troisième condition, dite **inégalité triangulaire**, signifie que la distance d'un quelconque point A à un quelconque point B est toujours majorée par la somme des distances de A à C et de C à B .

$$\text{soit encore : } |A, B| \leq |A, C| + |C, B| \text{ quels que soient } A, B \text{ et } C...$$

En général, même si l'ensemble E considéré n'a aucune géométrie apparente et même si la métrique utilisée sur E n'a aucun aspect intuitif, il n'en demeure pas moins que l'espace métrique E peut se traiter, pour de très nombreux problèmes, de façon analogue à celle que l'on emploie avec les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis de la métrique usuelle.

En ce sens la notation $|A, B|$, à la place de $d(A, B)$, a l'avantage de rappeler la valeur absolue : $|A - B|$ ou la norme : $\|A - B\|$ qui sont les distances habituellement utilisées sur $\mathbb{R}$, respectivement sur un espace vectoriel normé.

Dans ces derniers cas (espaces vectoriels normés), l'inégalité triangulaire signifie que la longueur d'un côté d'un triangle est toujours comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres côtés :

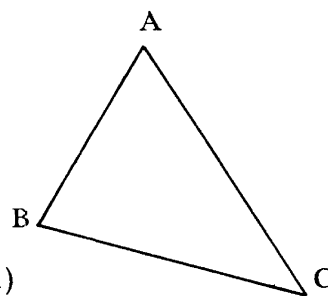
$$||A, C| - |C, B|| \leq |A, B| \leq |A, C| + |C, B|$$

En particulier :

— Si C est un point du segment $[A, B]$,

$$\text{l'inégalité : } |A, B| \leq |A, C| + |C, B| \quad (1)$$

$$\text{est en fait une égalité : } |A, B| = |A, C| + |C, B| \quad (2)$$



— «Pseudo-réciproquement», pour que l'égalité (2) soit une condition d'alignement des trois points A , B et C , il suffit que la norme soit issue d'un produit scalaire, ce qui est le cas des espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Remarque :

Comme nous venons de le dire, à chaque fois que C est entre A et B , l'inégalité (1) devient en fait une égalité ; cependant on continue à écrire l'inégalité (1), tant que l'inégalité demeure le seul renseignement utile. Ce dernier point choque bon nombre d'enfants et certains sont presque «physiquement empêchés» d'écrire l'inégalité large, s'ils savent que l'égalité a lieu... ! On peut considérer qu'il s'agit là d'un détail sans importance qui «s'arrangera tout seul» par la suite ; il s'avère bien souvent que cela ne «s'arrange pas». Il nous paraît indispensable d'arriver progressivement à faire comprendre aux enfants la souplesse et l'intérêt des inégalités larges, tout comme il est fondamental d'arriver à travailler avec des conditions suffisantes en réalisant qu'elles sont suffisantes et «qu'il suffit qu'elles soient suffisantes» (l'inutile condition nécessaire et suffisante étant bien souvent introuvable dans la situation qui nous intéresse).

La répulsion assez répandue en 1er cycle à l'égard des inégalités larges, le refus quasi-systématique de travailler par conditions suffisantes créent un climat rendant par la suite impossible tout travail sérieux en analyse ; peut-être aussi (et cela serait beaucoup plus grave) qu'une telle attitude est révélatrice d'un état d'esprit profond : «Refuser ce qui n'est pas nécessaire et suffisant» n'est-ce pas aussi «refuser de travailler, si ce n'est pas exigé et noté ? » «refuser d'entreprendre, si ce n'est pas requis et payé ? » «refuser toute fantaisie et toute générosité» ? et si c'est bien cela, que la vie devient morne et triste ...!

(2) Pourquoi parler de notions de métriques générales à propos d'activités 6ème-5ème.

Nous avons observé que bon nombre d'enfants, lorsqu'ils recherchent une propriété géométrique, sont soudainement illuminés et pris de certitude ! «C'est forcément comme ceci», «cela ne peut avoir lieu» disent-ils. Dès lors, rien ne peut ébranler leurs convictions. Le plus souvent leurs affirmations sont justes, même s'ils n'ont aucun argument pour étayer leurs certitudes. (Ils n'en cherchent pas d'ailleurs de façon naturelle).

