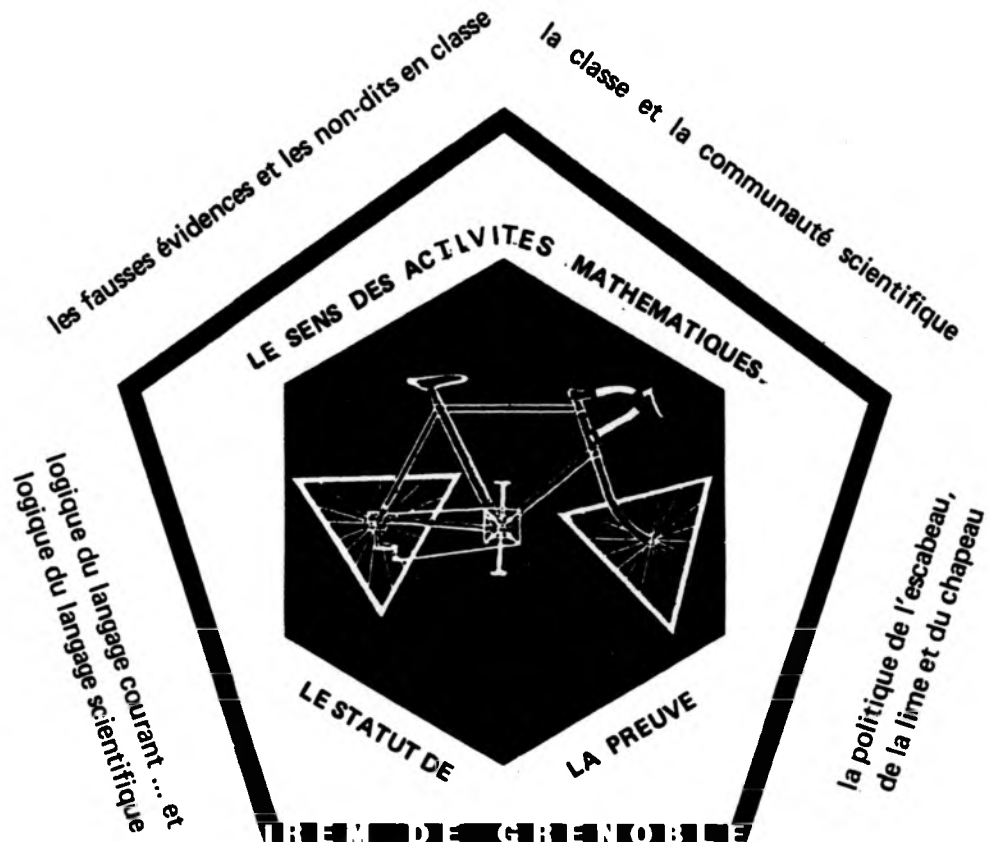


irem de Grenoble



APPRENTISSAGE du RAISONNEMENT

**ou
vers une autonomie de l'élève...
par une approche en compréhension
des connaissances...**

SOMMAIRE

0	INTRODUCTION	5
I	LE DILEMME	9
	— Un exemple révélateur d'une situation pathologique	10
	— L'autonomie des élèves par une approche en compréhension des connaissances	11
	— Les conséquences d'une certaine philosophie de l'enseignement	12
II	LES IMPLICITES DE LA CLASSE ET LES MALENTENDUS QU'ILS ENGENDRENT	17
	— Langage courant et langage scientifique	17
	— Ce qu'il nous paraît nécessaire d'explicitier aux élèves	20
	— Rien n'est plus intransmissible que l'évidence	22
III	LA CLASSE ET LA COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE	27
	— Objectifs comparés de la communauté scientifique et de la classe	28
	— Des objectifs aux méthodes de travail	29
	— Les méthodes de travail de la communauté scientifique	30
	— Transposition de ces méthodes à la classe	32
	— Le rôle du maître	33
IV	LES ENONCES SCIENTIFIQUES — ENONCE VRAI — ENONCE FAUX — LES CONVENTIONS FONDAMENTALES DES SCIENTIFIQUES	35
	— Le concept d'énoncé scientifique	40
	— Les opérations élémentaires sur les déclarations simples : les connecteurs «et», «ou», et la négation	42
	— Les énoncés conditionnels simples : les concepts d'implication et d'équivalence	45
	— Le caractère abstrait des énoncés généraux	50
	— Les énoncés privilégiés des mathématiciens : les énoncés conditionnels généraux (codes, conventions, pièges...)	55

V	LA POLITIQUE DE L'ESCABEAU, DE LA LIME ET DU CHAPEAU.....	65
—	De quoi s'agit-il ?.....	65
—	Un exemple d'escabeau, de lime et de chapeau	67
—	La technique de l'escabeau, de la lime et du chapeau face au problème didactique posé par le statut de certains énoncés mathématiques : les définitions, les axiomes et les théorèmes admis	68
—	Deux exemples caractéristiques d'essais pour repousser les tentations «de l'escabeau, de la lime et du chapeau»	75
—	L'escabeau, la lime et le chapeau face aux situations problèmes	79

Ce fascicule a été élaboré et rédigé par des enseignants-chercheurs des 1^{er} et 2^{ème} cycles du secondaire et du supérieur travaillant à l'I.R.E.M. de Grenoble dans le groupe **«Apprentissage du Raisonnement»**. L'actuelle composition de ce groupe est la suivante :

– Marie-Thérèse CAPPONI	Collège Iles de Mars – Le Pont de Claix
– Françoise DUBREUIL	Lycée technique Vaucanson – Grenoble
– Chantal GUIDEE	Lycée Stendhal – Grenoble
– Marc LEGRAND	Université I – Grenoble
– Daniel PINTARD	Collège de Barby – Chambéry
– Marie-Thérèse RIONDET	Collège Fernand Léger – Saint Martin d'Hères

Comme toutes les recherches I.R.E.M., il s'agit d'un travail collectif mené en **confrontation permanente** avec la **pratique de la classe** et s'inspirant des différents travaux et recherches en didactique dont nous avons pu avoir connaissance.

Pour ne pas alourdir le texte et parce que bien souvent les sources sont très diverses ou méconnues, nous n'avons pas mentionné au fil des paragraphes les inspireurs de telle ou telle remarque ou suggestion. En particulier, nombreux sont les animateurs de l'I.R.E.M. de Grenoble qui nous ont aidés à évoluer dans notre réflexion, par leurs discussions ou par leur participation au sein du groupe ; citons en particulier :

– Nicolas BALACHEFF	– Michel GUILLERAULT
– Christian BARTH	– Rirette GUILLERMARD
– Robert BOISSOU	– Nicole LAFON
– Martine BOURGEAT	– Ostilia LANARO
– Jacqueline BRESSE	– Anne LEGRAND
– Bernard CAPPONI	– Alain MASSON
– Philippe CLAROU	– Jean SERRET
– Nadine DESCHATRES	– Christiane SERRET
– Michèle DUTAUT	– Maryvonne VERJUS
– Claude GACHET	

avec lesquels nous avons particulièrement travaillé.

Nous espérons qu'ils retrouveront ici certaines de leurs propositions, idées, et expérimentations à partir desquelles nous avons cheminé et évolué au fil des années.

La composition et la frappe de ce document ont été réalisées par Annie BICAIS.

Chapitre 0

INTRODUCTION

- La formation et la structuration de l'esprit,
 - Le développement ou au contraire l'étouffement de la personnalité,
 - L'accession ou non de l'élève à l'autonomie
- sont à notre sens les enjeux fondamentaux de l'apprentissage scolaire.

Contrairement à certaines idées reçues (*en math on fait des calculs...*), nous avons pu constater que sur ces différents points l'enseignement des MATHÉMATIQUES joue, qu'on le veuille ou non, un RÔLE DÉTERMINANT.

Aussi nous est-il apparu important de mettre dès maintenant à la disposition des enseignants, des éducateurs et des parents d'élèves, l'état d'une réflexion et d'une recherche en cours... et ce même si dans bien des cas nous ne sommes pas capables d'apporter de réponse vraiment satisfaisante aux problèmes que nous soulevons.

Il est très probable que dans quelques années nous n'écrirons pas exactement les mêmes choses sur les mêmes sujets et que nous nuancerons peut-être davantage ou peut-être moins tel ou tel propos jeté ici ou là ! Mais, une chose est certaine, s'il nous faut attendre pour publier d'avoir analysé complètement les différents problèmes évoqués, ce fascicule ne verra jamais le jour ! Or les réflexions et recherches que l'I.R.E.M. nous a permis d'effectuer ne nous appartiennent pas et nous devons de les soumettre aux collègues et aux parents, qui comme nous, cherchent à adapter le système éducatif aux nécessités de polyvalence, d'adaptabilité et d'auto-formation permanente, c'est-à-dire aux conditions de travail auxquelles les jeunes d'aujourd'hui vont inexorablement être confrontés demain en tant qu'adultes.

I – CONTENU DU FASCICULE.

Tour à tour, mais aussi de façon très imbriquée, nous développerons les sujets suivants :

- **Observations et constats** à propos de situations de classe et de comportements d'élèves face à un concept donné.
- **Objectifs de formation et description de dispositifs d'enseignements** susceptibles de favoriser la réalisation de ces objectifs.
- **Réflexion plus théorique** sur les points suivants :
 1. rapport entre la **communauté scientifique** et la **communauté-classe** ;
 2. sens de la **preuve** et de la **démonstration**, en mathématiques et en dehors des mathématiques ;
 3. **conventions fondamentales** de la communauté scientifique et confrontation avec les conventions des autres communautés : la famille, les camarades, la société etc.

II – LANGAGE ADOPTE DANS LA REDACTION.

Ce fascicule s'adressant aux maîtres et aux parents, vous pourrez être surpris d'y trouver un langage très voisin de celui que nous tenons dans nos propres classes.

Chacun sait en fait que le **choix du vocabulaire** et des exemples est un facteur déterminant pour l'acceptation ou le rejet par les élèves de toute **tentative d'explication sur le fond** d'un concept et de sa justification. En particulier nous avons pu constater que parler aux élèves de logique, de preuve, de vérité des énoncés dans un vocabulaire formel et sophistiqué est une pratique vouée à l'échec. C'est pourquoi il nous est apparu comme intellectuellement peu honnête de vous dire : «il faut employer un vocabulaire très simple pour discuter de ces problèmes en classe» et, en même temps, d'utiliser avec vous pour nous faciliter la tâche un vocabulaire de spécialistes.

III – CLASSES CONCERNEES.

Notre réflexion vise essentiellement les classes du collège, mais les problèmes qu'elle soulève sont déterminants dans l'enseignement du second cycle et du supérieur.

C'est à dessein que nous n'avons pas franchement séparé par niveau de classe les concepts présentés, parce que, dans bien des situations, cette distinction n'a pas vraiment de sens.

En effet, si dès la 6ème, nous abordons la plupart des démarches de raisonnement proposées ici, nous ne pouvons en aucune façon considérer que cette première approche engendre un acquis définitif : ce qui a été entrevu dès la 6ème-5ème doit être approfondi et confronté aux nouvelles acquisitions dans les années ultérieures.

De plus, nous devons prendre en compte la réalité des classes dans leur diversité : actuellement, de nombreux élèves de 4ème-3ème, mais aussi de 1ère, de terminale et même des bacheliers, n'ont jamais abordé franchement un certain nombre de concepts fondamentaux que nous exposons ici. On peut bien sûr le regretter et s'insurger contre cet état de fait, mais on ne peut pas raisonnablement imputer la responsabilité aux seuls élèves et par suite faire «comme s'ils savaient» !

IV – LA CRITIQUE EST AISEE...

Ce que nous présentons dans ce fascicule est beaucoup plus une attitude du maître face à la construction et à l'élaboration de raisonnements abstraits chez l'élève qu'un savoir spécifique à transmettre à un niveau donné.

Vous rencontrerez donc beaucoup de commentaires et remarques sur «l'attitude du maître» face à telle ou telle situation. Notre intention n'est pas de «culpabiliser» l'enseignant qui essaye de gérer au mieux des situations de classe parfois extrêmement difficiles. Disons, en toute franchise, que bon nombre des attitudes que nous réprouvons et caricaturons ici, ont été, consciemment ou non, les nôtres pendant des années. D'ailleurs, nous nous surprenons encore dans de telles attitudes et ce, malgré le travail de réflexion collective et d'observations mutuelles en classe que nous menons à l'I.R.E.M.

Alors, répétons-le : la critique est aisée... mais l'art est difficile !...

Chapitre I

LE DILEMME

Plus ou moins inévitablement, chaque enseignant se trouve confronté à deux exigences contradictoires :

- d'une part il doit apporter à ses élèves dans un laps de temps assez court des **connaissances bien précises, des algorithmes et des mécanismes de pensée efficaces,**
- d'autre part il doit développer leur **imagination créatrice et leur sens critique,** il doit créer chez eux le besoin de **comprendre** et la nécessité de se donner des moyens de **contrôle** sur ce qu'ils font et sur ce qu'on leur dit, afin qu'ils deviennent progressivement **autonomes** dans leurs apprentissages et dans la gestion de leurs connaissances.

Devant cette double exigence, l'enseignant est le plus souvent dans une situation paradoxale :

- s'il ne fournit pas certaines règles et s'il n'entraîne pas ses élèves à certains calculs, il ne pourra s'appuyer sur **aucune base solide** pour les faire réfléchir et leur apprendre à transformer les suggestions de leur imagination en propositions de caractère scientifique ;

— inversement si l'enseignant propose trop tôt les règles et les algorithmes de calculs, et si pour des raisons de rapidité et d'efficacité il donne à l'apprentissage par mimétisme et répétition un caractère trop systématique, il place l'élève dans une situation où il n'a **plus besoin d'imaginer et de comprendre**, puisqu'il lui suffit d'appliquer ! Au lieu de développer chez ce dernier autonomie et sens critique, il le rend **de plus en plus dépendant** : *ce qui est vrai, c'est ce qui a l'approbation du maître ; ce qu'il faut chercher, c'est la règle à appliquer pour trouver la bonne solution* (celle du maître).

Le paradoxe atteint son comble lorsqu'on se trouve en présence de classes faibles, hétérogènes et peu motivées ; pour «sauver les meubles», on se limite bien

souvent à l'apprentissage des seules techniques opératoires en considérant que dans ces situations de détresse, la réflexion et l'imagination créatrice deviennent des luxes qu'on ne peut plus se payer !

Devant ce dilemme nous avons cherché à dégager des issues positives et à mettre en œuvre l'alternative que nous essayons de détailler dans ce fascicule.

Nous justifions la nécessité coûteuse d'expérimenter une telle alternative par les observations et interrogations suivantes :

— en simplifiant à l'extrême (*«car sinon les élèves ne comprendraient pas !»*), en ne donnant ni le pourquoi ni le comment (*«parce que cela ne les intéresse pas !»*), mais seulement une règle ou un algorithme (*«c'est la seule chose qu'ils savent faire !»*), en ne prenant pas le temps de la découverte et de la discussion (*«parce qu'on est déjà très en retard dans le programme !»*) et surtout en ne faisant pas interagir les concepts entre eux, c'est-à-dire en ne présentant chaque notion que sous un seul aspect (*«parce que sinon ils embrouillent tout !»*), on place un grand nombre d'élèves, notamment ceux qui sont issus de milieu socio-culturel peu favorisé (ceux qui ne pourront pas avoir d'explications sur le fond en dehors de l'école) dans l'impossibilité de comprendre le sens même des connaissances que nous leur proposons ! Ils deviennent de ce fait incapables d'adapter et de réinvestir le peu qu'ils retiennent, car leurs connaissances sont (par construction) totalement liées à la situation d'apprentissage ;

— si tel est le cas, on ne peut échapper aux questions fondamentales suivantes :

- à qui et à quoi de telles connaissances peuvent-elles servir ?
à quels métiers donnent-elles accès ?
- l'instruction prolongée en milieu scolaire, puis universitaire, n'est-elle pas dans ces conditions une formidable mystification et ne débouche-t-elle pas à terme sur la frustration et l'insatisfaction de ne pouvoir exercer le type de métier auquel on se croyait préparé ?

I — UN EXEMPLE REVELATEUR D'UNE SITUATION PATHOLOGIQUE.

Considérons un instant le scénario suivant : (un peu caricatural et néanmoins très vraisemblable).

- Un élève : «ai-je le droit d'écrire $(3a + 5) / 3 = a + 5$?».
- Le professeur : *«non ! et d'ailleurs votre question montre que vous n'avez pas révisé vos règles de simplification !»*. (fin du scénario).

En fait, quand un élève pose cette question, que veut-il dire au juste ?... Si le maître s'interdit de répondre par oui ou par non et interroge l'élève sur le sens de

sa question, il le met dans le plus grand embarras : le plus souvent, ce dernier bafouillera et se défendra en répondant de façon plus ou moins exaspérée : *«je ne sais pas, moi ! est-ce que j'ai le droit ?... Ben, ça veut dire... est-ce que c'est juste ?... Est-ce que je peux ?... etc. etc.»*.

On peut remarquer que dans ce genre de situation, en demandant l'autorisation, et éventuellement en obtenant l'aval de l'adulte, l'élève cherche, et dans certains cas obtient une garantie morale : avoir une appréciation positive de son travail et/ou une bonne note à son exercice. A aucun moment par contre, il n'engage sa responsabilité sur le plan scientifique. Notre objectif est que l'élève puisse dans une situation comme celle-ci agir en raisonnant approximativement de la manière suivante : *«si j'ai le droit de simplifier, cela signifie qu'en remplaçant la lettre a par une quelconque valeur numérique, je dois, en évaluant les deux écritures algébriques $(3a + 5) / 3$ et $a + 5$, obtenir exactement le même résultat !... Faisons donc quelques essais numériques pour tester le sérieux de cette proposition»*. L'élève transforme ainsi une question de pure légalité en un problème signifiant sur le plan scientifique.

Nous pensons qu'il est tout à fait normal qu'un élève ait souvent envie d'effectuer des simplifications «illégales» et qu'il les effectue dans l'action par étourderie ou parce qu'il n'a que partiellement intégré les règles du calcul algébrique (*somme toute, on est à l'école pour apprendre !...*). Si par contre, face à un doute, nous constatons que nos élèves n'ont pas d'autre recours que l'appel à l'autorité, il nous semble que ce n'est pas acceptable : nous sommes là, en présence d'un indice qui, s'il se répète, montre nettement que nos méthodes d'enseignement ne favorisent pas suffisamment l'autonomie de l'élève.

II – L'AUTONOMIE DES ELEVES PAR UNE APPROCHE EN COMPREHENSION DES CONNAISSANCES.

Notre objectif est de construire des méthodes permettant à l'élève d'accéder à travers son travail scolaire à un minimum d'autonomie intellectuelle.

Il nous paraît indispensable, par exemple, que les élèves puissent faire une distinction très nette entre les deux questions suivantes :

1. *«Ai-je le droit de traverser la rue en dehors des passages cloutés ?»*.
2. *«Ai-je le droit de poser ma main sur une scie circulaire pour vérifier qu'elle est bien arrêtée ?»*.

Les exemples proposés sont provocateurs, mais il n'est pas du tout certain que les élèves (surtout les plus scolaires) fassent d'eux-mêmes la différence. Certes, dans

les deux cas, l'interdit vise à la sécurité des personnes, mais cet interdit n'est pas de même nature.

Dans le premier cas, il s'agit d'une convention ; elle peut donc être «enfreinte», si on est conscient que l'on perd, par ce fait, le supplément de sécurité qu'elle nous apportait.

Dans le deuxième cas par contre, il n'est pas question de convention ou de règlement : l'anticipation suffit à résoudre le problème. En effet l'élève peut mentalement savoir ce qui se passerait s'il posait sa main sur une scie, alors qu'elle tourne encore. Il peut donc se prouver qu'il ne doit pas effectuer ce geste et il n'a pas besoin pour cela d'en référer à une quelconque autorité.

Si nous reprenons l'exemple algébrique de la simplification abusive de $(3a + 5) / 3$ en $a + 5$, nous considérons que l'élève manifeste une certaine autonomie si, dans le doute, il a l'idée de tester cette «identité» pour quelques valeurs particulières du paramètre a en opérant non pas mécaniquement (comme c'est le cas dans la preuve par 9), mais parce qu'il pourra interpréter le résultat de ses expérimentations :

— si le test est négatif pour une valeur du paramètre, il a dans ce cas la **certitude** de la non-validité de cette simplification, et la fiabilité de cette preuve doit pouvoir égaler, sinon surpasser dans son esprit tout ce que pourrait dire le maître ou tout ce qui pourrait être écrit dans un livre ;

— si par contre le test est positif pour quelques valeurs de a , il y a **présomption** de la validité de cette simplification, présomption mais non preuve. Il s'agit alors d'une conjecture qu'il lui reste à prouver ou d'une règle qu'il doit pouvoir retrouver dans son cours.

III — LES CONSEQUENCES D'UNE CERTAINE PHILOSOPHIE DE L'ENSEIGNEMENT.

a. Avant la 4ème... après la 4ème...

La classe de 4ème est souvent considérée par l'ensemble du système éducatif (élèves, parents, professeurs, inspecteurs, etc.) comme le lieu d'un tournant décisif (voire même un virage à 180° !). *«En 4ème, cela devient sérieux ! On raisonne, on démontre !!!»* Comme si avant (maternelle, primaire, 6ème, 5ème) il était impossible de faire autre chose que des jeux, des dessins, des descriptions et des calculs !

Cette idéologie conduit inévitablement à faire ingurgiter en un temps record aux élèves de 4ème tout ce qu'on a décrété inutile ou impossible de faire sentir et découvrir progressivement dans les classes antérieures, en particulier tout ce qui concer-

ne les règles et conventions de la démarche scientifique.

C'est principalement à partir d'une telle idéologie que l'enseignant consciencieux et responsable se trouve enfermé dans une sorte de psychose du temps perdu qu'il va falloir, en 4ème, puis en 3ème, puis etc. rattraper coûte que coûte, et cela coûte très cher !

