UNIVERSITE SCIENTIFIQUE TECHNOLOGIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

CALCUL MENTAL DE 10 A 90 ANS

avec éclairage informatique

par

Jean KUNTZMANN
Université de Grenoble

I.R.E.M. de GRENOBLE

INTRODUCTION

Notre siècle qui bouge nous invite à réviser nos idées dans les domaines les plus divers. Dans ce contexte, le calcul mental, considéré habituellement comme un exercice scolaire assez morose me semble pouvoir prendre d'autres visages.

Je me placerai à trois points de vue différents :
- celui de la formation scolaire,
- celui de la vie active,
- celui du "maintien en forme".

Le calcul mental

L'école doit naturellement équiper l'enfant d'un certain nombre d'outils (lire, écrire, compter, etc ...). Mais elle doit aussi lui apprendre à se situer par rapport à eux.

Voici un cas précis :

Le mot **technique** ne sera peut-être jamais prononcé, mais il est essentiel que l'enfant ait compris en quoi consiste une technique. On n'atteindra pas ce but en lui faisant de beaux discours abstraits mais en prenant un outil simple, dont il connait bien le maniement et en lui montrant concrétement combien le temps et la peine nécessaires pour obtenir un certain résultat peuvent varier suivant la manière dont on s'y prend.

On pourra alors, à partir de situations concrètes lui inculquer un certain nombre de principes simples (par exemple : il faut décider ce que l'on fera, avant de commencer ; la méthode dépend du problème mais aussi des outils dont on dispose).

Certains vont penser qu'avant d'aborder de tels sujets il faut apprendre aux enfants à scier et à limer, à coudre et à cuisiner. En fait le calcul élémentaire avec sa gamme de problèmes (opérations, comparaison, etc...) ses outils variés (cerveau humain, papier-crayon, calculette) tout à fait familiers à l'enfant et toujours disponibles, permettent de mener un tel apprentissage beaucoup plus tôt et beaucoup plus loin. Ceci m'amène d'ailleurs à parler d'informatique.

On déploie actuellement de très grands efforts pour introduire l'informatique à l'école. C'est certainement une excellente chose, mais j'ai l'impression qu'on confond ordinateur et informatique. En fait cette dernière n'est autre chose que la technique qui consiste à utiliser "au mieux" un outil puissant mais compliqué (l'ordinateur). Mais notre cerveau est déjà un ordinateur et en faisant du calcul mental, on fait déjà de l'informatique.

Voici encore un autre motif pour lequel le calcul mental (tel que je le conçois) peut être utile aux enfants d'âge scolaire. Il est pour eux l'occasion de manipuler des nombres, de les "connaître" comme des amis ayant chacun leur personnalité, de ne plus en avoir peur. Et s'ils aiment les nombres, ils ne sont pas loin d'aimer la mathématique.

Calcul mental et vie pratique

L'homme moderne tend à devenir de plus en plus dépendant de son environnement. Il se déplace en voiture, monte en ascenseur, confie sa comptabilité à l'ordinateur. Il se met ainsi à la merci d'un incident technique, par exemple une panne de courant qui le laisserait aussi désarmé qu'un nouveau-né.

C'est une question de sécurité pour l'homme moderne de garder, malgré tout le progès technique au milieu duquel il vit, une certaine "rusticité" qui lui permet en cas de besoin ou pour son plaisir de se passer de telle ou telle machinerie dont il se sert habituellement ou de contrôler les résultats qu'elle donne.

Voici un exemple emprunté à la vie courante :

J'achète chez mon épicier un morceau de fromage à 37 francs le kilo. La balance indique un peu moins de 400 grammes. L'épicier annonce 17 francs. Je ne dis rien, mais j'ai pensé en moi-même 4 x 4 = 16 et je me suis cherché un autre fournisseur plus correct.

Le calcul mental, gymnastique intellectuelle

Il est courant maintenant de voir des hommes, jeunes ou même vieux, faire du jogging sur les trottoirs ou dans les parcs. Ils cherchent à maintenir leur corps en forme. Le calcul mental permet de même de maintenir en forme l'intelligence et la mémoire. Il est à la portée de tous, pourvu qu'on sache compter. C'est une gymnastique douce que l'on peut pratiquer seul, à son rythme et dans les positions les plus diverses : assis, couché, de jour ou de nuit, en promenade, et même, si l'on est entraîné, en participant à une conversation d'intérêt limité.

Que vous apportera cette gymnastique intellectuelle ?

Vous découvrirez avec plaisir que vous pouvez effectuer des travaux dont vous ne vous seriez pas cru capable. Vous augmenterez ainsi votre confiance en vous-même et pourrez même accessoirement étonner votre entourage. Vous vous sentirez "bien dans votre peau" et toutes vos activités profiteront de ces bonnes dispositions.

Calcul mental et 3ème âge

Le calcul mental me semble convenir particulièrement aux personnes du 3ème âge qui ont eu une vie assez intellectuelle et qui désirent garder le plus longtemps possible leur agilité d'esprit.

J'évoquerai ici la mémoire de Monsieur PORTAL, un instituteur du Gard, qui à plus de 70 ans a écrit un livre sur le calcul mental (Aubanel éditeur, 1974). Il déclarait consacrer à cette activité plusieurs heures par jour.

Moi-même, à la retraite, je me suis mis à le pratiquer avec plaisir, et j'y ai acquis une certaine expérience. C'est celle-ci, confrontée à mon expérience de mathématicien professionnel et d'informaticien que je voudrais vous communiquer.

Conseils pour pratiquer le calcul mental

* Comme toute gymnastique, le calcul mental, pour être pratiqué agréablement, nécessite une mise en route suivie d'une séance plus ou moins longue. Si l'on vous demande à l'improviste : 26 x 42 vous réagirez moins bien que si vous dites : "je vais faire un peu de calcul mental, par exemple des multiplications :

6 x 8	13 x 7	12 x 16
puis	26 x 42	

* l'expérience de "l'enseignement" du calcul mental m'amène à préciser que vous ne pouvez y prendre goût et y réussir que si vous incorporez les mécanismes utilisés à votre acquis permanent. Pour prendre un exemple dans un domaine voisin, une cui-

sinière ne se sentira à l'aise pour faire une "sauce piquante" ou un "baba au rhum" que si elle est capable de les réaliser sans avoir besoin de se reporter à son livre de cuisine. La compréhension du pourquoi d'un mécanisme, aide beaucoup à sa mémorisation. Il peut arriver que cela dépasse votre niveau de connaissances mathématiques, mais une compréhension "partielle" appuyée sur un exemple peut suffire.

Contenu de cet ouvrage

Comme l'indique son titre cet ouvrage peut intéresser des populations très diverses.

Le champ des activités possibles en calcul mental dépend des connaissances mathématiques de celui qui le pratique : ancien élève de l'école primaire, bachelier, ingénieur, professeur de mathématique ou mathématicien professionnel. Je m'efforce dans la suite des chapitres de présenter des sujets qui puissent convenir à ces diverses catégories d'utilisateurs. Il arrivera **probablement** à certains d'en inventer d'autres ; en particulier au niveau scolaire on y trouvera de quoi instruire, intéresser ou même amuser aussi bien les enfants de l'école élémentaire que ceux du collège, du lycée ou des classes supérieures.

L'ouvrage comprend quatre parties :

* la première, qui comprend les chapitres 1 à 10, est centrée sur l'addition et la soustraction. On y acquiert aussi les principes généraux ;
* la deuxième, qui comprend les chapitre 11 à 23, travaille essentiellement avec 1 ou 2 chiffres. On y trouve à peu près tout ce que vous avons à dire sur la division ;
* la troisième partie, qui comprend les chapitres 24 à 36, est centrée sur les carrés et la multiplication ;
* enfin, la quatrième partie est centrée sur les nombres non entiers.

Chaque chapitre est consacré à un point particulier. L'ordre des chapitres vise à dégager, petit à petit, de grands principes et à les présenter au moment où le lecteur pourra se convaincre de leur justesse, plutôt qu'à épuiser un sujet avant de passer au suivant. Le lecteur aura sans doute intérêt à lire l'ouvrage une première fois en suivant et ensuite à reprendre les chapitres qui l'intéressent dans l'ordre qui lui conviendra.

Il me reste à remercier :

- les collègues qui m'ont présenté des remarques après avoir lu une première rédaction de cet ouvrage c'est-à-dire essentiellement MM. Balacheff, Capponi, Clarou et Laborde.

- l'IREM de Grenoble qui a accepté de le publier, en particulier Bernadette Dherbeys qui a assuré la frappe.

1ère partie

ADDITION-SOUSTRACTION

I - UN CALCUL ETONNANT

Voici, pour vous montrer les possibilités mises à votre disposition, un calcul d'une surprenante facilité.

Il s'agit de multiplier par lui-même un nombre terminé par 5.
soit : 35 x 35

Voici la recette :

Enlever le 5 ————> 3
Ajouter 1 —————> 4
Multiplier ce deux nombres : 3 x 4 ————> 12
Ecrire 25 derrière ——————> 1225

Autre exemple : 95 x 95

9   9 + 1 = 10   9 x 10 = 90   9025

L'explication est la suivante ; par exemple pour 35 :

(30 x 40) + (5 x5) =
(35 - 5) x (35 + 5) + (5 x 5) =
35 x 35 - 5 x 35 + 35 x 5 - 5 x 5 + 5 x 5 =
0   0
35 x 35.

Vous avez déjà là de quoi étonner vos amis. Cette explication est un peu trop technique. Aussi je vous propose de la remplacer par une autre plus parlante, que nous retrouverons plus tard dans un cas plus général :

Pour calculer 35 x 35 on diminue l'un des facteurs de 5 et on augmente l'autre de la même quantité :

30 x 40 = 1200.

Il y a ensuite un terme correctif à rajouter qui est toujours 25 :

1200 + 25 = 1225.

On garde ainsi, présente à l'esprit une compréhension suffisante de ce que l'on fait.

II - REVISONS LES TABLES

Nous donnerons les tables d'addition et de multiplication sous la forme condensée que vous connaissez bien. A l'intersection d'une ligne et d'une colonne de la table d'addition, on trouve la somme des chiffres placés en tête de ligne et tête de colonne.

$6 + 8 = 14$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

De même pour la table de multiplication

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Voici quelques exercices pour bien remettre les tables en mémoire. Il ne s'agit pas encore de calcul mental proprement dit. Si l'on est plusieurs, on peut les transformer en jeu.

Exercice 1

Enumérer toutes les manières d'obtenir 8 dans la table d'addition, puis dans celle de multiplication.

De même pour 14.

Exercice 2

Citer un nombre de deux chiffres qui ne figure pas dans la table de multiplication.

Exercice 3

Voici une table muette c'est-à-dire où sont indiquées seulement les têtes de ligne et de colonne. Décidez si vous voulez travailler l'addition ou la multiplication. Vous montrez une case. Il s'agit de dire ce qu'elle contient.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7							?			
8										
9										

Exercice 4

Ce joli escalier que vous pouvez prolonger à volonté vous invite à faire des opérations variées :

$$
\begin{array}{lll}
 & & 2 + 4 = \\
 & & \times \\
 & 1 + 2 = & \\
 & \times & \\
3 + 8 = & &
\end{array}
$$

Exercice 5

Voyez ce joli serpent :

$$3 + 4 - 6 + 7 - 1 + 12 - 4 + 5 - 8 + 12 \times 3 - 5 + 3 : 10 =$$

Le calcul se fait de gauche à droite, de proche en proche en utilisant pour chauqe opération indiquée, le dernier résultat obtenu et le nombre qui suit :

$3 + 4 = 7$ $7 - 6 = 1$ $1 + 7 = 8$ etc.

Voici maintenant, toujours dans la même optique d'affermir la connaissance des tables, quelques exercices plus difficiles.

Exercice 6

La cage

Voici une suite de chiffres : 3 4 6 7 1 2 9 7 5 0 4 3

Le lion est dans sa cage où il peut faire exactement 18 pas, c'est-à-dire occuper les positions numérotées

0, 1, 2, ..., 18.

Il part de zéro et effectue les nombres de pas indiqués par la file. Chaque fois qu'il s'aperçoit que le nombre de pas indiqué est trop grand pour être effectué dans la cage, il se retourne et repart en sens inverse.

Exemple : 3, $3 + 4 = 7$, $7 + 6 = 13$, $13 + 7$ impossible dans la cage, alors $13 - 7 = 6$, $6 - 1 = 5$, etc.

Dans une variante un peu plus difficile, en cas d'impossibilité, le lion va jusqu'au bout puis se retourne et effectue dans le sens inverse le nombre de pas restants.

Exemple : $3 + 4 = 7$, $7 + 6 = 13$, $13 + 7 = 18 + 2$, $18 - 2 = 16$, $16 - 1 = 15$, $15 - 2 = 13$, etc.

Exercice 7

Quels sont les nombres dont le chiffre des dizaines est 4 qui figurent dans la table de multiplication ?

Exercice 8

Quels sont les nombres de deux chiffres dont le chiffre des unités est 3 que l'on trouve dans la table de multiplication ?

Et maintenant un problème encore plus difficile.

Exercice 9

Existe-t-il un nombre de deux chiffres qui figure exactement trois fois dans la table de multiplication [1] ?

Exercice 10

Regardez cette égalité : $12 = 3 \times 4$.
Les quatre chiffres écrits se suivent dans l'ordre naturel.
Existe-t'il d'autres égalités ayant cette propriété ?

Le but de l'apprentissage des tables est de mettre leur contenu en mémoire d'une manière définitive. Jamais au cours de la vie, quelle que soit l'expérience acquise, on ne remplacera $3 \times 4 = 12$ par $3 \times 4 = 10$ ou $3 \times 4 = 18$. Je reviendrai plus tard sur cet aspect.

(1) Un nombre qui figure un nombre impair de fois est de la forme : a x a. Deux solutions : 16 et 36.

III - SI VOUS AVEZ OUBLIE UN MORCEAU DES TABLES

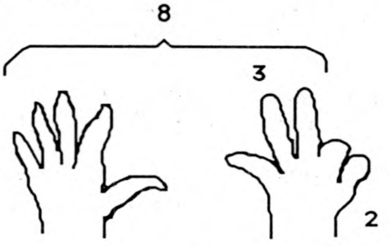
Nos grands-pères nous ont légué un moyen simple pour retrouver le produit de deux chiffres supérieurs à 5. Expliquons-le sur un exemple :

8 x 9

8-5 = 3
9-5 = 4
Ajouter
3+4 = 7
Multiplier par 10
7 x 10 = 70

10-8 = 2
10-9 = 1
Multiplier
2 x 1 = 2

Ajouter
7 x 10 = 70 ⟶ 70 + 2 = $\boxed{72}$



les doigts sont bien commodes pour débuter ce calcul

Autre exemple :

6 x 7

6-5 = 1
7-5 = 2
Ajouter
1+2 = 3
Multiplier par 10
3 x 10 = 30

10-6 = 4
10-7 = 3
Multiplier
4 x 3 = 12

Ajouter
3 x 10 = 30 ⟶ 30 + 12 = $\boxed{42}$

Et si on essayait 11 x 12
8 x 13
Peut-on trouver une règle de ce genre ?

IV - EN PROMENADE

Vous vous promenez à pied sur une route passagère. Il s'agit pour chaque voiture automobile rencontrée de faire la somme des quatre chiffres -au plus- de non numéro minéralogique. (Bien entendu, vous pouvez préférer, pour faire ce petit travail, vous asseoir sous un arbre. Si votre vue est mauvaise, vous pouvez remplacer la route par un parking bien rempli). Vous pouvez faire ce travail seul ou à plusieurs en collaboration ou en compétition.

Exemple : 3 4 7 9

Vous vous apercevrez vite que la méthode : 3 + 4 = 7, 7 + 7 = 14, 14+ 9 = <u>23,</u> n'est pas la meilleure. Elle n'est ni la plus rapide, ni la plus sûre. C'est ici que nous commençons à faire du calcul mental.

Enonçons ce :

PREMIER PRINCIPE
La méthode utilisée doit être adaptée au problème et à l'outil utilisé.

L'outil ici est notre cerveau.

Le problème consiste à faire une somme de quatre chiffres lus. Nos yeux voient les quatre chiffres. Nous n'avons aucun intérêt à en faire un nombre. Nous lirons donc :

trois quatre sept neuf et non trois mille quatre cent soixante dix neuf.

Comme les quatre chiffres sont disponibles presque en même temps, rien ne nous oblige à les utiliser dans l'ordre. Nous chercherons au contraire à rapprocher ceux qui donnent quelque chose de simple.

1) Ici trois et sept donnent dix : $3 + 7 = 10$, $4 + 9 = 13$, $10 + 13 = \underline{23}$.

2) Autrement : $3 + 4 = 7$, $7 + 7 = 14$, $14 + 9 = \underline{23}$.

Il se trouve que nous avons utilisé les chiffres dans l'ordre mais c'est par hasard. L'intéressant était ici $4 + 3 = 7$ alors qu'il y a dans le nombre un chiffre 7.

3) Autrement encore : $4 + 7 + 9 = 20$,
d'où : $20 + 3 = \underline{23}$.
Ici on a remarqué trois chiffres dont la somme est 20.

4) Voici encore une possibilité : 5 9 7 6.
On remarquera que : $5 + 6 + 7 = 6 + 6 + 6 = 18$, $18 + 9 = \underline{27}$.
On s'est ramené à trois chiffres égaux.

En résumé

On examine les 4 chiffres en même temps. On cherche si certains d'entre eux donnent une somme simple ou se ramenant à un produit par 2, 3 ou 4.

Remarque

Une fois la méthode adoptée, l'entraînement améliore son rendement. Par exemple il n'est pas immédiat de reconnaître si trois chiffres ont pour somme 20. En fait, il n'y a que huit triplets donnant ce résultat :

9, 9, 2	9, 8, 3	9, 7, 4	9, 6, 5
8, 8, 4	8, 7, 5	8, 6, 6	
7, 7, 6			

Remarque

Ce petit jeu vous est bien entendu interdit lorsque vous conduisez votre automobile ou votre deux roues.

Exercice 11

On reprend les immatriculations à 4 chiffres d'automobiles, mais cette fois on cherche le reste du nombre par 9. Cela revient à faire la somme des chiffres mais en retranchant 9 lorsque cela est possible (comme dans la preuve par 9).

Exemple : 3 4 7 9 donne 5

Mettre au point une méthode efficace (et l'utiliser si vous en avez envie).

Remarque

Une méthode efficace se découvre, en général, progressivement. On commencera souvent par une méthode qui paraît viable. Petit à petit, on lui découvrira au contact de la pratique des perfectionnements, ou bien on pensera à une méthode toute autre. Cependant, on notera le :

DEUXIEME PRINCIPE

Le choix d'une méthode et son exécution sont deux activités de nature différente : l'une est une décision, l'autre une action concrète. Il faut éviter de les entremêler.

Changer de méthode en cours de route oblige à :
- arrêter l'ancienne méthode ;
- repartir à zéro, à moins que, par hasard certains résultats anciens puissent être réutilisés.

Exercice 12

Former le reste par 11 pour les numéros de voitures. (Dans la tranche de droite et dans celle de gauche faire la différence des deux chiffres (signe moins si le grand chiffre est celui de gauche). Ajouter ces deux différences. Prendre le complément à 11 si la plus grande avait le signe - ou retrancher 11 si le total dépasse 10).
Voir à ce sujet le chapitre XI.

Exemple : 5 9 7 6

9 - 5 = 4 6 - 7 = -1 4 - 1 = 3
Le reste par 11 est 3

Autre exemple : 6 3 8 2

-3 -6

-9

+2

V - ENCORE EN PROMENADE

Nous voici à nouveau sur la route. Mais notre problème sera aujourd'hui non numérique. Son intérêt sera de nous montrer l'adaptation de la méthode à l'outil. Il s'agit de composer, le plus rapidement possible un alphabet complet avec les lettres figurant sur les plaques minéralogiques des voitures rencontrées.

Si l'outil était :

papier - crayon

la méthode serait évidente. On écrirait un alphabet et on soulignerait les lettres lues sur les plaques des voitures. Le problème serait résolu une fois toutes les lettres soulignées.

