UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

# INTRODUCTION
# A
# LA LOGIQUE

****

Ph. J. HAUG

I.R.E.M. de GRENOBLE - B.P. 41 - 38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX

# SOMMAIRE

# PRESENTATION

Ce texte n'est pas un cours de logique ; c'est la transcription d'exposés faits dans des stages de formation continue organisés par l'I.R.E.M. de Grenoble en 1970-71 et 1971-72. Ces exposés, faits à la demande des stagiaires, avaient pour but de sensibiliser les stagiaires aux problèmes posés par l'utilisation de la logique, et en particulier par le maniement du symbolisme.

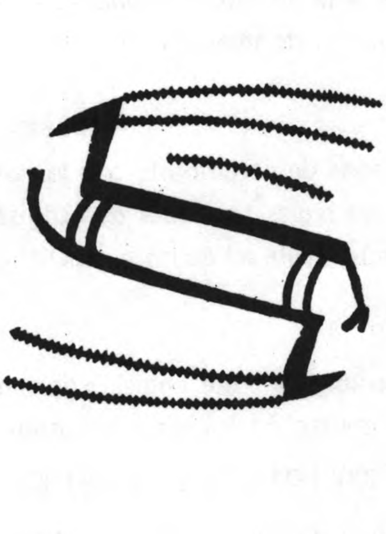
C'est ainsi qu'on trouvera des commentaires sur l'utilisation des signes $\Rightarrow$ et $\vdash$, des réflexions sur les rapports entre le langage courant et le langage formalisé.

Le but assigné à ces exposés a guidé certains des choix faits. En particulier, les théories déductives ont ici une place prépondérante pour la raison suivante : les stagiaires n'avaient pratiquement aucune formation en logique, et connaissaient seulement les tables de vérité et probablement aussi le maniement mécanique des quanteurs. Il m'a paru préférable de commencer l'exposé par une nouveauté, ce que ne permettait pas la théorie des modèles de la logique propositionnelle ; d'autre part, avant qu'on ait bien assimilé l'équivalence des théories syntaxiques et sémantiques, c'est la première qui semble correspondre le mieux à la démarche déductive du raisonnement ; enfin, il me paraît difficile d'expliquer en peu de temps la théorie des modèles de la logique quantifiée.

C'est également pour des raisons de commodité que la notation polonaise a été choisie : elle dispense de donner les règles formelles de l'utilisation des parenthèses. Mais on s'est ramené de façon non formelle à l'écriture usuelle, compte-tenu du temps passé à utiliser ces écritures.

De façon générale, les conventions ont été choisies de manière à suivre autant que possible l'usage courant et à mettre en évidence les propriétés. Ainsi l'usage du signe $\square$ rend naturelles les règles concernant les variables liées ; les termes introduits par $\iota$ correspondent bien à l'habitude qu'ont les mathématiciens de donner un nom aux objets caractérisés par une propriété.

Outre une amélioration sensible de la présentation matérielle, cette deuxième édition apporte quelques modifications de rédaction et une bibliographie un peu plus riche ; cette dernière cite, à de rares exceptions près, des ouvrages écrits ou traduits en français.



# Chapitre I
# INTRODUCTION

## I – APERÇU HISTORIQUE.

Si faire de la logique consistait à raisonner correctement, il serait impossible de connaître le premier logicien ; mais il paraît plus satisfaisant d'admettre que la logique consiste à réfléchir sur le raisonnement, à énoncer des règles ou des lois régissant les activités déductives, à décrire, par exemple en les formalisant, les démarches du raisonnement.

Nous pouvons alors sans risque d'erreur désigner Aristote* (384-322 av. J.C.) [4] comme le fondateur de la logique ; il avait d'ailleurs conscience lui-même d'être un créateur, puisqu'on peut lire dans les *Topiques* : « Dans le cas de cette étude, il n'y avait pas une partie déjà élaborée, une autre non : il n'existait rien du tout ». Aristote a principalement étudié le syllogisme, et son application à la démonstration ; un exemple de syllogisme, étudié dans les *Premiers analytiques*, situera les travaux d'Aristote : « si A est affirmé de tout B et B de tout $\Gamma$, nécessairement A est affirmé de tout $\Gamma$ ».