Le maître est alors contraint d'introduire dans un laps de temps très court la géométrie, les axiomes, les théorèmes, les démonstrations, les vecteurs, etc. etc. On arrive par ce procédé à une augmentation considérable (voire une création artificielle) des difficultés par simultanéité des présentations : chacun sait qu'on ne peut pas décemment attendre de la plupart des élèves qu'ils puissent aborder de front un contenu nouveau et la mise en évidence d'une démarche de l'esprit inhabituelle.

Cette simultanéité, subie plutôt qu'organisée, explique que bien souvent l'élève ne comprend ni le contenu ni la méthode.

b. A force de répéter, ça finira bien par rentrer !!!

La plupart des enseignants éprouvent un certain malaise devant ces situations de classes «qui ne suivent plus», et d'élèves qui piquent du nez sur leur bureau, chaque fois que l'on pose une question. Malgré tout, ne voyant pas de moyen réellement efficace pour surmonter ces difficultés, le maître avance inexorablement dans le programme.

Et pourtant... un élève qui n'a rien compris de significatif lors de l'introduction d'une notion ne court-il pas le risque de comprendre encore moins l'année suivante, même s'il s'habitue à «vivre avec» ?

Lorsqu'un élève aborde mal un concept nouveau (trop vite, sans un minimum de compréhension, sans possibilité de confrontation avec les concepts existants), il se trouve l'année suivante en présence d'une connaissance qui a «vieilli» dans son esprit, c'est-à-dire qui a perdu tout l'attrait et la séduction propres aux situations de découverte. Or, chacun a pu constater sur lui-même à quel point cette «envie de découvrir» peut, au cours de l'apprentissage, être un catalyseur ou un levier puissant pour contrebalancer la résistance naturelle au changement, la paresse intellectuelle et l'angoisse de l'échec face à l'inconnu.

Ainsi, en déflorant une notion sans l'approfondir, on casse le ressort de l'apprentissage. Nous avons constaté à plusieurs reprises que si le premier contact des élèves avec un concept correspondait à un échec profond, la seule évocation des mots s'y rapportant fait resurgir ce sentiment d'échec et l'esprit se ferme : *«la géométrie, j'y comprends rien ! les raisonnements, c'est bête ! etc. etc.»* C'est en grande partie, à

cause de ce fait, que bon nombre de redoublants sont encore plus «mauvais» en fin de redoublement qu'au début. De même en première année d'université, il est très difficile de motiver les étudiants sur la plupart des notions mathématiques, car ils ont déjà entendu parler de tout ! ils croient tout savoir ! ils n'ont pas envie de s'investir sur des concepts qui leur paraissent déjà «un peu usés !».

En résumé, il nous paraît vital (contrairement à l'idéologie courante, et pour ne pas défavoriser les élèves dans la suite de leurs études) de ne pas aborder une notion si on sait qu'on le fera dans des conditions telles (manque de temps, manque de maturité des élèves) que la majorité d'entre eux ne pourra en tirer un minimum de compréhension et d'appropriation positive. Et si par malheur, ayant abordé une notion nouvelle, l'enseignant réalise sur le terrain que certains élèves manifestent des incompréhensions et éprouvent des difficultés auxquelles il ne s'attendait pas, il nous paraît nécessaire (quitte à modifier profondément le déroulement prévu de la leçon) de prendre le temps d'en discuter pour essayer de cerner «l'ampleur des dégâts».

Dans le cas où il apparaît que la situation est trop bloquée pour qu'on puisse honnêtement espérer faire comprendre sur le champ ou même seulement faire entrevoir une solution positive, on peut convenir avec la classe «qu'il y a là un problème délicat» sur lequel on devra revenir après un temps de décantation et de réflexion.

Il reste alors au professeur à résoudre le problème crucial suivant : réorganiser de façon impromptue la suite de la leçon en faisant en sorte que la mise entre parenthèses précédente ne constitue pas un obstacle rédhibitoire pour la compréhension de la suite !

Cette réorganisation impromptue est d'autant plus délicate qu'elle demande au maître d'impulser un certain dynamisme pour faire repartir les élèves en état d'échec, alors qu'il est lui-même assez déçu, voire déprimé par cette sous-performance de ses élèves ou de sa didactique. Cette réorganisation nous paraît néanmoins indispensable : c'est le prix à payer pour que de nombreux élèves ne s'installent pas dans l'habitude de ne rien comprendre !

Mais n'exagérons rien : nous ne sommes pas en train de dire qu'il faut toujours attendre que tout soit bien compris par tous pour avancer, pas plus que nous ne prétendons qu'il existe des situations didactiques idéales qui permettraient en une fois de faire comprendre l'essentiel de chaque contenu nouveau.

Nous savons très bien que des notions importantes comme les situations additives et multiplicatives en primaire, la proportionnalité et le calcul algébrique en premier cycle, les limites et la continuité ultérieurement, ne se comprennent pas en une seule fois et demandent plusieurs années de maturation pour être réellement appropriées par l'élève. Ce que nous soulignons, c'est qu'entre «comprendre presque

tout du premier coup» et «ne rien entrevoir de significatif», il y a une marge de manœuvre importante à l'intérieur de laquelle nous pouvons nous inscrire ; tel est l'objet des analyses et propositions des chapitres suivants !

Chapitre II

LES IMPLICITES DE LA CLASSE ET LES MALENTENDUS QU'ILS ENGENDRENT

I – LANGAGE COURANT ET LANGAGE SCIENTIFIQUE.

a. La logique courante n'est pas logique ou la logique scientifique ne coïncide pas toujours avec la logique courante.

Partons d'un exemple : la phrase *«Si tu ranges ta chambre, tu auras du chocolat»*, éventuellement contestable sur le plan éducatif, ne présente aucune ambiguïté dans la vie courante. Il est clair, tant pour l'adulte qui l'énonce que pour l'enfant qui la reçoit, que si la chambre n'est pas rangée, il n'y aura pas de distribution de chocolat. Agir autrement serait certainement une faute sur le plan éducatif et serait considéré comme un comportement «illogique». Car en langage courant l'implication réciproque est sous-entendue par l'implication directe. Or du point de vue de la logique scientifique, la condition énoncée est suffisante pour obtenir du chocolat mais non nécessaire.

De même, la phrase *«Si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'auras pas de chocolat»* est interprétée comme une variante de la précédente (on a l'air de dire la même chose avec des négations, on menace au lieu d'encourager !). De fait, il n'existe aucun enfant qui ne crierait au scandale et à l'injustice si, après avoir rangé sa chambre, il se voyait refuser sa part de chocolat *«tu as dit tout à l'heure que si je ne rangeais pas ma chambre... alors, comme je l'ai rangée, tu dois me donner du chocolat !»*. L'adulte qui, au nom de la «logique scientifique», estimerait qu'il a parfaitement le droit de ne pas donner le chocolat, serait alors jugé comme de mauvaise foi.

C'est dans ce sens qu'il nous faut bien convenir avec les élèves qu'il existe au moins deux interprétations «logiques» : l'interprétation scientifique et l'interprétation courante.



Par exemple, un million est considéré a priori comme quelque chose de grand et c'est vrai s'il s'agit d'un million de dollars (et encore cela dépend pour qui !),

alors qu'un million, voire un milliard, voire un million de milliards de molécules d'eau n'ont jamais désaltéré personne !

C'est pourquoi les mots «petit» et «grand» ne sont pas utilisés seuls en langage scientifique (définitions, théorèmes), ils doivent être quantifiés ; on les remplace par la comparaison plus petit, plus grand que... mais, même sous forme comparative, le langage courant et le langage scientifique se distinguent très vite.



Par exemple, dans une salle de professeurs la phrase : «les élèves de 6ème A sont plus grands que les élèves de 6ème B» a du sens et véhicule une information qui peut être claire et utile pour le personnel de l'établissement. Vue comme une affirmation scientifique, cette phrase n'a plus de sens, elle est inutile voire dangereuse, car plusieurs définitions cohérentes et différentes peuvent lui être attribuées.

Définition 1 : tous les élèves de 6ème A sont plus grands au sens large que tous les élèves de 6ème B !

Définition 2 : la majorité des élèves de 6ème A sont plus grands que la majorité des élèves de 6ème B (c'est-à-dire il existe une partie E représentant plus de la moitié des élèves de 6ème A et une partie F représentant plus de la moitié des élèves de 6ème B telles que la définition 1 s'applique aux parties E et F !).

Définition 3 : la moyenne des tailles des élèves de 6ème A est supérieure à la moyenne des tailles des élèves de 6ème B !! etc. etc.

En toute rigueur ces différentes définitions ne recouvrent absolument pas les mêmes situations. C'est ainsi qu'une confusion volontaire et utile en langage courant devient inacceptable, car inutilisable, en langage scientifique.

b. Quelques différences significatives.

Pour schématiser la situation, nous vous proposons un tableau mettant en évidence les différences que nous avons rencontrées en classe entre langage et logique courants et langage et logique scientifiques.

LANGAGE ET LOGIQUE COURANTS	LANGAGE ET LOGIQUE SCIENTIFIQUES
L'affectivité joue un rôle primordial	Affectivité ? Connais pas
Principe du maximum d'information* Une phrase n'est vraie que si elle dit tout ce que l'on sait (dire la vérité = dire TOUTE la vérité)	Une phrase n'est vraie que si ce qu'elle annonce (conclusion) arrive toujours dès lors qu'on respecte les conditions restrictives (hypothèses)
Principe de symétrie Ce qui est «symétrique» est permutable. L'implication sous-entend presque toujours l'implication réciproque. On cite souvent l'implication alors que c'est l'implication réciproque que l'on veut mettre en œuvre	L'hypothèse et la conclusion ne sont pas permutable L'implication et l'implication réciproque sont a priori totalement indépendantes même s'il arrive parfois que l'on exploite l'implication pour démontrer la réciproque
Principe du vrai statistique Est vrai ce qui a lieu dans la majorité des cas. «L'exception confirme la règle»	Principe de certitude et notion de contre exemple Un seul événement vérifiant l'hypothèse et ne respectant pas la conclusion suffit pour prouver qu'un énoncé est faux.

* Le PRINCIPE DU MAXIMUM D'INFORMATION a été énoncé par B. Dumont (thèse de 3ème cycle) et peut se résumer de la manière suivante : L'auditeur attend toujours du locuteur qu'il dise la vérité au sens usuel ; il pense donc que ce qui n'est pas dit n'a pas lieu. Par exemple, à propos d'une rencontre internationale, la phrase : «les américains portent tous une chemise rouge» est souvent interprétée comme «les américains et eux seuls portent tous une chemise rouge... les russes, les anglais, les français n'en portent pas sinon ils l'auraient dit !».

II – CE QU’IL NOUS PARAÎT NECESSAIRE D’EXPLICITER AUX ELEVES.

La pratique généralement adoptée en classe est de ne pas mettre en évidence les différences entre le langage courant et le langage scientifique, en faisant comme si, d’instinct, les élèves allaient saisir ces nuances et le pourquoi de ces nuances.

Pour notre part, nous pensons qu’il est **indispensable** de faire apparaître ces **différences** et leur raison. En effet, bon nombre d’élèves, notamment ceux de milieu socio-culturel peu favorisé, ne disposent pas en dehors du cadre de l’école, de lieux de discussion et de confrontation suffisants pour tester la signification des phrases qu’ils emploient.

Pour habituer les élèves à interpréter différemment le langage courant et le langage scientifique et à ne pas considérer l’un comme supérieur à l’autre, il nous semble important de leur faire découvrir les fonctions spécifiques de ces deux langages.

1. Le langage courant a pour vocation première l’échange entre des êtres **physiques** qui se voient, se parlent, se connaissent, ont des sentiments mutuels. Il doit donc être souple et comporte naturellement des implicites : dans un contexte de vie courante, tout préciser devient odieux ! En particulier lorsqu’il s’agit d’exprimer des sentiments, chacun sait que les grands discours ne sont pas forcément le meilleur moyen de témoigner son affection ou sa sympathie.

Autrement dit, une phrase du langage courant est presque toujours liée dans sa signification profonde au contexte, à la personne qui la prononce, à celle à laquelle elle s’adresse, au moment où elle est prononcée et, comme le plus souvent il s’agit d’un langage oral, à ce que chacun entend et retient.

Bien entendu le flou artistique plus ou moins volontaire, les raccourcis, les imprécisions et les sous-entendus du langage courant n’ont pas que des effets heureux ! Ils engendrent des malentendus, des déceptions voire des drames : rendez-vous manqués, querelles de mots, accidents, etc.

Mais pour le moment on n’a rien trouvé de mieux ! Un langage courant trop codifié et trop rigide serait stérile : on ne se dirait plus rien, ce qui créerait des malentendus encore plus graves !

2. Le langage scientifique, lui, doit décrire des faits identifiables, de telle sorte que les résultats véhiculés puissent être interprétés de la même façon par des personnes très différentes qui ne se connaissent pas, ne se voient pas, n’ont pas forcément les mêmes goûts ou même ne s’entendent pas bien sur le plan humain.

C'est pourquoi les imprécisions inévitables du langage courant, tolérables dans la vie courante parce que l'on peut au moins partiellement rectifier les malentendus au coup par coup, deviennent par contre insupportables dans le domaine scientifique !

Pour aider les élèves à situer ce qui est en jeu, prenons une comparaison naïve.

Supposons que, n'étant pas mécanicien professionnel, M. Tondu ait néanmoins remis en état lui-même sa tondeuse à gazon. Il se peut qu'après quelques instants de fonctionnement apparaissent une vibration bizarre et puis progressivement un «tac-tac-tac» inquiétant...

Conscient d'avoir pu faire une erreur de remontage, M. Tondu va instinctivement tout arrêter pour effectuer une rapide vérification ; à moins que, alerté par ces bruits, il ne se souvienne brusquement avoir été dérangé par un coup de téléphone au moment où il bloquait l'écrou de fixation du couteau. L'incident sera alors réglé en deux tours de clef et M. Tondu en sera quitte rétrospectivement pour une bonne frayeur !

Lors de cet incident, comme à propos de nombreux malentendus du langage courant, le manque de rigueur et de précision aura été compensé par la «présence sur le terrain» : dans une telle situation l'erreur est supportable car son auteur, témoin des conséquences néfastes, peut instantanément la corriger.

En langage scientifique, tout comme en travail professionnel, il en va tout autrement. Supposons, pour poursuivre notre comparaison, qu'au lieu de réparer sa tondeuse lui-même, M. Tondu la confie au concessionnaire de la marque, M. Coupesec, et que, pour effectuer les vérifications d'usage, ce dernier ait demandé un bon prix. Le même incident (couteau non fixé à la suite d'un fâcheux coup de téléphone) risque fort de se transformer en un accident (pied coupé de M. Tondu).

Dans cette nouvelle situation, deux faits se conjuguent pour transformer éventuellement l'incident en accident :

- l'utilisateur fait confiance au professionnel ; il va donc hésiter très ou trop longtemps avant de se méfier de la réparation, même s'il est alerté par de nombreux indices. (Le caractère de vérité d'un énoncé, écrit dans un livre correctement imprimé, est difficilement mis en question) ;

- ici, contrairement à la situation précédente du jardinier-bricoleur-amateur, le réparateur et l'utilisateur sont deux personnes distinctes qui ne sont pas ensemble à la mise en route. Ainsi, alors que l'écrou se desserre progressivement, M. Coupesec aiguisé tranquillement un autre couteau sans se douter un instant du drame qui se prépare à la suite de son oubli ! (Tout comme celui qui énonce une phrase scientifique

ambiguë soupçonne rarement les faux théorèmes et les «mauvaises décisions» qui peuvent découler «logiquement» de sa phrase).

Si nous n'arrivons pas à faire comprendre aux élèves que la rigueur et la précision sont des nécessités vitales du travail scientifique (tout comme la survie professionnelle d'un mécanicien est subordonnée à l'acquisition de méthodes de travail qui le mettent à l'abri des pièges dans lesquels tombent les amateurs), les élèves vont subir nos incitations à la rigueur comme des «maniaqueries de profs» et des rituels de classe. Ils s'y plieront plus ou moins docilement «pour la note» ou «pour le prof» ; il y aura alors un détournement de sens, ce qui rendra stériles les efforts mutuels pour accéder à cette rigueur.

III – RIEN N'EST PLUS INTRANSMISSIBLE QUE L'EVIDENCE.

Qui d'entre nous n'est pris de désespoir lorsqu'il constate, après avoir magistralement expliqué qu'une racine carrée était toujours positive, que les deux tiers de la classe écrivent $\sqrt{(-2)^2} = (-2)$! (soupir !). Comment résister au désir de tout envoyer promener et comment ne pas abandonner l'espoir de faire comprendre... *«Ça ne sert à rien ! Je leur ai tout mâché, j'ai tout écrit au tableau, c'était absolument évident ! Et ils n'ont rien compris !»* (sanglots !).

a. Evident pour qui ? et pour quoi ?

Le même concept, évident pour le maître, l'est-il pour l'élève ? Si on regarde de près cette affaire, on est amené à constater que dans bien des cas ce qui rend difficile l'approche d'un concept, c'est bien moins sa complexité propre que l'incapacité dans laquelle on se trouve au premier abord de le détacher des multiples représentations parasites qui l'entourent. Par exemple, soupçonne-t-on ce qui se passe dans la tête de nos élèves quand on emploie des mots tels que direction (Lyon, Grenoble), propriété (privée...), volume (du son), plan (de salade) etc. Ces conceptions «spontanées» qui apparaissent chez l'apprenant à l'insu du maître (et bien souvent sans possibilité de contrôle) se superposent, voire même se substituent à la connaissance que l'on voulait introduire. Il n'est pas étonnant, dans ces conditions, qu'une même notion totalement étouffée chez l'élève par les fantasmes qu'elle engendre se présente à lui comme très difficile, alors qu'elle apparaît comme absolument évidente au maître qui l'enseigne à longueur d'années.

Pour tenter de mieux cerner ce problème, il nous semble de «bon sens» de rappeler les quelques «évidences» suivantes :

1. Ce que nous enseignons aujourd'hui en quelques années a demandé parfois des siècles et des siècles de maturation et a posé d'énormes problèmes à des êtres exceptionnels par leur intelligence et leur puissance de travail, alors que nous

nous adressons à tous les élèves.

2. Les erreurs et les «non-sens apparents» de nos élèves ne sont bien souvent que la version moderne des errements historiques que le génie de nos prédécesseurs n'avait pas permis d'éliminer spontanément.

S'il nous est souvent difficile de nous souvenir avec exactitude des difficultés que nous avons nous-mêmes rencontrées au cours de nos études, il nous faut bien convenir que notre «bon sens» soi-disant spontané s'est construit au fil de plusieurs milliers d'heures de recherche et d'hésitations. D'ailleurs que faisons-nous de ce fameux bon sens dès qu'il s'agit d'aborder une notion franchement nouvelle pour nous ? L'apprentissage de l'informatique, par exemple.

3. Enfin chacun de nous a pu constater sur lui-même à quel point la résolution d'un problème (comprendre de quoi il s'agit, imaginer une solution, trouver les énergies suffisantes pour mener les démarches jusqu'au bout !) exige un minimum de confiance en soi et une motivation par rapport à la nécessité d'obtenir un résultat !

Or la plupart des élèves ne possèdent pas assez ces deux puissants stimulants ! En effet bon nombre d'entre eux sont persuadés que seuls ils ne trouveront jamais rien parce qu'ils n'ont jusqu'à ce jour rien trouvé par eux-mêmes ; souvent ces élèves décident a priori que c'est trop difficile et pensent qu'ils ne pourront pas comprendre ! Ce manque de confiance est si ancré que si par bonheur ils entrevoient une solution, ils s'interdisent cette «évidence» en se disant : *«c'est sûrement faux parce que c'est trop simple !»*. Combien de brouillons intéressants ne sont pas recopiés parce que leur auteur n'y croit pas assez ! De plus, et indépendamment de ce manque de confiance, on constate que les résultats d'un problème, la conclusion d'un théorème ne sont souvent l'objet d'aucun enjeu réel pour la majorité des élèves : combien de fois le maître va-t-il s'arrêter à «l'avant dernière ligne» d'une démonstration en espérant que la classe va unanimement, spontanément, «évidemment» faire le dernier pas ! et puis... il ne se passe rien, les élèves ne se rendent même pas compte que le train est arrivé en gare et qu'il suffit de descendre sur le quai ! en fait la destination du voyage n'avait pas grande importance pour eux et... ils l'ont tout simplement oubliée en route.

b. Le décalage maître-élève.

Si on refuse de prendre en compte les remarques précédentes ou surtout si l'habitude et la lassitude nous les font oublier, on constate jour après jour l'apparition d'un décalage voire d'un fossé (ou d'une muraille) entre le maître et l'élève.

L'élève traduit cette situation par les exclamations *«j'y comprends rien !»*

ou *«c'est tout bête !», «les profs c'est tous des...»* et les professeurs, eux, entonnent le cantique : *«le niveau baisse ! ils ne savent rien ! ils ne font rien !»*.

En fait le décalage «maître-élève» est essentiellement de deux sortes :

- un décalage de connaissances ;
- un décalage de savoir-faire.

En général, le décalage de connaissances se contrôle relativement bien, car lorsque le maître aborde un contenu franchement nouveau, il est très conscient du fait que les élèves ne savent pas ce qu'il sait. Par contre, si ce qui est en jeu est l'introduction d'un certain mode de pensée, d'une certaine forme de raisonnement, d'une méthode d'analyse de la situation, le décalage «maître-élève» se contrôle beaucoup moins bien, il peut même devenir pathologique et insurmontable si le maître n'en prend pas conscience !

C'est ainsi que la plupart des professionnels ont tendance à présenter comme «allant de soi» un tour de main, un savoir-faire qui leur ont parfois demandé plusieurs années avant qu'ils ne parviennent à une maîtrise satisfaisante.

Par exemple, lorsqu'un menuisier professionnel vous observe en train de scier de travers une planche, il va sans doute vous faire une ou deux remarques pour vous aider à rectifier la position ; si malgré ses conseils vous sciez encore de travers, il ne résistera probablement pas au désir de prendre la scie et de vous faire en deux tours de main une coupe droite et d'équerre ! La chose se fera si magistralement que vous vous sentirez stupide de ne pas l'avoir réalisée vous-même, mais ce n'est pas pour autant que vous saurez faire !