Mais l'outil à utiliser est notre cerveau. Voici une méthode viable :

Partez des 5 premières lettres A B C D E. Dès que vous apercevez une de ces lettres, vous la supprimez et rajoutez la première lettre non encore utilisée de l'alphabet. Par exemple ayant vu C vous prenez A B D E F, puis ayant vu E, A B D F G puis si on lit B et F, A D G H J (les lettres I et O n'existe pas). Vous avez ainsi toujours cinq lettres à guetter et à tenir à jour. Pour ne pas oublier les cinq lettres, on les répète sans arrêt tout en surveillant la route des yeux.

La méthode est adaptée à l'outil, car on se souvient facilement de cinq lettres même changeantes. Bien entendu certains se sentiront plus à l'aise avec seulement quatre lettres, ou pourront aller jusqu'à six. Cela fait encore partie de l'adaptation de la méthode à l'outil (cerveau de chacun de nous). Naturellement plus on garde de lettres, plus la méthode est rapide. Personnellement, je me trouve très bien avec cinq lettres.

Exercice 13 (en liaison avec le deuxième principe)

On a travaillé avec 5 lettres et on est parvenu à B D E G K pas d'autre lettre lue.

Peut-on, sans repartir à zéro, continuer :
- avec 6 lettres ?
- avec 4 lettres ?

Même question si l'on en est à :

B D E G K	lettre E lue
B D E G K	lettre K lue

VI - MEMOIRE-PAPIER, MEMOIRE-CERVEAU EN ADDITION ORDINAIRE

Regardons comment on effectue ce qu'on nomme l'addition en ligne (avec papier-crayon) : 348 + 257

- on ajoute les chiffres de gauche : 8 + 7 = 15
on écrit le chiffre des unités 5
on retient celui des dizaines 1

- on ajoute la retenue et les chiffres des dizaines :
1 + 4 = 5   5 + 5 = 10
on écrit 0 à droite de 5   05
on retient 1

on continue avec les centaines
1 + 3 = 4   4 + 2 = 6   605

(ceci est du calcul ordinaire et non du calcul mental).

Analysons les divers constituants de ce calcul. Notre mémoire a fourni la "recette" à utiliser. Notre cerveau l'a ensuite mise en oeuvre en utilisant :

* les chiffres des nombres à additionner. Il les a trouvés sur le papier. Ce papier est une **mémoire** (qu'on peut appeler la **mémoire-papier**)

* la table d'addition qu'il a trouvé dans la **mémoire-cerveau.**

* les résultats ont été :

- écrits sur le papier c'est-à-dire confiés à la **mémoire-papier** en ce qui concerne les chiffres du résultat ;

- restent les retenues. On s'aperçoit alors que nous n'avons pas décrit entièrement le processus. On peut en effet ou bien les confier à la **mémoire-papier** (c'est-à-dire les écrire) ou bien les confier à la **mémoire-cerveau.**

En réfléchissant d'ailleurs encore un peu plus, on s'aperçoit que pour calculer :

$$1 + 4 + 5$$

on a besoin d'un résultat intermédiaire que l'on confiera presque toujours à la mémoire-cerveau.

Ces utilisations de la mémoire-cerveau sont très différentes du stockage définitif de procédés de calcul ou des tables d'addition et de multiplication. Ici il s'agit d'un **stockage passager.** Je suis sûr que vous avez déjà oublié les chiffres des retenues du calcul ci-dessus (et vous avez eu bien raison ; il faut savoir se débarrasser de choses inutiles).

Je ne veux faire ni psychologie ni physiologie du cerveau. Je ne m'inquièterai donc pas de savoir s'il y a eu en réalité plusieurs sortes de mémoire, ou plusieurs types de fonctionnement. Je distinguerai seulement ce dont j'ai besoin :

- une mise en mémoire permanente ou définitive ;
- une mise en mémoire passagère ou provisoire.

Remarque

On peut très bien imaginer des variantes aux processus précédents. Par exemple la table d'addition peut être confiée à la mémoire-papier. C'est ce qui se passe lorsqu'une personne, qui ne sait pas très bien sa table, fait une addition.

Où commence le calcul mental ?

Ce qui caractérise le calcul mental, c'est la place faite à la **mémoire- cerveau** pour le stockage des données et des résultats intermédiaires ou finaux. L'exemple précédent, montre que certains de ces emplois (stockage des retenues) sont banaux. Nous ne les prendrons pas en compte.

Voici un exemple de calcul mental :

- additionner 348 + 257 les deux nombres et le résultat étant en mémoire-cerveau.

On imaginera d'ailleurs facilement des situations où il s'agira de calcul mixte, la mémoire-cerveau étant utilisée, mais d'autres mémoires aussi. Par exemple :

* les nombres sont en mémoire-cerveau, mais on peut écrire (ou dicter) les chiffres du résultat au fur et à mesure de leur obtention ;

* les nombres sont en mémoire-papier mais on ne dispose pour le résultat que de la mémoire-cerveau.

Particularité de la mémoire-cerveau passagère

Notre mémoire-cerveau permanente a une grande capacité. On peut y inscrire des poésies entières. En ce qui concerne les seuls nombres, vous y trouvez plusieurs centaines de chiffres :

- dates de l'histoire et des évènements de famille ;

- numéros de téléphone, de sécurité sociale, codes postaux ;
- nombres remarquables 3,1416 1,414 etc.

Par contre, la mémoire passagère est extrêmement réduite, guère plus d'une douzaine de chiffres. Pour vous en rendre compte, faites l'expérience suivante : promenez-vous sur la route et essayez de retenir les numéros minéralogiques des trois premières voitures que vous apercevez (le mieux est de les répéter sans arrêt). Si vous "tenez", ajoutez-en un quatrième. Naturellement, ne prenez pas des numéros que vous connaissez (qui sont dans votre mémoire permanente).

C'est cette particularité qui nous obligera à utiliser en calcul mental des **méthodes très spéciales.**

TROISIEME PRINCIPE

Les méthodes de calcul mental sont conçues essentiellement pour économiser la mémoire passagère.

Mémoire de contrebande

Je ne voudrais pas quitter ce sujet sans évoquer une mémoire (à un seul chiffre) qu'utilisent souvent les enfants : la mémoire des doigts.

Je ne parle pas ici de l'habitude de compter sur ses doigts pour faire par exemple l'addition : 3 + 4.

Elle correspond à un stade antérieur à celui où l'on peut faire ce que j'appelle du calcul mental. Je parle de la possibilité d'enregistrer sur ses doigts un chiffre (assez souvent une retenue). Je l'appelle **mémoire de contre-bande.** Je n'en proposerai pour ainsi dire jamais l'usage par la suite, quoique je comprenne très bien qu'on ait recours à elle.

On fera bien, si on l'utilise, de surveiller ses gestes, car le moindre d'entre eux (se gratter la tête ou se frotter les yeux) risque d'évacuer le contenu qu'on a confié à cette mémoire.

Si j'ai bien compris ce qu'est un quadrumane, les singes ont sur nous la supériorité de pouvoir stocker deux chiffres sur leurs doigts.

VII - ADDITIONNONS DES NOMBRES DE DEUX CHIFFRES

Reprenons le problème d'addition en n'utilisant que la mémoire-cerveau pour les données et le résultat. Nous ne prendrons que des nombres de deux chiffres pour éviter une difficulté dont je parlerai plus tard (mais la méthode proposée est générale). Soit :

$$28 + 57 + 83$$

Nous allons d'abord répéter plusieurs fois pour bien mémoriser : 28 et 57 et 83 (**et** est plus facile à prononcer que **plus**).

Puis nous prendrons le dernier chiffre prononcé (3) et l'ajouterons au premier nombre : 31 et 57 et 80.

En continuant :
111 et 57
118 et 50
168

Cette méthode est très remarquable, car la quantité de mémoire nécessaire diminue tout au long du calcul.

Par contre, on **oublie** les termes de la somme au fur et à mesure de leur utilisation.

Voici une variante un peu plus compliquée : on veut faire à la fois le calcul :

$$28 + 57 + 83$$

et sa preuve par 9.

Comme on oubliera les termes au fur et à mesure de leur utilisation, il faut faire les calculs de la preuve par 9 **avant** le calcul proprement dit.

28 et 57 et 83
28_1 et 57 et 83
28 et 57_4 et 83
28 et 57 et 83_6 Le résultat doit donner 6 comme reste par 9
31 et 57 et 80_6
111 et 57_6
118 et 50_6
168_6

VIII - NOS AMIS LES NOMBRES A DEUX CHIFFRES

La peur de beaucoup de personnes devant la mathématique s'explique par leur impression d'être perdues au milieu d'un monde peuplé d'inconnus.

Mais, au contraire, chaque nombre a sa personnalité et nous rappelle des souvenirs à condition que nous sachions le regarder convenablement. Par exemple 13 a une réputation internationale. La Bible dit beaucoup de bien de 7 et beaucoup de mal de 6.

Personnellement, 96 était mon numéro de pensionnaire. J'ai vécu plusieurs années au 45 d'une certaine rue, 38 me rappelle à la fois une date importante de ma vie et un département où j'ai passé une bonne partie de mon existence. Rien qu'avec les départements français, vous pouvez transformer les cent premiers nombres en "connaissances" (75 Tour Eiffel, 26 Nougat).

J'ai rencontré des gens qui ne connaissaient pas leur numéro de voiture !! Prenez les numéros de voiture. Ce sont des nombres à 4 chiffres. Evidemment, vous ne pouvez pas prétendre les connaître tous, même si quelques uns vous rappellent quelque chose (1357-1789). Coupez-les en deux.

3641 devient 36.41 qui sont deux vieilles connaissances qui vous aideront à mémoriser le nombre de 4 chiffres d'où ils proviennent.

C'est d'ailleurs ce qui est fait pour les numéros de téléphone de province : 76.26.47.39 est pour le central téléphonique une succession de huit chiffres.

C'est pour votre commodité qu'on le présente sous forme de quatre nombres de deux chiffres.

Dans les numéros de compte en banque ou de chèques postaux, on rencontre des tranches de deux ou trois chiffres.

Prenez maintemant un numéro de sécurité sociale : 2260342201024 Il est plutôt rébarbatif avec ses treize chiffres. Mais en fait, il est formé ainsi : 2.26.03.42.201.024 chaque tranche ayant sa signification.

Pour mémoriser un nombre, découpez-le en tranches

Faut-il préférer les tranches de un, deux, trois chiffres ?

Les tranches de un chiffre

Naturellement vous les connaissez toutes, mais elles reviennent trop souvent puisqu'elles ne sont que dix. On risque de se tromper sur l'ordre ou les répétitions : 5.4.2.2.8.3.7 risque de devenir : 5.4.2.2.3.8.7 ou 5.4.4.2.8.3.7.

Par contre, pour transmettre par téléphone ou par radio des nombres qui seront immédiatement réécrits, énoncer leurs chiffres successifs est un excellent moyen, car chaque son correspond à un chiffre.

Les tranches de deux chiffres

Elles conviennent particulièrement bien pour deux raisons :

- leur nombre est raisonnable (il y en a cent). On peut considérer chacune comme un ami.
- leur énoncé ne comporte pas de mot inutile : habituellement deux ou un seul (par exemple : trente) ou exceptionnellement trois (soixante dix-huit mais on peut dire septante huit). Par exemple dire :

3 4 2 9	comporte 6 mots
34.29	n'en comporte que 4.

Bien entendu 02 se dira *zéro deux,*
00 se dira *zéro zéro.*

Les tranches de trois chiffres

A mon avis, elles sont un peu trop nombreuses (il y en a mille).
Elles comportent un mot parasite : cent.

Mais elles peuvent être utiles dans certains cas, par exemple pour dire un nombre de trois ou cinq chiffres, si l'on veut éviter les tranches de un chiffre.

Exercice 14

Renverser l'ordre d'énumération de nombres stockés dans la mémoire-cerveau :

27 et 38
41.27 et 19.75
31 et 95 et 24
348 et 257

Nous allons maintenant voir l'intérêt des tranches dans la réalisation des opérations.

IX - ADDITION-SOUSTRACTION

Nous avons appris en **VII** à additionner des nombres de deux chiffres.
Prenons maintenant : 38.41 + 62.87 les nombres étant découpés en tranches de deux chiffres. Nous opérerons comme en **VII**.

38.41 et 62.87
38.48 et 62.80
39.28 et 62.00
41.28 et 60.00
101.28 ou 1.01.28.

On remarquera que les nombres sont donnés par tranches de deux chiffres, mais que l'on opère chiffre par chiffre.

Soustraction

Il y a en réalité deux techniques de soustraction. On peut supprimer le chiffre des unités d'une tranche, soit en passant à la dizaine inférieure, soit en passant à la dizaine supérieure :

2.41 - 27 = 2.34 - 20 ou 2.41 - 27 = 2.44 - 30.

Il y a toujours une des manoeuvres où le chiffre des dizaines du nombre de gauche ne change pas. On termine naturellement par :

2.34 - 20 = 2.14 ou 2.44 - 30 = 2.14.

Exemple : 62.87 - 38.41
62.86 - 38.40
62.46 - 38.00
54.46 - 30.00
24.46

On peut éventuellement faire une succession d'additions, soustractions :

3.41 et 2.68 - 1.37
3.41 et 2.68 moins 1.37
3.34 et 2.68 moins 1.30
3.04 et 2.68 moins 1.00
2.04 et 2.68
2.12 et 2.60
2.72 et 2.00
4.72

On peut parfois gagner des étapes, en faisant plusieurs opérations partielles à la fois, lorsque le résultat est obtenu simplement.

Par exemple :

3.41 et 2.68 moins 1.37
3.04 et 2.68 moins 1.00

ou encore :

2.04 et 2.68
4.72

Ceci n'est pas une entorse au deuxième principe mais une variante du processus d'addition soustraction.

Exercice 15 : 5.21 - 4.37.

Exercice 16 : 41.27 - 13.89.

Exercice 17 : Pour ceux qui connaissent les nombres négatifs : 6.15 - 8.53.

X - L'ADDITION EN CALCUL PAPIER-CRAYON

Nous sortons ici du calcul mental, mais il n'est pas inutile de montrer qu'avec chaque outil on peut trouver des "astuces" particulières augmentant le rendement.

On se place dans l'hypothèse où il est permis de barrer les chiffres au fur et à mesure de leur utilisation.

Nous montrons l'état initial, divers états intermédiaires et l'état final. Les retenues sont inscrites en haut de chaque colonne.

I	II	III	IV	V
		~~3~~	4~~43~~	~~443~~
5177	517~~7~~	51~~77~~	5~~177~~	~~5177~~
6352	635~~2~~	63~~52~~	6~~352~~	~~6352~~
8651	865~~1~~	86~~51~~	8~~651~~	~~8651~~
3827	382~~7~~	38~~27~~	3~~827~~	~~3827~~
6025	6025	602~~5~~	6~~025~~	~~6025~~
9628	9628	962~~8~~	9~~628~~	~~9628~~
5602	5602	560~~2~~	5~~602~~	~~5602~~
8392	8392	83~~92~~	8~~392~~	~~8392~~
5250	5250	525~~0~~	5~~250~~	~~5250~~
2793	279~~3~~	27~~93~~	2~~793~~	~~2793~~
		7	697	61697

Dans l'état II la somme partielle formée est 20.
Dans l'état III on a terminé la colonne des unités qui donne 7 aux unités du résultat et 3 de retenue, puis commencé la colonne des dizaines. La somme partielle dans cette colonne est 40.
L'état IV est l'état lorsqu'on a fini la colonne des centaines.
L'état V est l'état final.

On comprend que cette manière d'opérer serait extrêmement dangereuse s'il n'est pas permis de barrer les chiffres au fur et à mesure.
Elle a un autre intérêt au point de vue sécurité : elle évite de se tromper de colonne si les chiffres ne sont pas très bien alignés en verticale.
On peut se demander quel intérêt peut présenter ce genre de méthode pour un calculateur entraîné parfaitement capable d'ajouter indéfiniment des chiffres. L'intérêt est qu'elle lui permet de se reposer et de varier un peu ses exercices.

2ème partie

VERS LA DIVISION

XI - TRANCHES DE DEUX CHIFFRES ET RESTES

Il existe un certain nombre de problèmes de restes auxquels les tranches de deux chiffres sont spécialement bien adaptées. Nous allons en voir quelques uns.

Reste par 9

Soit le nombre 28.47.32 (en mémoire-cerveau).
Comme 10 = 9 + 1 le reste par 9 est le même que celui de la somme des chiffres (pour chaque tranche et pour le nombre entier).

Dans le processus ci-dessous, on ne garde pas le nombre lui-même en mémoire-cerveau.

2 + 8 = 10	28.47.32
	10.47.32
	1.47.32
	48.32
4 + 8 = 12	12.32
1 + 2 = 3	3.32
	35
	8

On pourra parfois sauter des intermédiaires. Par exemple remarquer que 28 = 27 + 1 et sauter la deuxième ligne.

Reste par 11

Reprenons 28.47.32
Comme 100 = 99 + 1 99 = 11 x 9
le reste par 11 est la somme des restes des tranches de deux chiffres.
Pour une tranche de deux chiffres, le reste est :

chiffre des unités - chiffres des dizaines

si cette soustraction donne un nombre négatif, on peut ajouter 11. D'où le processus :

	28.47.32			
8 - 2 = 6	6.47.32			
	53.32			
3 - 5 = -2	-2. 32	ou	9.32	
	30		41	1 - 4 = -3
0 - 3 = -3	-3		-3	
	8		8	

Reste par 7

Comme 100 = 98 + 2, on ne change pas le reste par 7 en :
* remplaçant une tranche par son reste par 7
* ajoutant le double de ce reste à la tranche située immédiatement à droite.

Prenons	43.13.81
43 = 42 + 1	1.13.81
13+2 x1 =15	15.81
15 = 14 + 1	1.81
81 + 2 = 83	83
	13
	6

Pour trouver le reste par 7 d'une tranche, on retranche 7 du chiffre des dizaines si cela est possible. Ensuite on se reporte à la table de multiplication.

Reste par 16

Ce cas présente la particularité que 10 (la base) et 16 ne sont pas premiers entre eux. Il en résulte que seules les deux tranches de droite interviennent car1.00.00 est multiple de 16.

Soit à trouver le reste de 13.42
On utilise 100 = 96 + 4   96 = 6 x 16
* on prend le reste de 13 par 4 (et non par 16) soit 1
* on multiplie ce reste par 4 et on l'ajoute à 42 : 4 + 42 = 46
* on prend le reste de 46 par 16 soit 14
(les multiples de 16 jusqu'à 100 sont :16, 32, 48, 64, 80, 96).

Exercice 18

Reste par 13 d'un nombre écrit en tranches de deux chiffres en utilisant 100 = 104 - 4, 104 = 8 x 13.

Exercice 19

Reste par 17 d'un nombre écrit en tranches de deux chiffres en utilisant :
100 = 102 - 2, 102 = 6 x 17.

Exercice 20

Reste par 19 d'un nombre écrit en tranches de deux chiffres en utilisant :
100 = 95 + 5, 95 = 5 x 19.

Exercice 21

Chercher un procédé qui permette de trouver facilement les restes par 27 et 37 (en utilisant des tranches de 3 chiffres).
Appliquer à :   902.341.

La question traitée dans ce chapitre est un des aspects de l'opération division, celui où l'on ne s'intéresse qu'au reste. Les techniques employées sont très différentes de celles de la division ordinaire.

Nous voyons aussi que certaines techniques sont spéciales à des nombres particuliers.

QUATRIEME PRINCIPE

Il y a en calcul mental beaucoup plus de processus, qu'il n'y a, en mathématique ordinaire de notions ou de problèmes.

XII - DEUX FOIS CINQ : DIX

Nous allons étudier ici des cas où l'utilité du découpage en tranches de deux chiffres est particulièrement intéressante à discuter.

Ceci n'est pas une entorse au deuxième principe mais une variante du processus d'addition soustraction.

Exercice 15 : 5.21 - 4.37.

Exercice 16 : 41.27 - 13.89.

Exercice 17 : Pour ceux qui connaissent les nombres négatifs : 6.15 - 8.53.