La plupart du temps, les évidences géométriques qui suscitent ces brusques convictions sont à base d'inégalité triangulaire et il nous semble important d'en prendre conscience.

Nous proposons d'aider, dès la 6ème, l'enfant à se familiariser avec les notions métriques et, en particulier à apprendre à reconnaître les situations au sujet desquelles l'inégalité triangulaire joue un rôle déterminant.

Pourquoi cette prise de conscience ?

Surtout pas pour formaliser, axiomatiser, «faire sérieux» ;

Certainement pas dans le secret espoir de rendre par l'axiomatisation «plus vraies» et plus «opérantes» des propriétés intuitives qui apparaissent de prime abord aux enfants comme des données premières.

Ce que nous voulons, par contre, c'est favoriser chez les enfants ayant acquis une expérience et une bonne intuition géométrique (grâce à l'évidence visuelle des situations) le transfert de leur vécu géométrique vers des situations non géométriques, mais néanmoins «métrisables».

Pour mieux préciser ce que nous entendons par l'expression «transfert du vécu géométrique par le biais de la métrique vers des situations non géométriques», nous donnons trois exemples très naïfs : «l'île mystérieuse», «les inéquations odieuses», «les multilimites».

Pour chacun de ces exemples, on pourra dire (non sans une certaine pointe de malice): «il n'était pas du tout nécessaire de faire intervenir les métriques pour résoudre très simplement ce problème !» et c'est vrai !

Nous ne prétendons pas du tout que les métriques soient nécessaires partout, ni que ce soit la panacée universelle ! ce que nous croyons c'est que l'intuition métrique est capable de débloquer bien des situations, car elle fournit des images concrètes et une certaine direction à suivre.

Or, qu'est-ce qui bloque bien souvent l'élève (voire nous-mêmes) devant un problème «évident une fois qu'a été donnée la solution» ? n'est-ce pas bien souvent le manque d'images et le fait qu'on ne sait pas du tout dans quelle direction chercher !

L'ÎLE MYSTÉRIEUSE.

Nos élèves effectuent pendant les vacances des fouilles archéologiques et découvrent un parchemin leur révélant l'existence d'un fabuleux trésor caché dans une île mystérieuse, située en Méditerranée à 217 km d'Alger et 314 km de Marseille exactement.

Toutes les recherches sur les cartes demeurent vaines, Hector est même aller consulter les cartes de la Marine Nationale chez son grand-père, le contre-amiral «Quiflotte», pas la moindre trace de cette île !

C'est alors que Zaïus, dont le professeur suit un stage à l'IREM, a sorti de son cartable l'«inégalité triangulaire».

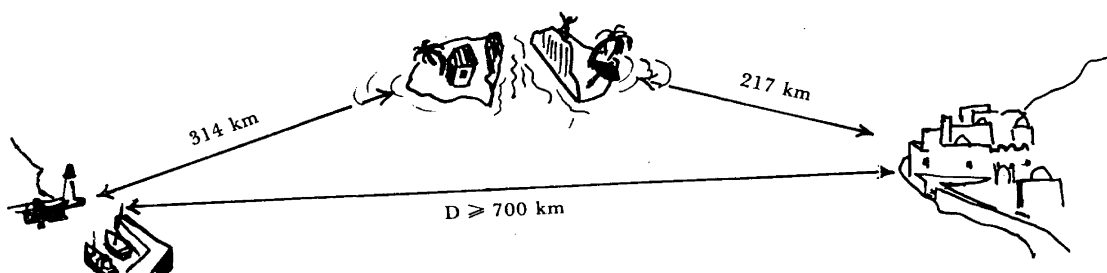
Il a dit :

Si Marseille est distant de cette île de moins de 350 km,

Si Alger est distant de cette île de moins de 250 km,

c'est qu'Alger est distant de Marseille de moins de $250 + 350 = 600$ km.