En fait on constate très souvent que le professionnel sait «très bien faire», mais ne sait pas expliquer comment il s'y prend pour «si bien faire !». A la limite il peut dire que ce n'est pas son métier !

Par contre, c'est notre métier d'enseignant «de faire comprendre le pourquoi et le comment», même si notre formation a été quasi exclusivement centrée sur la connaissance d'un certain contenu.

c. Les conséquences du décalage maître-élève.

En classe l'enseignant qui n'est pas conscient de la puissance de ses propres réflexes dans l'élaboration de ses raisonnements, va tout naturellement agir comme si la plupart des élèves possédaient eux aussi ces réflexes (ou ce qui revient au même, comme si ces réflexes n'étaient pas indispensables pour la bonne compréhension de ce qu'il est en train d'expliquer). Dès lors il y a risque d'échec profond dans la communication maître-élève. Lorsque le maître présente comme très simples des faits

qui n'apparaissent pas comme tels aux élèves, ceux-ci se sentent tellement «stupides» qu'ils cherchent à s'en défendre, soit en faisant comme s'ils avaient compris, soit en rejetant globalement toute explication.

Si le maître passe aux exercices d'application, il découvre (avec stupeur) que la majorité des élèves est incapable de répondre à des questions qui lui apparaissent à lui-même comme extrêmement simples et évidentes (puisqu'elles découlent directement de ce qu'il a expliqué). Dans ces situations, le maître est souvent très déçu et découragé ; il risque de sous-estimer la capacité des élèves à comprendre les concepts sur le fond (*«ils ne comprennent rien, d'ailleurs cela ne les interesse pas ! etc. etc.»*). La répétition d'année en année de ces échecs peut devenir tellement douloureuse que le maître, même s'il y répugne, est tenté de remplacer l'explication par les thérapeutiques classiques de détresse : astuces, recettes, trucs mnémotechniques et surtout exercices mécaniques hautement répétitifs, car tout semble se conjuguer pour le pousser dans cette voie. A première vue, le «traitement» est efficace : la répétition semble réussir là où la découverte, la persuasion et l'explication avaient échoué, les élèves arrivent momentanément et sur des domaines très circonscrits à appliquer des méthodes exactes de résolution ; mais si par malheur on présente le problème sous un angle un peu différent, «la rechute» est assurée.

Nous sommes bien obligés de convenir qu'une séance de recherche et d'explication en classe semble au premier abord globalement beaucoup moins productive et efficace que la résolution d'une série d'exercices standard. Et pourtant sans nier l'intérêt de ces pratiques pour acquérir certaines techniques indispensables, nous pensons qu'elles ne sont pas suffisantes pour permettre aux élèves d'appréhender les problèmes réels dans leur complexité ; c'est pourquoi la majorité de nos propositions visent les apprentissages à long terme dont nos élèves ont besoin pour s'adapter et sans cesse évoluer dans leur vie sociale et professionnelle.

Chapitre III

LA CLASSE ET LA COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE

INTRODUCTION.

Si nous regardons de près le rapport des élèves au système scolaire, nous sommes bien obligés de constater que « nous » leur imposons de s'investir dans l'apprentissage d'un certain nombre de résultats dont ils ne voient ni le pourquoi ni le comment et qui bien souvent ne correspondent à aucune de leurs préoccupations.

Comme la vie en classe est entièrement réglée par le maître, celui-ci risque de devenir la source et le but de l'apprentissage.

Pour se convaincre de ce fait, il suffit de regarder à quel point l'énergie et l'imagination créatrice disponibles chez un élève, dans une matière donnée, sont liées à la qualité des relations affectives qu'il entretient avec l'enseignant et ce, non seulement en primaire, mais aussi dans le secondaire et encore de façon très marquée dans le supérieur. Si nous considérons l'autorité du maître comme nécessaire et l'estime des élèves à son égard comme déterminante, nous pensons également que des transferts excessifs sur sa personne ne sont pas positifs. Lorsque le maître est considéré comme « mauvais » tout s'effondre, et dans le cas où il est tenu pour excellent il peut y avoir un **détournement de sens** ; l'élève ne résout plus le problème mathématique, physique... posé, il cherche à en résoudre un autre : « comment plaire et satisfaire aux exigences du maître ? ».

L'élève se trouve alors dans la situation d'un acteur de théâtre qui, pour camper un personnage le jour de la représentation, cherche uniquement à plaire à son metteur en scène, sans se préoccuper de respecter les intentions de l'auteur et sans se soucier un instant des réactions du public.

En fait, derrière et au-delà du maître (le metteur en scène), il y a une **COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE** (l'auteur) qui élabore et fait évoluer un savoir dont une partie est proposée en classe. Cette communauté qui intervient de façon prépondérante mais totalement occulte dans l'apprentissage scolaire, l'élève ne la perçoit pas, pas

plus qu'il ne perçoit les retombées pratiques (le public) de ses apprentissages théoriques.

Pour que les apprentissages scientifiques puissent avoir des retombées extra-scolaires et, inversement, pour que des motivations extra-scolaires conduisent à un investissement dans les apprentissages théoriques, il est nécessaire qu'à travers ses activités scolaires l'élève puisse reconnaître différentes communautés et y trouver sa place. D'office il est membre de la communauté-classe, il est important qu'il la voit, d'un côté rattachée à la communauté scientifique par le biais du maître et des livres, de l'autre reliée au monde du travail par le biais des élèves devenus adultes.

Si l'élève découvre que, **par son travail scientifique**, il parvient à se situer, à tenir sa place dans une communauté large et exigeante (c'est-à-dire à la comprendre et à en être compris), il éprouve alors une certaine fierté et trouve là une motivation suffisante pour s'investir et donner du sens à des activités abstraites dont il ne voit pas forcément de prime abord l'intérêt.

C'est pourquoi il nous paraît fondamental d'introduire progressivement la **Communauté Scientifique** comme **une des composantes de la classe**, et d'explicitier, chaque fois que l'occasion s'en présente, ses objectifs et ses méthodes de travail.

I – OBJECTIFS COMPARES DE LA COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE ET DE LA CLASSE.

Le principal objectif de la Communauté Scientifique est de mettre en évidence des faits généraux ou des **phénomènes reproductibles**, c'est-à-dire des événements (**conclusions**) qui devront apparaître de façon systématique et invariable chaque fois qu'un certain nombre de conditions (appelées **hypothèses** en mathématiques) sont réalisées.

En classe, l'objectif n'est pas la découverte de nouveaux faits scientifiques, mais bien l'appropriation par la plupart des élèves d'une partie désignée (le **programme**) des découvertes de la Communauté.

Mais au-delà, et pour réaliser correctement cet objectif de connaissance, la classe, à notre sens, doit aussi se fixer comme finalité la formation de l'esprit et l'accès à l'autonomie, notamment autonomie dans l'apprentissage.

Cela signifie que la classe doit permettre à chaque élève de se construire des méthodes de travail telles qu'il puisse par la suite :

- s'investir positivement dans l'approche d'un problème dont il ignore a priori s'il a une solution et de quel type ;

— approfondir et renouveler (en autodidacte ou en exploitant au mieux les occasions qui lui sont offertes) les connaissances qui lui seront nécessaires dans sa vie d'adulte.

II – DES OBJECTIFS AUX METHODES DE TRAVAIL.

Les objectifs de la classe et ceux de la Communauté Scientifique étant bien distincts, il est longtemps apparu comme de « bon sens » (comme allant de soi) que les méthodes d'apprentissage de la première soient très distinctes des méthodes de recherche de la seconde.

De plus, et cette conviction était très forte en France autour des années 70, on a pensé que si les productions de la Communauté Scientifique étaient impeccablement présentées (ensembles de définitions et d'axiomes très cohérents, bon découpage des difficultés en théorèmes, corollaires etc.) et si leur « industrialisation » était de bonne qualité (ensemble de maîtres compétents, conditions de travail décentes) le « produit se vendrait bien », la majorité des élèves s'approprierait correctement les connaissances proposées et adopterait une démarche de l'esprit conforme à la logique scientifique.

A l'usage, cette théorie s'est trouvée largement infirmée et nous pensons que l'erreur essentielle à ce niveau réside dans le fait de considérer les connaissances scientifiques comme un produit fini qu'on peut livrer tout « emballé ».

On voit à l'heure actuelle, parmi les élus du système (ceux qui ont réussi le Bac) bon nombre d'étudiants errer dans leurs connaissances scientifiques comme des éléphants dans un magasin de porcelaine ! Bien souvent, ils ont l'esprit tout encombré de définitions et de théorèmes qu'ils n'arrivent pas à placer. Ils sont totalement incapables de reconnaître sous une forme simple : un dessin, un schéma, ou une phrase naïve, les énoncés formels qu'ils « connaissent » et qui sont indispensables au déroulement de la pensée scientifique.

Pour éviter les conséquences pathologiques d'un apprentissage dans lequel bien souvent les réponses précèdent les questions, nous pensons que la communauté classe doit connaître et reprendre à son compte, en les adaptant, les méthodes de travail de la communauté scientifique.

III – LES METHODES DE TRAVAIL DE LA COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE.

Observation et expérimentation.

Le point de départ de tout travail scientifique est l'observation et l'expérimentation (expériences de laboratoire en physique, chimie, etc., dessins géométriques, essais de calculs etc. en mathématiques). Dans certains cas, ces observations particulières laissent entrevoir un fait général.

Formulation de conjecture.

Si la multiplication des expériences particulières et (ou) quelques raisonnements intuitifs tendent à confirmer l'impression initiale, les scientifiques (individus ou groupe d'individus) émettent ce qu'ils appellent une CONJECTURE, c'est-à-dire une phrase assez précise tendant à cerner le « fait général » observé.

Ainsi, émettre une conjecture, c'est déclarer : *« A ce point de la recherche il est très probable qu'il s'agisse d'un fait vraiment général (ce qui a été observé sur les cas particuliers marche dans tous les cas similaires), mais pour le moment je n'en détiens pas la certitude »*.

Par exemple, après avoir formé les carrés des nombres 1, 3, 5, 7, 11, on peut conjecturer « que le carré d'un nombre impair est impair », ce n'est pas prouvé pour autant !

Mise à l'épreuve de la conjecture.

Une conjecture ne doit pas rester une opinion confidentielle : elle ne peut devenir opérationnelle que si elle est soumise à la Communauté environnante qui lui fera subir l'épreuve de la critique scientifique.

Ainsi, lorsqu'un membre de la Communauté Scientifique émet une conjecture, celle-ci s'en saisit, l'examine, la discute, éventuellement la reformule ou la modifie de façon à pouvoir prendre l'une des trois décisions :

1. La conjecture est retenue comme un énoncé vrai. Les membres de la Communauté pourront se servir sans crainte de cet énoncé comme d'un outil fiable.

2. La conjecture est rejetée, car ce qu'elle annonce ne se produit pas toujours (contre-exemple). La Communauté s'interdit définitivement l'usage de cette conjecture sous sa forme actuelle.

3. Les démarches entreprises ne permettent pas d'accepter ou de rejeter cette conjecture : on dit que la conjecture n'est pas résolue, que c'est un problème ouvert. L'examen de la question doit se poursuivre. La Communauté s'interdit momentanément de s'appuyer sur cette conjecture pour affirmer que tel ou tel autre résultat est vrai ou faux.

Validation de la conjecture.

Pour vérifier ou prouver l'exactitude des conjectures, les différentes Communautés Scientifiques (biologistes, physiciens, médecins, mathématiciens, chimistes, géologues, etc), si elles ont le même objectif — **s'assurer qu'il s'agit bien d'un résultat général** — n'ont pas pour autant recours aux mêmes moyens.

Pour certains (sciences expérimentales), un grand nombre d'expérimentations laissant apparaître une permanence de résultats est le critère fondamental pour transformer une conjecture en «règle, loi, principe, postulat, etc.». Cela ne les empêche pas d'avoir recours, à certains moments, à une démarche déductive s'apparentant à celle qui est privilégiée en mathématiques.

Pour d'autres (sciences déductives), les mathématiques en particulier, le grand nombre d'expériences, allant toutes dans le même sens, s'il renforce le sérieux de la conjecture, n'est pas considéré a priori comme un critère suffisant pour adopter définitivement cette conjecture comme «fait vrai». Le critère retenu par la Communauté Mathématique est ce qu'on appelle la **preuve** ou la **démonstration par déduction**.

♦ **LA PREUVE MATHEMATIQUE** est une activité intellectuelle d'anticipation et de formulation permettant à terme de mener au sein de la communauté un débat dont les règles de fonctionnement sont essentiellement les suivantes : les participants sont de bonne foi, ils rassemblent et agencent des faits et arguments qui ne posent plus problème à personne (les conventions, définitions, algorithmes, axiomes et théorèmes connus à ce jour par l'ensemble des participants), jusqu'au moment où chacun est parvenu à se convaincre lui-même et à persuader les autres qu'aucune situation particulière n'a pu, ne peut et ne pourra mettre en défaut le résultat annoncé.

Il est important de réaliser que malgré la rigueur apportée par chacun et quelle que soit la qualité des membres de la Communauté, la **preuve mathématique n'est pas plus que les autres une preuve absolue**, elle est (contrairement à une idéologie très répandue !) contingente à l'état de la Communauté qui la juge.

Ce qui est certain, c'est que plus la Communauté s'enrichit de chercheurs expérimentés et opiniâtres dans leur recherche de vérité, plus les résultats qui en découlent ont de «chances d'être vrais». De là à prétendre que les résultats mathématiques actuels sont définitifs et intangibles, c'est, toutes proportions gardées, prendre le risque de favoriser l'apparition de comportements du type de celui qui, en 1663, conduisit les tribunaux de l'Inquisition à faire abjurer Galilée parce qu'il prétendait (contre l'opinion majoritaire de la Société Savante de l'époque) que la terre

tournait autour du soleil et non l'inverse ! Le cas Galilée n'est pas un fait unique ; l'histoire abonde d'exemples où des Communautés Scientifiques très sérieuses ont pu, en toute bonne foi et malgré la rigueur qu'elles s'étaient imposée, affirmer avoir prouvé des résultats qui apparaissent aujourd'hui (parce que l'environnement scientifique a évolué) comme trivialement faux. (Par exemple, à propos de l'infini, des limites, de la continuité...).

Par ailleurs on peut considérer que le problème de la vérité absolue est un problème métamathématique insoluble. En effet, qui ou quel raisonnement «prouvera que la preuve est exacte» et, par suite, qui ou quel raisonnement permettra de prouver que la preuve de la preuve est exacte ; et, par un raisonnement bien connu des mathématiciens, on ne pourra jamais affirmer être remonté assez haut dans l'échelle des vérifications pour déclarer en toute certitude que l'énoncé en vue est définitivement prouvé !

IV – TRANSPOSITION DE CES METHODES A LA CLASSE.

Le groupe classe est un embryon de Communauté Scientifique ; nous pensons qu'il peut en adopter les méthodes pour une bonne part de ses activités, à savoir :

a. **Observations et expérimentations** : essais numériques (calculatrices), dessins, discussions et échanges par petits groupes...

b. **Formulation de conjectures** portées à la connaissance de la communauté-classe par leur transcription au tableau sans modification.

c. **Mise à l'épreuve et reformulation** éventuelle des conjectures, soit individuellement, soit par petits groupes.

d. **Validation** : organisation d'un débat à propos d'une conjecture donnée. Au cours de ce débat :

soit la classe parvient à se persuader que la conjecture est vraie ou fausse, et elle élabore collectivement une preuve ou un contre-exemple,

soit les arguments manquent ou s'effondrent ; personne n'est capable d'avancer des faits décisifs. La discussion permet seulement (et c'est peut-être là le plus important) une prise de conscience du fait qu'il y a là un vrai problème. Dans ce cas, il appartient au maître de prendre au bout d'un certain temps l'une des décisions suivantes :

— Il propose une simplification de la conjecture (augmentation des hypothèses ou réduction des conclusions) permettant à la classe de la résoudre.

— Ou bien il profite de cette impasse pour proposer un nouveau concept ou introduire un axiome ou une démonstration, de façon à débloquer la situation.

Cette impasse aura servi d'introduction à une nouvelle connaissance, qui, au lieu d'arriver «en plus», se présente «en réponse à» une question. Elle a ainsi beaucoup plus de chances d'être bien reçue !

— Ou bien il en réfère à la Communauté Scientifique, en demandant au groupe classe d'admettre provisoirement un résultat dont la preuve lui échappe. Il peut être dans ce cas très positif de situer à quel niveau d'études (seconde, terminale, études supérieures) cette question pourra être raisonnablement étudiée à fond. Ainsi, l'élève ne se sent pas frustré, bien au contraire, il a «envie» de la suite !

— Ou bien il décide d'arrêter la recherche sur ce point, sans pour autant donner de réponse. Le problème reste ouvert, à chacun de le faire évoluer ! En attendant de trouver dans l'année une nouvelle situation permettant de résoudre la conjecture, il est très important d'insister sur le fait que la conclusion provisoire est : *«on n'est pas arrivé à conclure»*.

La classe peut très bien dans ce cas rédiger une affichette et porter sa conjecture à la connaissance du C.E.S. ou du lycée, en invitant tous ceux qui peuvent l'éclairer sur ce point à le faire.

Outre ces quatre phases directement empruntées à la Communauté Scientifique, la classe doit impérativement comporter une cinquième phase qui lui est propre :

e. L'institutionnalisation : (activité spécifique de la classe).

Il s'agit de l'étape au cours de laquelle le maître désigne, parmi les résultats démontrés ou admis, ceux qui sont les plus importants pour la suite. Il indique ceux qui devront être appris et qui, ultérieurement, seront supposés connus, en se référant pour cela implicitement à son expérience personnelle et à la Communauté Scientifique et explicitement au programme.

Pour un chercheur ou un ingénieur, l'expérience quotidienne désigne de façon très significative les énoncés qui servent et disqualifie ceux qui ne servent pas ; en classe par contre, l'élève ne dispose dans bien des cas ni du temps ni du recul nécessaire pour effectuer un tri raisonnable parmi les différents résultats qui émergent ; à ce niveau, seul le maître détient les informations qui permettent de le faire.

V — LE ROLE DU MAITRE.

Au cours des étapes décrites dans le paragraphe précédent, notamment des trois premières et en partie de la quatrième, le rôle du maître est primordial bien que très différent de celui dans lequel on le voit généralement évoluer. Ce n'est plus celui qui gère le vrai et le faux, mais c'est grâce à sa compétence et sous son autorité que se met

en place un dispositif qui permettra progressivement à la communauté-classe de se persuader de ce qui est vrai et de ce qui ne l'est pas.

Nous avons constaté que les méthodes de travail de la classe et l'attitude du maître sont très liées au **STATUT QUI EST DONNE A LA PREUVE !** En effet le comportement des élèves dans la classe est profondément modifié suivant qu'ils perçoivent principalement la preuve comme une activité dogmatique et absolue, révélée par le maître, donnant accès à des résultats immuables et venus d'ailleurs, ou au contraire comme une activité beaucoup plus modeste d'élaboration collective, rigoureuse mais pragmatique, d'un consensus sans compromis, au sujet de résultats issus de leur propres recherches et expérimentations antérieures.

La prise de position du maître sur ce sujet n'est donc pas neutre, puisqu'elle détermine le champ des interactions possibles dans la classe. Il est clair qu'une présentation dogmatique de la preuve n'incite pas l'élève moyen à l'imagination et à la participation, elle pousse dans l'indifférence voire l'hostilité ceux qui ont du mal à comprendre ce dont il s'agit, ou qui, par tempérament, sont allergiques aux situations trop ordonnées et structurées qu'ils ressentent comme immobiles et impersonnelles.

Inversement on constate que le fait de convenir d'une certaine relativité de la preuve mathématique ne satisfait pas de prime abord le besoin de sécurité de bon nombre d'élèves consciencieux qui se réfugient (consciemment ou non) dans les mathématiques, parce qu'ils espèrent y trouver un havre de paix où la contestation et la subjectivité sont exclues. Ces élèves ont tendance à réagir en réclamant des enseignements toujours plus ordonnés et structurés.

Dans la plupart des cas, il s'agit d'élèves qui, au-delà d'une certaine apparence de solidité, ont en fait une fragilité de jugement et manquent de confiance en eux. Ils ont très peur du désordre et des alternatives, car ils ne voient pas comment rétablir par eux-mêmes les structures et effectuer des choix. C'est pourquoi il nous semble que ceux-là plus encore que les autres, ont besoin pour devenir autonomes, non pas de règles sécurisantes qui les confortent dans leur carence, mais bien d'un véritable apprentissage de la découverte et du choix, dans la pratique d'un débat où ils ne «s'en laissent pas conter» et où ils apprennent à convaincre par l'argumentation et non par référence à l'autorité.

◆ **EN RESUME** nous disons que chaque élève de la classe ne peut être réellement partie prenante de ce qui s'y passe et tirer profit des raisonnements scientifiques qui s'y produisent, que s'il est intimement persuadé du fait suivant : un raisonnement, si brillant soit-il, dès lors qu'il ne le convainc pas lui-même ou n'empêche pas l'adhésion des autres, n'est pas, à cet instant, une preuve ! Si le maître en convient, cela le conduira à bien des évolutions, voire des révolutions, par rapport aux pratiques de classe qu'il a éventuellement subies en tant qu'élève et reproduites en tant que maître.

Chapitre IV
LES ENONCES SCIENTIFIQUES
— ENONCE VRAI — ENONCE FAUX —
LES CONVENTIONS FONDAMENTALES DES SCIENTIFIQUES

ORGANISATION DU CHAPITRE.

Introduction : les intentions et les choix de ce chapitre.

I — Le concept d'énoncé scientifique.

II — Les opérations élémentaires sur les déclarations simples : les connecteurs «et», «ou» et la négation.

III — Les énoncés conditionnels simples : l'implication et l'équivalence.

IV — Le caractère abstrait des énoncés généraux.

V — Les énoncés privilégiés des mathématiciens : les énoncés conditionnels généraux (codes, conventions, pièges...).