Aristote a eu quelques continuateurs immédiats, mais il est plus intéressant de citer une autre école de logiciens grecs : Chrysippe (280-205 av. J.C. environ) semble être le plus éminent représentant des Stoïciens ; ceux-ci ont étudié la logique des propositions, qui s'intéresse aux rapports que les connecteurs (tels que « ou », « non », « si..., alors ») établissent entre les propositions sans se préoccuper du contenu de chaque proposition ; ils ont en particulier donné correctement l'équivalent de tables de vérités, y compris pour l'implication. Pour diverses raisons, leurs travaux ont été méconnus jusqu'à une date récente ; et la table de vérité suivante de l'implication a pu être jugée ridicule jusqu'à la fin du siècle dernier.

* Les indications entre parenthèses indiquent l'année de la naissance et l'année de la mort des personnes citées ; les nombres entre crochets renvoient à la bibliograpie.

| p | q | p ⇒ q |
|---|---|---|
| vrai | vrai | vrai |
| vrai | faux | faux |
| faux | vrai | vrai |
| faux | faux | vrai |

Après un sommeil de quelques siècles, l'étude de la logique est reprise avec ardeur dans les universités médiévales de l'Europe occidentale ; on peut citer, parmi de nombreux docteurs qui se sont illustrés dans la logique, Abelard (1079-1142), Albert le Grand (1193-1280), Buridan (mort après 1358), Paul de Venise (mort en 1429). Le développement et l'approfondissement de l'œuvre d'Aristote a été la principale activité logique du Moyen-âge ; mais aucune idée vraiment nouvelle n'apparaissant, peu à peu ces études sont devenues stériles et une réaction contre la « scolastique » s'est développée à la Renaissance et à l'âge classique ; la deuxième partie du Discours de la méthode de Descartes (1596-1650) est peut-être l'expression la plus fameuse de cette opposition.

La période moderne de la logique est annoncée avec éclat par Leibniz (1646-1716) qui est le premier à exprimer l'idée d'une logique formalisée à l'égal des mathématiques ; cette idée ne pouvait d'ailleurs se former qu'après que les mathématiques aient acquis cet outil puissant qu'est l'utilisation des symboles, qui permet la description rigoureuse d'algorithmes. Leibniz n'ayant laissé que des fragments de logique, il faut attendre le milieu du XIXème siècle pour voir la logique prendre un essor considérable.

Les Anglais de Morgan (1806-1878) et Boole (1815-1864) [29] ont créé un calcul qui est à l'origine des tables de vérité de la logique des propositions et des opérations ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\Delta$,...) sur les ensembles ; Peano (1858-1932) utilisant ces résultats a donné une axiomatisation de l'arithmétique. Mais c'est Frege (1848-1925) [5] [6] qui a indiqué le plus clairement ce que devrait être une formulation du raisonnement mathématique, et les raisons de sa nécessité ; malheureusement l'« idéographie » qu'il a proposée était trop lourde à manier, et les bases de sa logique péchaient encore par manque de rigueur.

Cantor (1845-1918) [29] n'a pas produit une œuvre logique considérable ; mais les difficultés logiques qu'a rapidement soulevées la théorie des ensembles ont été un moteur puissant pour le développement de la logique. Cantor, dans un article de 1883, définit ainsi le mot « ensemble » : « Par « ensemble » ou « système », j'entends en effet de façon générale toute multiplicité qui peut être pensée comme unité, c'est-à-dire toute collection d'éléments déterminés qui peut être combinée en un tout par une loi ». Cette façon naïve de fonder la théorie des ensembles ne répondait certes pas à l'exigence qu'exprimait déjà Leibniz : la validité des démarches du calcul logique doit être indépendante de l'interprétation que l'on donne des symboles utilisés.

La théorie naïve des ensembles devait être minée par un certain nombre de paradoxes, tel que celui de l'ensemble de tous les ensembles ; il devenait urgent de formaliser les mathématiques, de manière à contrôler pas à pas les démarches faites et à trouver ainsi, si possible, les sources des paradoxes. Russel (1872-1970) [10] [29] fit une chasse active aux paradoxes et écrivit avec Whitehead les *Principia mathematica*, qui devaient entre autres éliminer les paradoxes connus mais aussi donner pour la première fois un symbolisme vraiment maniable ; toutefois son désir de réduire le raisonnement mathématique à un formalisme logique strict s'est heurté à de grandes difficultés.