X - L'ADDITION EN CALCUL PAPIER-CRAYON

Nous sortons ici du calcul mental, mais il n'est pas inutile de montrer qu'avec chaque outil on peut trouver des "astuces" particulières augmentant le rendement.

On se place dans l'hypothèse où il est permis de barrer les chiffres au fur et à mesure de leur utilisation.

Nous montrons l'état initial, divers états intermédiaires et l'état final. Les retenues sont inscrites en haut de chaque colonne.

I	II	III	IV	V
		3	443	443
5177	5177	5177	5177	5177
6352	6352	6352	6352	6352
8651	8651	8651	8651	8651
3827	3827	3827	3827	3827
6025	6025	6025	6025	6025
9628	9628	9628	9628	9628
5602	5602	5602	5602	5602
8392	8392	8392	8392	8392
5250	5250	5250	5250	5250
2793	2793	2793	2793	2793
		7	697	61697

Dans l'état II la somme partielle formée est 20.
Dans l'état III on a terminé la colonne des unités qui donne 7 aux unités du résultat et 3 de retenue, puis commencé la colonne des dizaines. La somme partielle dans cette colonne est 40.
L'état IV est l'état lorsqu'on a fini la colonne des centaines.
L'état V est l'état final.

On comprend que cette manière d'opérer serait extrêmement dangereuse s'il n'est pas permis de barrer les chiffres au fur et à mesure.
Elle a un autre intérêt au point de vue sécurité : elle évite de se tromper de colonne si les chiffres ne sont pas très bien alignés en verticale.
On peut se demander quel intérêt peut présenter ce genre de méthode pour un calculateur entraîné parfaitement capable d'ajouter indéfiniment des chiffres. L'intérêt est qu'elle lui permet de se reposer et de varier un peu ses exercices.

c) Division par 2

Si le dernier chiffre de la tranche de droite est impair le reste est 1. On diminue ce chiffre de 1. On peut commencer par la gauche ou par la droite.

par la gauche

27.42.59	
27.42.58	reste 1
13 toc 142.58	Le reste de la division de la tranche devient chiffre des centaines de la tranche située à droite.
13.71 toc 58	
13.71.29	

par la droite

27.42.58	
27.42 toc 29	Si la tranche située à gauche de celle qu'on traite est impaire on lui emprunte 1 pour en faire un chiffre des centaines.
26 toc 71.29	
13.71.29	

En somme dans ce calcul :

- on voit apparaître, fugitivement, des tranches de trois chiffres (celui de gauche étant 1) ;
- on travaille directement sur les tranches car on est capable de multiplier ou diviser par 2 un nombre de deux chiffres.

Remarque

Dans ces opérations, nous nous sommes permis de commencer par la droite ou par la gauche. C'était une fantaisie. En règle générale, il vaut mieux rester dans la normale et commencer les divisions à gauche et les multiplications à droite.

d) Multiplier ou diviser par 5

On pense immédiatement à se ramener à diviser ou multiplier par 2 puisque :

$$a \times 5 = (a \times 10) : 2,$$
$$a : 5 = (a \times 2) : 10.$$

En fait, pour des nombres écrits en tranches de deux chiffres, ce procédé très classique reviendrait à faire deux opérations successives non banales.

Nous opèrerons donc autrement.

Diviser par 5 :

	27.42.59	
	27.42.55 reste 4	On divise la tranche de gauche par 5, le reste devient chiffre des centaines de la tranche suivante.
27 = 5 x 5 + 2	5 toc 242.55	
242 = 5 x 48 + 2	5.48 toc 255	
255 = 5 x 51	5.48.51	

En fait la relation entre 2 et 5 est utilisée seulement dans les tranches de 2 et 3 chiffres.

e) Multiplier par 5

Soit à multiplier par 5 :

	27.42.59	
	27.42 toc 2.95	Les centaines de la tranche calculée
5 x 42 + 2 = 212	27 toc 2.12.95	s'ajouteront aux unités de la tranche sui-
	1.37.12.95	vante après calcul.

Ici encore on utilise la relation entre 2 et 5 seulement au niveau des tranches.Ces mécanismes deviennent compliqués si l'on perd de vue leur compréhension, d'où le :

CINQUIEME PRINCIPE

Celui qui effectue un calcul mental met en oeuvre des processus entièrement précisés. Il doit cependant se garder de se transformer en robot sans compréhension. S'il garde présente à l'esprit la signification des étapes successives :
- il les enchaînera plus facilement ;
- il gardera de l'intérêt pour ce qu'il fait.

Exercice 22

Reprendre les opérations précédentes en les commençant systématiquement par le côté que nous n'avons pas utilisé.

XIII - ENCHAINONS

Il arrive souvent que pour réaliser un calcul il est nécessaire d'exécuter plusieurs processus les uns à la suite des autres (ou de répéter plusieur fois le même processus).
En voici deux jolis exemples :

a) Calculer 12445 x 12445

Nous utilisons le procédé du n° 1 qui amène à calculer : 1244 x 1245.

Nous pouvons écrire ceci : 1245 x 1245 - 1245 et réutiliser pour le produit le procédé du chapitre **I** ce qui amène à calculer : 124 x 125.
Mais 125 = 5 x 5 x 5. On aura donc à multiplier 124 par 5 trois fois de suite. En fait, on fera passer plutôt les facteurs 2 de 124 vers 125 :

124 x 125 = 62 x 250 = 31 x 5.00 = 1.55.00
1.55.00.25 (c'est 1245 x 1245)
1.55.00.25 - 12.45 = 1.54.87.80 (on opère comme en **IX**)
1.54.87.80.25

b) Calculer 37 x 37

Nous partirons de 35 x 35 que l'on peut calculer par le procédé du chapitre **I** puis : 36 x 36 et 37 x 37 en remarquant que :

$$(a + 1)\ (a + 1) = (a \times a) + (a) + (a + 1).$$

Pour passer de 35 x 35 à 36 x 36, il faut ajouter 35 + 36.
Pour passer de 36 x 36 à 37 x 37, il faut ajouter 36 + 37.
Exécutons ce calcul :

35 x 35 ————> 3 x 4 = 12 ————>12.25
12.25 + 71 = 12.96
12.96 + 73 = 13.69

Ceci n'est qu'un exercice, nous verrons plus loin un procédé efficace pour calculer le carré d'un nombre de deux chiffres.

XIV- SECURITE D'ABORD

Je ne voudrais pas vous laisser croire que le calcul mental est une allée bordée de fleurs.

Pour mettre les choses au point, j'énoncerai :

SIXIEME PRINCIPE

Un calcul (mental ou non) que l'on ne se préoccupe pas de vérifier ne sera juste que par hasard.

Un calcul fait par vous et reconnu faux par d'autres est désastreux pour votre moral et pour votre prestige. Un calcul fait et reconnu faux par vous prouve votre maîtrise (du calcul et de vous-même).

De ceci résulte l'importance des **vérifications.** Celles-ci sont de natures très variées et dépendent des connaissances mathématiques dont on dispose. D'une manière générale, il convient d'être attentif à toute particularité constaée dans les données, résultats partiels ou définitifs. Cela peut signaler une faute ou au contraire apporter un encouragement à continuer. Les vérifications en calcul mental sont assez difficiles, du fait de la faible contenance de la mémoire passagère qui amène à "oublier" les données au fur et à mesure de leur fin d'utilisation. J'ai déjà signalé en **VII** que pour faire la preuve par 9, il est pratiquement nécessaire de chercher le reste par 9 du résultat **avant** de commencer le calcul proprement dit, puisqu'à la fin on aura "oublié" les données.

Vérification de 12445 x 12445

Le résultat doit donner 4 comme reste par 9 et 5 comme reste par 11. On remarquera aussi que ce doit être un nombre à 9 chiffres (et un nombre à 7 chiffres pour 1245 x 1245).

Vérification de 37 x 37

En dehors de la preuve par 9, le mathématicien dispose de très nombreuses vérifications :

- le chiffre des unités est celui de 7 x 7 c'est-à-dire 9 ;
- si le chiffre des unités est 9, celui des dizaines est pair ; (voir en **XXIV**) ;

- les deux chiffres de droite sont les mêmes que ceux de (50 - 37) x (50 - 37) c'est-à-dire de 13 x 13 = 169 ; (voir en **XXIV**) ;
- en continuant le procédé de calcul, on arrivera à : 40 x 40 = 1600.

Effectuons le calcul :

13.69 + 75 =14.44
14.44 + 77 =15.21
15.21 + 79 =16.00

- d'ailleurs pour le mathématicien et l'habitué du calcul mental, les carrés des nombres jusqu'à 100 sont des "amis" même si on ne les connait pas tous par coeur.

Il existe des cas où aucune vérification n'est possible. Le seul moyen est alors de refaire le calcul par le même procédé ou par un autre.

A ce point de vue, la possibilité d'écrire certains résultats (intermédiaires dans un calcul long, le résultat d'abord obtenu si on refait le calcul pour vérification) joue un rôle essentiel. Faute de cette possibilité, certains calculs peuvent s'avérer des tâches impossibles. Nous en verrons des exemples en **XXVII** et **XXXIII**.

XV - BASE 2 ET BASE 10

Soit le nombre **écrit** en base 2 : 1 1 0 1 0 0 1

On suppose qu'on a ce nombre sous les yeux. Sa signification est, en commençant par la droite :

$1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 = 1 + 0 \times 2 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6$

Pour l'évaluer en base 10 on commence par la gauche :

1	1
1 1	1 x 2 + 1 = 3
1 1 0	3 x 2 + 0 = 6
1 1 0 1	6 x 2 + 1 = 13
1 1 0 1 0	13 x 2 + 0 = 26
1 1 0 1 0 0	26 x 2 + 0 = 52
1 1 0 1 0 0 1	52 x 2 + 1 = 105

A chaque pas, on multiplie par 2 et on ajoute le chiffre suivant.

La difficulté essentielle est de savoir où l'on en est dans la suite des 0 et 1. **Si cela est permis**, on marquera du doigt le prochain chiffre à utiliser, sinon on le fixera des yeux et on l'énoncera à haute voix en l'utilisant.

Naturellement si les nombres ordinaires auxquels on arrive sont grands on les mettra sous forme de tranches de 2 chiffres. Ici ce n'était guère nécessaire puisque le dernier résultat est 105.

Remarque

Il n'est guère réalisable de mémoriser et de traiter une suite telle que : 1 1 0 1 0 0 1. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Soit maintenant en sens inverse à écrire 451 en base 2 en énonçant les chiffres binaires les uns après les autres (en commençant par les unités).

Le mécanisme est simple :

	451	
1	450 : 2 = 225	
1	224 : 2 =112	
0	112 : 2 = 56	Résultat :
0	56 : 2 = 28	
0	28 : 2 = 14	111 0000 11
0	14 : 2 = 7	
1	6 : 2 = 3	
1	2 : 2 = 1	
1		

XVI- MULTIPLIER PAR 1 CHIFFRE

Nous avons traité en **XII** les cas de multiplication par 2 et 5. Nous avions travaillé sur des multiplicandes écrits en tranches de deux chiffres, la multiplication d'un tel nombre par 2 ne présentant aucune difficulté. Ici il sera préférable de se donner le multiplicande par tranches de un chiffre. Le cas de la multiplication par 9 qui présente des particularités sera traité en **XVIII**.

Nous commencerons par un multiplicande à deux chiffres.
Soit 47 x 8.

On multiplie chacun des chiffres par 8.

32. 56

On a ensuite à recoller les deux morceaux en ajoutant 2 et 5.

3.76

Cette manière de faire a l'avantage de permettre d'oublier immédiatement 47. Elle exige la mémorisation simultanée de 3 chiffres au plus. D'autrte part, le recollage de tranches est une **opération que nous rencontrerons souvent** et avec laquelle il y a intérêt à se rendre familier.

Soit maintenant un multiplicande quelconque :

7.8.4.2 x 3

Le principe de base est le même, on multiplie chaque chiffre par 3 et on recolle les tranches :

7.8.4.2
21.24.12.6
2.1.24.12.6
2.3.4.12.6
2.3.5.2.6

Remarque 1

L'ordre des recollages est indifférent. Il est terminé lorsqu'il n'y a plus de tranche de deux chiffres (il peut en réapparaître en cours de recollage). La méthode la plus judicieuse est de commencer par la droite (dans l'exemple nous les avons commencés par la gauche).

Remarque 2

Rien n'interdit si on le désire de faire les multiplications en commençant par la droite et chaque recollage dès qu'il est possible. Il faut placer un toc entre la partie non traitée et celle qui l'est déjà :

7.8.4.2 x 3
7.8.4.2
7.8.4 toc 6
7.8 toc 12.6
7 toc 24.12.6
21.25.2.6
23.5.2.6
2.3.5.2.6

Remarque 3

On comprend maintenant que l'opération, lorsque le multiplicande est donné par tranches de deux chiffres, est rendue délicate par la difficulté à multiplier une tranche de deux chiffres sans décomposer en opérations plus élémentaires. Cependant on pourra utiliser cette technique dans des cas simples.

Exemple :

21.06 x 7
21.06
147.42
1.47.42

XVII - DIVISER PAR 1 CHIFFRE

On précise qu'on s'intéresse à la fois au quotient et au reste. Les remarques initiales sont les mêmes qu'à la section précédente.

Soit 8.2.6.7 à diviser par 3.

Voici le mécanisme sur cet exemple :

	8.2.6.7
8 = 2 x 3 + 2	2 toc 22.6.7
22 = 7 x 3 + 1	2.7 toc 16.7
16 = 5 x 3 + 1	2.7.5 toc 17
17 = 5 x 3 + 2	2.7.5.5 reste 2

Soit encore à diviser ce même nombre par 7 :

	8.2.6.7
8 = 1 x 7 + 1	1 toc 12.6.7
12 = 1 x 7 + 5	1.1. toc 56.7
56 = 8 x 7	1.1.8 toc 7
7 = 1 x 7	1.1.8.1

Exercice 23

Calculer $\Pi/180$ avec 6 chiffres significatifs : $\Pi \approx 3{,}141592$.

XVIII - MULTIPLIER, DIVISER PAR 11 ET 9

Les multiplications et divisions par 11 et 9 se présentent sous des formes particulièrement simples dues au fait que :

$$11 = 10 + 1 \qquad\qquad 9 = 10 - 1$$

Multiplication par 11

Nombre de un chiffre

Il suffit de répéter le chiffre : 8 ————> 88

Nombre de deux chiffres

Soit 32. On écarte les deux chiffres et on écrit entre les deux leur somme :

32 ————> 352

Si la somme dépasse 9, on fait absorber la retenue par le chiffre de gauche :

47 ———> 4.11.7 c'est-à-dire 517

(Ceci est un cas particulier du recollage de tranches)

Nombre donné chiffre par chiffre

Par exemple 4.8.1.7

On prend le chiffre de gauche
la somme des deux chiffres de gauche
la somme des deux chiffres suivants
....
le chiffre de droite
4.12.9.8.7

On réunit les morceaux en absorbant les retenues
5.2.9.8.7

S'il y a plusieurs recollages de tranches, on les fait successivement.

Nombre donné par tranches de deux chiffres

Par exemple : 12.48.17

On multiplie chaque tranche par 11 :

132.528.187

Ensuite on réunit les tranches en ajoutant les chiffre des centaines aux unités de la tranche voisine :

1.32.528.187
1.37.28.187
1.37.29.87

Multiplication par 9

Dans la multiplication par 11, on ajoutait 10a + a ; dans la multiplication par 9, on retranche 10a - a.

Nombre de 1 chiffre

On recopie à droite en négatif :

8	donne	8.(-8)	
-8 = -10 + 2		d'où	72

Nombre donné chiffre par chiffre

Soit : 7.4.5

On prend : le chiffre des centaines
le chiffre des dizaines moins celui des centaines
le chiffre des unités moins celui des dizaines
le chiffre des unités en négatif
7.-3.1.-5

On résorbe les chiffres négatifs au moyuen d'une unité de l'ordre immédiatement supérieur en commençant par la droite :

7.-3.1.-5
7.-3.0.5
6.7.0.5

Nombre donné par tranches de 2 chiffres

Soit : 38.26

On travaille comme ci-dessus sur chaque tranche :

38.26
3.5.-8.26
342.2.4.-6
342.234

Ensuite on recolle les tranches : 3.44.34

Cette procédure est nettement plus compliquée que celle chiffre par chiffre.

Remarque

Les multiplications par 11 et 9 étant des opérations très simples, nous n'avons pas utilisé le séparateur toc, mais on pourra facilement le faire si on le désire.

Division par 11

Nous ne traiterons que le cas du nombre donné chiffre par chiffre.

Nous distinguons le cas de la division commencée par la droite et celui de la division commencée par la gauche.

Division conmmencée par la droite

Cette méthode ne s'applique que si la division se fait exactement. On peut toujours se ramener à ce cas en cherchant le reste par 11 (voir **IV**, exercice 11) et en le soustrayant du nombre.

Soit : 3.6.1.4.6

Le chiffre des unités est 6 : 3.6.1.4 toc 6

Il faut le retrancher du chiffre des dizaines : 3.6.1.-2 toc 6
Ici deux possibilités suivant que l'on se débarrasse tout de suite ou non des chiffres négatifs en prélevant une unité sur le voisin de gauche :

3.6.1.-2 toc 6	
3.6.0.8 toc 6	3.6.3 toc -2.6
3.6.-8 toc 8.6	3.3 toc 3.-2.6
3.5.2 toc 8.6	3.3.-2.6
3.3. toc 2.8.6	d'où en corrigeant
3.2.8.6	3.2.8.6

Division commencée par la gauche

L'algorithme que nous allons donner est une simple variante de la division ordinaire. Certains restes partiels peuvent commencer par 10, que nous traiterons comme un chiffre.

Soit : 4.2.8.7.3.5

Le quotient de 4.2 par 11 est 3 et le reste 9 :

3 toc 9.8.7.3.5
puis 3.8 toc 10.7.3.5
3.8.9 toc 8.3.5
3.8.9.7 toc 6.5
3.8.9.7.5 reste 10

Division par 9

Nous ne traiterons également que le cas du nombre donné chiffre par chiffre.
Par la droite (sous réserve que le nombre soit multiple de 9)
Soit : 3.4.7.8.2.3

On prend le chiffre de droite, on l'ajoute à son voisin de gauche et on prend son complément à 10 comme chiffre des unités du quotient :

3.4.7.8.5 toc 7

On continue ensuite mais en prenant le complément à 9 :

3.4.7.13 toc 4.7

On corrige en faisant passer la retenue sur le chiffre voisin :

3.4.8.3 toc 4.7
3.4.11 toc 6.4.7
3.5.1 toc 6.4.7
3.6 toc 8.6.4.7
9 toc 3.8.6.4.7

On s'arrête lorsque la partie de gauche se réduit à 9. D'ailleurs si l'on continuait, on trouverait uniquement des 0 au quotient.

Remarque

Si le nombre à diviser comporte des 0 à droite, on les transporte au quotient avant de commencer la division.

Par la gauche

L'algorithme est exactement celui de la division ordinaire. Donnons-le sur un exemple :
Soit : 3.4.7.8.6.3
3 toc 7.7.8.6.3
3.8 toc 5.8.6.3
3.8.6 toc 4.6.3
3.8.6.5 toc 1.3
3.8.6.5.1 reste 4

XIX- BASES QUELCONQUES

Les problèmes que nous avons traités en base 2 (passage de la base 2 à la base 10 et inversement) peuvent se traiter en base quelconque par une succession de multiplications ou divisions.

Exemple : écrire 41.38 en base 7

41.38 5 toc 6.38 5.91 reste **1**
5.91 84 reste **3**
84 12 reste **0**
12 **1** reste **5**

Le résultat est 1.5.0.3.1 base 7.

En sens inverse : 1.5.0.3.1 en base 7 :

1
1 x 7 = 7
7 + 5 = 1.2
(1.2) x 7 = 7.14 = 8.4
(8.4) + 0 = 8.4
(8.4) x 7 = 56.28 = 5.8.8
(5.8.8) + 3 = 5.9.1
(5.9.1) x 7 = 35.63.7 = 41.3.7
(4.1.3.7) + 1 = 4.1.3.8 = 41.38

Base 8

Parmi les bases, 8 et 16 jouent un rôle particulier familier aux informaticiens : elles permettent d'éviter la monotonie insurmontable des 0 et 1 de la base 2. La base 8 est plus commode pour nous que la base 16 qui exige des symboles peu familiers pour représenter 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Passage de base 2 en base 8

Soit 11111000011 base 2.