INTRODUCTION.

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence la nécessité d'introduire en classe des énoncés du type **conjecture** : phrase tendant à généraliser des observations et des expériences particulières, phrase sur laquelle l'auteur s'engage et pense qu'elle est vraie sans en avoir la « preuve ».

CE QUE NOUS VOULONS ECRIRE...

A partir de là, si nous ne **précisons pas davantage** auprès des élèves le **statut des énoncés scientifiques** (par rapport aux énoncés du langage courant) et le **statut du vrai et du faux en mathématiques** (toujours en regard des usages courants), nous perpétuons une pratique très répandue dans les livres et dans les classes : **faire comme si les élèves pouvaient d'eux-mêmes réaliser cette distinction à travers les différents exercices et problèmes qu'ils ont à résoudre !** L'expérience montre que nombreux sont ceux qui n'y arrivent pas !

Par exemple, **beaucoup d'étudiants** en sciences sont capables de résoudre des problèmes techniquement difficiles (tant qu'ils correspondent exactement au contexte scolaire), alors qu'ils ne **maîtrisent pas** le sens de l'implication et se situent souvent très mal par rapport aux notions **d'énoncés vrais, d'énoncés faux, d'exemples et de contre-exemples**.

Ainsi en première année d'université, rechercher des primitives ou résoudre des équations différentielles sont des activités techniques en moyenne beaucoup mieux réussies que la résolution de problèmes élémentaires et néanmoins fondamentaux comme le suivant :

- ◆ Soit B une partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle la propriété suivante Δ est vraie :
- ◆ « Chaque réel x inférieur ou égal à trois appartient à B ».
- ◆ Comment peut-on situer B sur l'axe réel ?

Nombreux sont les étudiants qui ne savent pas quoi dire ou qui en déduisent malencontreusement que 3 est un majorant de B , c'est-à-dire que B est inclus dans l'intervalle $]-\infty; 3]$!!! Même après la production du contre-exemple « $B =]-\infty; 4]$ », certains ne voient toujours pas pourquoi et comment la seule déduction logique de (Δ) est : « $]-\infty; 3] \subset B$ ».

En fait certains d'entre eux n'arrivent pas à traduire (Δ) sous forme de l'implication « $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \Rightarrow x \in B$ » qui leur montrerait (par définition de l'inclusion) que la partie $]-\infty; 3]$ est incluse dans la partie B . D'autres, ayant remarqué que l'intervalle $]-\infty; 3]$ correspond aux hypothèses du problème, en déduisent froidement que la partie B ne peut être que cet intervalle !

Pour beaucoup, insister sur de telles questions c'est perdre son temps sur des problèmes secondaires ; à la limite, d'aucuns manifesteraient dans un premier temps de l'agacement, considérant qu'il s'agit là de pièges de «prof sadique», pièges assez semblables aux lignes continues presque complètement effacées, qui font le bonheur des gendarmes en mal de contraventions !

C'est une des raisons pour lesquelles nous pensons que l'explication sur la nature et la fonction des énoncés scientifiques doit s'engager dès la sixième, se poursuivre et s'approfondir à la lumière de situations concrètes tout au long de la scolarité.

A QUEL NIVEAU SE SITUER...

Nous avons éprouvé de très grandes difficultés pour situer le niveau d'approfondissement de ce qui nous semble devoir être impérativement expliqué en classe : comment rester proche des capacités et des préoccupations des élèves du premier cycle et comment néanmoins aborder les concepts dans un cadre théorique suffisamment large et rigoureux, pour que l'explication proposée soit la base d'une réflexion s'approfondissant et s'enrichissant au fil des années, sans être radicalement remise en question par l'approche de situations plus complexes ?

L'expérience accumulée au cours de nos recherches et de leur mise en pratique nous a clairement montré que, pour réaliser en classe une explication satisfaisant à cette double exigence (rester à la portée des élèves et s'appuyer sur un cadre scientifique solide), il faut se doter de techniques spécifiques de conduite de classe, et s'appuyer sur des situations-problèmes bien adaptées.

En particulier nous avons constaté que tout exposé de «logique pure» est inutile voire nuisible, car trop éloigné des situations familières des élèves : ces derniers peuvent très bien manier avec dextérité les tables de vérité sans faire pour autant le moindre rapprochement avec les énoncés courants.

Pour ces différentes raisons nous abordons ces problèmes à partir d'activités métamathématiques comme «Cosmonautes», «Circuit», «Vrai-Faux», «Poste d'aiguillage», «Math et Mac», etc., activités suffisamment simples en elles-mêmes et portant sur des objets assez familiers pour que les élèves puissent concentrer toute leur énergie sur la compréhension du sens de l'implication et des énoncés généraux ! (Ces différentes activités seront publiées dans des fascicules annexes et dans le journal «petit x»).

LES TROIS GROUPES DE QUESTIONS AUXQUELLES NOUS TENTONS DE REPONDRE...

Même si la structure de ce chapitre en cinq paragraphes apparemment assez indépendants ne le révèle pas directement, nous avons essayé, à travers eux, de dégager les trois questions suivantes :

- ◆ Quels sont les concepts fondamentaux mis en jeu dans la pratique des énoncés mathématiques et quelles difficultés didactiques engendrent-ils ?
- ◆ Quels objectifs de compréhension et de savoir-faire peut-on raisonnablement envisager pour la majorité des élèves dès la sixième ?
- ◆ Quelles exigences pour la poursuite de ces objectifs induit-elle ?

Avant d'aborder directement les différents paragraphes de ce chapitre, détaillons un peu ce que nous mettons derrière ces trois groupes d'idées.

■ A PROPOS DES CONCEPTS, IL S'AGIT ESSENTIELLEMENT DE DEGAGER :

- le concept de **phrases scientifiques** : celles qui peuvent être unanimement déclarées après discussion comme vraies ou (exclusif) fausses par la communauté ;
- le concept d'**implication** : relation non symétrique de type cause à effet entre deux assertions A et B ;
- le concept d'**énoncé général** : assertion concernant plusieurs, voire une infinité d'objets ou événements qui n'existent véritablement que par la pensée.

■ PARMI LES OBJECTIFS RAISONNABLES QUE DEVRONT ATTEINDRE PROGRESSIVEMENT LES ELEVES, NOUS DISTINGUONS :

- **pouvoir reconnaître** dans une phrase ce qui la rend ou non discutable sur un **plan scientifique** et pouvoir éventuellement la reformuler de façon à ce qu'elle le devienne ;
- **pouvoir donner du sens** à l'énoncé conditionnel simple «si P alors Q» en tenant compte des similitudes et des différences avec les pratiques du langage courant ;
- **pouvoir donner du sens aux énoncés généraux** qui se présentent explicitement ou non sous la forme :

«il existe un événement x de E pour lequel $P(x)$ » ;
 «pour tout événement x de E, alors $P(x)$ » ;
 «pour tout événement x de E, si $P(x)$ alors $Q(x)$ ».

Quand nous disons «donner du sens», cela signifie en particulier pouvoir instinctivement, en situation d'action, se poser à leur sujet le type de questions suivantes :

- que se passerait-il si cet énoncé était vrai ? (resp. faux ?) ;
- que faudrait-il faire pour se persuader qu'il est vrai ? (faux?) ;
- que suffirait-il de savoir pour être sûr qu'il est vrai (faux ?).

■ A PROPOS DES EXIGENCES VIS-A-VIS DU MAÎTRE :

nous avons déjà évoqué ici ou là un certain nombre d'exigences sur l'attitude du maître en classe ; pour l'heure disons que l'écriture-même de ce chapitre se veut tout autant :

- mise en évidence de la nécessité pour le maître d'effectuer une analyse didactique de la situation ;
- analyse didactique sommaire de cette situation ;
- première ébauche de solution (mathématique, métamathématique et pédagogique) en vue de répondre aux exigences nées de cette analyse.

La nécessité pour le maître d'approfondir ces questions ne nous est pas apparue directement ; elle s'est manifestée de façon de plus en plus nette au fil des expérimentations et observations mutuelles dans nos classes ! En effet, nous avons constaté que sans une traduction en langage ordinaire et en termes métamathématiques des bases élémentaires de la logique, le maître ne sait pas comment aborder un sujet où tous les concepts sont mélangés et où toutes les difficultés se présentent en même temps ; une connaissance trop strictement mathématique de ces questions (correspondant à une formation professionnelle exclusivement centrée sur les contenus) ne permet pas, dans bien des cas, de saisir le sens des propositions «apparemment stupides» des élèves ; ces dernières déconcertent tellement le maître non initié à la recherche des malentendus et au décodage des paradoxes, qu'il les balaie et les rejette violemment sans mesurer suffisamment les blocages qui risquent d'en découler.

POUR NEGOCIER UN CONTRAT POSITIF AVEC LA CLASSE...

Nous avons maintes fois observé dans nos propres classes qu'un manque de recul du maître par rapport aux notions abordées dans ce chapitre le conduit plus ou moins inévitablement, inconsciemment et, après coup à regret, à être dogmatique et cassant là où précisément il serait plus que jamais nécessaire de faire preuve d'écoute attentive et de compréhension. Or c'est sur cette volonté clairement manifestée ou au contraire ce refus d'explication à propos du sens des énoncés utilisés en classe que se noue implicitement l'essentiel du contrat didactique.

La négociation de ce contrat par l'explication du sens de la démarche scientifique doit absolument être réussie, car c'est pour nous, enseignants de mathématique, une occasion unique d'initier les élèves à l'une des contraintes fondamentales de toute vie en société : une communauté (en particulier la Communauté-classe) doit impérativement se doter de conventions à la mesure de ses objectifs, et obtenir de ses membres par l'adhésion en compréhension l'autodiscipline suivante :

- ◆ «quand une convention a été discutée et acceptée par la communauté, on ne la
- ◆ remet plus en question à tout moment, chacun s'oblige volontairement à la
- ◆ respecter, non pas bêtement et passivement, mais en raison des objectifs qu'on
- ◆ s'est assignés !».

Si bien sûr à l'usage, telle ou telle convention adoptée s'avérerait trop compliquée et difficile à manipuler, une discussion s'imposerait à terme pour voir si elle doit être coûte que coûte maintenue ou amendée !

I – LE CONCEPT D'ENONCE SCIENTIFIQUE.

Parmi les phrases présentant un caractère scientifique, on peut distinguer deux grandes catégories :

– d'une part, **les énoncés simples** : ceux qui ne portent que sur quelques objets parfaitement identifiés (quasiment concrets). Par exemple :

(Λ) «demain il pleuvra»

(déclarations simples)

(II) « $2 \leq 6$ »

(Ω) «si $p \in \{6, 10\}$, alors p^2 est un multiple de 4» (énoncé conditionnel simple) ;

– d'autre part, **les énoncés généraux** : ceux qui concernent une famille finie ou non d'objets dont la réalité et l'existence propres relèvent de la pensée abstraite. Par exemple :

(Λ') «le lundi il pleut»

(déclarations générales)

(II') «pour un entier n , $n \leq 2n$ »

(Ω') «si p est pair, alors p^2 est un multiple de 4» (énoncé conditionnel général).

A LA RECHERCHE D'UN CRITERE...

Mais à quoi reconnaît-on une phrase scientifique et quelles sont les exigences particulières de la communauté scientifique à leur sujet ?

Il nous semble raisonnable de retenir avec les élèves les critères suivants :

◆ «Pour qu'une phrase soit reconnue comme scientifique, il faut que ses termes et les conventions de la communauté dans laquelle elle est discutée soient tels que le sens qui lui est attribué soit le même pour tous et permette de la déclarer unanimement vraie ou (exclusif) fausse».

Regardons par exemple, les déclarations suivantes :

- 1) le chemin de fer passe devant l'école ;
- 2) 2,33 est plus grand que 2,298 ;
- 3) la phrase que vous lisez est fausse ;
- 4) ce pentagone est beau ;
- 5) le nombre 3 est pair ;
- 6) Zaïus a douze ans ;
- 7) je suis grand.

Nous voyons que les déclarations (1) («le chemin de fer passe devant l'école») et (6) («Zaïs a douze ans») peuvent, suivant la communauté à laquelle elles s'adressent, vérifier ou non les critères précédents.

Si la déclaration (1) est faite au conseil municipal d'un village qui n'a qu'une école et qu'une ligne de chemin de fer, les conventions et les implicites sont tels que cette phrase est unanimement reconnue comme vraie ou fausse ; à Paris par contre...

De même la déclaration (6) «Zaïus a douze ans» est claire, vraie ou fausse dans une communauté-classe qui possède un et un seul Zaïus ; elle n'a pas de sens s'il n'y a pas de Zaïus dans la classe, elle est ambiguë lorsqu'il y en a plusieurs !

En ce qui concerne les déclarations (4) «ce pentagone est beau» et (7) «je suis grand», elles seront progressivement rejetées par les élèves si nous saisissons les diverses occasions qui peuvent se présenter pour constater avec eux que (fort heureusement) il n'existe aucun critère objectif et universel de beauté ou de grandeur.

Enfin la déclaration (3) «la phrase que vous lisez est fausse» est un «gadget pour logiciens». Contrairement aux énoncés précédents, il n'y a pas de problème didactique à ce sujet car de tels paradoxes n'apparaissent pour ainsi dire jamais de façon naturelle en situation scolaire et extra-scolaire.

LA CONSTRUCTION ET L'ANALYSE PAR LES ELEVES DE NOMBREUSES DECLARATIONS...

Nous avons constaté que la construction par les élèves de nombreuses déclarations et leur discussion dans un débat contradictoire permettent aux élèves de prendre progressivement conscience de l'importance du contexte, de la formulation et des connaissances des personnes auxquelles on s'adresse.

Il arrive bien souvent qu'après avoir travaillé un certain temps sur une question, les implicites de la classe soient tels qu'un énoncé y satisfasse le critère des phrases scientifiques et ceci bien qu'il ne soit pas «exportable» tel quel !

C'est un très bon exercice pour apprendre aux élèves à bien préciser les hypothèses notamment le référentiel, que de se poser collectivement la question : *«si quelqu'un d'extérieur pénétrait maintenant dans la classe, comment lui formulerions-nous notre énoncé pour qu'il comprenne exactement ce que nous voulons dire ?»*.

Savoir prendre en compte l'interlocuteur est une qualité déterminante dans la vie courante, mais c'est une pratique dont l'élève de premier cycle, encore très centré sur lui-même, ne saisit pas bien la nécessité. A priori, un élève de sixième parle en supposant que tout le monde voit, comprend et sait ce que lui-même voit, et comprend. Les mathématiques peuvent à ce sujet jouer un rôle très important dans la sociali-

sation de l'élève. Ainsi par exemple la phrase «*demain je passe en terminale*» proposée par un élève de sixième comme une phrase fausse et la phrase «*dans les feuilles, il y a des carreaux*» proposée comme vraie par un autre sont révélatrices de la difficulté qu'éprouve l'élève de premier cycle à imaginer que les autres ne savent pas forcément ce qu'il sait, lui, au moment où il parle !

II – LES OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES DECLARATIONS SIMPLES LES CONNECTEURS «ET», «OU», ET LA NEGATION.

A partir de plusieurs déclarations simples, on est amené tout naturellement à construire par conjonction, disjonction ou négation de nouvelles déclarations. Si l'apparition dans le langage de ces nouvelles déclarations se produit spontanément, leur interprétation est, par contre, très souvent délicate.

Pour respecter l'exigence fondamentale des scientifiques «**chaque déclaration doit pouvoir être unanimement déclarée comme vraie ou (exclusif) fausse**», des conventions très précises ont été décidées au sujet de ces connecteurs, conventions que beaucoup d'élèves ignorent ou déforment d'autant plus facilement qu'elles sont, dans bien des cas, en désaccord avec les pratiques courantes ! Par exemple, lorsque sur un menu vous lisez : «escalope ou poisson», vous ne pouvez espérer avoir les deux ! le «OU» du menu est un «OU» exclusif. Or la convention des scientifiques à ce sujet est différente, puisqu'ils ont adopté la suivante:

LE «OU» DU MATHEMATICIEN...

- ◆ La déclaration «A ou B» issue des deux déclarations A et B est considérée comme vraie dans l'une quelconque des éventualités :
 - A seule vraie ;
 - B seule vraie ;
 - A et B simultanément vraies ;
- ◆ et comme fausse dans l'unique éventualité :
 - ◆ A et B simultanément fausses.

Cette convention correspond à une interprétation peu répandue dans le langage courant : «Pierre ou Paul viendront...», que l'on appelle le «ou» inclusif. Le problème pour les élèves est que le «ou» du langage courant supporte d'autres interprétations que seul le contexte désigne ou ne désigne pas. On trouve principalement :

— le «ou» exclusif : escalope «ou» poisson dans le menu, que les mathématiciens marquent lourdement par les expressions «ou (exclusif)», «ou bien» ceci, «ou bien» cela...

– le «ou» comparatif ou synonymique : «blanc bonnet ou bonnet blanc». Les mathématiciens préfèrent utiliser les mots égalité ou équivalence !

– le «ou» approximatif : «donne-moi quatre ou cinq feuilles», le «ou» signifiant «environ» : ici, on pourra, suivant son tempérament, donner entre 3 ou 6 feuilles ! Ce «ou» approximatif est assez dangereux en mathématiques.

LA PHILOSOPHIE DU «OU» DES MATHÉMATICIENS...

Plus fondamentalement il nous semble que si de nombreux élèves, notamment ceux des classes supérieures, méconnaissent l'existence et la nature des conventions très précises des mathématiciens au sujet des connecteurs, c'est surtout parce qu'ils ignorent la philosophie ou logique du discours scientifique. Cela les conduit, en particulier à propos de l'usage du «ou», à considérer comme très paradoxales certaines utilisations que nous (mathématiciens) en faisons ; c'est le cas dans les expressions « $a \leq b$ », « $A \cup B$ » !

Explicitons un peu notre propos :

Par habitude les élèves savent que les phrases du langage courant sont construites en vue d'une réalisation probable. Ainsi dans ce langage, dire : «A ou B», signifie que l'on pense a priori que les situations A et B sont toutes les deux possibles. Par exemple, vous serez sans doute irrité si, ayant lu sur le menu «escalope ou poisson», on refuse sans explications de vous servir l'un des deux plats. Par suite, comme le discours scientifique est explicitement déclaré de «bonne foi», certains élèves sont réservés et répugnent à écrire « $2,9 \leq 3$ » ou « $\pi \leq 4$ » ; ils disent : «*vous n'avez pas le droit d'écrire «2,9 inférieur ou égal à 3» puisque vous savez (pertinemment) que «2,9 n'est pas égal à 3 !»*». Et pourtant... ne se cache-t-il pas derrière ces usages un aspect fondamental de la philosophie des énoncés généraux ?

Ecrire « $\pi \leq 4$ » c'est insister sur le fait qu'un nombre compliqué et abstrait comme π ne dépasse pas le nombre simple 4 et, par suite, que son triple ne dépasse pas douze et sa racine carrée (hyper-compliquée) 2. En remplaçant π par 4, on peut se prouver que le grillage entourant un champ carré de côté 6 m suffit pour entourer un champ circulaire de rayon 3 m, et ceci de façon simple et rigoureuse, alors qu'en effectuant des faux «calculs exacts» par exemple, en prenant $\pi = 3,1416$ on risque si on ne fait pas attention de faire une erreur grossière d'ordre de grandeur !

Ecrire formellement «si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ », c'est laisser croire aux élèves que les «mathématiques rigoureuses» consistent à raconter des vérités de La Palice. Et cependant en pratique c'est ce type de «perte volontaire d'information» qui justifie (car elle permet de les utiliser efficacement) les théorèmes généraux !

Par exemple le raisonnement classique : «comme X est un rectangle, c'est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent en leur milieu...» n'est autre que la forme implicite du raisonnement formel :

«si $X \in A$ alors $X \in A \cup B$, X a donc les propriétés des éléments de $A \cup B$ »,

raisonnement dans lequel A désigne les rectangles et B les parallélogrammes, raisonnement au cours duquel on perd volontairement l'information «d'orthogonalité» pour ne garder que le «parallélisme» !

Ainsi nous pensons qu'à travers les débats que l'explication sur les conventions liées aux connecteurs ne manquera pas de susciter, c'est aussi et surtout le sens ou la philosophie du discours scientifique qui pourra être progressivement mis en évidence auprès des élèves !

LE «ET» DU MATHEMATICIEN...

Ce «et» pose en général moins de problème, encore que :

— d'une part il est souvent sous-entendu, même dans des textes mathématiques ; par exemple, «soit un triangle rectangle (et) isocèle» ;

— d'autre part, dans la vie courante, la variable temps permet la réalisation de deux événements sans en imposer la simultanéité. Ainsi des phrases comme «il a pris un chaud et froid», «il est doux et coléreux», «fromage et dessert», «d'accord et pas d'accord», «cela est vrai et faux» ont des significations précises en langage courant, mais ne doivent pas et ne peuvent pas être interprétées comme des déclarations scientifiques.

De façon précise, la convention des logiciens au sujet du «ET» est la suivante :

- ◆ La déclaration «A et B» n'est vraie que si les deux déclarations A et B le sont simultanément.
- ◆ Ainsi, par convention, «A et B» est une déclaration fausse dans les trois cas :
- ◆ — A seule est fausse ;
- ◆ — B seule est fausse ;
- ◆ — A et B sont simultanément fausses.

LE «NON» DU MATHEMATICIEN...

La négation est toujours délicate à manipuler avec les élèves de sixième et de cinquième ; certains d'entre eux ont tendance à déclarer une phrase fausse tout simplement parce qu'elle contient une négation. Ainsi les phrases «un rond n'est pas un carré», «un chat n'est pas une souris» ont été construites par des élèves de sixième en vue de proposer des assertions fausses !

La convention des scientifiques à ce sujet découle logiquement des conventions précédentes et du principe suivant lequel une déclaration ne peut être que vraie ou (exclusif) fausse :

- ◆ La déclaration simple «non P» n'est vraie que si la déclaration P est fausse et vice versa.