Le langage que l'on utilisait pour parler de la logique et établir des résultats la concernant, devait bien finir par recevoir un nom : Hilbert (1862-1943) [12] [24] fut l'un des premiers à parler de la métamathématique (ou de la métalogique) qui est la langue, nécessairement non formalisée, qui permet de parler des algorithmes formalisés de la logique ; Hilbert devait donner comme objectif aux études logiques de démontrer, par des raisonnements métamathématiques, que les mathématiques classiques ne sont pas contradictoires. Mais le second théorème de Gödel, théorème métamathématique qui date de 1931, établit qu'étant donné un système formalisé suffisamment riche pour contenir l'arithmétique, il est impossible de montrer qu'il n'est pas contradictoire, même si l'on utilise les moyens (non formalisés) de l'arithmétique.

Signalons encore quelques courants de la logique du XXème siècle : l'intuitionnisme [23], dont Brouwer au début du siècle devait être le représentant le plus connu et qui, par son opposition à la formalisation des mathématiques, a contraint les « formalistes » à plus de rigueur ; l'école polonaise qui produisit entre les deux guerres un nombre considérable de travaux, le Cercle de Vienne dont Carnap fut le chef de file et qui donna des développements plus philosophiques que mathématiques à la logique.

Même en s'en tenant à un exposé sommaire, il faut au moins signaler que l'Inde connut un développement de la logique, indépendant de l'Europe semble-t-il. Dans le premier millénaire de notre ère, deux courants principaux s'opposèrent, le premier attaché à l'hindouisme et le second au bouddhisme ; l'essentiel de ce que nous ont laissé les Indiens de cette époque est une étude du syllogisme ; on peut citer Dinnàga (vers 500 après J.C.), qui simplifia la présentation du syllogisme indien. La logique indienne, après une éclipse de trois siècles, devait connaître un certain renouveau du XIVème au XVIIème siècle, les mêmes problèmes étant étudiés de façon plus abstraite.

## II – UN PARADOXE : L'ENSEMBLE DES ENSEMBLES.

L'une des sources de l'activité logique contemporaine fut certainement la découverte de nombreux paradoxes dans la théorie « naïve » des ensembles ; une catégorie importante de ceux-ci peut se ramener au paradoxe de l'ensemble des ensembles, que l'on peut présenter ainsi.

— Soit X un ensemble ; notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit f une application de $\mathcal{P}(X)$ vers X ; nous allons montrer que f n'est pas injective.

Définissons K : c'est l'ensemble des éléments a de X pour lesquels il existe au moins une partie A de X telle que $a = f(A)$ et $a \notin A$ (a priori, rien ne prouve que K ne soit pas vide) ; en écriture formalisée,

$$K = \{a : a \in X \text{ et } \exists A, (A \subset X \text{ et } a = f(A) \text{ et } a \notin A)\}.$$

Convenons que $k = f(K)$ ; montrons que $k \in K$. En effet, si $k \notin K$, quelle que soit la partie A de X, si $k = f(A)$ alors $k \in A$ ; en particulier, puisque $k = f(K)$, il en résulte que $k \in K$. D'autre part, bien évidemment, si $k \in K$ alors $k \in K$. Puisque $k \notin K$ ou $k \in K$, nous pouvons conclure que $k \in K$.

Puisque $k \in K$, il existe une partie A de X telle que $k = f(A)$ et $k \notin A$ ; soit $K'$ une telle partie : nous savons que $K' \neq K$ car $k \notin K'$ et $k \in K$, et $f(K) = f(K')$. Donc f n'est pas injective.

— Soit alors $\Omega$ l'ensemble de tous les ensembles. Soit U dans $\mathcal{P}(\Omega)$ ; c' est une partie de $\Omega$, donc un ensemble, et $U \in \Omega$ par définition même de $\Omega$ ; c'est dire que $\mathcal{P}(\Omega) \subset \Omega$. Donc $X \longmapsto X$ définit une injection de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\Omega$, ce qui est en contradiction avec le résultat précédent.