Or n'importe quel Atlas et n'importe quel double-décimètre permettent de voir que la distance d'Alger à Marseille est supérieure à 700 km. C'est donc l'existence de l'île qui est remise en question; à moins que



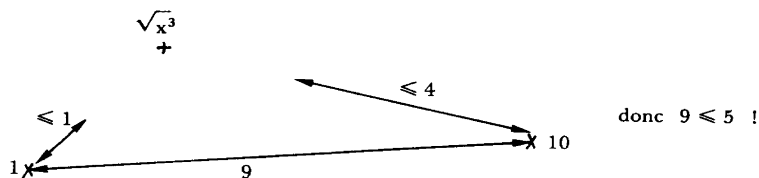
ou bien est-ce la dérive des continents qui mais alors c'est une tout autre histoire !!!

LES INEQUATIONS ODIEUSES ! (Si on se lance aveuglément dans les calculs).

Si nous retrouvons dans quelques années nos élèves dans les classes dites «sérieuses», il ne leur sera pas nécessaire (grâce à la chèvre) de remplir (pour faire sérieux) de nombreuses lignes de calculs sordides, pour résoudre un système d'inéquations du type suivant :

$$\begin{cases} (\sqrt{x^3} - 1)^2 \leq 1 \\ (\sqrt{x^3} - 10)^2 \leq 10. \end{cases}$$

Il leur suffira d'effectuer un dessin analogue à celui-ci :



En effet : interprétons $(\sqrt{x^3} - 1)^2$ comme le carré de la distance d'un point noté $\sqrt{x^3}$ au point 1, et de même pour $(\sqrt{x^3} - 10)^2$.

Si donc le système a une solution, il existe au moins un point noté $\sqrt{x^3}$, dont la distance à 1 est moindre de 1 et simultanément la distance à 10 est moindre de $\sqrt{10}$. L'inégalité triangulaire s'écrit alors :

$$\begin{aligned} (\text{Distance de 1 à 10}) &\leq (\text{Distance de } \sqrt{x^3} \text{ à 1}) + (\text{Distance de } \sqrt{x^3} \text{ à 10}). \\ 9 &\leq 1 + \sqrt{10} \\ 9 &\leq 1 + 4 \quad !!! \end{aligned}$$

LES MULTILIMITES chez les métriques, ça n'existe pas !

Suivons encore quelques années nos élèves et voyons comment ils affrontent les rudiments d'analyse à propos des limites, de la continuité ou de la dérivabilité.

Considèrent-ils ces notions comme des tatillonnages de maniaques débiles et refoulés ? ou les considèrent-ils comme des miracles aussi permanents qu'inutiles, miracles qu'on obtient à coup de « ϵ » et de « η » lesquels sont coupés en petits morceaux quand il n'y en a pas assez pour tout le monde ! N'y aurait-il pas moyen qu'ils considèrent ces propriétés de base comme des «évidences raisonnées», et ce, parce que l'énoncé d'une proposition fait immédiatement surgir dans leur tête l'ébauche d'une démonstration ?

Par exemple, prenons l'énoncé suivant :

«Une suite convergente n'a qu'une limite»

Il s'agit là d'une évidence raisonnée pour peu que l'on sache ce que signifie l'expression «Suite convergente», et que l'on ait une petite expérience métrique.

Rappelons la définition d'une suite convergente.

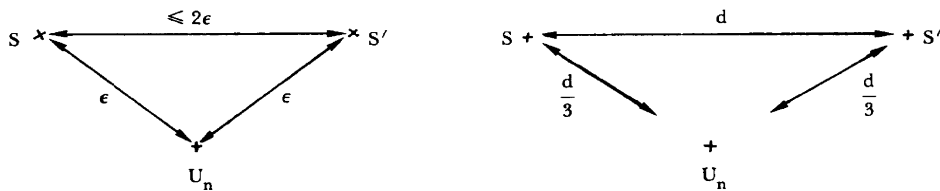
Dire qu'une suite $(U_n)_n$ tend vers une limite S , c'est dire «qu'une fois choisie une approximation $\epsilon > 0$, tous les termes de la suite sauf peut-être un nombre fini sont proches de S à moins de l'approximation choisie»

Soit en termes symboliques :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N < \infty ; (n \geq N) \Rightarrow (|U_n, S| \leq \epsilon)$$

ou $\forall \epsilon > 0, \exists M < \infty ; (|U_n, S| \geq \epsilon) \Rightarrow (n \leq M).$

Si maintenant on se pose la question de l'unicité d'une telle limite, deux images viennent très spontanément à l'esprit :



Première image. (Démonstration directe).