Ainsi la déclaration «P et non P» n'est jamais vraie (déclaration impossible ou «absurde»), c'est la base du **raisonnement par l'absurde** ! La déclaration «P ou non P» est toujours vraie, c'est une tautologie et c'est la base du **raisonnement par alternative** : «lorsque P est un énoncé scientifique, de deux chose l'une : ou bien P ou bien non P !».

III – LES ENONCES CONDITIONNELS SIMPLES : LES CONCEPTS D'IMPLICATION ET D'EQUIVALENCE.

Comme nous l'avons déjà précisé au début du chapitre, la plupart des énoncés mathématiques sont des énoncés conditionnels généraux, c'est-à-dire du type : « $\forall x, x \in E$, si $P(x)$ alors $Q(x)$ ».

Néanmoins la **signification**, la **gestion**, la **démonstration-même** de ces énoncés généraux passent le plus souvent par l'étude et l'analyse des propositions particulières : « $P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$ », où x_0 est un événement choisi ; en effet le **principe de la démonstration abstraite du mathématicien** consiste le plus souvent à faire un **raisonnement général ou plutôt générique** à propos d'une situation particulière : démontrer que $P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$ en considérant un x_0 particulier choisi et fixé et en faisant très attention à ce que les manipulations utilisées ne s'appuient pas de façon cruciale sur la spécificité de cet élément particulier. Ceci permet de dire en fin de compte : *«ce que je viens de faire intellectuellement avec cet élément x_0 particulier, je peux le faire (avec les aménagements convenables) avec tous les éléments x qui vérifient les mêmes hypothèses que celles que j'ai utilisées explicitement sur cet x_0 particulier ! Ma démonstration particulière est donc générale !»*. C'est par exemple ce que l'on fait en géométrie en travaillant sur une figure particulière mais générique, dans la mesure où l'on code les hypothèses et résultats intermédiaires de façon à ne pas se laisser «piéger» par les particularités du dessin ou par les évidences usuelles.

C'est pourquoi il nous paraît essentiel de bien délimiter quelles sont les conventions et difficultés didactiques propres aux énoncés d'implication simple du type «si $P(x_0)$ alors $Q(x_0)$ » et de voir après coup ce qui relève plus spécifiquement des difficultés propres à l'aspect «général» des énoncés généraux.

– L'implication : $A \Rightarrow B...$

Par convention, l'énoncé «si A alors B» est vrai dans les trois cas suivants :

- A vrai – B vrai ;
 - A faux – B faux ;
 - A faux – B vrai ;
- il n'est faux que dans le cas : A vrai – B faux.

– L'équivalence : $A \Leftrightarrow B...$

L'énoncé «si et seulement si A alors B», est vrai dans les deux cas suivants :

- A vrai – B vrai ;
 - A faux – B faux ;
- il est faux dans les deux autres cas.

POUR METTRE EN EVIDENCE UNE PREMIERE DIFFICULTE.

Prenons un exemple :

si «A» est la déclaration «il pleut demain»
 et si «B» est la déclaration «je vais au cinéma»,
 la phrase «s'il pleut demain, j'irai au cinéma» traduit l'implication « $A \Rightarrow B$ ».

Considérons alors deux types de réalisation de cette phrase :

- premier cas «il pleut et je ne vais pas au cinéma» ; quel que soit le point de vue adopté, (scientifique ou langage courant), chacun s'accordera pour considérer qu'alors la phrase « $A \Rightarrow B$ » est fausse ;
- deuxième cas : «il ne pleut pas et je vais (quand même !) au cinéma» ; du point de vue scientifique, la phrase $A \Rightarrow B$ est exacte, mais ce jugement est paradoxal pour l'élève habitué, au niveau du langage courant, à considérer qu'une telle phrase signifie «et s'il ne pleut pas, je n'irai pas au cinéma».

Ainsi, pour de nombreux élèves, par prolongement des habitudes :

« $A \Rightarrow B$ » sous-entend «non A $\Rightarrow$ non B»,

ce qui par contraposition signifie « $B \Rightarrow A$ ». *«Ça c'est logique !!! Non ?».*

A ce niveau, on doit faire la différence entre les élèves (peu nombreux) qui ne distinguent pas les parties A et B d'une implication et par suite ne conçoivent que des équivalences (sans trop savoir d'ailleurs ce que ce terme recouvre) et ceux beaucoup plus nombreux qui distinguent bien hypothèse et conclusion, énoncé direct et énoncé réciproque mais qui, par le raisonnement «tordu» et néanmoins «assez logique» pré-

cédent arrivent inconsciemment à se persuader dans l'action que l'énoncé direct induit l'énoncé réciproque.

On peut «épingler» ce comportement sur des énoncés comme :

«les multiples de 9 sont des multiples de 3».

«Faux» vont déclarer certains élèves, car : «12 n'est pas multiple de 9 et c'est pourtant un multiple de 3, car $3 \times 4 = 12$!».

Ces élèves ne se rendent pas compte que ce faux contre-exemple de l'énoncé direct est en fait un contre-exemple de l'énoncé réciproque : «les multiples de 3 sont des multiples de 9».

UNE METHODE DE TRAVAIL EN CLASSE FACE A CES FAUX PARADOXES...

Lorsque nous nous trouvons en classe face à de tels quiproquos, nous nous interdisons le plus souvent de résoudre le problème par un débat purement oral qui risque de n'apporter éclaircissements et méthode qu'à ceux qui ont déjà presque tout compris ; par contre, nous écrivons au tableau l'énoncé litigieux et, après avoir collectivement isolé et étiqueté les parties A et B de la phrase (par exemple : A : «être multiple de 9» et B «être multiple de 3»), nous demandons à chaque élève de décider si le sens de notre énoncé est l'implication « $A \Rightarrow B$ » ou bien l'implication réciproque « $B \Rightarrow A$ » ou encore les deux simultanément.

Au cours du débat, nous invitons la classe à formuler en langage simple les différents énoncés traduisant les écritures formelles « $A \Rightarrow B$ », « $B \Rightarrow A$ ». Cette méthode permet à beaucoup d'élèves de se situer par rapport à des problèmes où habituellement «tout s'embrouille dans leur tête» dès que la situation est un peu trop complexe ; elle permet aussi à ceux qui «ont compris» de pouvoir expliquer leur pensée autrement que par les affirmations péremptoires ou injurieuses du type : «c'est évident, ça se voit, tu comprends rien etc.».

Nous disons qu'en effectuant dès le début de la sixième ce type de «codage-décodage : langage courant — langage formalisé», à propos de situations de la vie quotidienne et de situations mathématiques simples, notamment au sujet des formules d'aires et de périmètres, on peut à propos de l'implication atteindre avec des élèves de niveau intellectuel très moyen les objectifs résumés au paragraphe suivant.

LES OBJECTIFS DIDACTIQUES FONDAMENTAUX AU SUJET DE L'IMPLICATION...

En situation d'action (c'est-à-dire les déclarations A et B étant plus ou moins explicitement formulées dans le problème ainsi que l'implication $A \Rightarrow B$), l'élève doit progressivement manifester les compétences suivantes :

■ **POUVOIR DECODER LE MESSAGE $A \Rightarrow B$, C'EST-A-DIRE :**

- être capable de le mettre sous la forme «si... alors» ;
- percevoir le rôle le plus souvent non symétrique de cause à effet entre l'hypothèse A et la conclusion B. Ceci suppose que l'hypothèse et la conclusion ne soient pas repérées par des critères simplistes du type : position géographique (l'hypothèse est au début de la phrase, la conclusion à la fin etc.) mais par le sens que l'on peut attribuer à la phrase ;

- progressivement le reconnaître, l'utiliser ou le transformer si nécessaire en «non $B \Rightarrow$ non A», qui en est la contraposée ;

■ **SAVOIR UTILISER A BON ESCIENT L'IMPLICATION $A \Rightarrow B$, C'EST-A-DIRE :**

Prendre conscience que l'information $A \Rightarrow B$ seule ne renseigne pas sur la vérité de B (pour pouvoir affirmer celle-ci, il aura d'abord fallu s'assurer de la vérité de A) et ne pas transformer cette précaution en une règle dangereuse du genre : «il faut toujours vérifier l'hypothèse».

En effet, cette règle peut conduire les élèves à deux types de comportements pathologiques :

ou bien confondant les hypothèses ou données du problème posé avec les hypothèses de l'énoncé qu'ils voudraient utiliser pour le résoudre, ils essaient de démontrer les hypothèses ou données du problème !

ou bien ils induisent que l'hypothèse est nécessaire à la conclusion, c'est-à-dire que si l'hypothèse n'est pas vraie, la conclusion non plus. On retombe alors sur la situation : «s'il pleut j'irai au cinéma» (confusion implication-équivalence).

Comme cette confusion est rédhibitoire pour la compréhension de la démarche scientifique, nous pensons qu'il nous faut être très vigilants sur la façon dont s'exprime en classe la nécessité de «vérifier l'hypothèse».

■ **SAVOIR DEMONSTRER QUE L'IMPLICATION $A \Rightarrow B$ EST VRAIE EN UTILISANT SUIVANT LES CAS L'UNE DES METHODES SUIVANTES :**

- Par enchaînement c'est-à-dire en introduisant une propriété intermédiaire C dans l'espoir d'obtenir plus facilement les implications $A \Rightarrow C$ d'une part, et $C \Rightarrow B$ d'autre part.

Bien souvent l'enseignant utilise une telle démarche sans expliciter suffisamment aux élèves ce qu'il est en train de faire ; du coup ceux-ci ne pensent pas à l'introduire eux-mêmes. Par exemple les conjectures : « $2 \times 3 \times 5 = 5 \times 3 \times 2$ » et a fortiori « $2 \times 3 \times 5 \times 9 = 9 \times 3 \times 5 \times 2$ » etc. font beaucoup hésiter les élèves ! Ils ne voient pas comment se persuader qu'elles sont vraies sans tout effectuer !

En fait ils ne remarquent pas que derrière l'écriture $2 \times 3 \times 5 \times 9$ il y a d'abord l'associativité $((2 \times 3) \times 5) \times 9 = (2 \times 3) \times (5 \times 9) = \text{etc.}$ et que le problème est ici de penser à appliquer en «cascade» la règle de commutativité qu'ils utilisent sans même y penser quand il s'agit du produit de deux nombres !

— En montrant que la contraposée «non B $\Rightarrow$ non A» est vraie. Ainsi par exemple x étant un nombre entier supérieur à 2, pour montrer que «si x est premier alors il est impair» on ne peut que montrer que «si x n'est pas impair alors il n'est pas premier».

— Par l'absurde, c'est-à-dire en essayant de faire apparaître une contradiction ou «absurdité» lorsqu'on prend comme hypothèse «A et non B». C'est la méthode employée notamment dans nombre de théorèmes de 4ème sur le parallélisme, l'absurdité étant un résultat venant en contradiction avec l'axiome d'Euclide.

Ces deux dernières démonstrations sont naturellement difficiles pour les élèves, car très paradoxales. Et cependant leur pratique contribue à donner du sens aux différents énoncés. En effet, en envisageant les répercussions que pourrait avoir sur les résultats qu'il connaît la négation de tel ou tel nouveau résultat, l'élève est amené à établir des liens entre ce qu'il tient pour vrai et ce qu'il est en train d'appréhender. C'est pourquoi malgré les difficultés qu'engendre cette démarche, nous pensons (contrairement à une idéologie très répandue «*il ne faut pas faire de démonstration par l'absurde avec les jeunes élèves*») qu'il ne faut pas la bannir systématiquement même en sixième, cinquième, mais la pratiquer lorsqu'elle s'impose naturellement, en sachant qu'il va falloir aller très lentement et que cela posera nécessairement des problèmes.

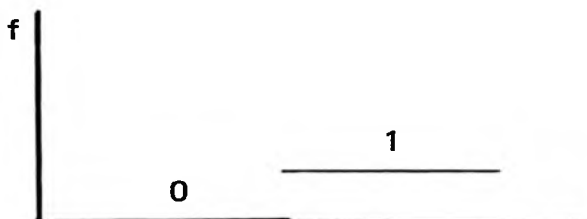
A notre sens, ce qui est néfaste, ce n'est pas de mettre en œuvre ces démonstrations, mais c'est de les pratiquer sans expliciter longuement, avant, pendant et après la démarche que l'on a adoptée.

■ SAVOIR MONTRER QUE L'IMPLICATION «A $\Rightarrow$ B» EST FAUSSE PAR LA TECHNIQUE DU CONTRE-EXEMPLE.

L'élève doit réaliser que si la conclusion B est fausse, l'hypothèse A étant elle aussi non vérifiée, l'implication «A $\Rightarrow$ B» est paradoxalement vraie. Nous avons déjà évoqué ce point et nous y reviendrons plus loin sous l'étiquette «faux contre-exemple» : production d'événements particuliers ne vérifiant «ni l'hypothèse A, ni la conclusion

B», en vue de nier l'implication « $A \Rightarrow B$ ». Il s'agit là d'un problème si délicat, qu'il est loin d'être maîtrisé même par de «bons» étudiants.

Par exemple un élève de cinquième propose comme type de phrase fausse : «*si un nombre est divisible par deux, il n'est pas divisible par cinq : exemple 7 !*» (sic). Et un étudiant de DEUG A propose pour nier l'énoncé « f continue $\Rightarrow f$ dérivable», le «contre-exemple» suivant :



IV – LE CARACTERE ABSTRAIT DES ENONCES GENERAUX.

Etant donné que la fonction des mathématiques est essentiellement l'anticipation et la généralisation, il est de fait que la plupart des énoncés de cette discipline ne sont pas des déclarations portant sur un, voire quelques objets ou événements totalement explicités, mais sont des énoncés généraux concernant une famille finie ou non d'objets ou événements abstraits dont la plupart ne sont pas directement appréhendables mais seulement intellectuellement concevables. Ces objets ou événements sont désignés, cernés, regroupés dans un ensemble : le référentiel. Par exemple à la déclaration simple « $2/3$ n'est pas entier», on peut substituer la déclaration plus générale «les nombres de la forme $\frac{2}{3}x$ ne sont pas entiers» ; et à la déclaration simple «la nationale 7 traverse plusieurs départements», l'énoncé plus général «les nationales traversent plusieurs départements».

A ce niveau l'élève est confronté à deux difficultés principales :

— d'un côté il doit tenir compte de **plusieurs**, voire d'une infinité d'objets abstraits et non pas seulement du ou des quelques objets auxquels il pense immédiatement ;

— **mais surtout** il doit réaliser que des énoncés comme :

«les nombres de la forme $\frac{2}{3}x$ ne sont pas entiers»,

«Les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires»,

« $(ay = by) \Rightarrow (a = b)$ »,

«les nationales traversent plusieurs départements» etc.,

ne sont pas scientifiques a priori, car leur caractère de vérité ne pourra être discuté par

une communauté qu'une fois implicitement ou explicitement convenus les nombres x , les parallélogrammes, les nombres y , et les nationales respectivement pris en considération.

En d'autres termes il faut que les élèves réalisent :

- qu'un énoncé général n'est autre qu'une famille d'énoncés simples à propos d'une famille précisée d'objets ou événements d'un même ensemble (le référentiel) ;
- que ces différents énoncés simples ont tous le même sens ; ils sont portés par une même phrase qui contient une variable (mot, lettre ou symbole) repérant ou identifiant les divers objets ou événements auxquels cette déclaration se rapporte ;
- que cet énoncé général ne peut devenir un énoncé scientifique que s'il contient implicitement ou explicitement des quantificateurs du type «pour tout» ou «il existe» précisant quels sont les objets du référentiel auxquels se rapportent les conclusions ou affirmations de l'assertion.

Si on observe les pratiques de classe, on constate que le référentiel et les quantificateurs sont très souvent implicites dans le discours de l'enseignant et cela lui paraît bien normal tant le contexte mathématique lui semble les indiquer clairement ; pour l'élève, le référentiel et les quantificateurs ne figurent pour ainsi dire jamais dans ses propos tant il lui semble naturel que les objets dont il parle sont pour les autres ceux auxquels il pense lui-même.

Reconnaissons que, si ne sont pas repérées les situations dans lesquelles la communauté scientifique convient (par abus, pour simplifier, par élégance de style, etc.) de ne pas expliciter référentiel et/ou quantificateurs et si les élèves ne sont pas informés des implicites convenus, nous risquons d'assister à un dialogue de sourds !

■ L'EXPRESSION : «IL EXISTE UN...».



Etant donné un ensemble E appelé référentiel et une déclaration générale P sur E (c'est-à-dire une application P de E dans l'ensemble à deux éléments vrai et faux), l'énoncé : «il existe un élément x de E pour lequel la déclaration est vraie», noté symboliquement « $\exists x, x \in E ; P(x)$ », est vrai dès que l'on peut trouver un événement particulier x_0 de E pour lequel la déclaration $P(x_0)$ est vraie.

Par suite (c'est «évident» mais pas forcément inutile à préciser auprès des élèves) un tel énoncé n'est faux que si la déclaration $P(x)$ n'est jamais vraie, c'est-à-dire si elle n'est vérifiée par aucun événement x du référentiel E .

Au niveau des habitudes, la locution «il existe un(e)...)» est souvent remplacée par les expressions «il y a un(e)...)» ou «tel objet possède un(e)» etc.

Les élèves éprouvent deux difficultés à ce sujet :

1) Le «il existe un» et ses équivalents sont abusivement traduits par les élèves en *«il en existe un et un seul»*.

Par exemple, l'énoncé «un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit» sera considéré comme faux par certains *«parce qu'il a 4 angles droits»* ! (principe du maximum d'informations). Le même problème se pose d'ailleurs si l'on remplace un par deux ou trois.

Or le principe de vérité (dire tout ce que l'on sait) du langage courant est en opposition avec la philosophie du «il existe» du langage scientifique.

Il y a donc une convention à expliciter à plusieurs reprises avec les élèves au sujet de l'expression «il existe n objets qui...)» ; cela signifie : «il en existe au moins n et peut-être beaucoup plus !».

Mais dans certains cas, ce «beaucoup plus» ne nous intéresse pas et dans d'autres cas nous ne savons rien de précis à son sujet ; nous nous en tenons donc au niveau de nos déclarations scientifiques aux seules affirmations dont nous sommes sûrs et qui nous paraissent utiles pour la suite ; telle est pour une bonne part la philosophie du discours scientifique, lequel est aux antipodes des commérages de quartiers !

2) Le mathématicien, quand il affirme *«il existe un élément de E vérifiant la propriété P»*, doit pouvoir prouver son affirmation. Et la meilleure preuve (quand elle est possible), c'est de mettre en évidence un événement particulier x_0 de E, (le plus simple sera le mieux), vérifiant la déclaration P.

L'élève a trop tendance à utiliser l'expression «il existe x» comme signifiant *«on doit pouvoir trouver»*, *«ça doit bien exister»*, *«j'ai l'intuition que»*, *«c'est forcé que»* etc. et de ce fait il n'éprouve pas la nécessité de fournir un exemple précis.

Par exemple, à la question «existe-t-il un entier pair u tel que $u + 1 \leq 7$?» l'élève répondra souvent «oui», sans penser à exhiber une valeur particulière de u, 4 par exemple. C'est le problème de l'explicitation des exemples et des contre-exemples.

Il y a tout un apprentissage à faire en classe pour traduire les déclarations théoriques «il existe...)» par la production d'un objet simple et reconnu par tous. En résumé le «il existe un élément de E» du mathématicien se prouve en exhibant un et non pas tous les possibles !

■ L'EXPRESSION : «POUR TOUT X DE...».

Etant donné un référentiel E et une déclaration générale P sur E, l'énoncé «pour tout élément de E, la déclaration P est vraie», noté symboliquement :

$$\langle \forall x, x \in E ; P(x) \rangle$$

est une déclaration qui n'est vraie que si la proposition P(x) est vérifiée pour chaque événement particulier du référentiel ;

en d'autres termes elle est fausse si « $\exists x, x \in E ; \text{non } P(x)$ ».

Comme nous l'avons déjà signalé, les usages les plus courants en mathématiques font que le référentiel et les quantificateurs, surtout les quantificateurs universels, ne sont pas explicités, mais seulement désignés par le contexte et les habitudes.

Il n'est pas étonnant dans ces conditions de rencontrer de nombreux élèves travaillant (à l'insu de tous parce que totalement implicitement) avec un référentiel personnel. L'exemple de la géométrie est éloquent.

LE «POUR TOUT» QUI DONNE DU SENS A L'ACTIVITE DE DEMONSTRATION...

Pour le professeur et certains élèves, les droites et les triangles dessinés au tableau sont implicitement des représentants de ceux du plan ou de l'espace. Mais pour bon nombre d'élèves le référentiel se limite aux seules figures physiquement présentes au tableau ou sur le cahier. C'est alors que toute activité de démonstration en vue de prouver que tel ou tel triangle de la figure est isocèle peut être ressentie comme inutile, voire absurde !

Si pour l'élève le seul triangle ABC de son référentiel propre est celui de la figure et «*qu'il paraît bien isocèle*», toute autre activité que la comparaison de la mesure des côtés est pour lui dénuée de sens et de fondement : «*à quoi sert-il de prouver intellectuellement que ce que l'on voit est bien ce que l'on voit ?*» C'est en grande partie à ce niveau que se situent les principales difficultés de l'enseignement de la géométrie : passer de l'observation de quelques figures particulières (celles qui sont au tableau, ou sur le cahier, etc.) au stade de l'anticipation sur toutes les figures possédant les mêmes propriétés.

Si beaucoup d'élèves se mettent subitement à détester la géométrie en 4ème, c'est que bien souvent ils ont changé d'activité sans s'en rendre compte ; brutalement le référentiel est passé des objets visibles aux objets intellectuellement concevables, et ils n'ont pas vraiment perçu ce changement radical ! C'est ainsi que le souci de certains enseignants de ne pas trop expliciter les données pour ne pas «embrouiller» les élèves risque par contre-coup d'empêcher ces derniers de saisir le sens de cette activité. Répétons-le, il n'est pas anormal dans ces conditions que l'élève rejette toute démarche

de preuve et de démonstration, considérant qu'il s'agit là d'une activité *«compliquée, fatigante et qui n'apporte rien !»*.