Bien qu'on ait utilisé des notions comme celles d'ensemble des parties d'un ensemble, et implicitement, d'ensemble vide et de produit cartésien, on sent bien que nos ennuis proviennent de l'usage de l'ensemble de tous les ensembles ; mais sera-t-on sûr de ne rencontrer aucun paradoxe si l'on s'interdit seulement de parler de l'ensemble de tous les ensembles ? Qui peut nous affirmer que l'ensemble de tous les entiers, par exemple, ne cache pas des pièges aussi dangereux ? La formalisation de la logique et des mathématiques est une voie qui paraît raisonnable pour contrôler pas à pas nos démarches, ce qui permettra peut-être de déceler les points sensibles qu'il faut modifier pour éliminer les paradoxes connus ; la logique étant devenue par sa formalisation un objet bien délimité, dont le fonctionnement est indépendant de l'intuition, il sera possible de l'étudier objectivement. Toutefois, l'espoir d'obtenir ainsi une logique dont on pourrait démontrer qu'elle ne nous réserve pas d'autres paradoxes a été ruiné par le deuxième théorème de Gödel, tout au moins dans la mesure où nous voulons une logique qui nous permette de faire des mathématiques.

## III – LES LANGAGES DE LA LOGIQUE.

La logique formalisée est constituée d'une suite d'assemblages de signes dont les règles de formation sont indépendantes de l'interprétation que l'on peut donner à ces assemblages. Mais il faut bien voir qu'un discours ainsi formalisé qui existerait indépendamment de tout contexte est proprement impensable.

En effet, les règles indiquant comment peuvent être écrits ou reconnus les assemblages de la logique doivent être comprises pour pouvoir être appliquées ; elles sont donc nécessairement formulées dans une langue chargée de sens, faisant référence à des opérations concrètes (une telle règle pourrait commencer ainsi : « Après avoir écrit le signe =, écrire y.. »). Il n'est pas possible d'écrire ces règles dans un langage formalisé indépendant de l'interprétation qu'on peut en donner.

Il est vain d'espérer qu'une langue formalisée puisse se décrire elle-même : avant de commencer à écrire des assemblages de signes qui sont dépourvus de sens, il faut savoir suivant quels processus on les écrits ; l'écriture de la logique formalisée étant conditionnée et donc précédée par les règles d'écritures des assemblages, ces règles doivent exister avant la logique formalisée et ne peuvent donc pas être exprimées par cette logique.

C'est pourquoi la partie descriptive de ce qui suit sera écrite en langage courant ; cette partie descriptive, sans laquelle rien d'autre ne pourrait être écrit, n'aura aucune prétention à être formalisée ; mais elle aura l'ambition d'être comprise, et pour cela il sera fait usage de termes dont on peut espérer qu'ils ont un sens voisin pour la plupart des lecteurs, et aussi d'exemples qui permettront de préciser le sens des explications abstraites.

Un usage, même bref, des algorithmes de la logique montre que des situations semblables se répètent souvent, ce qui amène à utiliser des abréviations pour les expressions les plus courantes, à « démontrer » des critères indiquant que si l'on connaît telle situation, alors on peut affirmer que les algorithmes de la logique, si on les utilisait, permettraient d'aboutir à telle autre situation. Naturellement les remarques concernant les abréviations et les critères seront également faites en langage courant ; langage que nous appellerons, en suivant Kleene [17], langage de l'observateur, puisque c'est le langage de celui qui observe le fonctionnement d'un système logique axiomatisé. En toute rigueur, on pourrait se passer de telles abréviations ; mais sans elles il serait pratiquement impossible d'avancer sérieusement dans la construction d'une logique formalisée : ainsi, pour écrire une expression qui pourra s'interpréter comme « x est équivalent à y », nous serions amenés à écrire, dans le système choisi ici,

$$« \neg \vee \neg \vee \neg xy \neg \vee \neg yx » ;$$

l'abréviation « $\Leftrightarrow$ xy » de cet assemblage est quand même plus lisible ; dans l'axiomatique choisie par Bourbaki [13], l'expression qui s'interprète comme le cardinal 1 nécessiterait une dizaine de milliers de signes pour être écrite sans abréviation. De même, si l'on s'interdisait l'usage de critères, on serait obligé, par exemple, chaque fois que l'on veut faire un raisonnement par l'absurde, de réécrire plusieurs dizaines de formules.