Donnons-nous une approximation $\epsilon > 0$ quelconque ; puisque tous les termes de la suite sauf un nombre fini sont dans le voisinage correspondant de S et de S' , il est possible de trouver au moins un terme de la suite vérifiant simultanément :

$$|S, U_n| \leq \epsilon$$

$$|S', U_n| \leq \epsilon.$$

Dès lors, l'inégalité triangulaire montre que : $|S, S'| \leq 2\epsilon$; ceci ayant lieu quelle que soit l'approximation $\epsilon > 0$, la séparation permet de dire que $S = S'$.

Deuxième image. (Démonstration par l'absurde).

On suppose que l'on a trouvé une suite $(U_n)_n$ ayant au moins deux limites S et S' distinctes.

Si $d = |S, S'|$, la séparation affirme que $d > \neq 0$; et comme S et S' sont fixées, d est peut-être très petit, mais il est «incompressible» ; par contre la multitude des termes se rapprochant simultanément de S et de S' permet de trouver au moins un terme U_n , vérifiant simultanément :

$$|S, U_n| \leq \frac{d}{3}$$

$$|S', U_n| \leq \frac{d}{3}.$$

L'inégalité triangulaire conduit alors à l'inéquation :

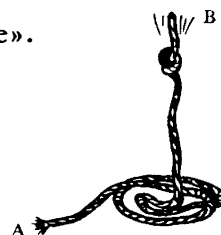
$$d \leq \frac{2}{3} d,$$

qui est impossible sur l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour revenir à des préoccupations apparemment plus voisines de celles d'un élève de 6ème-5ème, voyons comment l'inégalité triangulaire ressentie par la chèvre peut être interprétée et exploitée dans la classe.

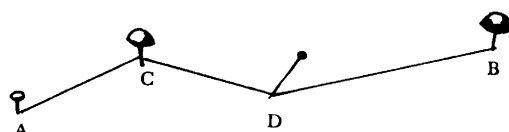
(3) L'inégalité triangulaire «vue par la chèvre».

Prenons une corde



S'il semble normal de considérer que «la longueur d'une corde» est la distance entre ses deux extrémités, lorsque cette corde est tendue (c'est-à-dire lorsque tous les «points» de cette corde sont alignés), comment parler et comment utiliser cette longueur, lorsque la corde n'est plus disposée en ligne droite ?

Une première modélisation très accessible aux enfants nous est suggérée par une corde tendue passant derrière un ou plusieurs obstacles, par exemple

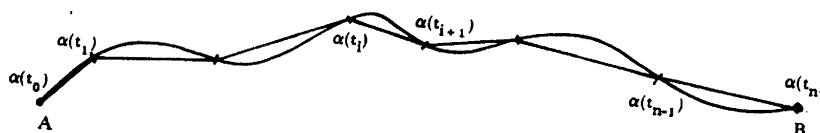


La longueur de la corde est alors la somme :

$$|A, C| + |C, D| + |D, B|$$

représentant la longueur de la ligne brisée (A, C, D, B). On remarque que l'ordre de parcours a une influence sur la géométrie de la ligne brisée.

Pour parler de la longueur de la «corde libre α ,



il serait agréable de trouver «la plus grande ligne brisée construite en suivant la corde α ». Mais, bien entendu, si la corde n'est pas elle-même disposée en ligne brisée, il n'existe pas de ligne brisée «réalisant le maximum», et il faut pour obtenir la longueur de la corde faire un passage à la limite. Pour cela on considère la corde comme un chemin : $t \rightarrow \alpha(t)$, parcouru une seule fois en allant de A vers B quand le temps t , s'écoule par exemple entre zéro et un.

La longueur de la corde ou du chemin est alors «la borne supérieure des longueurs des lignes brisées construites en suivant α » :

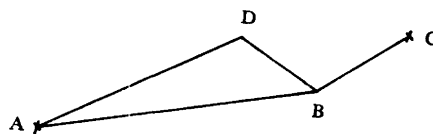
«Longueur du chemin α » = $\text{Sup.} \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)|$ pour toutes les subdivisions croissantes $0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n \leq 1$ de $[0,1]$.