On groupe tout simplement les chiffres binaires par 3 à partir de la droite et on décode (en base 10) chaque triplet.

On trouve ainsi :

11.111.000.011
3 . 7 . 0 . 3

En sens inverse 6.4.1.0 donnera :

110 100 001 000

Si l'on est expert en multiplication et division par 8, on aura sans doute intérêt à passer de la base 10 à la base 2 et inversement par l'intermédiaire de la base 8.

XX - DIVISIBILITE

Ce problème revient à chercher si le reste de la division est 0 (sans se préoccuper du quotient). Pour les diviseurs considérés en **XI** il suffit donc de renvoyer à ce paragraphe. Nous traiterons ici d'autres cas.

Divisibilité par 2, 4, 8

La **divisibilité par 2** ne dépend que du chiffre des unités. Elle a lieu si celui-ci est 0, 2, 4, 6, 8.

La **divisibilité par 4** ne dépend que des deux derniers chiffres. Elle a lieu si :

- Le dernier chiffre est divisible par 4 et l'avant dernier par 2.
Exemple : 324

- Le dernier chiffre est divisible par 2 mais non par 4 et l'avant dernier non divisible par 2.
Exemple : 512

La **divisibilité par 8** ne dépend que des trois derniers chiffres. Elle a lieu si :

- Les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 8 et le 3ème chiffre avant la fin est multiple de 2.
Exemple : 3624

- Les deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4, mais non de 8 et le 3ème chiffre avant la fin est impair.
Exemple : 3512

Divisibilité par 5, 25, 125

La **divisibilité par 5** ne dépend que du dernier chiffre. Elle a lieu si celui-ci est soit 0 soit 5.

La **divisibilité par 25** ne dépend que des deux derniers chiffres. Elle a lieu si ceux-ci sont 00, 25, 50 ou 75.

La **divisibilité par 125** ne dépend que des trois derniers chiffres. Elle a lieu si ceux-ci sont 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750 ou 875.

Remarque

On peut s'étonner que les divisibilités par 2, 4, 8 et 5, 25, 125 aient des formes différentes. En fait, je leur ai donné des formes différentes. On pourrait citer les groupes de 2 chiffres, 3 chiffres assurerant la divisibilité par 4, 8 ; il y en aurait respectivement 25 et 125, ce qui est trop pour les utiliser pratiquement.
Nous avons vu en **IV**, les conditions de divisibilité par 9 et 11.

Divisibilité par 3

Elle se déduit du résultat sur le reste par 9. Pour qu'un nombre soit multiple de 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit un multiple de 3.
Exemple : 37.22.19

On peut remplacer aussi souvent que l'on veut un résultat partiel par son reste dans la division par 3.
Les tranches donnent :

37 —> 7 —> 1
22 —> 4 —> 1   1 + 1 + 1 —> 0
19 —> 1

Le nombre est multiple de 3.

Divisibilité par un produit de nombres sans facteur commun

Soit à reconnaître si un nombre est divisible par : 495
On peut écrire 495 = 5 x 9 x 11
5, 9 et 11 sont deux à deux sans facteur commun. Pour qu'un nombre soit divisible par 495, il faut et il suffit qu'il soit divisible séparément par 5, 9 et 11, problèmes que nous savons résoudre.

Par contre 3 x 3 = 9, mais on ne peut passer de la divisibilité par 3 à la divisibilité par 9.

Cette remarque ramène les problèmes de divisibilité à la divisibilité par des nombres de la forme :

a , a x a , a x a x a ...

le nombre a n'ayant pas de diviseur (c'est ce que l'on nomme un **nombre premier**).
Voici la liste des nombres premiers jusqu'à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Il est utile pour de nombreux problèmes de pouvoir retrouver cette liste facilement.

XXI - DIVISIBILITE (suite)

Le problème abordé ici est le suivant :

Soit un nombre écrit sous forme de tranches de deux chiffres. Reconnaître s'il est divisible par un nombre premier à deux chiffres.

Nous nous limiterons au cas des nombres qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 5.

Soit par exemple à reconnaître si 83.51 est divisible par 43. Le procédé est basé sur la remarque suivante : en **ajoutant** ou **retranchant** à 83.51 l'un des deux nombres :

43 et 43 x 3 = 1.29

on trouve un multiple de 10. Ici :

83.51 + 1.29 = 84.80

Comme 43 n'a pas de facteur 2 ou 5 on peut remplacer :

84.80 par 8.48

c'est-à-dire un nombre à 3 chiffres.

8.48 est divisible par 2 et même par 8. On peut donc remplacer :
8.48 par 8.48 : 8 = 1.06
et même par 1.06 : 2 = 53

Il est bien évident que 53 n'est pas divisible par 43.
Donc 83.51 n'est pas divisible par 43.

Remarque

Il peut être intéressant de remarquer que les 10 premiers multiples d'un nombre qui n'est pas divisible ni par 2, ni par 5, ont tous des chiffres des unités différents.
Exemple : 43 86 129 172 215 258 301 344 387

Si le calcul fait plus haut nous avait conduit par exemple à 213, nous aurions pu dire immédiatement que 213 n'était pas multiple de 43.

Donnons maintenant un cas où il y a divisibilité.
67.51 est-il divisible par 43 ?

67.51 + 1.29 = 68.80
qui conduit à 688 puis 344, 172, 86, 43.

Donc 67.51 est un multiple de 43.

Recherche du quotient

En reprenant le calcul en sens inverse, on voit que : 68.80 = 43 x 1.60 et par suite

67.51 = 43 x 1.57.

XXII - FACTEURS PREMIERS

Tout nombre peut être écrit, d'une manière unique, comme produit de nombres premiers.
Par exemple : 120 = 2 x 2 x 2 x3 x 5.

Pour trouver la décomposition en facteurs premiers d'un nombre, on examinera s'il est divisible par les nombres premiers successifs, en commençant par les plus petits. On utilisera par exemple la méthode du chapitre **XXI**. Lorsqu'un facteur premier a été trouvé, on divise par ce facteur et on continue la recherche avec le quotient **en essayant à nouveau le facteur déjà trouvé.**

Soit par exemple : 72.31

Ce nombre n'est pas divisible par 3. Il est divisible par 7 puisque :
72.31 - 21 = 72.10 —> 7.21
visiblement multiple de 7.

Le quotient est 10.33
Il est inutile d'essayer 3, mais il faut **essayer à nouveau 7 :**
10.33 + 7 = 10.40 —> 1.04 —> 52 —> 26 —> 13.

Donc 7 n'est pas facteur premier de 10.33. Mais on peut remarquer que 13 ne l'est pas non plus car d'après ce qui précède : 10.33 = multiple de 13 - 7.

11 ne donne rien car : 10.33 - 33 = 10.00 —> 1

On n'essaye pas 13.

Essayons 17 :

10.33 + 17 = 10.50 —> 105 —> 21

J'usqu'où convient-il d'aller ? Si un nombre peut s'écrire : $n = a \times b$ avec $a < b$; alors : $a^2 \leq ab \leq n \leq b^2$.

On essayera donc les nombres premiers dont le carré est au plus égal au nombre étudié.
Ici 33^2 = 10.89. On s'arrêtera donc à 31.

Essayons 23 :

10.33 - 23 = 10.10 —> 1.01
1.01 + 3 x 23 = 1.70 —> 17
23 ne convient pas.

Remarquons cependant que ce dernier calcul ne permet pas à lui seul de conclure que 10.33 n'est pas multiple de 17. En effet, nous avons obtenu 17 en retranchant de 10.33 plusieurs fois des multiples de 23. Il se pourrait qu'il y en ait en tout 17 ou un multiple de 17.

Essayons 29

10.33 + 3 x 29 = 10.33 + 87 = 11.20 —> 1.12 —> 56 —> 28.
29 ne convient pas.

Essayons 31

> 10.33 - 3 x 31 = 10.33 - 93 = 9.40 —> 94 —> 47
> 31 ne convient pas donc 10.33 est premier et : 72.31 = 7 x 10.33 les deux facteurs étant premiers.

Remarque

Si au cours des essais des nombres premiers successifs, on arrive à n = a x b avec a premier et b < a^2 on peut affirmer que b est premier. En effet dans le cas contraire b aurait un diviseur premier c < a. Celui-ci serait un diviseur de n et on l'aurait trouvé auparavant.

Exemple :

La méthode précédente appliquée jusqu'à 17 a donné : 42.09 = 17 x 2.77. Comme 17^2 = 2.89 on peut affirmer que 2.77 est premier.

Remarque

Pour certains nombres particuliers, la décomposition en facteurs premiers peut être simplifiée. En voici un cas :

Si un nombre est une somme de deux carrés, ses facteurs premiers sont :
- ou bien des facteurs premiers communs aux deux carrés
- ou bien de l'une des formes
  2,
  (multiple de 4) + 1.

Soit par exemple 36.01 qui s'écrit visiblement : $60^2 + 1^2$ ses diviseurs premiers ne peuvent être que des nombres de la liste :

2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97.

On peut d'ailleurs enlever les deux premiers et les 4 derniers (qui sont trop grands). Il reste donc seulement 6 essais à faire au lieu de 15.

Essayons 13 :

> 36.01 + 39 = 36.40 —> 3.64 —> 1.82 —> 91
> 91 = 7 x 13

Donc 36.01 est un multiple de 13. En remontant le calcul : 36.01 = 13 x 2.77

Continuons avec 2.77

> 2.77 + 13 = 2.90 —> 29 non multiple de 13.

Le calcul se termine car :

> 172 = 2.89 > 2.77
> 36.01 = 13 x 2.77

Remarque

Si l'on connaît les nombres premiers jusqu'à 100 (nous les avons donnés en **XX**), on est armé pour décomposer en facteurs premiers les nombres jusqu'à 10 000.

Offrez à vos amis provinciaux la décomposition de leur numéro de voiture en facteurs premiers.

La méthode précédente peut être utilisée pour des nombres de plus de quatre chiffres. Elle permet de mettre en évidence sans trop de difficulté les facteurs premiers inférieurs à 100 s'il y en a. S'il n'y en a pas, on pourra continuer à condition de connaître les facteurs premiers supérieurs à 100 à utiliser (pour six chiffres il faudrait aller jusqu'à 1000). Il arrive qu'on ait de la chance.

Voici deux nombres de 6 chiffres que je rencontre dans mes promenades journalières.

a) 38.20.51 = 71 x 53.81.

Pour étudier 5381 il ne reste qu'à le diviser par 71 et 73 ce qui ne donne rien. On s'arrête là car $75^2 = 5625 > 5381$. On a donc obtenu la décomposition complète.

b) 52.26.29. = 23 x 2.27.23.

On continue à essayer les nombres premiers à partir de 29 (celui-ci compris) sur 2.27.23 : 2.27.23 = 31 x 733.

Il est inutile de continuer puisque $31^2 = 961 > 733$.
Donc 52 .26.29 = 23 x 31 x 733.

Hélas ! les numéros de téléphone ont maintenant huit chiffres. Enfin ! si vous êtes casse-cou vous pouvez vous y risquer.

XXIII - P G C D DE DEUX NOMBRES

Les diviseurs communs de deux nombres sont les diviseurs du plus grand de ces diviseurs qu'on nomme le PGCD (plus grand commun diviseur).

Exemple :

Les diviseurs communs de 12 et 18 sont les diviseurs de 6.

Si les nombres sont décomposés en facteurs premiers, on obtient le PGCD en prenant pour chaque facteur premier le plus petit des deux exposants.

Exemple : 60 et 36.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \quad 36 = 2^2 \times 3^2 \qquad \text{PGCD} = 2^2 \times 3 = 12$

Si les nombres ont un facteur commun, en divisant les nombres par ce facteur, on divise aussi le PGCD par ce facteur.

Si l'un des nombres a un diviseur premier qui n'est pas un diviseur de l'autre, on ne change pas de PGCD en divisant le nombre par ce facteur premier.

Exemple : 13.48 et 18.09 :

Le second nombre est divisible par 3 mais non le premier. On peut se ramener à :

13.48 et 6.03 puis

13.48 et 2.01 puis
13.48 et 67

En utilisant le facteur 2, on arrive à 6.74 et 67 ; 3.37 et 67.

Le PGCD de a et b (a > b) est le même que celui de a -b et de b ou encore de a -kb et b ou en particulier du reste de a par b et de b.

Par exemple, on a trouvé au cours du calcul précédent 6.74 et 67. On peut passer à 4 et 67 puis 1 et 67.

Remarque 1

Puisque 67 est premier, on peut même dire que, ou bien 13.48 est multiple de 67 et le PGCD est alors 67, ou bien 13.48 n'est pas multiple de 67 et le PGCD est 1.

Remarque 2

Le cas du PGCD égal à 1 est très fréquent.

On dispose ainsi de tout un arsenal pour déterminer le PGCD de deux nombres.

Exemple : 68.23 et 37.91.

68.23 - 37.91 = 30.32
On a 30.32 et 37.91
37.91 - 30.32 = 7.59

On a 7.59 et 30.32
7.59 = 3 x 2.53 = 3 x 11 x 23
30.32 n'est multiple ni de 3 ni de 11

On a 30.32 et 23
23 n'est pas multiple de 2 d'où :
15.16 et 23 7.58 et 23 3.79 et 23
3.79 - 69 = 3.10 3.10 et 23

31 et 23 donnent le PGCD 1

Encore plus vite : 7.59 et 7.58. D'où PGCD = 1.

PGCD de plusieurs nombres

On peut aussi définir le PGCD de plusieurs nombres. On l'obtient en prenant deux quelconques des nombres leur faisant subir une ou plusiers des opérations précédentes et remettant les résultats obtenus dans la liste. On prend ensuite encore deux nombres (anciens ou nouveaux).

Exemple : 43.23, 7.59 et 28.41

En ajoutant les deux derniers

7.59 + 28.41 = 36.00

On garde 36.00 43.23 7.59 ; 43.23 n'ayant pas les facteurs 2 et 5

36.00 —> 9

43.23 est multiple de 3 mais non de 9.
Il reste : 3   7.59
D'où le PGCD 3.

Comme on a pu le voir par les exemples ci-dessus, la longueur du calcul dépend beaucoup du "flair" permettant de reconnaître les combinaisons qui donneront très vite des nombres très petits.

SEPTIEME PRINCIPE

Après l'aptitude à utiliser correctement le mécanisme choisi, le "flair" est certainement la qualité la plus utile pour réussir en calcul mental.

3ème partie

CARRES, PRODUITS

QUOTIENTS

Dans ces deux dernières parties, nous insisterons moins sur les détails d'exécution des processus de calcul, pensant que le lecteur ayant acquis une certaine expérience et des habitudes personnelles, se trouvera mieux de les mettre au point lui-même.

XXIV - CARRES

On appelle **CARRE** le produit d'un nombre par lui-même. J'ai déjà cité aux chapitres **I, XIII** et **XIV** quelques propriétés des carrés. Nous allons essayer de nous familiariser avec ces nombres, en particulier avec les carrés des nombres de 1 à 100.

La formule fondamentale de cette étude sera :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

qui donne le carré d'une somme. De même :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Nous donnerons d'abord quelques propriétés des carrés :

1) Si un nombre est **divisible par p^a** (p premier), son carré est divisible par p^{2a}.

2) Le reste de la division par le nombre premier $p \neq 2$ d'un **carré non multiple de p** n'est pas quelconque car a et p-a donnent le même reste.

Par exemple, le seul reste possible pour p = 3 est 1.

Pour p = 5

a	±1	±2
a^2	1	4

Pour p = 7

a	±1	±2	±3
a^2	1	4	2

Pour p = 11

a	±1	±2	±3	±4	±5
a^2	1	4	9	5	3

Les facteurs 2 et 5 jouent un rôle particulier car ils sont les diviseurs de la base 10. Ce rôle n'est pas le même car on forme des puissances 2 (et non des puissances 5).

3) Le carré d'un **nombre impair** est de la forme 8n + 1.
En effet $(2m+1)^2 = 4\,m\,(m+1) + 1$ et m(m+1) est toujours pair.

4) Reste de la **division d'un carré par 10**

a	0	±1	±2	±3	±4	±5
a^2	0	1	4	9	6	5

Ce dernier chiffre d'un carré ne peut donc être que :

0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

5) Reste de la **division d'un carré par 100**

Les carrés de a et 50 n ± a ont même reste par 100 (c'est-à-dire que leurs deux chiffres de droite sont les mêmes. En effet :
$(50n \pm a)^2 = 2500n^2 \pm 100na + a^2$

On obtient donc tous les restes possibles par 100 des carrés en formant les carrés des nombres de 0 à 25. Les voici :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

a	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
a^2	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625

Pour une raison qui apparaîtra un peu plus tard, il est utile de connaître cette liste par coeur. D'ailleurs presque la moitié vous est déjà connue.
Pour continuer dans cette voie nous allons maintenant séparer le cas des nombres multiples de 5.

6) Chiffre des **dizaines d'un carré** non multiple de 5

En reprenant les résultats de 5) on voit qu'un carré terminé par :

1 est en réalité terminé par	01, 21, 41, 61, 81
9 " " " " "	09, 29, 49, 69, 89
4 " " " " "	04, 24, 44, 64, 84
6 " " " " "	16, 36, 56, 76, 96

autrement dit le chiffre des dizaines est pair, sauf si celui des unités est 6.

La table précédente prouve que tous ces cas existent réellement.

Dans les deux premiers cas, le chiffre des centaines n'est d'ailleurs pas quelconque car le nombre doit être de la forme 8n + 1. Mais nous n'expliciterons pas les résultats.

7) Reste par 100 **d'un carré multiple de 10**

Le carré de 10n est $100n^2$, c'est-à-dire s'écrit avec deux zéros à droite. En supprimant un zéro à droite dans le nombre et deux zéros à droite dans le carré on trouve n et n^2 c'est-à-dire encore un nombre et son carré.

8) Reste par 1 000 du **carré d'un multiple impair de 5**

Un tel nombre peut s'écrire sous l'une des trois formes :

$$50\,n \pm 5 \qquad 50\,n \pm 15 \qquad 50\,n \pm 25$$

qui ont pour carrés respectivement :

$$2500n^2 \pm 500n + 25 \quad 2500n^2 \pm 1500n + 225 \quad 2500n^2 \pm 2500n + 625$$

En prenant le reste par 1 000 on trouve respectivement :

$$500n(n\pm 1) + 25 \quad 500n(n\pm 1) + 225 \quad 500n(n\pm 1) + 625$$

Or $n(n\pm 1)$ est toujours pair, donc les restes par 1000 sont respectivement

$$025 \quad 225 \quad 625$$

9) Reste par 10 000 du **carré d'un nombre multiple impair de 25**

Un tel nombre s'écrit :

$$200n \pm 25 \quad 200n \pm 75$$

et son carré :

$$40\,000n^2 \pm 10\,000n \pm 625 \quad 40\,000n^2 \pm 30\,000n + 5625$$

Les restes par 10 000 sont donc respectivement :

$$0625 \text{ et } 5625$$

Calcul rapide des carrés des nombres de deux chiffres

Un tel nombre peut s'écrire sous l'une des formes :

$$s, \quad 50 - s, \quad 50 + s, \quad 100 - s \quad \text{et} \quad 0 \leq s \leq 25$$

s se nomme la **souche**. Un tableau précédent donne son carré et ce tableau est supposé placé en mémoire permanente.

On peut alors écrire :

$$(50 - s)^2 = 2500 - 100s + s^2 = s^2 + 100(25 - s)$$
$$(50 + s)^2 = 2500 + 100s + s^2 = s^2 + 100(25 + s)$$
$$(100-s)^2 = 10000 -200s + s^2 = s^2 + 200(50 - s)$$

On peut d'ailleurs aussi écrire :

$$(100+s)^2 = 10000 + 200s + s^2 = s^2 + 200(50 + s)$$

et calculer ainsi les carrés des nombres jusqu'à 125.