Pour terminer sur le plan des quantificateurs et du référentiel, disons qu'il n'est pas question de s'imposer une discipline d'écriture draconienne explicitant tous les termes des énoncés ; ceci ne servirait à rien puisque les habitudes courantes sont autres et que les élèves devront évoluer avec ces habitudes. Par contre, il est indispensable d'apprendre aux élèves à débusquer les quantificateurs par le contexte dans les phrases où ils sont cachés et à délimiter le référentiel.

■ LA VERITE DES ENONCES GENERAUX.

Considérons les trois déclarations suivantes sur les entiers naturels :

$$D_1 : 2 < x < 3 ;$$

$$D_2 : x < 2x ;$$

$$D_3 : x \leq 2x.$$

Si le contexte conduit à sous-entendre à leur propos le quantificateur universel, chacun s'accordera à considérer la déclaration D_1 comme fausse parce qu'elle n'est «jamais vraie» (il n'existe aucun événement du référentiel pour lequel elle est vérifiée).

De même la déclaration D_3 sera unanimement reconnue comme vraie (à condition que le «ou» du « $\leq$ » soit bien maîtrisé) parce qu'elle est vérifiée pour tous les événements du référentiel.

Pour ce qui est de la déclaration D_2 , le problème de sa véracité n'est pas tranché d'avance, et ce, même si référentiel et quantificateur sont explicites.

En langage courant on aura tendance à considérer cette déclaration comme «presque vraie» ou «plutôt vraie» ; on ne la considèrera pas spontanément comme fausse, puisque son domaine de validité est «presque tout le référentiel» (principe du vrai statistique).

Pour les scientifiques une telle phrase est fausse et il est indispensable que les élèves puissent prouver cette fausseté en se référant à la convention fondamentale :

◆ «Une déclaration générale P sur un référentiel E n'est vraie sur E ou tout simplement vraie que si elle est vérifiée pour tous les objets ou événements du référentiel».

◆ Par suite une telle déclaration est fausse s'il se trouve un seul événement particulier du référentiel pour lequel elle n'est pas vérifiée ! i.e. elle admet un contre-exemple.

Ici 0 est un entier qui ne vérifie pas la déclaration D_2 et cela prouve la fausseté de cette déclaration. (0 est un contre-exemple).

V – LES ENONCES PRIVILEGES DES MATHEMATICIENS : LES ENONCES CONDITIONNELS GENERAUX. (Codes, conventions, pièges...).

Comme nous l'avons déjà précisé, les énoncés mathématiques ne sont que très rarement des implications simples ou des déclarations générales, mais le plus souvent une conjonction des deux : les énoncés conditionnels généraux.

Dans ce paragraphe, nous proposons une analyse de ces énoncés complexes à un double niveau :

– d'un côté, nous avons regroupé les explications «naïves» que nous avons coutume de donner dans nos classes sur ce sujet ; ces explications reprennent dans un vocabulaire pour les élèves, les analyses plus théoriques des paragraphes précédents,

– de l'autre, sous forme de remarques (pour le maître), nous explicitons certaines difficultés rencontrées lors de ces explications.

Partant de 5 ou 6 énoncés particuliers pouvant formellement s'écrire :

$$\langle \forall x, x \in E ; A(x) \Rightarrow B(x) \rangle$$

il s'agit d'amener les élèves d'une classe à distinguer les composants suivants :

- ◆ – ce qui représente les données, faits initiaux ou causes à savoir : les hypothèses explicites A et les hypothèses implicites (famille de tous les événements pris en compte dans cet énoncé) c'est-à-dire le référentiel E ;
- ◆ – ce qui représente les conséquences, effets ou conclusion B ;
- ◆ – les objets ou événements particuliers x sur lesquels s'exercent hypothèses et conclusions.

Considérons par exemple les énoncés particuliers suivants :

P_1 : «Parmi les élèves du CES, seuls les élèves de 5ème sont venus ranger la salle des fêtes».

P_2 : «Sur l'ensemble des naturels : les nombres 3, 5, 7 et 9 sont impairs».

P_3 : «Dans N : si $(x - 0,5)(x - 2)(x - 3) = 0$, alors $x = 2$ ».

P_4 : «Sur l'ensemble des quadrilatères du plan : les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires».

P_5 : «Sur l'ensemble des droites du plan : si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre».

REMARQUE.

Si nous avons explicité le référentiel plus qu'il n'est coutume de le faire, nous n'avons pas explicité par contre le quantificateur universel «pour tout», qui est implicite dans les énoncés P_1 , P_3 , P_4 , P_5 , de façon à respecter les difficultés réelles auxquelles les élèves sont habituellement confrontés.

A partir de ces énoncés nous pouvons distinguer :

■ **L'HYPOTHESE.**

C'est la partie de la phrase qui «sélectionne» certains objets ou événements dans l'univers de tous les possibles (référentiel). L'hypothèse, c'est la description explicite de conditions suffisantes pour pouvoir anticiper sur un résultat (la conclusion).

La façon dont s'opère cette sélection revêt essentiellement deux formes :

1. Description exhaustive des objets ou événements considérés : c'est le cas de P_2 , «les nombres 3, 5, 7 et 9...».

2. Utilisation d'une déclaration générale A pour sélectionner ou mettre de côté certains événements. En clair, on ne retient que les événements du référentiel pour lesquels la déclaration se trouve vérifiée. C'est le cas de P_1 , P_3 , P_4 , P_5 .

LES CRITERES SIMPLISTES...

Comme nous l'avons déjà dit, il est important d'indiquer aux élèves que les critères simplistes du type «*l'hypothèse, c'est ce qui est au début de la phrase*» ou «*c'est ce qui est compris entre le SI et le ALORS*» sont très dangereux.

Avec de tels critères l'hypothèse de P_1 devient : «Etre élève du CES en 5ème», et la conclusion : «être venu ranger la salle des fêtes», alors qu'ici l'implication est «si X est un élève du CES qui a rangé la salle des fêtes, alors c'est un élève de 5ème».

De même pour P_5 «si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre» :

L'hypothèse explicite aurait tendance à se réduire chez certains élèves à la première partie de la phrase « D_1 et D_2 sont deux droites parallèles» et du coup ils se retrouveront avec la conclusion désastreuse : «toute droite D_3 est simultanément sécante à D_1 et D_2 ».

HYPOTHESE OU CONJECTURE...

Dans le même ordre d'idées, nous avons remarqué que même après avoir donné des explications très détaillées en début d'année, les élèves reviennent implicitement et inconsciemment au sens généralement attribué par le détective, le médecin ou le naturaliste, qui appellent hypothèse ce que nous désignons sous le terme de conjecture : «on fait l'hypothèse que...».

HYPOTHESE : JEU INTELLECTUEL...

Au niveau de l'action, la difficulté essentielle pour un élève de premier cycle est la suivante : quand on cherche à démontrer ou lorsqu'on discute de la vérité d'un énoncé conditionnel, il s'agit d'une sorte de «jeu intellectuel» dans lequel on considère comme vrai a priori (outre les propriétés et axiomes connus de la classe à ce moment), les résultats qui sont déclarés dans l'hypothèse. Dans ce jeu, l'élève doit résister à la tentation de considérer comme vrai ce qu'il voit sur sa figure, ce qui se passe autour de lui et surtout, ce qu'il veut démontrer. Bien souvent cette tentation est tellement forte qu'il y succombe sans réellement être conscient du fait qu'il transgresse totalement la règle du jeu.

POUR POINTER CETTE FAUTE DE RAISONNEMENT CLASSIQUE : UNE METAPHORE...

Nous avons coutume dans ce cas, de proposer une métaphore du type suivant : «en rentrant de l'école ce mercredi, Hector a crevé en vélo ; et cela tombe très mal car il doit faire une balade en vélo l'après-midi même. Arrivé à la maison, Hector démonte sa roue et constatant que la chambre à air est toute déchirée, il regarde sa montre et lit 11 h 45. Vite, vite, vite, se dit-il, le marchand de cycles ferme à 12 h pile. Il court dans sa chambre prendre 50 francs, enfourche son vélo, et pédale à toute allure pour arriver chez le marchand avant la fermeture... !».

Nous avons souvent vu des élèves de 6ème, 5ème reprendre à leur compte de telles métaphores pour interdire à tel ou tel camarade d'utiliser précisément la conclusion pour démontrer... la conclusion !

LA REPARTITION ENTRE L'HYPOTHESE IMPLICITE (REFERENTIEL) ET L'HYPOTHESE EXPLICITE EST UNE «VARIABLE DIDACTIQUE»...

Nous avons remarqué au cours des paragraphes précédents qu'il y a une sorte de vase communicant entre le référentiel (hypothèse implicite) et les hypothèses explicitement déclarées dans la phrase.

A partir d'un contenu d'énoncé, nous disposons là d'une «variable didactique» : suivant que l'on veut focaliser l'attention des élèves sur tel ou tel facteur particulier, on peut «rejeter certaines hypothèses secondaires» dans le référentiel et vice versa. Par exemple, les énoncés suivants sont mathématiquement équivalents :

1) Sur $\mathbb{R}^+$, l'inégalité $a \leq b$ entraîne l'inégalité $a^2 \leq b^2$.

2) Sur $\mathbb{R}$, l'inégalité $a \leq b$ et la condition a et b sont tous deux positifs entraînent l'inégalité $a^2 \leq b^2$.

Sur le plan didactique, le premier camoufle le piège « $-6 \leq -3$ et $36 \geq 9$ » alors que le second rend crucial la condition « a et b doivent être positifs» !

■ LA CONCLUSION.

C'est le résultat de l'anticipation, c'est le but de l'énoncé, c'est ce que l'on cherche à obtenir ; c'est, dans certains cas, la partie de la phrase qui décrit les qualités ou manières d'être des objets retenus après contrôle de l'hypothèse (c'est le cas de P_1, P_2, P_3^*) ; dans d'autres cas la conclusion annonce l'apparition de faits ou résultats à propos d'objets qui n'étaient pas directement mis en évidence dans l'hypothèse (c'est le cas de P_4^*).

■ LES EVENEMENTS DE L'ENONCE.

Exemples : un quadrilatère pour P_4 , un nombre particulier pour P_2 ou P_3 , un élève du CES pour P_1 , etc.

Ce sont les objets ou faits précis qui permettent à l'utilisateur de l'énoncé de donner un sens concret à cet énoncé ; c'est sur eux que s'exerce effectivement la fonction d'anticipation propre à l'énoncé général.

On remarquera que :

— Lorsqu'on a besoin d'un énoncé général, c'est toujours plus ou moins à travers un événement particulier.

— Quand on montre qu'un énoncé général est faux, c'est le plus souvent parce qu'on connaît une situation particulière dans laquelle il ne s'applique pas.

— Inversement, quand on veut prouver un énoncé général, c'est le plus souvent en considérant un événement particulier sur lequel on fait un raisonnement généralisable aux autres événements particuliers.

* P_1 : «Parmi les élèves du CES, seuls les élèves de 5ème sont venus ranger la salle des fêtes».

P_2 : «Sur l'ensemble des naturels : les nombres 3, 5, 7 et 9 sont impairs».

P_3 : «Dans $\mathbb{N}$: si $(x - 0,5)(x - 2)(x - 3) = 0$, alors $x = 2$ ».

P_4 : «Sur l'ensemble des quadrilatères du plan : les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires».

P_5 : «Sur l'ensemble des droites du plan : si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre».

C'est pourquoi nous disons que ce sont les événements particuliers qui supportent, qui donnent du sens et du contenu aux énoncés formels, et cela même si le but et la philosophie de ces énoncés sont de dépasser les cas particuliers qui les ont suscités.

■ L'ÉNONCÉ PROPREMENT DIT.

C'est le sens de la phrase, c'est le lien implicite et explicite entre les résultats annoncés en conclusion et les conditions exprimées dans l'hypothèse à propos des événements du référentiel. Il a une fonction d'anticipation.

L'énoncé général ne doit pas se confondre avec sa réalisation ou sa non réalisation sur tel ou tel événement particulier. Par exemple l'énoncé «un nombre impair est premier» est parfaitement réalisé sur les événements 3, 5, 7, ce qui le rend tout à fait crédible auprès de certains élèves !

Nous avons remarqué que, lorsqu'ils donnent du sens aux énoncés généraux, les élèves ont tendance à les réduire à l'histoire de quelques événements particuliers ; le rôle du maître est de leur faire comprendre l'intérêt et l'exigence de ce passage de quelques histoires particulières (celles auxquelles ils pensent) à une histoire plus générale.

LES ÉNONCÉS VIDES DE LEUR CONTENU...

De façon caricaturale, face à un énoncé général, nous observons, auprès des élèves, deux attitudes extrêmes :

1. Pour certains, l'énoncé se restreint aux seules données explicites de la phrase : hypothèse et conclusion ; il a alors peu de sens pour eux, car il ne s'appuie sur aucun fait précis, sur aucune expérience vécue ou prévisible. Ils peuvent dans ce cas lui faire subir des opérations chirurgicales douteuses, sans sourciller (suppression d'hypothèses, mélange hypothèse-conclusion, etc.).

On peut proposer à ces élèves la comparaison naïve suivante :

Un énoncé général qui n'est supporté par aucun événement particulier ressemble fort à une ligne d'autobus sur laquelle les véhicules circulent régulièrement sans jamais prendre de voyageurs ! De tels énoncés sont «polluants» et ne servent à rien !

2. Pour d'autres, l'énoncé se réduit aux seuls événements particuliers qui leur viennent à l'esprit. Dans ce cas c'est l'aspect généralisateur, la fonction d'anticipation et de prévision propre à la démarche scientifique qui n'est pas perçue par l'élève. Du coup, les preuves et démonstrations qui viennent ultérieurement sont ressenties comme dérisoires et sans objet, puisqu'elles consistent à démontrer doctement, sur des cas particuliers ce que l'on sait déjà sur ceux-ci.

Pour reprendre notre métaphore : ce n'est pas parce que quelques voisins se sont organisés pour assurer, avec des voitures particulières, le transport scolaire de quelques élèves, que le chef d'établissement pourra déclarer officiellement que le problème du transport scolaire est résolu !

POUR DONNER DU SENS AUX ENONCES : EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES...

Pour aider l'élève à distinguer les deux niveaux, « énoncé général » et « réalisation de l'énoncé sur un événement particulier », il nous semble qu'un procédé efficace consiste à discuter à propos de nombreux énoncés, la notion d'exemple et de contre-exemple.

A partir d'un énoncé conditionnel et face à un événement particulier, trois types de situations peuvent se présenter :

- L'événement satisfait simultanément l'hypothèse et la conclusion.

C'est le cas d'Hector, élève de 5ème venu balayer la salle des fêtes pour P_1 : « seuls les élèves de 5ème sont venus ranger la salle des fêtes » ;

du nombre 7 pour P_2 : « les nombres 3, 5, 7, 9 sont impairs » ;

du nombre 2 pour P_3 : « dans N , si $(x - 0,5)(x - 2)(x - 3) = 0$ alors $x = 2$ » etc.

On fait remarquer aux élèves qu'il s'agit là d'un « exemple illustrant l'énoncé », ou que « l'énoncé est satisfait ou vérifié ou réalisé pour cet événement ».

- L'événement satisfait l'hypothèse et ne satisfait pas tout ou partie de la conclusion.

Ainsi Zaiüs, élève de 4ème est venu passer la serpillière dans la salle des fêtes, (pour P_1) ;

le nombre 3 (pour P_3) etc.

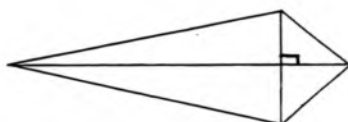
On dit que « l'énoncé n'est pas vérifié pour cet événement ». Ce type d'événement est appelé un CONTRE-EXEMPLE ; il prouve que l'énoncé est faux.

- L'événement ne satisfait pas tout ou partie de l'hypothèse.

C'est une situation fréquemment introduite par les élèves eux-mêmes. C'est le cas d'Othello, élève de 3ème qui est venu, mais a joué au babyfoot pendant que tout le monde rangeait, pour P_1 ;

du nombre 0,5 pour P_3 ;

de la figure ci-dessous pour P_4 : « les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires » etc.



Il se peut aussi que l'événement n'appartienne pas au référentiel ; par exemple : Cunégonde, mère de Zaïus qui est venu ranger la salle des fêtes, pour P_1 ; trois droites qui ne sont pas dans le même plan pour P_5 («si deux droites du plan sont parallèles, toute droite de ce plan sécante à l'une est sécante à l'autre»). Il ne s'agit alors ni d'exemples ni de contre-exemples, mais d'événements hors sujet par rapport à l'énoncé. Pour de tels événements, chercher à savoir s'ils vérifient ou non la conclusion, ne peut en aucune façon nous éclairer sur la véracité de l'énoncé.

Par exemple, considérons le dialogue suivant sur une conjecture d'Hector :

Hector : *«les nombres impairs sont premiers»*.

Zaïa : *«faux !»*.

Hector : *«pourquoi faux ?»*

Zaïa : *«eh bien, 6 par exemple !»*.

Zaïa est persuadée de fournir un beau contre-exemple et ne réalise pas que «6» est hors sujet.

■ LA VERITE DES ENONCES CONDITIONNELS GENERAUX ET LA CONVENTION FONDAMENTALE DES SCIENTIFIQUES.

Ces explications avec les élèves sur les énoncés conditionnels doivent permettre d'explicitier et de mettre à l'épreuve dans des situations apparemment très diverses la convention fondamentale des scientifiques à propos de la vérité des énoncés généraux.



**UN ENONCE CONDITIONNEL N'EST DECLARE VRAI QUE SI TOUT EVENEMENT SATISFAISANT L'HYPOTHESE VERIFIE AUSSI LA CONCLUSION.
IL EST FAUX S'IL N'EST PAS VRAI ! C'EST-A-DIRE S'IL ADMET UN CONTRE-EXEMPLE.**

Bien entendu les énoncés dans lesquels l'hypothèse n'est jamais vérifiée sont des énoncés «trivialement» vrais et totalement inutiles, ils ne rentrent pas «stricto sensu» dans la définition précédente. Pour être parfaitement rigoureux nous aurions dû écrire : «un énoncé est vrai s'il n'est pas faux (s'il n'admet pas de contre-exemple)». Mais cette formulation par la négative ne nous paraît pas heureuse sur un plan didactique.

Comme nous l'avons signalé au début de ce chapitre, cette convention regroupe la plupart des conventions analysées précédemment. C'est le point de référence qui nous permet de mener le débat en classe sur les conjectures, axiomes et théorèmes.

La première partie de cette convention rappelle qu'en l'absence de quantificateur explicite, c'est le quantificateur universel «pour tout» qu'il faut sous-entendre dans tout énoncé de type général.

La deuxième partie «faux si non vrai» apparemment absurde tant elle est redondante rappelle que, contrairement aux usages du langage courant, il n'y a pas d'énoncé scientifique «*presque vrai*», «*à peu près vrai*», «*à moitié vrai*», etc.

Il n'y a par convention que deux états reconnus :

- VRAI : si la conclusion est vérifiée pour tout événement satisfaisant l'hypothèse.
- FAUX : s'il se trouve un seul événement satisfaisant l'hypothèse et non la conclusion.

■ UN MOT A PROPOS DES DECLARATIONS EQUIVALENTES SUR E.

Formellement, cette notion est du même ordre que celle d'énoncé conditionnel général.



EN EFFET : DEUX DECLARATIONS GENERALES P ET Q SUR UN MEME REFERENTIEL SONT DITES EQUIVALENTES, SI LES ENONCES «SI P ALORS Q» ET «SI Q ALORS P» SONT TOUS LES DEUX VRAIS.

En d'autres termes P et Q sont équivalentes, si, pour chaque événement particulier X du référentiel, les déclarations simples P(X) et Q(X) sont équivalentes, c'est-à-dire ont le même caractère de vérité (toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses).

Didactiquement, il en va tout autrement, car, bien entendu, tous les problèmes que nous avons rencontrés à propos des confusions entre implications et équivalences simples, se retrouvent ici et sont doublés de la complication supplémentaire suivante : il ne s'agit plus seulement de considérer deux propositions P et Q, mais deux familles de propositions P(X) et Q(X), $X \in E$.

Nous avons déjà évoqué quelques comportements pathologiques des élèves face au «passe-partout» équivalence ; il s'agit d'un concept dont ils sont d'autant plus friands qu'il est synonyme pour eux de «*ça marche toujours*», «*il n'y a rien à vérifier*», «*ce n'est pas la peine de réfléchir*» etc.

Pour notre part, nous limitons le plus possible son usage.

L'EQUIVALENCE PEUT CACHER L'IMPLICATION INTERESSANTE...

Si effectivement les implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies et toutes les deux utiles, nous faisons remarquer aux élèves que nous sommes en présence d'une situation très favorable où exceptionnellement les deux assertions sont vraies et utiles.

Si par contre il y a équivalence mais qu'une seule des deux implications est utile, nous nous gardons bien de parler d'équivalence par crainte de détournement du sens de l'énoncé.

En effet, si $A \Rightarrow B$ est l'assertion utile et $B \Rightarrow A$ l'assertion triviale, en rencontrant $A \iff B$, l'élève moyen aura tendance à retenir l'implication triviale qui est plus à sa portée et à oublier l'assertion utile qui lui pose quelques problèmes !

Par exemple, la phrase «sur ce tableau de nombres, les nombres premiers sont les nombres impairs» déclare formellement l'équivalence entre la qualité A «être premier», et la qualité B «être impair», pour les nombres de ce tableau.

Dans la mesure où 2 ne figure pas dans ce tableau, $A \Rightarrow B$ est trivialement vrai et sans grand intérêt, alors que $B \Rightarrow A$ est un critère très intéressant s'il est vrai ! Nombreux sont les élèves qui, ne percevant pas cette subtilité, ne retiendront de cet énoncé que le sens trivial «si X est premier, alors il est impair» !

■ LA DICHOTOMIE VRAI-FAUX ET L'AGE DU CAPITAINE.