Il est bien évident que ni les enfants ni a fortiori la chèvre ne sont prêts à voir le problème sous cet angle ; il n'en reste pas moins qu'on peut établir collectivement les trois principes suivants qui sont la traduction précise de l'inégalité triangulaire dans le problème qui nous concerne.

Principes tenant lieu d'inégalité triangulaire dans le problème de la chèvre.

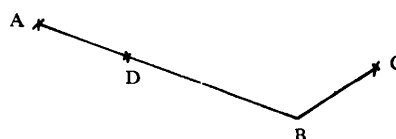
*

Si on intercale un sommet D entre deux sommets «consécutifs» d'une ligne brisée (A, B, C), on obtient une nouvelle ligne brisée, par exemple (A, D, B, C) plus longue (au sens large) que la précédente.

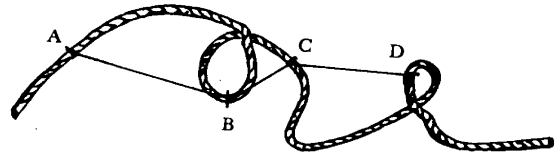


**

Si D appartient au segment AB noté $[A, B]$, la ligne brisée (A, D, B, C) a même longueur que la ligne brisée (A, B, C).



Toute ligne brisée (A, B, C, D) construite en suivant une corde est plus courte (au sens large) que la corde elle-même.



A partir de ces trois principes, voyons par exemple comment on pourrait collectivement résoudre l'exercice numéro 2 de la chèvre

PROJET DE REDACTION COLLECTIVE DU PROBLEME DE LA CHEVRE.

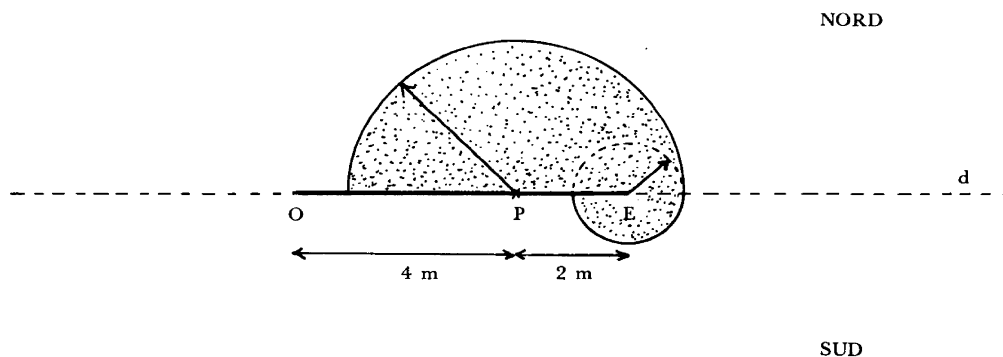
Première étape. Se donner les moyens de parler sans ambiguïté de la même chose.

Une chèvre, figurée par la lettre C, est attachée par une corde de 3 m à un piquet noté P.

Ce piquet est placé (côté nord) contre une barrière (orientée Ouest-Est) de 6 mètres de long.

On notera O l'extrémité Ouest de cette barrière et E l'extrémité Est de la barrière ; le piquet P est fixé de telle sorte que : $|O, P| = 4$ m (donc $|P, E| = 2$ m). On appellera d la droite Ouest-Est qui prolonge la barrière.

A l'échelle 1/100, il semble que la région broutée par la chèvre soit représentée sur le dessin ci-après en pointillé.



Deuxième étape. Description avec le vocabulaire approprié.

— Au nord de la barrière, la chèvre broute le **demi-disque** de centre P et de rayon 3 m.

— Au sud de la barrière, la chèvre broute le **demi-disque** de centre E et de rayon 1 m.

Troisième étape. *Explicitations «La chèvre broute sûrement la partie pointillée».*

Au nord de la barrière, il n'y a aucun obstacle entre le piquet et la chèvre. La chèvre peut donc occuper toutes les positions C dont la distance à P est inférieure ou égale à 3 m ; elle parcourt donc le demi-disque de centre P et de rayon 3 m.