Exemples :

37^2 : la souche est $13 = 50 - 37$	$25 - 13 = 12$
$37^2 = 169 + 1200 = 1369$	
62^2 : la souche est $12 = 62 - 50$	$25 + 12 = 37$
$62^2 = 144 + 100(37) = 3844$	
79^2 : la souche est $21 = 100 - 79$	$50 - 21 = 29$
$79^2 = 441 + 200 \times 29 = 6241$	
113^2 : la souche est $13 = 113-100$	$50 + 13 = 63$
$113^2 = 169 + 200(63) = 12769$	

Cette méthode exige la mémorisation simultanée de 5 chiffres au plus.

Autre manière rapide de calculer les carrés de nombre de deux chiffres.

Nous montrerons la méthode sur un exemple : 37^2

$35 \times 35 = 1225$

Pour chaque unité on a à ajouter <u>en gros</u> 70 d'où 140

$1225 + 140 \longrightarrow 1365$

D'après la souche 13 les deux derniers chiffres sont

$69 \longrightarrow 1369$

Autre exemple : 62

$60^2 = 3600$
pour chaque unité on ajoute 120 d'où 240
3840. D'après la souche 12 les deux derniers chiffres sont 44 d'où 3844.
Pour être tout à fait sûr, on peut vérifier le résultat par la preuve par 9.

XXV - SOMMES DE CARRES

Les sommes de carrés ont de nombreuses propriétés curieuses et se prêtent bien au calcul mental. Nous allons citer les principales, dans un ordre commode pour leur utilisation (et non dans l'ordre où on peut les démontrer, certaines n'étant pas du tout élémentaires).

a) Tout entier peut être écrit comme somme d'au plus 4 carrés.

On peut citer à ce sujet la formule du produit de deux sommes de 4 carrés :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\,(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = (aa'+bb'+cc'+dd')^2 + (ab'-ba'+cd'-dc')^2 + (ac'-ca'+db'-bd')^2 + (ad'-da'+bc'-cb')^2$$

On mémorise facilement les signes dans les trois derniers carrés en remarquant qu'ils se déduisent les uns des autres par une permutation circulaire de b, c, d. L'intérêt de cette formule pour le calcul mental est faible dans le cas général.

b) Nous appellerons **indice d'un nombre** le plus petit nombre de carrés dont il est la somme :

$$I(1) = 1,\ I(2) = 2,\ I(3) = 3,\ I(7) = 4.$$

On ne change pas l'indice en multipliant un nombre par un carré non nul.
Remarquons qu'un nombre somme de I carrés peut très bien ne pas être comme de I + 1 carrés.

Par exemple : 9 = 4 + 4 + 1 mais 9 ne peut pas s'écrire comme somme de quatre carrés non nuls.

Les puissances de 2 et en particulier 8 jouent un grand rôle dans la théorie qui va suivre. Nous distinguerons trois sortes de carrés :

$A = (2p + 1)^2$ qui est de la forme $8q + 1$
$B = 4\,(2p + 1)^2$ qui est de la forme $8q + 4$
$C = (4p)^2$ qui est de la forme $8q$

Nombres d'indice 4

Leur caractérisation est très facile. Ce sont les nombres de la forme :

$$4^d(8q + 7)$$

Ils ont les propriétés suivantes :

a) Si $d \geq 2$ tous les carrés sont de la forme C et on peut diviser les deux membres de la décomposition par 4^2.

b) Pour un nombre $8\,p + 7$, les décompositions sont du type :

$$A + A + A + B$$

c) Pour un nombre $4(8p+7)$, elles sont des deux formes :

$$B + B + B + C \quad \text{et} \quad A + A + A + A$$

Exemple :

$28 = 4 + 4 + 4 + 16$
$28 = 25 + 1 + 1 + 1$

- On peut dans les décomposition b) ou c) ci-dessus se donner arbitrairement un des carrés (inférieur au nombre à décomposer et de l'un des formes A ou B). En effet la différence :

$$\text{nombre} \; - \; \text{carré}$$

n'est plus de la forme $4^d(8p + 7)$. Elle est donc somme de trois carrés au plus.

- On peut exiger que deux des carrés soient égaux. En effet :
$2n$ n'est pas de la forme $4^d(8p + 7)$. Donc :

$$2n = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Le premier nombre étant pair, on peut trouver au second membre : deux carrés X et Y de même parité et un carré pair Z

$$n = \frac{X + Y^2}{2} + \frac{X - Y}{2} + 2\,\frac{Z^2}{2}$$

Nombres d'indice 1, 2, 3

La caractérisation des nombres d'indice 1 et 2 se fait par leurs facteurs premiers. Ceux d'indice 3 sont ceux qui ne sont pas d'un autre indice.

Pour qu'un nombre soit d'indice 1, il faut et il suffit que tous ses facteurs premiers figurent avec une puissance paire.

Pour qu'un nombre soit d'indice 2, il faut et il suffit que tous ses facteurs premiers de la forme $4q - 1$ figurent avec une puissance paire. Chaque carré est multiple des facteurs premiers de cette forme.

Exemple : $45 = 3^2 + 6^2$

Quand un nombre d'indice 1, 2, 3 est multiple de 4, tous les carrés de ses décompositions sont multiples de 4.

Pour les non multiples de 4, on peut indiquer les types des carrés de décompositions :

Forme du nombre \ Indice	1	2	3
8n + 1	A	A + C	A + C + C A + B + B
8n + 2		A+A	A + A + C
8n + 3			A + A + A
8n + 5		A + B	A + B + C
8n + 6			A + A + B

On remarquera que les nombres de la forme :

$$8n + 3 \text{ ou } 8n + 6$$

sont tous des sommes de trois carrés car leurs facteurs premiers ne sont pas tous de la forme 2 ou 4q + 1.

Un nombre de la forme 8n + 1 et d'indice 3 peut avoir les deux types de décomposition indiqués.

Exemple :

$$33 = 25 + 4 + 4 \quad 33 = 1 + 16 + 16$$

Pour les nombres d'indice 1 et 2 la formule du produit de deux sommes de quatre carrés se réduit à :

$$a^2\, a'^2 = (aa')^2$$
$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (aa'+bb')^2 + (ab'-ba')^2 = (aa'-bb')^2 + (ab'+ba')^2$$

Cette formule est très importante en calcul mental des sommes de carrés.

Etude plus poussée des sommes de 2 carrés (dont l'un peut être nul)

On suppose que le nombre a été débarrassé de tous ses facteurs premiers de la forme : 4m - 1.

Facteur 2 : $2 = 1^2 + 1^2$

Si $n = p^2 + q^2$, $2n = (p+q)^2 + (p-q)^2$.

En sens inverse, si :

$$2n = a^2 + b^2\ ,\quad n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Si n est multiple de 4, les deux carrés sont multiples de 4 et on peut se débarrasser de ce facteur.

n et $2^k n$ ont le même nombre de décompositions.

Facteur premier 4m + 1

Un tel facteur est une somme de deux carrés. Cette décomposition est unique.

Exemples :

$$5 = 2^2 + 1^2 \quad 13 = 3^2 + 2^2$$

Toute décomposition en somme de deux carrés de a = bp (p premier) provient de décompositons en sommes de 2 carrés de b et de p par la formule multiplicative ci-dessus.

On nommera **décomposition primitive** d'un nombre, une décomposition dont les carrés ne sont multiples d'aucun facteur premier 4m + 1 du nombre.

Soit :

$$P_1^{a_1} \; P_2^{a_r} \; \dots \; P_k^{a_k}$$

la partie de la décomposition en facteurs premiers de la forme 4m + 1 du nombre n. Le nombre des décompositions primitives de n est 2^{k-1}.

Le nombre total des décompositions est la partie entière par excés de :

$$\frac{(a_1+1)\,(a_2+1)\,\dots\,(a_k+1)}{2}$$

Exemples :

5	a une décomposition,
5^2	a deux décompositions,
5^3	a deux décompositions dont chaque fois une décomposition primitive,
$5^3.13^2$	a six décompositions dont deux primitives.

XXVI - PRATIQUE DE LA DECOMPOSITION EN SOMMES DE CARRES

Les stratégies que nous allons décrire sont relatives à des nombres de quatre chiffres au plus. Le calcul mental est alors un outil fort bien adapté. On peut les utiliser éventuellement pour des nombres plus longs, au prix d'un effort plus important.

On peut distinguer plusieurs problèmes :

- trouver **une** décomposition en un nombre de carrés égal à l'indice ;
- trouver **toutes** les décompositions de ce type ;
- chercher des décompositions en un plus grand nombre de carrés.

Travail préléminaire

On commence par déterminer la catégorie 4^a (8m+b) du nombre à étudier.

Pour cela :
on divise par 4 autant de fois qu'il est possible,
on cherche le reste du quotient par 8.

Si $b = 7$ l'indice est 4.
Si $b = 3$ ou 6 l'indice est 3.
Si $b = 1$, 2 ou 5 le travail continue par la décomposition du quotient en facteurs premiers, ce qui permet d'affecter à l'indice l'une des valeurs 1, 2, 3.

Recherche de carrés parfaits

On peut se proposer de rechercher si le nombre est un carré parfait sans le décomposer en facteurs premiers.

Les restes par 9, 11, 100 donnent des conditions nécessaires qui permettent d'éliminer des cas.

Exemples :

8327	n'est pas un carré car le dernier chiffre est impossible ;
9314	n'est pas un carré parfait car le chiffre des dizaines est impossible ;
9324	le reste par 11 est 7 donc ce n'est pas un carré ;
7396	aucun critère ne conduit à une impossibilité.

Les deux derniers chiffres correspondent à un nombre de la forme $50n \pm 14$.
64 est trop petit : $86^2 = 7396$.

Recherche de sommes de deux carrés

Soit n le nombre (dont on sait qu'il est d'indice 2) :

$$n = a^2 + b^2 \quad a \geq b$$

On peut en déduire :

$$\sqrt{n} \geq a \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \geq b$$

Exemple : 4721 nombre premier de la forme 8m+1, donc d'indice 2.

On peut dire que : $68 \geq a \geq 49 > 48 \geq b \geq 1$
Il semble évident qu'il faut essayer les valeurs possibles pour a plutôt que celles pour b.

Première méthode : On forme :

	$68^2 = 4624$	
	$4721 - 4624 = 97$	Non carré
	$68 + 67 = 135$	
	$4721 - 67^2 = 97 + 135 = 232$	Non carré
	$232 + 133 = 365$	Non carré
	$365 + 131 = 496$	Non carré
	$496 + 129 = 625 = 25^2$	Oui
	$129 = 65 + 64$	
d'où	$4721 = 64^2 + 25^2$	

On peut s'arrêter là puisque la décomposition est unique.

Deuxième méthode :

Dans cette méthode nous ravaillons sur les restes de la division par 10. On suppose le nombre débarrassé de ses facteurs 2 et 5 (que l'on rétablira ensuite) :

Reste du nombre	Restes possibles pour pour les carrés	Restes possibles pour les nombres racines des carrés
1	(0, 1) (5, 6)	(0 ; 1, 9) (5 ; 4, 6)
3	(4, 9)	(2, 8 ; 3, 7)
7	(1, 6)	(1, 9 ; 4, 6)
9	(0,9) (4, 5)	(0 ; 3, 7) (5 ; 2, 8)

Exemple : Reprenons 4721.

L'hypothèse (0,1) conduit à essayer entre 68 et 49 :
60, 50 et 50n ± 11 c'est-à-dire 61.

L'hypothèse (5,6) conduit de même à essayer :
65, 55 et 50n ± 14 c'est-à-dire 64.

On voit facilement que seul 64 conduit à une solution :

$$64^2 = 4096 \qquad 4721 - 4096 = 625 = 25^2 \qquad 4721 = 64^2 + 25^2$$

Le lecteur pourra imaginer bien d'autres méthodes basées sur les restes par des nombre tels que 8, 9, 16.

XXVII - SUITE DE L'ETUDE PRECEDENTE

Exemple 1 :

Soit maintenant à décomposer 1983 qui est de la forme 8n + 7, donc somme de 4 carrés.

Soit d'abord à trouver **une** décomposition. L'un des carrés est arbitraire, non de la forme $(4p)^2$. Nous soustrayons le plus grand carré possible :

$$1983 - 43^2 = 1983 - 1849 = 134$$

Essayons encore d'enlever de 134 le plus grand carré possible :

$$134 - 11^2 = 134 - 121 = 13, \qquad 13 = 3^2 + 2^2$$

d'où : $1983 = 43^2 + 11^2 + 3^2 + 2^2$

Si 11 n'avait pas donné de solution, nous aurions essayé 10 puis 9 ...

Soit maintenant à trouver **toutes** les décompositions de 1983.

On suppose que dans chaque quadruplet de carrés, les 4 carrés sont rangés par ordre décroissant. On essayera les quadruplets en commençant par ceux où le 1er carré est le plus grand et à 1er carré égal, par ceux où le 2ème carré est le plus grand.

Pour les 2 carrés restants, on aura intérêt à procéder autrement. Si le nombre à étudier est premier ou double de premier, on regarde si sa décomposition (unique) n'a pas déjà été écrite.

Par exemple :

$1983 - 34^2 = 827$ $827 - 23^2 = 298$
298 double de nombre premier à la déposition unique évidente $17^2 + 3^2$.

On pourra encore utiliser d'autres particularités, par exemple la suivante : 1983 était multiple de 3, mais non de 9, il est impossible que deux des carrés soient multiples de 3 (puisqu'une somme de 2 carrés ne peut être divisible par 3 sans l'être par 9.

Nous donnons ci-dessous la liste des solutions :

										17	11
43	11	3	2		21	13	2	$\boxed{31}$	$\boxed{31}$	6	5
	10	5	3		18	17	1		30	11	1
	9	7	2			13	11		29	10	9
	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	6		$\boxed{17}$	$\boxed{17}$	6		27	17	2
42	13	7	1			15	10		26	15	11
		$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	35	27	5	2		25	19	6
	11	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$		26	9	1		23	22	3
41	17	3	2		23	15	2			18	13
	14	9	5		22	15	7	30	29	$\boxed{11}$	$\boxed{11}$
	11	10	9		21	14	11		25	17	13
39	19	10	1		$\boxed{19}$	$\boxed{19}$	6		$\boxed{23}$	$\boxed{23}$	5
	17	13	2	34	27	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$		$\boxed{19}$	$\boxed{19}$	$\boxed{19}$
					25	11	9				

38	23	3	1		23	17	3	29	26	21	5
	21	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$		21	19	5		23	18	17
	19	13	3	33	29	7	2	27	26	23	7
	17	15	5		26	13	7			$\boxed{17}$	$\boxed{17}$
		13	9		25	13	10		$\boxed{25}$	$\boxed{25}$	2
37	23	9	2		23	19	2			23	10
		7	6			14	13		$\boxed{23}$	$\boxed{23}$	14
	22	11	3		22	19	7	$\boxed{23}$	$\boxed{23}$	22	21
		9	7								

En tout 63 solutions, dont 15 avec au moins 2 carrés égaux et 1 avec 3 carrés égaux (ces carrés égaux sont encadrés).

Du point de vue calcul mental, il n'est pas question d'exécuter en une seule traite le calcul entier, mais chaque partie où le premier carrés est fixé est autonome et d'un volume raisonnable.

Exemple 2 : 1983 comme somme de 4 carrés dont 2 égaux.

Nous savons déjà que les carrés égaux sont impairs et non multiples de 3. On fait la recherche au moyen des carrés égaux. Ceux-ci peuvent être le carré de 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31.

(1^2) -> 1981 = 7 x 283 non somme de carrés.
13^2 et 29^2 donneront aussi des multiples de 7.

On vérifie qu'ils ne donnent pas des multiples de 49, donc ils ne donnent rien.
Tous les autres cas fournissent des solutions que l'on obtient facilement et qui figurent dans le tableau ci-dessus.

Exemple 3 : 1984

$1984 = 31 \times 64 \qquad 31 = 8n + 7$

Les décompositions en somme de 4 carrés de 1984 se déduisent de celles de 31 et 124 (en somme de 4 carrés impairs).

$31 = 5^2+2^2+1^2+1^2$ et $31 = 3^2+3^2+3^2+2^2$.

D'où

$1984 = 40^2 + 16^2 + 8^2 + 8^2 \qquad 1984 = 24^2 + 24^2 + 24^2 + 16^2$
$124 = 9^2 + 5^2 + 3^2 + 3^2 \qquad 124 = 7^2 + 7^2 + 5^2 + 1^2$
$124 = 7^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 \qquad 124 = 11^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

D'où $1984 = 36^2 + 20^2 + 12^2 + 12^2 = 28^2 + 28^2 + 20^2 + 4^2$
$1984 = 28^2 + 20^2 + 20^2 + 20^2$
$1984 = 44^2 + 42^2 + 4^2 + 4^2$

Exemple 4 :

$1985 = 5 \times 397$
5 et 397 sont premiers de la forme 4n+1.
$397 = 19^2 + 6^2 \qquad 5 = 2^2 + 1^2$.
D'où $1985 = 44^2 + 7^2 = 32^2 + 31^2$

Exemple 5 : 1986

Ce nombre est de la forme 8n+2 mais multiple de 3. Il est donc somme de 3 carrés :

$$(4n)^2,\ (2n+1)^2,\ (2n+1)^2.$$

Aucun de ces carrés n'est multiple de 3.

$1986 - 44^2 = 50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$
$- 43^2 = 137 = 11^2 + 4^2$
$- 41^2 = 305 = 61 \times 5 = 16^2 + 7^2 = 17^2 + 4^2$
$- 40^2 = 386 = 2 \times 193 = 19^2 + 5^2$
$- 37^2 = 617 = 16^2 + 19^2$
$- 35^2 = 761 = 20^2 + 19^2$
$- 32^2 = 962 = 2 \times 13 \times 37 = 31^2 + 1^2 = 29^2 + 11^2$
$- 31^2 = 1025 = 41 \times 25 = 25^2 + 20^2 = \underline{32^2 + 1^2} = 31^2 + 8^2$
$- 29^2 = 1145 = 229 \times 5 = \underline{32^2 + 11^2} = 28^2 + 19^2$
$- 28^2 = 1202 = 2 \times 601 = \underline{19^2 + 29^2}$

soit 13 solutions (les solutions soulignées ont déjà été trouvées).

Ces exemples montrent les ordres de grandeur auxquels on peut s'attendre pour les nombres de solutions lorsque le nombre à décomposer est à 4 chiffres.

Offrez à vos amis la décomposition de leur numéro de voiture en somme de carrés.

XXVIII - REFLEXIONS SUR LA MULTIPLICATION

La multiplication de deux nombres consiste à faire les produits chiffre par chiffre et les regrouper en donnant à chacun l'ordre décimal convenable. Ceci peut se faire de différentes manières. Dans le processus actuel, que tout le monde connaît et utilise, on regroupe en produit partiel les produits chiffre par chiffre qui correspondent à un même chiffre du 2ème terme (On crée ainsi une disymétrie entre les deux termes).

$$\begin{array}{rrl} & 26 & \\ \text{x} & \underline{34} & \\ & 104 & \qquad 104 = 6 \text{ x } 4 + 20 \text{ x } 4 \\ & \underline{78} & \qquad 78 = 6 \text{ x } 3 + 20 \text{ x } 3 \\ & 884 & \end{array}$$

Finalement on ajoute ces deux produits partiels. Ceci correspond très bien à la nature de la mémoire papier-stylo qui ne peut guère l'effacement. Mais de cette manière, on manie un nombre de chiffres beaucoup trop grand. Dans une multiplication de 10 chiffres par 10 chiffres, les produits partiels représentent un total de 110 chiffres alors que le résultat n'en a que 20.

Le calcul mental nous conduit à rechercher des économies.

Mais ici nous allons être amenés à distinguer deux situations. Dans la première, on exige que le produit soit fourni directement sans appel à une mémoire extérieure. Ce sera l'objet du numéro actuel et des trois suivants. Dans la seconde, on demande de fournir les uns après les autres les chiffres du produit qui sont emmagasinés ensuite dans une mémoire extérieure. Ceci sera traité en **XXXII**. La question de savoir si les nombres à multiplier sont ou non dans une mémoire extérieure est une question secondaire qui n'influe que sur la longueur des nombres qu'il sera possible de traiter.