Tout au long des explications précédentes, nous avons insisté sur l'attachement qu'avaient les scientifiques à ne traiter que des énoncés qui pouvaient être sans ambiguïté déclarés vrais ou (exclusif) faux. Ce point est très important et ne doit pas venir renforcer une philosophie pathologique très ancrée chez nombre d'élèves. Philosophie implicitement forgée dès la maternelle, malheureusement renforcée d'année en année et que nous pouvons résumer de la façon suivante :

LE CREDO DU BON ELEVE...

« Toute question posée par le maître a une unique réponse que je dois connaître, il faut donc que je réponde par oui ou par non, par vrai ou par faux, ou par n'importe quoi, mais il faut que je réponde ! ».

Les élèves doivent savoir que les savants eux-mêmes, lorsqu'ils travaillent, réfléchissent, font des calculs et des raisonnements très compliqués pour examiner la véracité d'une proposition, ne parviennent pas toujours à une réponse de type vrai ou (exclusif) faux ! Bien souvent la «bonne réponse» ou en tout cas la seule réponse acceptable est : «pour le moment, nous ne savons pas !».

A nous enseignants de faire comprendre aux élèves que des réponses du type : *«je n'arrive pas à me décider», «je pense que, mais je ne suis pas sûr...»* ou encore *«sur les exemples que j'ai choisis, l'énoncé est réalisé mais je n'arrive pas à le démontrer dans le cas général»*, sont des réponses qui ne résolvent pas intégralement le problème, mais font plus progresser dans la découverte d'une solution qu'une réponse catégorique du type «vrai», «faux» sans fondement ou encore l'usage du «donc» **malhonnête** dans la mesure où ce qui suit le «donc» ne découle pas de ce qui le précède.

NOUS POUVONS MODIFIER CET ETAT DE FAIT...

Il est certain que si ces comportements de réponse manifestant une volonté **d'honnêteté intellectuelle ne sont pas pris en compte**, et valorisés au niveau des évaluations, l'élève viendra ou reviendra très vite au comportement du type «âge du capitaine». Avez-vous déjà proposé à vos élèves un problème comme celui-ci :

Sur un bateau, il y a douze matelots et trois cheminées ; quel est l'âge du capitaine ?

Sans doute serez-vous aussi étonnés que nous de la proportion importante d'élèves qui répondent 36 ($12 + 3 = 15$, c'est un peu jeune ; $12 \times 3 = 36$, cela peut aller) !!...

Pour certains il s'agit, certes, d'un manque de réflexion, mais beaucoup se rendent compte qu'il n'y a pas de rapport et donnent cependant une réponse car il faut, pensent-ils, en donner une.

En fait n'est-ce pas nous qui induisons ce type de comportement quand nous posons des problèmes dans lesquels les calculs s'arrangent miraculeusement et ne s'arrangent que si l'élève effectue les bonnes opérations aux bons endroits !

Discussion de deux élèves de CM2 sur un problème à la maison :

— Yannick : «est-ce qu'on divise 18,5 tonnes par 18 voyages pour savoir le poids d'un voyage, ou le contraire ?».

— Laurent : «c'est sûrement $18,5 : 18$, car dans l'autre sens, la maîtresse ne nous a pas appris !».

Chapitre V

LA POLITIQUE DE L'ESCABEAU, DE LA LIME ET DU CHAPEAU

Depuis le début de ce fascicule, nous avons critiqué certaines pratiques de classe, nous avons insisté sur la nécessité d'expliquer aux élèves le sens des activités que nous leur proposons, et nous avons fourni certains éléments d'analyse pour faciliter cette explication, mais peut-être n'avons-nous pas assez stigmatisé ce que nous pourrions appeler la POLITIQUE OU LA TECHNIQUE OU ENCORE LA MANIE DE L'ESCA-
BEAU, DE LA LIME OU DU CHAPEAU.

I – DE QUOI S'AGIT-IL ?

D'une sorte de maladie professionnelle qui atteint en priorité les maîtres qui ont un grand souci pédagogique et souhaitent faciliter la réussite de leurs élèves !

Partant de l'idéologie très répandue : *«la réussite ou l'échec des élèves sur de nombreux exercices- types joutant le cours est la meilleure mesure de l'apprentissage réel»*, et désirant très ardemment provoquer un apprentissage sérieux auprès du plus grand nombre, ces maîtres mettent en œuvre toute leur expérience et tout leur savoir-faire didactique et pédagogique **pour que leurs élèves ne se trompent pas**. A cette fin, ils évitent soigneusement tous les pièges et causes d'erreurs, adoptant consciemment ou non l'une des techniques suivantes :

La technique de l'escabeau.

Désignation du théorème à employer, introduction de questions intermédiaires qui flèchent complètement la démarche à suivre etc.

La technique de la lime.

Suppression des données superflues, des ambiguïtés dans les textes de problèmes, élimination des questions donnant lieu à discussion, en particulier celles pour lesquelles la «bonne» réponse est : *«ça dépend»* ou *«il y a plusieurs réponses»* ou encore *«on ne peut pas répondre»* !

La technique du chapeau.

Formule miracle ! Astuces ! Algorithmes puissants ! permettant à l'élève de réussir sans trop savoir ce qu'il réussit, ni pourquoi, ni comment !

Exceptionnellement, ces pratiques peuvent être nécessaires pour redonner confiance aux élèves, ou pour se sortir d'un mauvais pas lorsqu'on a placé les enjeux trop haut et que la poursuite de la discussion et de la recherche n'apporterait que lassitude et désengagement de la majorité des élèves.

Mais toutes les observations que nous avons pu faire à ce sujet et les recherches actuelles en didactique montrent que ces techniques n'engendrent aucun apprentissage sérieux sur le plan raisonnement et ont des effets désastreux au niveau de l'auto-nomie !

LES VRAIES DIFFICULTES DEMEURENT...

A bien y regarder, on constate à chaque instant que ces diverses techniques d'évitement de la difficulté, loin de résoudre les vrais problèmes, en engendrent bien souvent de nouveaux et de pires !

En effet, en retardant l'apparition des difficultés et des malentendus liés à un concept et en ne favorisant pas leur émergence là où, d'expérience, on sait qu'ils ont toute chance d'apparaître, en menant plus ou moins consciemment la politique de l'autruche, on ne se contente pas de remettre à plus tard une explication qu'on juge trop prématurée, on prend le risque de priver l'élève de la possibilité de les identifier comme des points noirs qu'il est indispensable d'éclaircir.

PIRE ENCORE ELLES S'ENRACINENT...

En effet, ces incompréhensions et ces points d'achoppement, s'ils ne peuvent se manifester naturellement au moment de l'apprentissage (quand on a encore le droit de ne pas savoir ou de ne pas comprendre !) vont, puisqu'ils sont évités ou niés, devenir des concepts rentrés qui n'agiront plus spontanément à visage découvert, mais subrepticement, indirectement et de façon diffuse à travers les échecs et malentendus qu'ils ne pourront manquer de provoquer sur d'autres concepts.

Le dépistage du «*pourquoi ça ne va pas*» deviendra alors très délicat tant pour l'élève que pour le professeur.

ET CONDUISENT A UN MALENTENDU SUR LE SENS DE CE QUE L'ON FAIT...

De plus, et c'est peut-être la conséquence la plus grave, nous avons souvent constaté que par ces techniques d'évitement on transforme des malentendus et difficultés de premier degré (ceux qui sont directement reliés à un contenu précis) en un

malaise beaucoup plus profond sur le sens même des activités, des modes de travail et de raisonnement mis en œuvre autour de ces contenus.

II – UN EXEMPLE D’ESCABEAU, DE LIME ET DE CHAPEAU.

LES TABLEAUX POUR RESOUDRE LES INEQUATIONS...

Pour bien préciser où sont les enjeux, considérons l’exercice classique :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(A) \quad 3 \leq \frac{x-1}{x-2} \leq 4$$

A notre sens, ce qui compte essentiellement ici, ce n’est pas que l’élève trouve le plus rapidement possible toutes les solutions de (A), mais plutôt que la résolution de cet exercice soit l’occasion pour lui d’approfondir et de mettre au point toute une démarche de l’esprit qu’il pourra réinvestir ailleurs !

Concrètement, il s’agit ici, d’abord de localiser les «ennuis» : présence du facteur $(x - 2)$ au dénominateur, et après avoir éliminé la valeur 2 pour laquelle (A) n’a pas de sens, être capable de penser que si l’on veut multiplier par $(x - 2)$ il faut connaître le signe de ce facteur (difficulté majeure propre aux inéquations).

A partir de là, il faut penser à poser l’alternative :

$$\text{ou bien } x - 2 > 0$$

$$\text{ou bien } x - 2 < 0.$$

— Considérant la première partie de l’alternative $x - 2 > 0$,

résoudre (A) revient à résoudre (B) : $3x - 6 \leq x - 1 \leq 4x - 8$

et résoudre (B) c’est résoudre (L) et (M) avec :

$$(L) : 3x - 6 \leq x - 1$$

$$(M) : x - 1 \leq 4x - 8,$$

il faut alors penser à confronter les solutions de «(L) et (M)» : $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}$
à l’hypothèse restrictive $(x > 2)$ avant d’affirmer que ce sont des solutions de (A).

— Considérant la seconde partie de l’alternative : si $x - 2 < 0$... etc.

Aucun des raisonnements précédents n'est difficile en soi, mais leur enchaînement et les initiatives qu'ils supposent font que, dans neuf cas sur dix, on préfère enseigner la technique du tableau :

$$(A) \iff 3 \leq \frac{x-1}{x-2} \text{ et } \frac{x-1}{x-2} \leq 4$$

$$\text{d'où } 0 \leq \frac{-2x+5}{x-2} \text{ et } \frac{-3x+7}{x-2} \leq 0$$

on fait alors le tableau :

x	$-\infty$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
x - 2	-	0	+	+	+
etc.					

Certains maîtres enseignent les deux méthodes avec le commentaire suivant : *« la première méthode est bien mais prenez la seconde, vous avez beaucoup moins de chances de vous tromper !... »* ce qui est vrai !

Malheureusement, par cette technique simplificatrice bon nombre d'élèves aboutissent à un résultat juste, sans comprendre ce qu'ils font. Les multiples inéquations qu'ils auront ainsi résolues ne leur auront pas permis de se confronter aux questions cruciales : *« Qu'est-ce qu'une inéquation ? » « Qu'est-ce que je peux faire pour la simplifier ? » « Quelles précautions prendre ? etc. etc. »*.

Alors bien sûr, avec le tableau ils se trompent moins !

Mais quels apprentissages souhaitons-nous pour nos élèves ?

III – LA TECHNIQUE DE L'ESCAPEAU, DE LA LIME ET DU CHAPEAU FACE AU PROBLEME DIDACTIQUE POSE PAR LE STATUT DE CERTAINS ENONCES MATHEMATIQUES : LES DEFINITIONS, LES AXIOMES ET LES THEOREMES ADMIS.

LES DEFINITIONS.

OBJECTIFS DIDACTIQUES...

Faire comprendre aux élèves leur sens et leur statut.

- elles sont vraies a priori ;
- elles traduisent un certain consensus entre les membres de la communauté : donner un même nom aux mêmes objets ;
- elles facilitent la formulation des autres énoncés et de leurs démonstrations : le fait de pouvoir nommer un objet complexe permet souvent de donner et de garder

du sens au cours d'un développement un peu long ou technique.

POUR ATTEINDRE CES OBJECTIFS...

Nous savons tous, mais nous l'oublions facilement dans l'action, que les élèves ne sont pour ainsi dire jamais vierges par rapport aux mots et aux idées que nous allons utiliser ; le plus souvent de multiples concepts «parallèles ou orthogonaux» propres au vécu de chaque élève sont en concurrence avec celui que le maître veut instaurer.

Ainsi pour définir un nouvel objet, un débat s'impose bien souvent en classe, débat en vue de faire apparaître les conceptions initiales des élèves et de mettre en évidence les choix qui pourraient «logiquement» conduire à diverses définitions «apparemment synonymes» du même concept.

LES DIFFICULTES...

Ce débat d'explicitation, s'il est très nécessaire, est néanmoins difficile à conduire et plein d'incertitude, car pour jouer son rôle essentiel (mise en évidence des conceptions en présence) il doit, dans un premier temps, être très ouvert ; le maître ne doit surtout pas y pointer d'emblée ce qu'il devra en fin de compte institutionnaliser non pas comme la «bonne définition» (sous-entendant par là que les autres propositions seraient inintéressantes), mais comme la définition convenue de la communauté scientifique à laquelle la classe est rattachée.

LES OBJECTIONS...

Bien entendu l'évocation, la mise en œuvre et la pratique de ce débat font surgir dans l'esprit du maître de nombreuses objections :

1. N'est-il pas tout à fait paradoxal de laisser s'engager un débat en vue d'un consensus si l'on sait que la marge de manœuvre est quasiment nulle, puisque c'est (quoiqu'il arrive) la définition de la communauté mathématique qui devra être adoptée et ce, quelle que soit l'argumentation développée majoritairement par la classe ?

Ne va-t-on pas aboutir à une frustration de la part des élèves et/ou à des manipulations «contestables» de la part du maître ?

2. Après avoir vu, entendu, et discuté plusieurs propositions distinctes au sujet d'une même définition, certains élèves ne vont-ils pas tout embrouiller et retenir en priorité les choix «orthogonaux» à ceux de la communauté ?

3. Cette période d'incertitude ne risque-t-elle pas d'être ressentie comme une sorte de faiblesse de la «doctrine scientifique» ou du maître (*«il ne sait pas trop où il en est ! Il demande l'avis de ses élèves, etc. !!»*)

LA NEGOCIATION A LA BAISSSE...

Face à ces obstacles, une « négociation à la baisse » risque de s'opérer sur le terrain sous forme de repli stratégique ! Comme le retrait sur les contenus est exclu (programme), on aura tendance à « limer, raboter, escamoter » l'explication sur le sens et sur la portée de la définition « parachutée », au risque en particulier, de masquer les aspects nécessairement arbitraires de certains choix !

Ceci peut se traduire suivant les cas par deux comportements extrêmes : d'un côté un comportement trop dogmatique qui devient purement formel, et à l'opposé un comportement trop antidogmatique pour être structurant.

Regardons de plus près les conséquences de ces « négociations à la baisse » :

Le style dogmatique et formel :

La définition mathématique pure et dure est transmise sans perdre de temps. Le débat coûteux sur le « *pourquoi* » ou le « *on aurait pu faire autrement* » est remplacé par le « faux débat » ou le « dogme ». La définition parachutée tente de couvrir ou de sublimer les conceptions « spontanées » des élèves ; l'apprentissage « par cœur » de la « bonne définition » est censé effacer définitivement les restes de conceptions parasites !

Cette position dogmatique ne résulte pas obligatoirement d'un choix délibéré du maître, elle s'impose comme une nécessité de la situation. En effet, comme il est difficile d'expliquer un choix dès lors qu'on n'en laisse pas envisager d'autres et que, de plus, on ignore les choix implicites de ses interlocuteurs, on constate que l'économie d'un débat hasardeux conduit plus ou moins inexorablement à présenter la définition comme une propriété « immanente » ou pire encore comme « évidente » ou « allant de soi » !

Or, si pour un élève, la « définition évidente » est « blanc » et que le maître lui oppose « noir » sans qu'il y ait possibilité de débat, cet élève va, suivant son tempérament, soit se braquer (blocage) soit apprendre docilement « noir » ! Dans ce cas, il récitera « noir » quand on lui demandera de citer l'énoncé, mais il mettra en œuvre « blanc » dans les situations d'action ! ou « noir et blanc » pour concilier les deux, ou bien encore il sera paralysé et ne fera rien du tout, car il ne saura pas ce qu'il a le droit de faire.

Par exemple, si pour un élève un carré n'est pas un rectangle, la bonne définition parachutée « un carré est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur » n'a aucune chance d'être adoptée en pratique, même si l'élève l'a copiée cent fois.

Le style opposé : antidogmatique et informel.

Pour ne pas appauvrir le concept et pour maintenir la créativité des élèves, l'enseignant les laisse s'exprimer librement et retarde la mise en œuvre d'une formalisation et d'une synthèse qui à ses yeux risquerait de «geler la situation».

LES ENONCES «FOURRE-TOUT»...

Si cette période d'attente se prolonge, le défaut d'institutionnalisation de la définition va se traduire par l'apparition dans la classe d'énoncés «fourre-tout» : **mélange de descriptif, de compte rendu d'expériences, et de semi-déductif.**

En d'autres termes, il s'agit de «définitions-axiomes-théorèmes» aux contours très imprécis. Ces énoncés, nécessaires dans une première formulation d'élèves, sont souvent tolérés ensuite par le maître qui les considère comme *«plus simples pour l'élève !»*. En fait, ils sont d'interprétation très complexe et sujets aux pires malentendus, puisque hypothèses et conclusions y apparaissent sur le même plan, situation particulière et cas général n'y sont pas nettement distingués. C'est le cas par exemple, des formulations suivantes :

«Un triangle isocèle a deux côtés et deux angles égaux, un axe de symétrie, etc. etc.» ; ou encore «un parallélogramme est un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en leur milieu, dont les côtés opposés sont égaux et parallèles, etc.»

Bien entendu, celui qui domine la situation, qui a compris la signification des énoncés mathématiques, peut interpréter très correctement les énoncés précédents, mais, tout comme les équivalences prématurées, ces formulations sont une véritable entrave à l'apprentissage des raisonnements «hypothético-déductifs».

LES SIMAGREES DE DEDUCTION LOGIQUE...

En effet, comment le novice peut-il utiliser de tels énoncés pour déduire quoi que ce soit ? Si, pour savoir qu'un triangle est isocèle ou qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il faut «prouver» toutes les propriétés que nous avons citées, dans l'énoncé «fourre-tout», c'est quasiment irréalisable et personne ne le fera jamais !

D'ailleurs, à quoi cela servirait-il de faire une telle vérification puisque la seule conclusion logique qu'on pourrait en tirer serait alors *«c'est un triangle isocèle»* ou *«c'est un parallélogramme»* ; *«il possède donc telle ou telle des propriétés que je viens de montrer !»*. On aboutirait de ce fait à une caricature de la démarche mathématique : en effet, au lieu d'établir la vérité de P pour en déduire par théorème (sur les triangles isocèles ou sur les parallélogrammes) la vérité de Q, on devrait établir la vérité de P et de Q et de R et de T etc. pour finalement en déduire «pompeusement» celle de Q !.

A ce stade, l'élève prenant plus ou moins conscience de l'aspect dérisoire d'une démarche tautologique, va suivant son tempérament se bloquer (*«j'y comprends rien ! Je ne vois pas à quoi ça sert ! etc. etc.»*) ou se lancer plus ou moins honnêtement dans une pantomime de démonstration au cours de laquelle il prendra explicitement ou non la conclusion pour l'hypothèse en s'appuyant sur le précieux «escabeau» définition-axiome-théorème «démontré en cours», pour donner un peu de sérieux à son propos.

C'est, dans un ordre d'idées différent, la même démarche que suscite l'introduction prématurée de concepts mathématiques trop puissants (la symétrie ou les vecteurs par exemple) en tant qu'outils de déduction logique en 4ème. L'élève ne sait jamais à leur sujet ce qu'il peut prendre comme hypothèse, ce qu'il doit vérifier pour pouvoir légitimement en déduire ce qu'on lui demande de montrer. Le plus souvent, il «constate» une symétrie et en déduit *«qu'il a bien ce qu'il voit sur sa figure !»* Cela ne le fait absolument pas cheminer en direction d'une preuve intellectuelle !

EN CONCLUSION...

Autant nous croyons nécessaire de ne pas escamoter le débat pour tenir compte des idées de tous, autant il est indispensable d'être très ferme dans l'institutionnalisation des choix de la communauté scientifique afin que chacun ne se retrouve pas avec sa petite définition personnelle.

Par exemple, un triangle isocèle c'est, par définition, «un triangle qui a deux côtés isométriques». Le fait qu'il ait automatiquement deux angles égaux et «réciproquement», et que ces angles soient «en face des côtés isométriques» sont trois propriétés très importantes admises ou démontrées, mais ce n'est plus la définition.

LES AXIOMES.

L'OBJECTIF DIDACTIQUE...

Faire comprendre aux élèves que ce ne sont pas des définitions ou conventions arbitraires, mais des conjectures non démontrables, considérées comme vraies a priori par la communauté mathématique ; «vraies a priori» ne devant pas être synonyme de «au hasard» mais «choisies» en fonction d'objectifs très précis (modélisation de situations concrètes) et en prenant certaines précautions (compatibilité des axiomes entre eux).

Pour les élèves, les axiomes d'une théorie doivent pouvoir se comparer aux règles d'un jeu, lesquelles déterminent la nature et le sens de ce jeu. Chacun sait d'expérience que toute introduction d'une nouvelle règle est une opération délicate devant être mûrement réfléchie et réclamant l'adhésion de tous les participants !

En particulier, aucune nouvelle règle ne peut être instaurée par une fraction du groupe et ne doit conduire à des situations de blocage («jeu injouable») ou à dénaturer complètement le sens et l'équilibre du jeu initialement proposé !... C'est par des arguments de ce type que sont contrées dans nos classes les incursions d'axiomes «sauvages» justifiés a posteriori par l'explication : *«c'est évident !»*.

Il s'agit d'arriver à montrer aux élèves que si les principaux axiomes de l'arithmétique et de la géométrie ont été choisis pour rendre compte et modéliser le plus efficacement possible les situations de la vie courante, en particulier l'espace, le temps et la notion de succession des événements, cette conformité voulue du modèle à ce que nous voyons et pressentons (évidences arithmétiques et géométriques) ne doit pas pour autant se traduire par une identification entre le modèle et la réalité qui nous entoure.

Une expérimentation qui contredirait un axiome montrerait que le modèle est mal adapté à cette réalité et qu'il vaut mieux le modifier ; par contre, la conformité des axiomes aux différentes observations particulières ne prouve pas leur validité, pas plus qu'elle ne signifie qu'ils sont évidents et par suite qu'il est inutile d'en discuter.