Pour aller au sud, la chèvre peut longer en ligne droite la barrière entre P et E ; arrivée en E, il lui reste encore 1 mètre de corde ; comme il n'y a plus d'obstacles entre E et un point quelconque, situé au Sud de la barrière, la chèvre peut brouter le demi-disque de centre E et de rayon 1 m (on vérifiera au passage en appliquant l'inégalité triangulaire, que le demi-disque Nord de centre E et de rayon 1 m est inclus dans le demi-disque Nord de centre P et de rayon 3 m, comme on peut le constater sur le dessin).

Quatrième étape. *(Plus difficile) «Si la corde ne s'allonge pas, si le piquet ne s'arrache pas, la chèvre ne peut brouter hors de la partie hachurée».*

Dans la région Nord, pas de problème si les hypothèses ci-dessus sont respectées.

Pour aller au Sud : «la chèvre ne peut passer à l'Ouest de la barrière», sinon (pour des raisons de connexité* du plan, que la chèvre ignore) la corde couperait la droite d en au moins un point L tel que O appartienne au segment LP.

L'égalité triangulaire (vérifiée ici puisque L, O et P seraient alignés par construction) montre que :

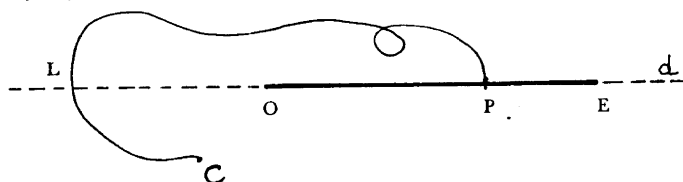
$$|L, P| = |L, O| + |O, P|,$$

donc que :

$$|L, P| \geq |O, P|,$$

et par suite que :

$$|L, P| \geq 4 \text{ m.}$$



Mais alors, en vertu du 3ème principe (une corde est toujours plus longue qu'une ligne brisée la suivant), la corde se serait allongée d'au moins 1 mètre !

*** REMARQUE : Connexité.**

Ne pas confondre avec «convexité» ou «simple connexité».

En langage concret, on dira qu'un espace métrique E est connexe, si «on peut se promener d'un bout à l'autre de E sans jamais être obligé de sortir de E ». Par exemple : un continent avec des lacs et des presqu'îles, mais sans îles, est une région du monde connexe.

Si on coupe une digue reliant le continent à la presqu'île on «disconnecte» cette région du monde. Pour qu'une région soit «simplement connexe», il faudrait qu'elle n'ait ni lac ni mer intérieur.

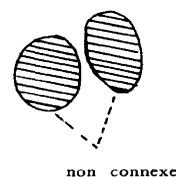
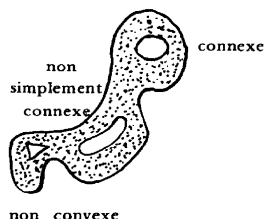
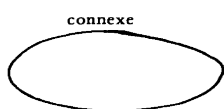
Une région du monde est dite connexe par arc, si, à partir de deux points quelconques pris dans cette région, il est possible de construire une route reliant ces deux points (on voit alors que des régions montagneuses ou marécageuses connexes ne sont pas nécessairement connexes par arc).

De façon précise : E est dit connexe par arc, si deux points quelconques A et B de E peuvent être joints dans E par un arc (c'est-à-dire, il existe une application $\alpha : [0, 1] \longrightarrow E$, continue et vérifiant $\alpha(0) = A$ et $\alpha(1) = B$).

E est dit connexe, si les seules parties de E simultanément ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.

Un espace connexe par arc est toujours connexe, et la réciproque n'est pas vraie en général ; mais elle est vraie par exemple pour les ouverts d'un espace vectoriel normé.

A partir de ces définitions, on vérifie sans difficultés que le plan privé d'une droite n'est pas connexe ; si donc la chèvre passe de la région Nord à la région Sud, sa corde doit rencontrer nécessairement la droite Est-Ouest (à moins de couper cette corde, ce qui introduirait une discontinuité sur l'arc α qui modélise la corde).



CONCLUSION : Pour aller au Sud, la chèvre doit nécessairement passer par l'Est.

Ce que nous voulons montrer maintenant, c'est que :

«Si la chèvre est au Sud, alors : $|E, C| \leq 1 \text{ m}$ ».