Multiplication adaptée de 2 chiffres par 2 chiffres.

Dans la multiplication adaptée, on forme les produits chiffre par chiffre dans le même ordre que pour la multiplication ordinaire, mais on les ajoute tout de suite entre eux de manière à n'avoir à chaque instant qu'un seul résultat partiel.

Soit : 26 x 34

$$\begin{array}{r} 6 \text{ x } 4 = 24 \\ 24 + 20 \text{ x } 4 = 104 \\ 104 + 6 \text{ x } 30 = 284 \\ 284 + 20 \text{ x } 30 = 884 \end{array}$$

Une étude détaillée montre que le nombre de chiffres à mémoriser à un instant donné a pour valeur maximum 7 dans la multiplication ordinaire et dans la multiplicaiton adaptée. Mais cette valeur est atteinte moins souvent dans la multiplication adaptée.

Multiplication adaptée de 3 chiffres par 3 chiffres.

$$\begin{array}{r} 823 \\ \text{x } \underline{756} \end{array}$$

3 x 6 = 18 18 + 20 x 6 = 1.38 1.38 + 8.00 x 6 = 49.38
49.38 + 3 x 50 = 50.88 50.88 + 20 x 50 = 60.88
60.88 + 8.00 x 50 = 4.60.88 4.60.88 + 3 x 7.00 = 4.81.88
4.81.88 + 20 x 7.00 = 6.21.88 6.21.88 + 8.00 x 7.00 = 62.21.88

Le nombre maximal de chiffres à mémoriser en supposant les données en mémoire papier-crayon est 7 (juste avant la dernière recombinaison). Un tel calcul est exécutable sans entraînement spécial. Si les données sont en mémoire effaçable, il faut mémoriser 11 chiffres. Ce calcul dépasse mes possibilités personnelles.

Remarque

Parmi les méthodes anciennes de multiplication, on en trouve une qui n'est autre que la multiplication adaptée.Elle consiste à écrire les résultats partiels en barrant à chaque fois les chiffres à moditier et en réécrivant en dessous les nouveaux chiffres. (voir à ce sujet Balacheff-Kuntzmann-Laborde, Formation mathématique des instituteurs, Cédic 1981, chapitre 5).

Montrons ce que cela signifie pour la multiplication à trois chiffres ci- dessus :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 8 & 2 & 3 \\
 & \times & & \underline{7} & \underline{5} & \underline{6} \\
6 & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{1} & 8 \\
 & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{9} & \cancel{3} & \\
 & 2 & \cancel{6} & \cancel{0} & 8 & \\
 & & \cancel{8} & 1 & & \\
 & & 2 & & &
\end{array}$$

XXIX- MULTIPLICATION PAR CORRECTION

Il s'agit d'un procédé de calcul mental permettant de faire le produit de deux nombres de deux chiffres en se ramenant au cas de deux chiffres par un chiffre.

Soient à multiplier : 26 et 42

Nous allons modifier l'un des nombres pour le ramener à être terminer par 0. Soit :

42 —> 40

Il faudra naturellement une "correction", mais pour rendre celle-ci aussi simple que possible, nous allons modifier l'autre nombre en sens inverse de la même quantité :

26 —> 28

On fait le produit des deux nombres obtenus :

28 x 40 = 11.20

Pour "corriger" on prend 40 et ses différences avec les deux nombres initiaux :

42 - 40 = 2
40 - 26 = 14

On fait le produit de ces deux nombres : 2 x 14 = 28.

Si l'on a **"rapproché"** les deux facteurs (c'est le cas ici), on **retranche** la correction sinon on **l'ajoute** si l'on a **agrandi** :

$$1120 - 28 = 1092$$

Montrons comment on peut justifier cette règle :

$a = 26 \quad b = 42 \quad n = 2$
$ab = (a+n)(b-n) + \text{correction}$

La correction vaut comme on le voit : $n(b-n-a)$.

On a donc à calculer : $(a+n)(b-n) - n(b-n-a)$.

En effectuant le développement on trouve :

$$ab - an + bn - n^2 - bn + n^2 + an$$

qui se réduit bien à : ab.

Remarque 1

Pour calculer la correction on considère les deux couples :

26 42 et 28 40

On prend les écarts de l'un quelconque des nombres aux deux nombres de l'autre couple 28 - 26 = 2 ; 42 - 28 = 14. Le signe de la correction est toujours donné par la règle ci-dessus.

Remarque 2

On aura intérêt à toujours placer les deux nombres dans le même ordre. Par exemple le plus petit d'abord.
Si l'on rencontre : 42 x 26 on le transformera en : 26 x 42.

Remarque 3

La méthode de calcul donnée au chapitre **I** est un cas particulier de la multiplication par correction : 35 x 35.
On prend 30 x 40.
La correction 5 x 5 est à ajouter puisqu'on a écarté les nombres.

Remarque 4

On peut utiliser cette méthode autrement qu'en se ramenant à une dizaine exacte.

Par exemple : 26 x 43

On forme 25 x 44 = 11.00
La correction est 1 x 18. Il faut ajouter puisqu'on a écarté d'où 1118.

Remarque 5

La correction est particulièrement petite lorsque les deux nombres sont voisins.

Remarque 6

On se souviendra du signe au moyen de la règle mémotechnique :

Rapproché	**R**etrancher
Agrandi	**A**jouter

Cette méthode, lorsqu'on l'utilise pour se ramener à une dizaine proche, exige la mémorisation simulténée de 7 chiffres au plus.

Remarque 7

On a intérêt à calculer d'abord la correction. En effet, on peut ensuite oublier les deux nombres.

Exercice 23

Dans Récits d'un inconnu (Récits de 1893) Tchékhov parle d'un homme capable d'effectuer mentalement le produit de 293 par 213. Seriez-vous capable d'en faire autant ? (A regarder les deux nombres, il est bien évident qu'ils ne sont pas pris au hasard et que Tchékhov n'a pas inventé ce personnage).

XXX - MULTIPLICATION PAR CARRES

La multiplication par carrés est un cas particulier de la multiplication par correction : celui où l'on rapproche les deux nombres jusqu'à les rendre égaux. On obtient alors la formule :

$$a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

On a à effectuer :
- une addition et une soustraction,
- deux carrés,
- une soustraction finale.

Il faut immédiatement distinguer deux cas :
- Si les deux nombres sont de même parité :

$\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ sont des entiers

La méthode s'applique très bien en particulier pour des nombres de deux chiffres. On calcule les carrés par l'une des méthodes données au chapitre **XXIV**.
- Si les deux nombres sont de parité différente :

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a-b}{2}$$

comportent chacun une demi-unité et il vaut mieux utiliser une autre méthode (à moins que l'on ne mette au point une méthode de calcul de p(p+1), ce qui n'est pas impossible).

Cependant si avec deux nombres de parité différente, on s'instéresse à 2ab ou à ab/2 la méthode s'applique encore en remplaçant le nombre impair par son double ou le nombre pair par sa moitié.

Exemple :

$38 \times 86 \quad \frac{38}{2} = 19 \quad \frac{86}{2} = 43$

$43 + 19 = 62 \quad 43 - 19 = 24$

$62^2 = 144 + 100 \times 37 = 38.44 \quad 24^2 = 5.76$

$38.44 - 5.76 = 32.68$

La principale difficulté dans l'exécution de ce calcul est la mémorisation de l'un des carrés pendant que l'on calcule l'autre lorsqu'il n'appartient pas à la souche.

Exemple :

$92 \times 26 \quad \frac{92}{2} = 46 \quad \frac{26}{2} = 13$

$46 + 13 = 59 \quad 46 - 13 = 33$

59^2 —> souche 9 $25 + 9 = 34$ —> 34.00

$9^2 = 81$ —> 34.81

33^2 souche 17 $25 - 17 = 8$

$34.81 - 8.00 = 26.81 \quad 17^2 = 2.89 \quad 26.81 - 2.89 = 23.92$

Cette variante exige la mémorisation simultanée de 8 chiffres au plus.

Calcul de x (100-x)

Le cas qui nous occupe ici est celui où $0 \leq x \leq 100$.
Comme on peut toujours changer x en 100-x, on peut supposer que :

$$0 \leq x \leq 50.$$

Soit a la souche
Si $0 \leq x \leq 25$, $x = a$. Le calcul par carré se ramène alors à : $100x - x^2$.

Exemple :

$x = 13 \quad 13.00 - 1.69 = 11.31$

Si $25 < x \leq 50$, $a = 50-x$.
Le calcul se ramène alors à $25.00 - a^2$

Exemple :

$x = 42, \quad a = 8.$

$42 \times 58 = 2.500 - 64 = 24.36$

XXXI - MULTIPLICATIONS PARTICULIERES

Dans ce chapitre, nous allons montrer certains procédés qui s'appliquent à des cas particuliers.

Il n'est d'ailleurs pas question de les citer tous. Le livre de M. PORTAL (voir introduction) en cite une collection particulièrement riche. Je classerai ces procédés en quatre catégories.

I - Nombres particuliers

Multiplication par 25. De même que la multiplication par 5 peut se ramener à une division par 2, la multiplication par 25 peut se ramener à une division par 4.

Exemple : 34.21 x 25

On aura une tranche de plus :

8. toc 221
8.55 toc 1
8.55.25

Si le reste par 4 est	0	1	2	3
la dernière tranche sera	00	25	50	75

Division par 25. Comme ci-dessus, on peut la ramener à une multi- plication par 4.

34.21 divisé par 25
34.21
34 toc 84
1.36.84

Mais il faut diviser par 100 d'où 1.36,84.
Ceci est la division décimale. Pour la division avec reste on opère ainsi :
On retranche de la dernière tranche le plus grand possible des nombres 00 25 50 75. On obtient ainsi le reste. On remplace ensuite la tranche par celui des nombres utilisés 00 25 50 75 et on multiplie par 4.

38.81 divisé par 25 reste 6
38.75
38 toc 3.00
155.

Multiplication par 111

Posons l'opération :

$$\begin{array}{r} 2387 \\ 2387 \\ \underline{2387} \\ 264957 \end{array}$$

On voit qu'elle consiste à ajouter les chiffres consécutifs 3 par 3.

Cette méthode convient bien pour un nombre long si celui-ci est écrit et si l'on peut citer les chiffres au fur et à mesure de leur obtention.

S'il s'agit d'un nombre en mémoire-cerveau, on pourra l'écrire en tranches de 2 chiffres et multiplier chaque tranche par 111.

Pour multiplier une tranche par 111, on écarte les deux chiffres et on place entre eux deux fois de suite leur somme :

27 2997

Il faut bien entendu tenir compte des retenues :

29 2.11.11.9 32.19

Cela revient à faire l'opération sans retenue ajouter 1 aux deux chiffres de gauche :

29 21.19 32.19
98 97.78 1.08.78

Exemple : 23.87 x 111
23 toc 96.57
25.53.96.57 reste à regrouper les 2 tranches du milieu
25.149.57
26.49.57

On peut encore imaginer d'autres cas (multiplication par 101 par exemple).

II - Couples particuliers

Cas de deux nombres comportant le même chiffre à la même place :

Soit à multiplier :

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ \underline{24} \end{array}$$

Des quatre produits partiels que nous avons à former, trois comportent le facteur 2. On peut les regrouper. Voici la règle : on ajoute les deux nombres en ne prenant qu'une fois le chiffre répété : 27 + 4 = 31.

On multiplie par le chiffre répété : 31 x 20 = 6.20.

On multiplie les deux chiffres en position non répétée 7 x 4 = 28 et on ajoute ce produit au résultat précédent : 6.20 + 28 = 6.48.

Autres exemples :

1) $\begin{array}{r} 73 \\ \times\ \underline{53} \end{array}$ 73 + 50 = 1.23
1.23 x 3 = 3.69

70 x 50 = 35.00 35.00 + 3.69 = 38.69

2) $\begin{array}{r} 234 \\ \times\ \underline{638} \end{array}$ (On suppose les nombres écrits devant celui qui calcule)
2.34 + 6.08 = 842

842 x 30 = 2.52.60

A ce nombre, on aura à ajouter : 204 x 608

Ce qui se décompose en :

2 x 6 = 12 à ajouter à la tranche 2 :
2.52.60 + 12.00.00 = 14.52.60

2 x 8 + 4 x 6 = 40 à ajouter à la tranche 52 :
14.52.60 + 40.00 = 14.92.60

4 x 8 = 32 à ajouter à la tranche 60 :
14.92.60 + 32 = 14.92.92

Remarque

On peut encore appliquer la même idée lorsque les deux chiffres ne sont pas à la même place, mais la règle est un peu plus compliquée :

```
    26
x   72          726 x 2 + 6 x 7 x 10 = 14.52 + 420 = 18.72
```

726 s'obtient ainsi :

Exercice 24 : 4.25 x 2.57

III - Multiplication par voisinage

Il peut se produire qu'en modifiant légèrement un des chiffres d'un des termes du produit, on arrive à une multiplication facile.

C'est par exemple le cas où l'un des chiffres est 1 (21, 31, ..., 91, 12, 13 ..., 19). On le remplace alors par 0. Ou bien encore si l'un des chiffres est 9 (19, 29, ..., 99, 91, 92, ...). On le remplace alors par 10.

Exemple :

34 x 29 = 34 x 30 - 34 = 10.20 - 34 = 9.86
31 x 73 = 30 x 73 + 73 = 21.90 + 73 = 22.63
13 x 74 = 7.40 + 2.22 = 9.62

C'est aussi le cas pour 24 et 26 par suite du voisinage de 25.

Exemple : 38.81 x 24 = 38.81 x 25 - 38.81

Multiplions par 25 : 9 toc 281 9.70.25
9.70.25 - 38.81 = 9.69.44 - 38.00 = 9.31.44

IV - Multiplication par facteurs

On peut avoir intérêt pour effectuer un produit, à décomposer l'un des termes ou les deux en produit de facteurs que l'on regroupera autrement.

En voici des exemples :

a) 43 x 56 = 43 x 7 x 8 = (43 x 7) x 8
   43 x 7 = 3.01   3.01 x 8 = 24.08

La méthode réussit bien parce que le produit intermédiaire est simple.

56 x 14 = 28 x 28 (un carré)
91 x 28 = 7 x 13 x 4 x 7 = 52 x 49 (facteurs voisins)
1.29 x 62 = 43 x 3 x 31 x 2 = (43 x 2) x (31 x 3) (2 chiffres par facteur)
73 x 48 = (73 x 8) x 6 (le facteur de droite contient à chaque fois un chiffre).

Multiplication par un nombre terminé par un 5

Si l'autre facteur est pair, on réunira les facteurs 2 et 5 pour former 10 :

84 x 35 = 42 x 7 x 10 = 2.94 x 10 = 29.40,

c'est un cas particulier du paragraphe précédent.

Si l'autre facteur est impair, on calculera le double du produit et on divisera ensuite par 2 :

87 x 215 On calcule 87 x 43 = 37.41 et ensuite 3.74.10 : 2 = 1.87.05

Multiplication par 37

On remarque que 37 x 3 = 111.
Pour multiplier un nombre par 37, on prend son quotient par 3 que l'on multiplie par 111. On ajoute ensuite :

Si le reste est	0	1	2
	0	37	74

Exemple : 2.39 x 37
2.39 = 79 x 3 + 2
79 x 111 = 87.69
87.69 + 74 = 88.43

Il n'est pas sans intérêt de comparer les diverses méthodes dans le cas de deux nombres de deux chiffres. Nous avons pris 100 couples au hasard (numéros d'automobile ne contenant aucun zéro). Nous avons dans chaque cas choisi la (ou les) méthode(s) qui semblaient les plus rapides. Les résultats sont les suivants :

correction	carré	adaptée	méthodes particulières
21	10	0	81

(Le total dépasse 100 car pour certaines données on a considéré plusieurs méthodes comme acceptables).

Un tel résultat est naturellement légèrement subjectif. Il montre cependant indubitablement la prédominance des cas relevant d'une méthode particulière.

En fait pour choisir entre toutes ces méthodes, le calculateur se laissera guider par son "flair" et pour finir peut-être un peu par sa fantaisie du moment.

Exercice 25

44 x 67 en remarquant que 3 x 67 = 201.

Exercice 26

234 x 652 en remarquant que les deux facteurs contiennent le chiffre 2

XXXII - MULTIPLICATION EN CROIX

Reprenons maintenant la multiplication, en supossant qu'il est possible de donner les chiffres du résultat les uns après les autres. Il est alors possible de calculer les produits chiffre par chiffre, de manière à donner le chiffre des unités, puis celui des dizaines, celui des centaines, etc ...

Deux nombres de deux chiffres

Reprenons : 42
x 26

Unités : 2 x 6 = 12 **2** Retenue : 1
Dizaines : 1 + (6 x 4) + (2 x 2) = 29 **9** Retenue : 2
Centaines : 2 + (4 x 2) = 10 **10**
D'où le résultat : 10.92

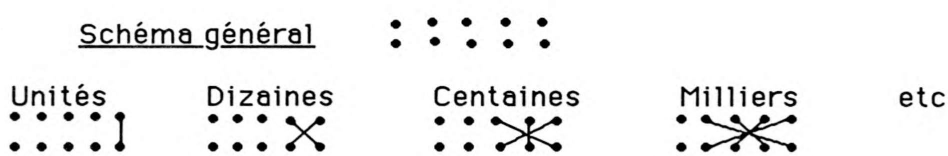
Nombres de trois chiffres

325
x 618

Unités : 5 x 8 = 40 **0** Retenue : 4
Dizaines : 4 + 1 (1 xx 5) + (2 x 8) = 25 **5** Retenue : 2
Centaines : 2 + (6 x 5) + (1 x 2) + (8 x 3) = 58 **8** Retenue : 5
Milliers : 5 + (6 x 2) + (1 x 3) = 20 **0** Retenue : 2
Dizaines de mille : 2 + (3 x 6) = **20**
Résultat : 20.08.50

On voit bien que le procédé s'appliquera à des nombres quelconques mais en raison de la faible capacité de la mémoire effaçable, à partir de 3 chiffres, il faut que les nombres à multiplier soient **sous les yeux du calculateur.**

Schéma général



Pour ne pas oublier la retenue, on aura intérêt à la prendre comme terme de départ pour le calcul du chiffre suivant.

Cette méthode (en supposant qu'on a les nombres à multiplier sous les yeux) est extrêmement peu coûteuse en mémoire. En effet dans un produit de 10 chiffres par 10 chiffres, on n'aura jamais de résultat à plus de trois chiffres, ce qui exige 5 positions de mémoire (trois pour le résultat partiel déjà calculé, deux pour le produit des deux chiffres suivants).

Par contre, dès que les nombres sont un peu longs, la constitution des couples de chiffres à multiplier devient très laborieuse.

On obtient un schéma beaucoup plus simple en écrivant le second nombre à l'envers et en le faisant glisser.

Unités	Dizaines	Centaines	
m c d u	m c d u	m c d u	
I	I I	I I I	
u d c m	u d c m	u d c m	etc ...

On a chaque fois à faire la somme des produits des chiffres situés sur la même verticale.

Ce procédé n'est cependant pas tout à fait un procédé de calcul mental puisqu'on recourt non seulement à une mémoire-papier, mais à une sorte de "machine" qui déplace convenablement les chiffres (voir le chapitre **XXXIII**).

Produit en croix de trois nombres de deux chiffres

Sur le même principe on peut faire le produit en croix de trois nombres en une seule opération. Soit : 15 x 26 x 37

Unités : 5 x 6 x 7 = 210 **0** Retenue : 21
Dizaines : 21 + (1 x 6 x 7) + (5 x 2 x 7) + (5 x 6 x 3) = 223 **3** Retenue : 22
Centaines : 22 + (1 x 2 x 7) + (1 x 6 x 3) + (5 x 2 x 3) = 84 **4** Retenue : 8
Milliers : 8 + (1 x 2 x 3) = 14 **14**
Résultat : 1.44.30

Remarque

Avec des nombres de plus de 2 chiffres, le schéma serait vraiment compliqué.