Les élèves doivent progressivement réaliser que les fausses évidences constituent le piège majeur des disciplines d'anticipation et de déduction. Les axiomes sont les garde-fous dont s'est dotée la communauté mathématique pour éviter ce piège : chaque fois qu'un résultat paraît «évident» et qu'on ne voit pas comment le rattacher aux théorèmes connus ou aux axiomes de base, il doit être suspecté et traité avec beaucoup de réserve !

LES DIFFICULTES ET LES TECHNIQUES D'EVITEMENT...

L'introduction d'un nouvel axiome place l'enseignant face à des difficultés didactiques qu'il est tenté de contourner par les techniques d'évitement que nous avons évoquées à propos des définitions.

Nous retrouvons, naturellement, l'introduction d'une axiomatique dogmatique et formelle qui tourne sur elle-même et débouche sur des exercices simplistes et tautologiques totalement déconnectés des applications pratiques ; le CHAPEAU consiste ici à faire croire aux élèves qu'ils font des mathématiques, alors qu'il s'agit essentiellement de faire fonctionner un vocabulaire !

A l'extrême opposé on trouve l'introduction subreptice ou sauvage d'axiomes mal définis dans des énoncés fourre-tout genre «définition-axiome-propriété caractéristique etc. etc.».

Ces deux attitudes ont bien entendu pour objet d'éviter les aléas d'un débat en classe, débat qui permettrait de décider chaque fois que cela s'avère indispensable ce que l'on va tenir pour vrai axiomatiquement et ce que l'on va démontrer à partir des résultats antérieurement établis.

LES AXIOMES ET LES THEOREMES ADMIS.

Vu l'importance donnée en mathématique à la «preuve», le maître ne se sent pas toujours à l'aise quand il doit introduire un axiome et a fortiori quand il doit institutionnaliser un résultat sous le label «théorème admis» : il a mauvaise conscience de ne pouvoir apporter de preuve, et il a l'impression de demander aux élèves de lui signer un chèque en blanc.

Cela peut le conduire, tout à fait inconsciemment, à traiter ce résultat rapidement, un peu à la sauvette, comme pour «s'en débarrasser». Les élèves risquent alors d'en tirer la conclusion : *«ça n'est pas important ! On note sur le cahier, mais on n'apprend pas car ça ne resservira pas ! etc. etc.»*.

SI C'EST IMPORTANT, IL FAUT PAYER LE PRIX...

De deux choses l'une, ou bien ce théorème ou cet axiome est mineur et alors pourquoi en parler ! Ou bien on veut lui faire jouer un rôle important et alors il doit être introduit sous forme de conjecture testée et discutée sur plusieurs exemples particuliers ; ainsi il prendra une certaine réalité dans la tête des élèves, son institutionnalisation ne sera pas formelle mais leur permettra de savoir qu'ils disposent là d'un outil de plus pour valider de nouvelles conjectures ou pour résoudre des problèmes.

Les discussions autour de ces énoncés admis, loin d'être un obstacle et une perte de temps, sont nécessaires. Elles aident l'élève à donner du sens à la démarche scientifique, elles sont l'occasion pour lui de fixer des points de repère au niveau de la preuve et de la démonstration : *«quand je veux me persuader d'un résultat, quand je veux convaincre les autres, sur quelles bases solides puis-je m'appuyer sans courir le risque des pièges de la fausse évidence ?»*.

PARLER DU FUTUR...

Enfin, admettre aujourd'hui un théorème peut être l'occasion de parler de ce que l'on fera plus tard : en seconde, en terminale, au cours des études supérieures !

Les élèves sont toujours très réceptifs vis-à-vis de la démonstration d'une propriété qui leur a été introduite quelques années avant en leur annonçant : *«dans telle ou telle classe vous aurez les moyens de le prouver correctement !»*.

UNE CERTAINE COHERENCE DANS NOTRE DEMANDE...

En résumé, il nous est apparu que rien ne détourne davantage l'élève du sens véritable de la démarche scientifique que de lui assener quelquefois sans préparation, sans preuve et sans commentaire, des résultats qui n'ont rien d'évident (Pythagore, Thalès, etc...), alors qu'on aura passé éventuellement beaucoup de temps à démontrer et à commenter des résultats qui lui apparaissent comme beaucoup plus simples (par exemple, associativité et commutativité dans $\mathbb{R}$ etc.).

Pour montrer la cohérence de nos choix, ces explications ne sont pas inutiles et superflues ; on ne doit pas les considérer comme du temps perdu, bien au contraire, car elles sont indispensables pour aider l'élève à lutter contre son penchant naturel qui est d'affirmer avec force et désinvolture ce qu'il ne sait pas prouver et par contre à se répandre en explications superflues et tautologiques pour finalement réécrire la définition ou l'énoncé du problème.

IV – DEUX EXEMPLES CARACTERISTIQUES D'ESSAIS POUR REPOUSSER LES TENTATIONS «DE L'ESCABEAU, DE LA LIME ET DU CHAPEAU».

- L'introduction de la racine carrée en 3ème.
- L'introduction des bases de la géométrie en 6ème-5ème.

■ 1er exemple : L'introduction de la racine carrée.

Pour introduire $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, il faut surmonter de très nombreuses difficultés. Tout d'abord parce qu'en dehors des carrés parfaits, l'existence des racines carrées est le plus souvent axiomatique. De plus, quand il existe un nombre réel a dont le carré est égal à x , il y en a en fait deux : a et $-a$. Ce premier point est déjà assez délicat à négocier en classe.

« $\sqrt{x}$, C'EST DIFFICILE» PARCE QUE C'EST UNE RECIPROQUE PARTIELLE...

Une fois que les élèves ont assimilé sur de nombreux exemples que pour tout réel positif x , il existe deux réels opposés dont le carré est x , on peut se lancer dans l'introduction du symbole $\sqrt{x}$, mais le problème reste entier ! En effet, il va falloir donner un sens, une réalité, une calculabilité à ce que nous appelons dans notre jargon de mathématiciens une fonction numérique f «réciproque partielle» de la fonction $x \rightarrow x^2$, c'est-à-dire vérifiant l'identité « $\forall x, x \in \mathbb{R}^+, (f(x))^2 = x$ ».

« $\sqrt{x}$, C'EST DIFFICILE» PARCE QUE «ÇA NE SE CALCULE PAS» ET QUE CELA RESULTE D'UN CHOIX...

Quelle que soit la façon dont on s'y prend pour introduire le symbole $\sqrt{x}$, le taux d'erreur et de blocage à son sujet est très important !

Cela tient d'abord au fait qu'il n'existe aucun algorithme simple permettant de calculer $\sqrt{x}$; il faut dans la majorité des cas, pour manipuler, évaluer, maîtriser cette

écriture, passer par l'intermédiaire de son carré, c'est-à-dire revenir à l'identité de définition « $(\sqrt{x})^2 = x$ ». Cela tient aussi et peut-être surtout au fait que la construction de $\sqrt{x}$ passe par un choix, qui de plus est un choix arbitraire qu'il faudra néanmoins impérativement respecter sous peine de conflit grave avec la communauté.

POUR POUVOIR TIRER PROFIT DES CONTRADICTIONS...

En effet, quand par exemple un élève ne remarque pas que les expressions 2×3 , 3×2 , $5 + 1$, $12/2$ etc. sont différentes représentations d'un même nombre, il risque d'être considérablement handicapé dans la conduite de ses calculs, mais cela ne l'amène pas directement à une contradiction, car lorsqu'il développe les calculs précédents, il retombe par nécessité sur le même nombre.

Par contre lorsque pour exprimer $\sqrt{4}$ l'élève hésite entre 2 et -2, ou ± 2 , ou quand il se dit « $\sqrt{4}$ c'est 2, mais pour -4 je ne sais plus s'il faut écrire $\sqrt{-4} = -2$ ou 2...», il se trouve inévitablement à terme en conflit avec la communauté scientifique et face à des paradoxes du type $2 = -2$ ou $0 = \pm 1$ etc. qu'il ne peut interpréter !

L'ELEVE NE PEUT SURMONTER DE TELLES CONTRADICTIONS QUE S'IL EST CLAIREMENT INFORME DU SENS DES CONVENTIONS QUE LA COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE ADOPTE A CE SUJET...

Par le symbole $\sqrt{x}$ la communauté désigne une fonction numérique ($\sqrt{x}$ ne doit désigner qu'un seul réel y pour chaque x et non pas un couple de réels) et cette fonction n'est bien définie que sur les réels positifs car l'identité $(\sqrt{x})^2 = x$ et le fait que le carré d'un réel soit toujours positif impose à x d'être lui-même positif dès qu'on l'invoque sous le radical. Une discussion sur les aventures drôles ou dramatiques qui pourraient découler de l'usage exclusif du prénom pour désigner les personnes (personnes ayant le même prénom : $\sqrt{4} = +/-2$), et situations d'embarras lorsqu'un prénom cité ne correspond à aucune personne physique ($\sqrt{-4} = ?$) peut aider les élèves à comprendre le bien fondé de cette double exigence de la communauté mathématique : «dans le monde des réels, $\sqrt{x}$ doit toujours désigner un réel bien précis, et n'a de sens (pour nous) que pour les réels positifs.

« $\sqrt{x}$, C'EST TRES DIFFICILE» PARCE QU'IL Y A PLEIN DE CHOIX POSSIBLES...

Le débat autour du point précédent ne suffit pas pour régler le problème de $\sqrt{x}$, car à partir de la double exigence :

- $\sqrt{x}$ est un réel bien défini pour tout $x \geq 0$,
- $(\sqrt{x})^2 = x$ quelque soit $x \geq 0$,

de très nombreux choix sont envisageables.

En voici quelques uns qui peuvent faire l'objet d'un débat en classe :

a. $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif dont le carré est x .

b. $\sqrt{x}$ est l'unique réel négatif dont le carré est x .

c. $\sqrt{x}$ est : — l'unique réel positif dont le carré est x quand $x \geq 1$;
— l'unique réel négatif dont le carré est x quand $x < 1$.

d. $\sqrt{x}$ est la proposition d'Hector pourvu qu'elle vérifie l'identité fondamentale $(\sqrt{x})^2 = x$.

On peut remarquer avec les élèves que chacun de ces choix a sa logique ; les deux premiers paraissent plus simples et habituels (ils sont continus !) mais entre les deux lequel choisir ?

Cela ressemble fort à la convention qui fait obligation aux Anglais de rouler à gauche et à la convention opposée qui fait obligation aux Français de rouler à droite dans leurs pays respectifs... Personne n'a a priori plus raison que l'autre ! Par contre celui qui dans l'un quelconque de ces deux pays ne respecte pas la convention en vigueur s'expose et expose les autres à l'accident inévitable !

L'INSTITUTIONNALISATION...

C'est pourquoi la classe devra adhérer au premier choix même s'il est arbitraire, car c'est celui de la communauté scientifique dans laquelle nous vivons ; chaque élève devra y adhérer par respect de la communauté et non parce qu'on l'aura persuadé que l'unique choix logique et évident est celui-ci. En effet, si tel était le cas, l'élève ne pouvant raisonnablement trouver aucune explication «l'obligeant à un tel choix» serait placé devant une alternative désastreuse : *«ou bien je suis idiot» se dirait-il «puisque l'évidence ne me saute pas aux yeux, ou bien les racines carrées sont tellement bizarres que ce n'est pas la peine que je cherche à comprendre !»*

POUR MIEUX REALISER LE PROBLEME DE $\sqrt{x}$, REGARDONS... $\sqrt[3]{x}$

Un dernier débat peut fortement consolider les acquis des points précédents, il consiste à proposer aux élèves de discuter du symbole $\sqrt[3]{x}$.

Après avoir violemment soupiré en disant que *«c'était déjà assez compliqué avec $\sqrt{x}$ »*, les élèves seront tout étonnés de découvrir que l'introduction de $\sqrt[3]{x}$ ne pose que très peu de problèmes par rapport à $\sqrt{x}$.

En effet l'identité fonctionnelle : *« $(\sqrt[3]{x})^3 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ »* gomme tous les problèmes puisqu'il n'y a plus qu'un seul choix possible donc pas de choix arbitraire à envisager.

FINALEMENT... $\sqrt{x}$ «C'EST DIFFICILE MAIS ON PEUT QUAND MEME S'Y RETROUVER !».

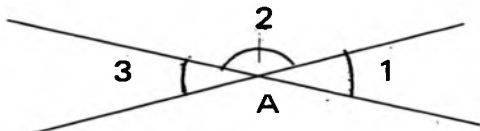
■ 2ème exemple : Choix des axiomes de la géométrie en 6ème-5ème.

Pour nous, l'essentiel en 6ème-5ème est d'aider l'élève à passer des figures qu'il voit à des règles générales sur ces figures.

Ainsi, nous partons d'un premier axiome : «le tour complet est le même partout». Puis nous discutons sur les différentes façons dont on peut mesurer ce tour complet : conventions sur les degrés et les grades, etc.

Comme il est pratiquement impossible de décrire simplement ce qu'est une droite et que les axiomes d'incidence ne sont pas très parlants pour les élèves de premier cycle, il nous semble utile par contre d'établir un lien entre droite et angle par le pseudo-axiome suivant :

«toute droite passant par un point détermine en ce point deux demi-tours». C'est une façon de dire qu'une droite est «bien droite», qu'elle ne «fait pas d'angle». Cela permet alors de «démontrer» l'égalité des angles opposés par le sommet.



L'angle $\widehat{A_1}$ c'est un demi-tour moins l'angle $\widehat{A_2}$. L'angle $\widehat{A_3}$ c'est aussi un demi-tour moins le même angle $\widehat{A_2}$
donc $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$.

Les axiomes sur parallèles et perpendiculaires, somme des angles d'un triangle, égalité des angles à la base d'un triangle isocèle, sont l'institutionnalisation de conjectures issues de très nombreuses expérimentations.

Ainsi par exemple, chaque élève construit un triangle, mesure ses 3 côtés et ses 3 angles et va inscrire au tableau les mesures de ses côtés, celles de ses angles ainsi que la somme des mesures des côtés et celle des mesures des angles.

Peu à peu la lecture du tableau laisse entrevoir comme seule conjecture raisonnable «la somme des angles fait presque toujours 180° ». Après plusieurs expériences (augmenter ou diminuer par exemple les dimensions du triangle), le maître institutionnalise : «la somme des angles d'un triangle correspond à un demi-tour». C'est une propriété qui nous sert très souvent par la suite. Elle a été une fois résumée ainsi par un de nos élèves de 6ème :

«Si j'ai bien compris, c'est la nature qui a décidé que la somme des angles d'un triangle est toujours la même, mais c'est les hommes qui ont décidé que cela faisait 180° ».

V — L'ESCAPEAU, LA LIME ET LE CHAPEAU FACE AUX SITUATIONS-PROBLEMES.

Quand un de nos enfants vient nous demander des explications sur un exercice de math. ou de physique, nous nous trouvons souvent face à un problème difficile que nous ne parvenons pas à résoudre même avec notre « bon sens ».

Si on survole le chapitre d'où l'exercice est tiré, et si on lit bien l'enchaînement des questions, tout s'éclaire et on constate avec soulagement qu'on sait le faire, et qu'il suffit d'appliquer consciencieusement la méthode pré-établie pour que tout se simplifie miraculeusement (même les calculs).

DES PROBLEMES EN GENERAL TROP DIFFICILES...

En d'autres termes, nous constatons tous que, traditionnellement, les problèmes donnés aux élèves sont mathématiquement ou physiquement très ou trop difficiles et qu'il nous faut donc introduire des escapeaux (questions intermédiaires) et flécher très fortement la démarche à suivre pour éviter l'échec généralisé !

UNE FAUSSE DEVOLUTION...

En fait, quand nous donnons un problème en classe ou à la maison, nous ne faisons pas aux élèves « la dévolution » du problème comme nous le souhaiterions. En effet, c'est nous qui récupérons l'essentiel du problème en le posant : envisager quelle démarche a des chances d'aboutir et les différents intermédiaires qu'il serait judicieux d'introduire. Le travail de l'élève consiste alors essentiellement à appliquer les algorithmes et à exécuter les calculs que nous lui avons préparés. Après quoi, nous nous plaignons que ces mêmes élèves manquent d'initiative et de sens critique ! Mais où diable ont-ils eu réellement l'occasion de les développer ?

POUR DEVELOPPER L'INITIATIVE...

Si, donc, nous souhaitons développer initiative et sens critique chez nos élèves, nous devons souvent les placer face à des problèmes mathématiquement très abordables, mais suffisamment ouverts pour que s'offrent plusieurs possibilités de solutions et qu'aucune ne puisse être l'application simpliste d'une méthode pré-établie.

Comme nous l'avons dit plusieurs fois, la situation-problème a son importance (si elle est trop difficile, l'élève ne peut avoir aucune initiative et si elle est trop simpliste, l'élève ne voit pas la nécessité d'expliquer et de justifier son raisonnement), mais une fois de plus, l'attitude du maître est déterminante.

UNE FOIS ENCORE L'ATTITUDE DU MAITRE...

Elle est très fortement déterminée par les objectifs qu'il s'est donnés. C'est pourquoi nous pensons :

– que son objectif prioritaire ne doit pas être la résolution effective de n exercices à l'heure (avec n le plus grand possible),

– qu'il doit s'interdire de s'emparer de la moindre proposition allant dans le bon sens et provenant (comme par hasard) des meilleurs élèves pour traiter lui-même l'exercice,

– qu'il ne doit pas inconsciemment se laisser prendre au jeu du problème ouvert et se retrouver lui-même en position de recherche de la solution pendant que ses élèves attendent patiemment ou narquoisement la réponse !

– que son rôle est d'officialiser les diverses propositions et de les rendre discutables. Ce n'est pas à lui de rejeter les solutions partielles ou erronées qui n'aboutiront pas. Ces solutions ont le double mérite de permettre aux élèves moyens ou faibles de s'investir dans le débat et au maître d'avoir l'occasion de montrer le rôle de l'analyse de l'erreur et des impasses comme point de départ vers une solution.

L'ANALYSE DE L'ERREUR : UNE SOURCE DE PROGRES...

Par exemple, pour prouver l'implication $A \Rightarrow B$ une méthode classique consiste à introduire une propriété intermédiaire C , en espérant que $A \Rightarrow C$ d'une part et $C \Rightarrow B$ d'autre part soient deux implications plus simples à démontrer que l'implication initiale. Il se peut après examen de la situation que l'une des 2 implications intermédiaires s'avère très difficile à démontrer, voire fausse.

La réaction la plus répandue chez les élèves devant cette déconvenue consiste à abandonner purement et simplement la méthode ou pire encore à déclarer : l'implication initiale $A \Rightarrow B$ est fausse ou trop difficile à montrer.

Nous pensons que, face à une telle situation, cela vaut la peine de demander à la classe de faire un retour en arrière par le biais de questions comme celles-ci :

– *« Puisque $A \Rightarrow C$ est faux et $C \Rightarrow B$ vrai, peut-on en déduire que $A \Rightarrow B$ est faux ? ».*

– *« La méthode que nous avons mise en place est-elle rigoureuse et ne pourrait-on pas l'utiliser autrement pour aboutir au résultat cherché ? ».*

Cette démarche permet à l'élève de découvrir qu'il peut y avoir des informations positives à tirer d'une impasse et que le fait que ça ne « marche pas » en s'y prenant d'une certaine façon ne prouve absolument pas qu'on a perdu son temps et qu'on ne va pas y arriver.

Quand, par chance, on arrive en fin de compte à démontrer avec la classe un résultat en s'appuyant expressément sur les idées directrices de plusieurs propositions incomplètes ou erronées et si la « classe » en prend conscience, il se produit pour tous

ceux qui le réalisent un progrès important dans l'apprentissage du raisonnement déductif !... C'est peut-être même à ce niveau que se situent les différences les plus significatives entre les élèves en voie de progrès et ceux qui s'installent de plus en plus irrémédiablement dans l'échec scolaire et même l'échec tout court !

Par exemple nous avons souvent observé dans des classes de CPPN que, lorsqu'un élève propose un résultat, l'ensemble de la classe a la réaction suivante :

— Si le résultat est exact : on assiste à une manifestation bruyante de victoire et à un refus catégorique de regarder le pourquoi et le comment : *«C'est pas la peine puisque ça marche»*.

— S'il est inexact : on assiste encore à une manifestation non moins bruyante de déception et de rage. Il n'est pas rare de voir l'auteur, se faisant insulter par ses camarades, déchirer la feuille sur laquelle il a pu écrire et aller violemment la jeter dans la corbeille à papiers, un peu comme s'il voulait repousser le plus loin possible de lui les traces de son échec et de sa honte.

En général, les élèves que nous avons rencontrés en CPPN ne sont pas dénués de moyens intellectuels, tant s'en faut ; mais la plupart d'entre eux ont l'attitude que nous venons de décrire précédemment. Ils ne veulent garder aucune trace, ne faire aucune analyse de leurs réussites et de leurs échecs et c'est pour cela essentiellement qu'ils sont en CPPN !

ET SI NOUS RANGIONS ESCABEAU, LIME ET CHAPEAU ?...

Notre rôle de professeur de maths n'est surtout pas d'éviter artificiellement à nos élèves de se tromper mais de les aider, quand cela se produit, à analyser et à garder une trace, une mémoire de ces fausses pistes ; ils acquerront ainsi progressivement l'expérience qui leur permettra peu à peu de trouver plus facilement leur chemin dans l'univers des possibles.

Modifier le contrat didactique de la façon dont nous vous le proposons est un peu une gageure lorsqu'on est seul pour le faire ! Si par contre il se trouve un ou deux collègues, mathématiciens ou non, avec lesquels vous puissiez réfléchir en vue de faire évoluer progressivement les pratiques de la classe, alors tout devient possible avec du temps, et de l'enthousiasme.. Cela vous demandera certainement beaucoup de peine et de sueur mais vous y puiserez aussi beaucoup de joie.

Bon courage et très cordialement.

L'équipe d'enseignants du groupe
«apprentissage du raisonnement»
de l'I.R.E.M. de Grenoble.

Au fur et à mesure de nos possibilités, nous publierons dans «petit x» et dans d'autres fascicules des activités menées en classe avec des compte rendus sur le comportement de la classe face à ces activités !