A priori on a envie de raisonner à corde tendue, car l'expérience de la vie quotidienne est très forte. En fait au niveau du raisonnement, cela n'apporte rien de rajouter l'hypothèse «illicite» : la corde est tendue.

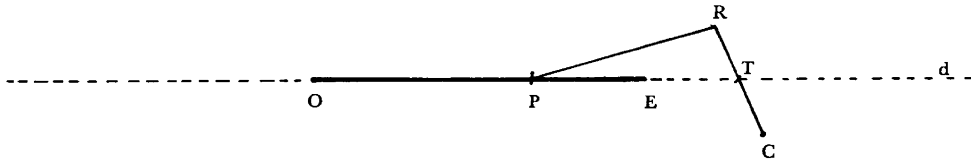
Pour respecter l'expérience de la corde tendue, nous allons faire un premier raisonnement en supposant que la chèvre tire sur sa corde et que celle-ci est bloquée par une racine R ; puis nous ferons le raisonnement à corde libre (qui est plus facile que le précédent, même s'il ne correspond pas à notre intuition immédiate).

RAISONNEMENT A CORDE TENDUE.

Rappelons les deux principes fondamentaux :

* Si on intercale un nouveau sommet entre deux sommets consécutifs d'une ligne brisée, on obtient une nouvelle ligne brisée plus longue au sens large que la précédente.

** Si le sommet intercalé se trouve aligné et entre les deux sommets consécutifs, la nouvelle ligne brisée a même longueur que la précédente.



A partir de là, appelons T «le» point de rencontre de la corde et de la droite d.

Nos hypothèses sont les suivantes : (en notant $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B).

Hypothèse.	$T \in [R, C]$ par construction $E \in [P, T]$ par raisonnement antérieur $ P, R + R, C = 3 \text{ m}$ et $ P, E = 2 \text{ m}$ (données du problème).
------------	--

Conclusion. $|E, C| \leq 1 \text{ m}$.

Démonstration.

$T \in [R, C]$, donc (**) la ligne brisée (P, R, T, C) n'est pas plus longue que la ligne brisée (P, R, C).

La ligne brisée (P, R, T, C) mesure au plus trois mètres.

La ligne brisée (P, T, C) mesure au plus trois mètres.

$E \in [P, T]$, donc (**) la ligne brisée (P, E, T, C) n'est pas plus longue que la ligne (P, T, C).

La ligne brisée (P, E, T, C) mesure au plus 3 mètres.

La ligne brisée (P, E, C) mesure au plus 3 mètres.

Par hypothèse $|P, E| = 2 \text{ mètres}$ $|P, E| + |E, C| \leq 3 \text{ mètres}$.

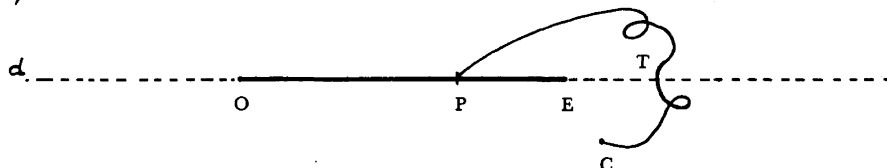
$|E, C| \leq 1 \text{ mètre}$

RAISONNEMENT A CORDE LIBRE.

Rappelons le troisième principe :

*** : Une ligne brisée construite en suivant une corde est toujours plus courte que cette corde.

Soit alors T un point où la corde rencontre la droite d (connexité du plan).



Hypothèse.

La corde mesure 3 mètres, $|P, E| = 2$ m, $E \in [P, T]$ (par raisonnement antérieur).

Conclusion. $|E, C| \leq 1$ m.

Démonstration.

La ligne brisée (P, T, C) suit la corde donc (***) elle mesure au plus 3 mètres.

$E \in [P, T]$, donc (**) la ligne brisée (P, E, T, C) n'est pas plus longue que la ligne brisée (P, T, C).

La ligne brisée (P, E, T, C) mesure au plus trois mètres.

↓ *

La ligne brisée (P, E, C) mesure au plus trois mètres.