XXXIII - UN CALCUL AUDACIEUX

Dans une autre publication, j'ai déterminé à partir de 995 décimales de Π la 993ème décimale de Π^2. (En réalité ceci n'a pas été fait par calcul mental). Nous allons vous proposer un problème moins ambitieux. Nous supposons connues les 995 décimales de Π et nous vous proposons de déterminer la 100ème décimale de Π^2. Nous utilisons la méthode de multiplication en croix du chapitre **XXXII**.

Pour nous aider, nous utiliserons deux bandes :
- La première pourvue d'une glissière porte les 55 premières décimales de Π écrites à raison de 2 par centimètre.
- La seconde porte les décimales de Π des rangs 50 à 105 écrites en ordre inverse à raison également de 2 par centimètre.

En mettant la 2ème bande dans la glissière de la première (voir figure ci-dessus) on réalise la machine décrite en **XXXII**. Comme il s'agit d'un carré, chaque produit (sauf celui du milieu éventuellement) apparaît 2 fois d'où la longueur réduite des glissières. Nous calculerons successivement par calcul mental les produits partiels de rang -100 -101 -102 -103 -104 -105 (les produits autres que le premier serviront à déterminer les "retenues" à ajouter à chacun de ces produits partiels).

On se permettra, pour faciliter les vérifications, de noter le résultat partiel après chaque dizaine d'opérations (mais sans repartir à zéro).

Pour le premier calcul on ne garde que les unités, pour le 2ème les unités et les dizaines, etc .

Voici les résultats (détaillés) (pour vous permettre de refaire le calcul vous même si vous le désirez).

Rang -100	0/9/7/3/3	Résultat 6
Rang -101	75/46/74/5/36	Résultat 72
Rang -102	138/419/667/829/110	Résultat 245
Rang -103	195/392/631/787/1161	Résultat 2322
Rang -104		

En fait, il est inutile d'aller plus loin car le total s'élève à : (1) 7972 auquel il faut ajouter la contribution des rangs -104, -105, etc, qui sont de l'ordre de 200, 20, etc...

Le chiffre cherché est donc 7 + 1 = 8 sans aucune hésitation possible.

Cet exemple est intéressant car il montre l'insertion de l'outil (ici calcul mental) dans un ensemble beaucoup plus vaste : choix d'une méthode, organisation détaillée, vérifications.

Voici pour terminer, les 105 premières décimales de Π au cas où vous souhaiteriez refaire le calcul ou le continuer :

3,1 4 1 5 9	2 6 5 3 5	8 9 7 9 3	2 3 8 4 6	2 6 4 3 3
8 3 2 7 9	5 0 2 8 8	4 1 9 7 1	6 9 3 9 9	3 7 5 1 0
5 8 2 0 9	7 4 9 4 4	5 9 2 3 0	7 8 1 6 4	0 6 2 8 6
2 0 8 9 9	8 6 2 8 0	3 4 8 2 5	3 4 2 1 1	7 0 6 7 9
8 2 1 4 8				

(On les trouve par exemple dans l'ouvrage Pi, Numéro spécial du Petit Achimède, édité par l'ADCS - Boite postale 222 - 80002 Amiens Cédex).

A propos ! Repensez-vous de temps en temps aux **sept Principes** énoncés dans les deux premières parties ?

XXXIV - ENCORE DES CARRES ET DES CUBES

Nous avons jusqu'ici parlé surtout des carrés des nombres de deux chiffres qui s'obtiennent par des procédés simples assez différents d'une multiplication proprement dite. Nous allons ici parler de la formation des carrés des nombres de plus de deux chiffres.

Montrons comment opérer sur un exemple 13.94^2. On obtiendra ce carré en considérant le nombre comme la somme de : 13.00 et de 94.

Le carré s'écrira alors :

13^2 0 0 0 0

$2 \times 13 \times 94$ 0 0

94^2

Chacun des nombres est décalé d'une tranche par rapport aux précédents. On commencera par la partie la plus difficile, c'est-à-dire le double produit.

On continuera en suite en général par le carré de tête. On les ajoutera. On formera ensuite le carré de droite et on l'ajoutera :

$13 \times 94 = 13.00 - 6 \times 13 = 12.22$ $12.22 \times 2 = 24.44$
$13^2 = 1.69$ $1.69.00 + 24.44 = 1.93.44$
94^2 la souche est 6 $50 - 6 = 44$ $200 \times 44 = 88.00$
$94^2 = 36 + 88.00 = 88.36$
$1.93.44.00 + 88.36 = 1.94.32.36$

Le plus délicat est toujours de ne pas oublier les données ou résultats momentanémant inutilisés. Le moyen sûr à utiliser consiste à répéter sans arrêt, dans une ronde plus ou moins normalisée tout ce qui n'est pas devenu inutile. Il n'est guère possible de normaliser complètement, car on utilisera suivant les cas divers sous-algorithmes.

Essayons de le faire sur l'exemple précédent :

13.94
13.94//6/78
13.94//13.00-78/
13.94//12.22//24.44
94//1.69/24.44/1.93.44/
1.93.44//94 souche 6/50-6/44
1.93.44//88.00/36/88.36
1.99.44/88.36/1.94.32.36

On peut d'ailleurs rendre les répétitions plus fréquentes, si l'on sent que des données ou des résultats partiels sont prêt à s'évaporer. Une forte fixation mémotechnique sur une des données (par exemple 13 Bouches-du-Rhône) peut être utile. Par contre, pour une donnée intermédiaire, il semble que cela nuise plutôt aux nombres voisins.

Exercice 27

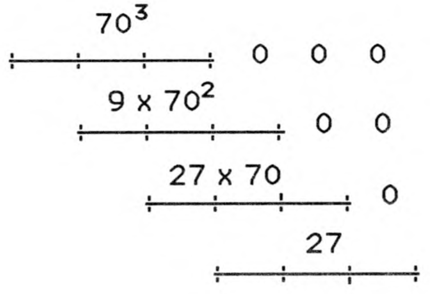
Calculer les carrés de 1,41421, 1,73205

Calcul du cube d'un nombre de deux chiffres

Nous exposerons la méthode sur un exemple : 73^3

$$73^3 = (70+3)^3 = 70^3 + (3 \times 70^2 \times 3) + (3 \times 70 \times 3^2) + 3^3$$

Les divers résultats vont s'inscrire de la manière suivante :



On peut considérer les cubes d'un chiffre comme connus. Les produits ne présentent pas non plus de difficultés. Le seul travail un peu délicat est l'imbrication des divers résultats partiels.

On travaillera par tranches de 2 chiffres :

7^3 = 3.43
3.43//7^2x 9 / 21^2/4.41   34.30 + 4.41 / 38.71
38.71 // 7 x 3^3 / 21 x 9 / 1.89
3.87.10 + 1.89 / 3.88.99
38.89.90 + 27 / 38.90.17

Voici les cubes des nombres à un chiffre :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

XXXV - BLUFF !

Le calcul mental permet parfois des réalisations étonnantes, mais certains forcent dans ce sens et en font un spectacle, en choisissant leurs problèmes de manière à pouvoir "épater" leur public.

En voici un exemple.
Soit le nombre : 3.707.398.432

On demande d'en trouver la racine cinquième, c'est-à-dire le nombre entier a tel que : a x a x a x a x a soit exactement égal au nombre précédent.
Or la puissance 5ème de 100 est un nombre de 11 chiffres donc a < 100
De plus on démontre facilement que a et a^5 ont toujours le même chiffre des unités.
Donc celui de a est 2.
Il ne nous manque plus que celui des dizaines.
Si l'on fait la preuve par 9 on trouve :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a^5	0	1	5	0	7	2	0	4	8

Or ici on trouve 1 pour a^5 donc 1 pour a et :

a = 82

Malheureusement si l'on avait écrit par erreur :

3.707.389.432

la réponse aurait été la même, bien que ce nombre ne soit bien entendu pas une puissance 5ème exacte.

XXXVI - DIVISIONS

A côté de la richesse de la multiplication, la division est une opération pauvre. On ne peut guère citer que trois processus.

1- Division ordinaire

Le premier de ces processus est celui de la division papier-crayon, c'est-à-dire une succession d'essais de multiplication par un chiffre suivis d'une soustraction.
Le processus est à modifier très légérement pour l'adapter au calcul mental. On donnera les chiffres du quotient un par un. Si le dividende est long, on ne pourra guère opérer qu'en l'ayant écrit devant les yeux.

S'il est assez court, on répétera la partie non encore utilisée après le reste.

Soit à diviser : 93.57 par 37 :

93.57 **2** 93.57 - 74.00 19.57 195.7
5 195.7 - 185.0 10.7 107 **2** 107 - 74 reste : 33

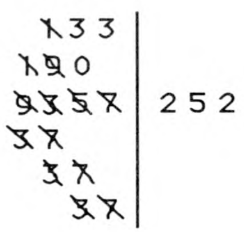
Le quotient est 252 et le reste 33.

Examinons le coût en mémoire d'une telle opération dans le cas d'un dividende écrit et d'un diviseur à deux chiffres.

La partie opératoire du dividende a trois chiffres, le produit partiel du diviseur aussi. Cela fait 6 chiffres, plus les 2 du diviseur, en tout 8.

Remarque

Parmi les formes anciennes de la division, on en trouve une, la division en bâteau, qui s'apparente à la précédente. Montrons-là sur l'exemple ci-dessus (pour faire les produits partiels plus facilement, on réécrit à chaque fois le diviseur dans les positions décimales concernées).



On pourra consulter à ce sujet l'ouvrage déjà cité en **XXVIII**.

2 - Division exacte

Si l'on est certain que le reste est nul et si le diviseur est impair non multiple de 5, on peut commencer la division par la droite (c'est-à-dire par les unités). L'intérêt de cette manière de procéder est qu'il n'y a aucune hésitation sur le chiffre du quotient. En effet les neuf premiers multiples d'un nombre impair non multiple de 5 ont des chiffres des unités tous différents.

Exemple : 93.61 à diviser par 37

93.61	**3**	93.61 - 111	92.50
9.25	**5**	9.25 - 1.85	7.40
74	**2**		

Le reste est bien nul, le quotient est 253.

Remarque 1

Au lieu d'énoncer les chiffres du quotient un à un en les oubliant ensuite, on peut les enchainer 3 puis 53 puis 253.

Remarque 2

Si le chiffre des unités du diviseur est pair autre que 0, on a le choix entre deux chiffres différents de 5 pour le quotient partiel.

Pour choisir entre les deux, on remarquera que les deux restes diffèrent de :

$$5 \times \frac{\text{diviseur}}{2}$$

et que par conséquent un seul des deux est encore multiple de la même puissance de 2 que le diviseur, c'est celui-là qu'il faut choisir.

Exemple : 52.92 à diviser par 36

Le chiffre des unités est 2 ou 7.

2 52.92 - 72 52.20 5.22 n'est pas multiple de 4 comme 36
7 52.92 - 2.52 50.40 5.04
continuons **4** ou **9**
4 5.04 - 1.44 = 3.60 qui convient
36 **1**.

Le reste est bien nul. Le quotient est 1.47.

3 - Division par facteur

Lorsque le diviseur est un produit de facteurs simples, on peut avoir intérêt à diviser successivement par ces facteurs (que la division se fasse exactement ou non).

Reprenons l'exemple : 52.92 à diviser par 36 36 = 4 x 9
En divisant par 4 on trouve 13.23
En divisant par 9 1.47

Soit maintenant à diviser :
93.71 par 36. La division par 4 donne : 23.42 reste 3 = r
23.42 divisé par 9 2.60 reste 2 = r'
Le quotient est 2.60. Le reste est : r + 4r' = 3 + 8 = 11

4ème partie

LES NOMBRES NON ENTIERS

XXXVII - FRACTIONS

Jusqu'ici nous avons manié des naturels. Le calcul mental peut s'étendre aux fractions, qui se présentent comme des couples de naturels. On pourra ainsi, réduire au même dénominateur, ajouter, multiplier, diviser des fractions.

J'évoquerai ici un problème particulier.

Comparer deux fractions

Soient les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d > 0).

Cas évidents :

a) si a > b et c < d il est clair que :

$$\frac{a}{b} > 1 > \frac{c}{d} \text{ donc } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

b) d'une manière plus générale, s'il est possible de citer un nombre ou une fraction k tel(le) que

$$\frac{a}{b} > k > \frac{c}{d} \text{ il est clair que } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

c) si a > c et b< d il est clair que :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{b} > \frac{c}{d} \text{ donc } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

Ces cas serviront en général d'étape finale au processus général suivant.

Cas général

Il se présente ici une petite difficulté. Le résultat cherché n'est pas un nombre mais une alternative.

$$\frac{72}{112} < \frac{46}{63} \text{ ou } \frac{73}{112} > \frac{46}{63} ?$$

Ceci n'est pas commode à traîner tout au long d'un calcul. On peut tourner cette difficulté de différentes manières. Par exemple, on peut choisir une des deux hypothéses, disons :

$$\frac{73}{112} > \frac{46}{63}$$

et suivre ses conséquences tout au long du processus, jusqu'à arriver à une évidence, vraie ou fausse. L'hypothèse faite au début sera elle aussi vraie ou fausse.

Nous choisirons une autre voie : nous imposerons tout au long du processus :
- de laisser les transformées de la 1ère fraction avant ceux de la 2ème
- de ne faire que des transformations qui respectent l'ordre.

Si à la fin la 1ère fraction est supérieure (inférieure) à la 2ème, il en était de même au début.
Les opérations permises sont les suivantes :
- diviser les numérateurs par un facteur commun
- diviser les dénominateurs par un facteur commun

Cette opération est possible sur l'exemple choisi :

$$\frac{73}{112} \text{ ou } \frac{47}{63} \quad \text{facteur } 7 \text{ ?}$$

$$\frac{73}{16} \text{ ou } \frac{47}{9}$$

- remplacer $\frac{a}{b}$ par $\frac{a - kb}{b}$ (avec a - kb > 0) ou $\frac{a}{b - ja}$ (avec b - ja > 0) et faire la même transformation sur $\frac{c}{d}$ (avec les mêmes valeurs pour k et j et la même réserve pour le signe)

$$\frac{73}{16} \text{ ou } \frac{47}{9} \quad k = 4$$

$$\frac{9}{16} \text{ ou } \frac{11}{9} \quad \text{Or il est clair que } \frac{9}{16} < 1 < \frac{11}{9}$$

XXXVIII - PERIODE DECIMALE

Une fraction ne se laisse transformer en nombre décimal que si sa forme irréductible a un dénominateur de la forme $2^a\,5^b$.

Pour les autres, on peut donner un développement décimal infini mais périodique (après éventuellement un début formé de quelques chiffres irréguliers). Ces chiffres et la période s'obtiennent par division du numérateur par le dénominateur jusqu'à apparition d'un reste déjà rencontré. (Il est raisonnable de noter au fur et à mesure les chiffres du quotient). La seule difficulté est de repérer le reste qui se représentera le premier.Donnons quelques exemples (la période est surlignée) :

$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}\ldots \quad \frac{2}{13} = 0{,}\overline{153846}\ldots$$

$$\frac{1}{13} = 0{,}\overline{076923}\ldots$$

$$\frac{1}{23} = 0{,}\overline{0434782608695652173913}\ldots$$

Nous voyons sur l'exemple du dénominateur 13 qu'un même dénominateur peut donner plusieur périodes.

Nous voyons sur l'exemple de 23 que le même chiffre peut apparaître au quotient à plusieurs endroits (c'est la réapparition du même **reste** qui indique la fin de la période).

On démontre que pour un nombre premier p ($p \neq 2$ ou 5) la période est un diviseur de p-1. Pour le nombre ayant la décomposition en facteurs premiers $2^a 5^b p^c q^d \ldots$ la période est un diviseur du $(p-1)p^{c-1}(q-1)q^{d-1}\ldots$.

Exemple

$$\frac{1}{21} = 0{,}\overline{047619} \text{ période 6 diviseur de } (3 - 1)(7 - 1)$$

$$\frac{1}{49} = 0{,}\overline{020408163265306122448979591836734693877551 0}$$

période 42 = 7(7 - 1)

En ce qui concerne la détermination du reste dont la réapparition marquera la fin de la période, on opèrera de la manière suivante :

* Si numérateur ou dénominateur possèdent des zéros à droite, les supprimer.

a) remplacer s'il y a lieu le numérateur par son reste dans la division par le dénominateur,

b) si le dénominateur possède un facteur 2 (ou 5) au lieu d'abaisser un zéro, supprimer le facteur 2 (ou 5) et multiplier le numérateur par 5 (ou 2).

* Recommencer autant de fois que possible les opérations a) et b). Le dernier reste obtenu en a) est celui dont il faut surveiller la réapparition.

Exemple :

$\frac{311}{8750}$, $\frac{311}{875}$ puis $\frac{622}{175}$ quotient (3)
$\frac{97}{175}$ puis $\frac{194}{35}$ quotient (5)
$\frac{19}{35}$ puis $\frac{38}{7}$ quotient (5) $\frac{3}{7}$

Le reste à surveiller est $\underline{3}$. On trouve ensuite la période $\overline{428571}$.

Résultat : $0{,}0355\overline{428571}$.
(pour l'obtenir il faut regarder où placer la virgule).

Remarque

L'opération en style ordinaire se présente autrement :

$$
\begin{array}{l|l}
3\,1\,1\,0 & 875\not{0} \\
\quad 4\,8\,5\,0 & \overline{0{,}0355428571} \\
\qquad 4\,7\,5\,0 & \\
\qquad\quad \underline{3\,7\,5\,0} & \\
\qquad\quad\;\; 2\,5\,0\,0 & \\
\qquad\qquad 7\,5\,0\,0 & \\
\qquad\qquad\;\; 5\,0\,0\,0 & \\
\qquad\qquad\quad 6\,2\,5\,0 & \\
\qquad\qquad\quad\;\; 1\,2\,5\,0 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{3\,7\,5} &
\end{array}
$$

Remarque

On peut retrouver la fraction à partir de la partie irrégulière et de la période. Montrons le sur l'exemple précédent. La fraction peut s'écrire :

$$0{,}0355 + 10^{-4}\,\frac{428571}{999999} = 0{,}0355 + \frac{3}{70000} = \frac{2488}{70000} = \frac{311}{8750}$$

XXXIX - FRACTIONS CONTINUES

Il s'agit d'une théorie bien connue des mathématiciens, mais à peu près ignorée ailleurs.[1]

Considérons d'abord la fraction : $\frac{723}{247}$

On peut l'écrire : $2 + \frac{229}{247}$ en mettant en évidence la partie entière.

Mais :

$$\frac{229}{247} = \frac{1}{\frac{247}{229}}$$

$$\frac{247}{229} = 1 + \frac{18}{229} \quad \text{d'où} \quad \frac{723}{247} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{18}{229}}$$

On peut continuer : $\frac{18}{229} = \frac{1}{\frac{229}{18}} \quad \frac{229}{18} = 12 + \frac{13}{18}$

Finalement on obtient l'expression :

$$\frac{723}{247} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

que nous écrirons (2, 1, 12, 1, 2, 1, 1, 2).

C'est ce que l'on nomme une **fraction continue.**

Quel est l'intérêt d'une telle écriture ?

Considérons ce que l'on obtient en négligeant ce qui est au-delà d'une certaine verticale. On trouve ainsi :

$$2 \quad 2 + \frac{1}{1} = 3 \quad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}} = \frac{38}{13} \text{ puis } \frac{41}{14}, \frac{120}{41} \text{ etc.}$$

C'est ce que l'on nomme les **réduites** de la fraction continue.

(1) Les ouvrages en français sur ce sujet sont assez rares.

Signalons : Lucas, Théorie des nombres, Blanchard 1961.

Pour les lecteurs que l'allemand ou l'anglais n'effrayent pas, signalons les livres de Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen ou, de Hardy et Wright, The theory of numbers.

Le calcul de ces réduites est facilité par la propriété suivante :
Soit la fraction continue $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$
Les réduites successives sont :

$$\frac{P_0}{Q_0} \quad \frac{P_1}{Q_1} \quad \frac{P_2}{Q_2} \quad \text{(la première est une réduite fictive)}$$

avec

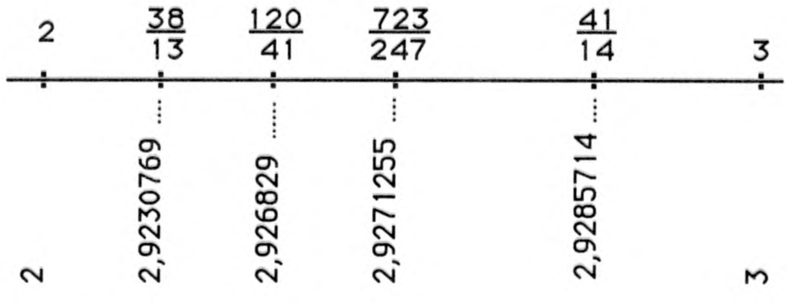
$$\begin{array}{lll} P_0 = 1 & P_1 = a_1 & P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_0 = 0 & Q_1 = 1 & Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{array}$$

Pour la fraction précédente :

$\frac{723}{247} = (2, 1, 12, 1, 2, 1, 1, 2)$, on trouve pour les P_i $(i > 1)$
2, 3, 38, 41, 120, 161, 281, 723 et pour les Q_i $(i > 1)$
1, 1, 13, 14, 41, 55, 96, 247.

Comme on le voit ceci facilite grandement le calcul des réduites en calculant les numérateurs successifs puis les dénominateurs successifs.

On montre que ces réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction initiale :



On démontre encore sur les réduites les résultats suivants :

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n \, Q_{n-1}}$$

Par exemple :

$$\frac{120}{41} - \frac{41}{14} = \frac{1}{574}$$

Parmi les fractions voisines de la fraction de départ, les réduites sont celles qui en sont les plus proches pour une taille de dénominateur donnée.

Par exemple, en remplaçant $\frac{723}{247}$ par $\frac{41}{14}$ on commet une erreur inférieure à 0,002.

Le lecteur est maintenant assez familier avec le calcul mental pour se rendre compte que les diverses opérations présentées peuvent être facilement exécutées mentalement avec un certain support de mémoire papier.

Cas d'un nombre réel

On peut appliquer le procédé de construction d'une fraction continue à partir d'un nombre réel. La seule différence est que le procédé ne s'arrêtera pas. Par contre, il donnera des fractions qui seront de bonnes approximations du réel considéré.

Prenons par exemple le nombre : $\Pi \approx 3{,}14159265\ldots$ (avec 8 décimales)

La partie entière est 3. Il reste 0,14159265 dont l'inverse est 7,0625134 (j'utilise une calculette à 8 chiffres. Il est bien évident qu'il ne s'agit pas ici de calcul mental). La partie entière est 7. Il reste ensuite 0,0625134 dont l'inverse est 15,9967. La partie entière est 15, mais on remarquera que 16 est beaucoup plus près du résultat. Il reste alors -0,0033. Nous en resterons là, compte-tenu du petit nombre de chiffres significatifs restants.

Considérons la fraction continue (3, 7, 16) ses réduites sont 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$.

On reconnaît les valeurs approchées bien connues de Π.

Calculons $\frac{22}{7} \approx 3{,}1428$ valeur par excès $\frac{355}{113} \approx 3{,}1415929$ valeur également par excès.

Ceci est du calcul mental car les divisions par 113 s'effectuent de tête. Comme il s'agit de comparer les chiffres successifs des quotients à ceux de Π, il est inutile de les retenir.

On peut écrire Π comme fraction continue commençant par (3, 7, 16) en introduisant un signe - :

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{\ddots}}}$$

Cas des racines carrées

Les racines carrées des entiers donnent des développements en fraction continue qui sont illimitées mais périodiques. Nous allons le montrer pour $\sqrt{11}$. On part de :

$$(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3)=2$$

$$\sqrt{11}+3 = 6+(\sqrt{11}-3) = 6+\frac{2}{\sqrt{11}+3} = 6+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{11}+3}{2}} = 6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\sqrt{11+3}}}$$

D'où $\sqrt{11}+3 = (6, 3, 6, 3, 6, 3\ldots)$
et $\sqrt{11} = (3, 3, 6, 3, 6, 3\ldots)$

Transformons (3, 3, 6, 3, 6, 3...) en fractions. On trouve $\frac{3970}{1197}$.

or $\sqrt{11} = 3{,}3166247 \ldots$

et $\dfrac{3970}{1197} = 3{,}3166248.$

La valeur de $\sqrt{11}$ ne s'obtient naturellement pas par calcul mental. Par contre la division de 3970 par 1197 est du calcul mental par suite de la forme du diviseur :

$$1197 = 1200 - 3$$

Remarque

Si au lieu de calculer les réduites successives, on se propose de calculer une réduite bien déterminée, on peut commencer par la droite $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$.

On calculera : $(a_6) = \dfrac{R_6}{S_6}$ $(a_5, a_6) = \dfrac{R_5}{S_5}$ ... $(a_1\ a_2 \ldots a_6) = \dfrac{R_1}{S_1}$

Les formules sont :

$R_6 = a_6$ $S_6 = 1$ $R_{i-1} = a_{i-1}\ R_i$ $S_{i-1} = R_i$

d'où : $R_{i-1} = a_{i-1}\ R_i + R_{i+1}$ avec $R_7 = 1$

Pour (3, 3, 6, 3, 6, 3) le calcul se présente ainsi :

$$R_7 = 1 \quad R_6 = 3 \quad R_5 = 19 \quad R_4 = 60 \quad R_3 = 379 \quad R_2 = 1197 \quad R_1 = 3970.$$

La fraction est $\dfrac{3970}{1197}$

La théorie des fractions continues contient encore bien des résultats intéressants pour le calcul mental, mais nous en resterons là.

XL - RACINES CARREES

Nous avons parlé à diverses reprises de racine carrée, en particulier en **XXXIX**. Par ailleurs, tout ce qui a été dit sur les carrés peut être utile pour l'étude de la racine carrée.

Nous nous proposons ici de trouver la racine carrée approchée d'un nombre (c'est-à-dire sans nous limiter au cas où ce nombre est un carré exact).

L'extraction d'une racine carrée avec papier-crayon était une opération autrefois classique, bien oubliée aujourd'hui.

C'est bien dommage car elle constitue le moyen le plus efficace même en calcul mental de déterminer une valeur approchée d'une racine. Exposons-la sur un exemple dans le cadre du calcul mental.

Soit à trouver la racine carrée de : 44.32

Nous partons de 44. Le plus grand carré qui y est contenu est 36, d'où le premier chiffre 6.

Multiplions par 10 ; 60 a pour carré 36.00. Cherchons le plus grand carré 6a inférieur à 4432. Pour former ces carrés, il faut ajouter à 3600 le double produit 120a et le carré a^2.

44.32 - 36.00 = 8.32   a = 6 semble convenir
$66^2 - 60^2 = 6 \times 120 + 36 = 756$.

On a donc la valeur approchée 66 et le reste 832 - 756 = 76.
Remultiplions par 10 : 660 et 7600 comme reste.

On cherchera la valeur approché 66b. Il faut prendre le double produit :

$$2 \times 660 \times b = 13.20\ b$$

légèrement inférieur à 7600 ; b = 5 semble convenir 665

$5 \times 1320 + 25 = 6625$ et le reste est : 76.00 - 66.25 = 9.75

On peut encore faire un tour : 6.65c et 9.75.00 comme reste.

Il faut rendre 1.33.00c légèrement inférieur au reste d'où c = 7. On trouve 9.31.49 et le nouveau reste : 43.51.

La valeur approchée est alors 66,57. On se rend compte que ceci ne dépasse pas les possibilités d'un calculateur entraîné. L'ennui est qu'on dispose de peu de contrôles en cours de route. Mais rien n'empêche de recalculer le carré de 66,57. Faisons le :

66 x 67.14 = 11 x 4.02.84 = 44.31.24
57^2 la souche est 7 100(25+7) + 49 = 32.49
44.31.24.00 + 32.49 = 44.31.56.49
Le reste est 1.00.00 - 56.49 = 43.51

Au lieu de travailler sur les restes on peut travailler sur les carrés proprement dits, mais on aura un plus grand nombre de chiffres à traîner avec, en compensation, l'avantage de voir ce que l'on fait (il faudra quand même calculer les restes).

Valeurs approchées fractionnaires d'une racine carrée

Les fractions continues permettent de donner des valeurs approchées décimales intéressantes des racines carrées de nombres simples. Voici une autre méthode basée sur la formule de Newton pour la résolution approchée des équations.

Si a est une valeur approchée de $\sqrt{n}$,
$\frac{1}{2}(a + \frac{n}{a})$ est une valeur bien plus approchée que la précédente.

Exemples :

$\sqrt{2}$ prenons $a = 1,5 = \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \approx 1,416666\ldots$$

Rappelons que $\sqrt{2} \approx 1,414\ldots$. L'erreur est donc de l'ordre de 0,002. On peut d'ailleurs continuer. On trouve au tour suivant

$$\frac{577}{408} \approx 1,4141156\ldots \text{ et } \sqrt{2} \approx 1,414214.$$

Remarque

Les fractions continues donnent pour $\sqrt{2}$ les réduites :

$$\frac{1}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{7}{5}\ \frac{17}{12}\ \frac{41}{29}\ \frac{99}{70}\ \frac{239}{169}\ \frac{577}{408}\cdots$$

On y retrouve les fractions fournies par la méthode de Newton mais par des calculs légèrement plus longs.

Autre exemple : $\sqrt{10}$

Nous prendrons $a = \Pi \approx 3{,}14$

$\frac{10}{\Pi} \approx 3{,}18$ (nombre usuel) d'où $\sqrt{10} \approx \frac{1}{2}(3{,}14 + 3{,}18) = 3{,}16$.

La disposition régulière de ces trois nombres, valeurs approchées de Π, $\sqrt{10}$ et $\frac{10}{\Pi}$ n'est donc pas fortuite.

Remarque

Dans cette fin de chapitre et dans les suivants, nous rencontrons des valeurs approchées. L'emploi de telles valeurs possède la particularité que le résultat cherché n'a pas en général une seule valeur possible.

D'ailleurs pour être tout à fait correct un résultat approché devrait être accompagné d'une évaluation d'erreur. Nous nous en dispenserons ici pour ne pas alourdir inutilement l'exposé. (Dans la plupart des cas, l'évaluation peut rester implicite et l'erreur est petite devant l'unité du dernier ordre décimal utilisé).

Exercice 28

Trouver une valeur approchée de $\sqrt{\Pi}$.
(valeur 1,77245...).

Exercice 29

Trouver la 4ème décimale de $\sqrt{2}$ à partir du carré de 1,4145. La décimale par défaut est-elle plus approchée que celle par excès ?

XLI - LOGARITHMES

Il s'agira ici de logarithmes décimaux, c'est-à-dire des nombres tels que

$$10^{\log a} = a.$$

Ces nombres permettent de remplacer les multiplications, divisions par des additions, soustractions. Ils permettent de manier facilement la fonction puissance

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \log a^n = n \log a$$

Enfin ils présentent un intérêt par eux-mêmes.

Rappelons d'abord les formules évidentes :

$$\log 1 = 0 \quad \log 10 = 1 \quad \log 100 = 2 \quad \text{etc...}$$

et la formule moins évidente :

$$\text{pour } \Sigma \text{ petit, } \log(1 + \Sigma) \approx 0{,}4343\ \Sigma.$$

Logarithmes des premiers entiers

On peut les retrouver facilement :

log 2 $\quad 2^{10} = 1024$

En confondant 1024 et 1000, on a :

$$10 \log 2 \approx 3 \text{ donc } \log 2 \approx 0{,}3.$$

On peut améliorer ceci :

$$\log (1{,}024) = 0{,}024 \times 0{,}4343 \approx 0{,}01$$

D'où la valeur améliorée : $\log 2 \approx 0{,}301$ (la valeur à 5 décimales est 0,30103).

On en déduit : $\log 4 \approx 0{,}602 \quad \log 8 \approx 0{,}903 \quad \log 5 \approx 0{,}699$

log 3 $\quad 3^4 = 81$

En confondant 81 et 80, on trouve :

$$4 \log 3 \approx \log 80 \approx 1{,}903 \text{ d'où } \log 3 \approx 0{,}476.$$

On peut améliorer ceci :

$$\log \frac{81}{80} \approx \log(1 + \frac{1}{80}) \approx \frac{0{,}4343}{80} \approx 0{,}005$$

d'où : $4 \log 3 \approx 1{,}908 \quad \log 3 \approx 0{,}477$ (la valeur à 5 décimales est 0,47712).
On en déduit : $\log 9 \approx 0{,}954$

log 7 $\quad 7^2 = 49$

En confondant 49 et 50, on trouve :

$$2 \log 7 \approx \log 50 \approx 1{,}699 \text{ donc } \log 7 \approx 0{,}850.$$

On peut améliorer ceci :

$$\log \frac{49}{50} = \log(1 - \frac{1}{50}) \approx - \frac{0{,}4343}{50} \approx - 0{,}0086$$

$2 \log 7 \approx 1{,}690 \quad \log 7 \approx 0{,}845$ (la valeur à 5 décimales est 0,84510).

On peut continuer et chercher :

log 11 (à partir de $121 \approx 120$) ;
log 13 (à partir de $13^3 \approx 2200$) ;
log 17 (à partir de $17^3 \approx 4900$) ;
log 19 (à partir de $19^2 \approx 360$).

Voici encore un autre calcul.

Dans la théorie des puissances le nombre e $\approx$ 2,718 joue un grand rôle. Son logarithme est justement 0,4343.

Vérifions-le :

$$\log 2{,}7 = -1 + 3 \log 3 \approx 0{,}431$$

On peut améliorer ceci :

$$\log \frac{2718}{2700} \approx \frac{18}{2700} \times 0{,}43 \approx 0{,}01 \times \frac{2}{3} \times 0{,}43 \approx 0{,}003$$

d'où log e $\approx$ 0,434.

Remarque

Si l'on utilise souvent les logarithmes des premiers nombres, on aura intérêt à les "apprendre par cœur", c'est-à-dire à les mettre dans la mémoire permanente.

Un exemple de calcul logarithmique

Nous nous proposons de trouver un ordre de grandeur de :

$$76\,! = 76 \times 75 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Nous évaluerons en fait 75 ! puis multiplierons le résultat par 76. On dispose de la formule de Stirling :

$$n\,! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Nous utiliserons les logarithmes pour calculer :

$$K = n^n e^{-n} \quad \log K = 75 (\log 75 - 0{,}4343)$$

Nous repasserons de log K à K.

Il restera à multiplier par $L = 76 \sqrt{150\pi}$.

Calcul de log K

log 75 = log 3 + 2 log 5 = 0,477 + 2 x 0,699 = 1,875
log 75 - 0,434 = 1,441
75 x 1,441 = 75 x 1,44 + 75 x 0,001 = 108,075

Calcul de K

Il nous faut trouver un nombre dont le logarithme soit 0,075.
En utilisant la formule $0{,}4343\ \Sigma \approx \log(1+\Sigma)$
nous trouvons $\Sigma \approx \dfrac{0{,}075}{0{,}4343} \approx 0{,}17$.
Donc $K \approx 1{,}17 \times 10^{108}$. La valeur exacte est $1{,}142210^{108}$.

Calcul de L

$L = 76 \sqrt{150\pi}$
$150\pi \approx 471 \quad \sqrt{471} \approx 21{,}5$
$76 \times 21{,}5 = 38 \times 43 = 16.34 \approx L$

Calcul de KL

$1634 \times 1{,}17\ 10^{108} = 1910\ 10^{108} = 1{,}91\ 10^{111}$.
(De tête 16 x 1,17 auquel on ajoute 2% pour tenir compte de 34).

En fait le résultat exact du produit est :
$1{,}874 \ldots 10^{111}$ et la valeur exacte de la factorielle $1{,}885\ 10^{111}$.

Remarque

On présente habituellement la formule de Stirling comme une formule "asymptotique", c'est-à-dire valable pour de "grandes" valeurs de n. Appliquons-là à :

$$5\,! = 120.$$

On trouve :

$$\log 5 - \log e = 0{,}699 - 0{,}434 = 0{,}265$$
$$5 \times 0{,}265 = 1{,}325$$

Remarquons que :

$$\log 21 = \log 7 + \log 3 = 0{,}845 + 0{,}477 = 1{,}322.$$

On peut prendre : $5^5\, e^{-5} \approx 21$.
$10\pi = 31{,}42$. Or $5{,}6^2 = 31{,}56$. D'où $\sqrt{10\pi} \approx 5{,}6$

Finalement : $5{,}6 \times 21 = 117{,}6$; valeur qui diffère peu de 120.

D'ailleurs même pour n = 1 on trouve :
$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2{,}718} = \dfrac{2{,}5}{2{,}7}$ valeur voisine de 1.

XLII - SINUS, COSINUS, TANGENTE

Les lignes trigonométriques se prêtent à de très nombreux calculs se rattachant aux méthodes précédentes. (Par exemple racines carrées pour passer de sin à cos, sommes de produits pour trouver les lignes trigonométriques d'une somme). Je ne citerai que deux exemples.

Calcul de sin 15° et cos 15°

On se sert de la formule $15° = 45° - 30°$
$\sin 15° = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° = 0{,}707 \times 0{,}866 - 0{,}707 \times 0{,}500 = 0{,}707 \times 0{,}366 \approx 0{,}2562 + 0{,}0025 \approx 0{,}259$ (valeur exacte 0,25882…)
$\cos 15° = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = 0{,}707 \times 1{,}366 = 0{,}9562 + 0{,}0095 = 0{,}9657$ (valeur exacte 0,96593…).

On remarquera qu'avec ces deux valeurs on possède une table allant de 15° en 15° de 0° à 90°.

Calcul de sin 43°

On procède par approximation linéaire le long de la tangente à la sinusoïde au point 45° :

$$\sin 43° = 0{,}707 - 2 \times 0{,}707 \times \frac{\Pi}{180}$$

$\frac{\Pi}{180}$ (voir exercice 21, en **VII**) peut être considéré comme un nombre usuel.
Sa valeur approchée est 0,01745 :

$$\sin 43° = 0{,}707 - 0{,}025 = 0{,}682$$

Valeur exacte : 0,681998....

(Le fait que le résultat du calcul soit si près de la valeur réelle n'est évi- demment qu'un effet du hasard).

XLIII - CONCLUSION

J'espère avoir montré les possibilités du calcul mental (avec recours éventuel à la mémoire papier-crayon et par là incité à s'y livrer ceux qui s'en sentent le goût.

Si l'on veut tirer quelques conclusions de cette présentation, je dirai qu'on peut distinguer trois domaines :

* celui des nombres longs (sans borne supérieure de leur longueur) en s'aidant de la mémoire papier-crayon ;

* celui des entiers à 3-4 chiffres où le cerveau humain entraîné évolue avec aisance. La zone peut s'étendre aux nombres à 5-6 chiffres pour des gens doués et très entraînés.

* celui des valeurs approchées à 2-3 chiffres. Là aussi le cerveau se sent à l'aise, mais des connaissances mathématiques étendues et variées sont assez souvent nécessaires.

Je rappellerai ici encore le SIXIEME PRINCIPE "Un calcul non vérifié n'est exact que par hasard".

Les calculs portant sur des valeurs approchées sont d'ailleurs particulièrement difficiles à vérifier (en particulier les preuves arthmétiques ne s'appliquent pas aux opérations approchées).

Je complèterai le sixième principe par un :

HUITIEME PRINCIPE

Même vérifié et revérifié, il est toujours possible qu'un résultat soit ultérieurement reconnu inexact.

C'est en particulier le cas pour tous les calculs du présent ouvrage. La faute est inhérente au fonctionnement de l'esprit humain, comme d'ailleurs à celui de tout mécanisme.

Il ne faut ni s'en étonner, ni en avoir honte, mais seulement faire tout son possible pour l'éviter.

Je m'en voudrais de terminer sur un discours. Aussi je vous propose trois exercices.

Exercice 30

Calculer 38.13 x 48

Exercice 31

On donne 4 chiffres par exemple 3, 4, 7, 8

Peut-on avec ces quatre chiffres former un multiple de 11 (les trouver tous s'il y en a plusieurs).

Exercice 32

Calculer 2^{17} en remarquant que :

$2^{10} = 1024 = 1000 + 25 - 1$

Et maintenant.

Bonne route !!