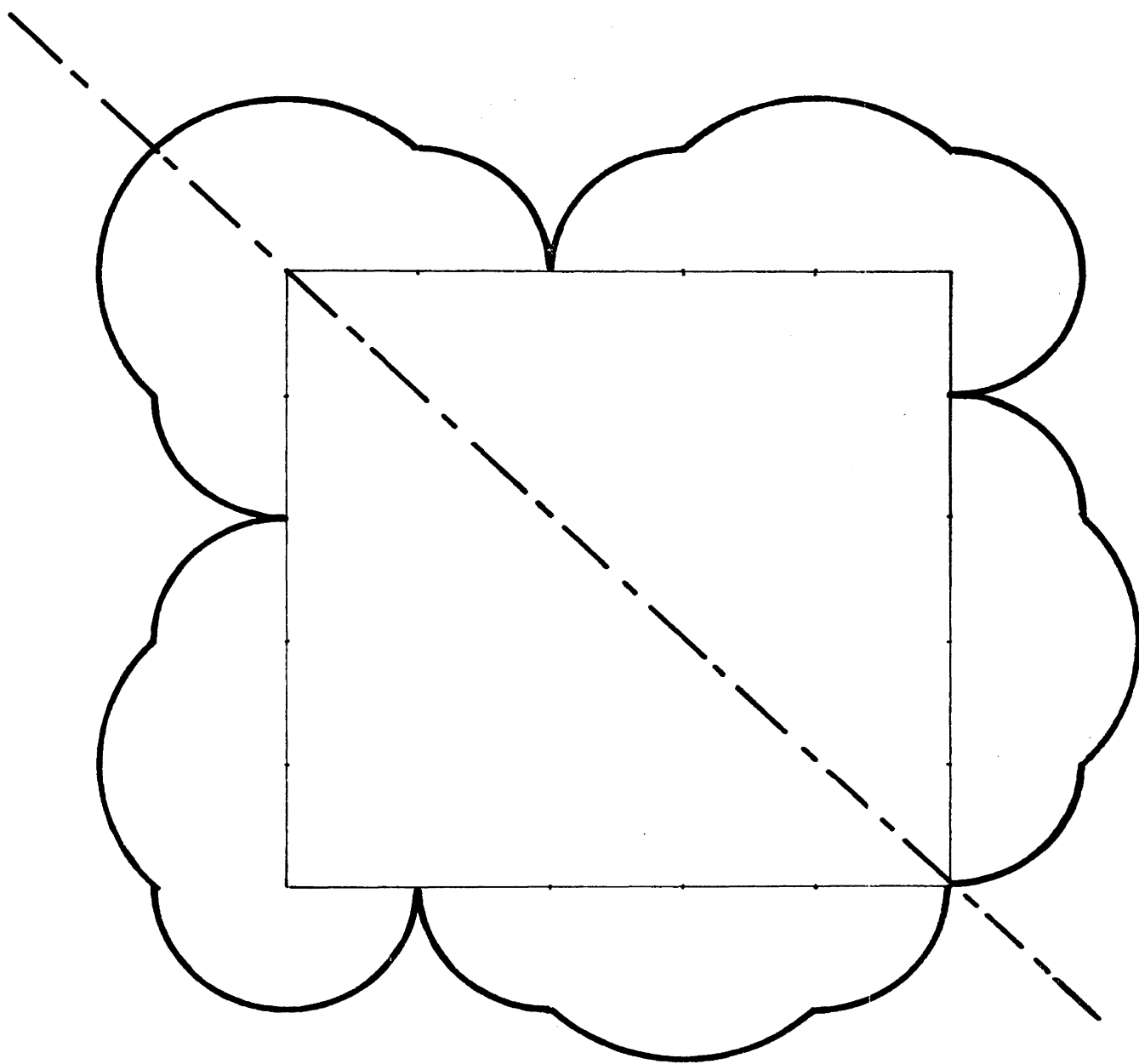
↓

Par hypothèse $|P, E| = 2$ mètres

$|P, E| + |E, C| \leq 3$ mètres.

$|E, C| \leq 1$ mètre.

Il est bien évident que ces suggestions de démonstration en 6ème, 5ème peuvent soulever de nombreuses objections. Il serait bon dans ce cas de distinguer parmi ces objections celles qui sont de fond, de celles qui manifestent simplement d'une résistance à changer ses habitudes.



Carré qui roule