Un des buts de la construction d'un système formel est de pouvoir observer comment il se comporte ; on sera donc amené à raisonner sur lui pour énoncer des propriétés telles que la suivante : « il existe, dans la théorie $T$, des propositions qui ne sont pas des théorèmes ».

Naturellement ces énoncés, qui ont un sens concret, de même que leurs démonstrations, seront formulés dans la langue de l'observateur et feront donc appel à l'intuition du lecteur (on dit aussi que l'on fait une méta-démonstration pour établir un méta-théorème).

Enfin, la plupart des systèmes logiques construits ne l'ont pas été simplement pour mettre en place des successions d'algorithmes ; on les a souvent construits pour formaliser une situation déjà connue de façon naïve ou intuitive, et en général, il y a au moins une interprétation possible d'une théorie formalisée, permettant de donner un sens aux assemblages construits suivant les règles formelles. Ainsi, le plus souvent on interprétera l'assemblage « $(\forall x)\ x \subset x$ » comme « quelle que soit la collection x, elle est une partie d'elle-même ». Evidemment, ces rapprochements d'un système logique avec des situations « concrètes » seront également exprimées dans la langue de l'observateur.

Tout ceci explique que dans ce qui suit on trouvera seulement quelques bribes de logique formalisée, données à titre d'exemple. La part la plus importante est consacrée à l'étude de la syntaxe, c'est-à-dire à l'étude des règles formelles, étude menée indépendamment du sens que l'on peut donner aux formules construites à l'aide de ces règles ; on trouvera aussi quelques remarques sémantiques, remarques s'attachant à donner un sens aux symboles et formules d'une théorie formalisée. Remarques sémantiques et étude de la syntaxe sont évidemment écrites dans la langue de l'observateur.

## Chapitre II

## LOGIQUE DES PROPOSITIONS

Une logique des propositions, comme on l'a vu, ne saurait indiquer elle-même en quoi elle décrit les relations des propositions entre elles ; ce sera le rôle de l'interprétation d'une telle logique, en assignant un sens aux symboles logiques, d'indiquer dans quelle mesure la logique des propositions, structure abstraite, peut rendre compte des rapports que l'on constate concrétement entre les propositions, et des jugements portés sur ces rapports. Il se trouve d'ailleurs que la logique qui est décrite ici est susceptible de recevoir au moins deux interprétations ; l'une d'elles, dont il ne sera plus question par la suite, lie les algorithmes que nous allons rencontrer à des règles de composition entre les sous-ensembles d'un ensemble donné.

Nous nous attacherons à l'autre interprétation, qui justifie le titre de ce chapitre ; les propositions qui nous intéressent ici sont des phrases affirmatives, ou énonciatives, telles que celles-ci :« César a franchi le Rubicon », « le mercure est plus dense que l'or », « il l'a franchi » ou encore « $2 = 3 - 1$ », « $\int_0^x \sin t \, dt = 0$ ». On pense en général être capable, en faisant éventuellement les recherches convenables, de juger si une phrase énonciative est vraie ou fausse ; encore peut-on constater que des phrases comme « il l'a franchi » ou « $\int_0^x \sin t \, dt = 0$ » contiennent des variables qui nous empèchent de trancher.

On ne s'occupe donc pas ici de phrases interrogatives (« Viendra-t-il ? »), indiquant un ordre (« Ferme la porte ! »), etc... De plus, dans ce chapitre, on n'analysera pas le contenu de chacune des phrases, mais les relations entre ces phrases qui sont introduites par des mots tels que « et », « ou », « ne ... pas » ou « si..., alors ». Et l'on souhaite que des affirmations telles que « il fait jour, ou il ne fait pas jour » ou « si n est un entier, alors n est pair ou n est impair », affirmations généralement tenues pour vraies, soient justifiées par une logique des propositions. Autrement dit, une logique des propositions devrait en particulier nous aider à décider, quand on relie entre elles des phrases énonciatives $P_1$, $P_2$,..., $P_n$ à l'aide des mots « et », « ou », etc..., si l'assemblage ainsi obtenu est vrai (ou faux) indépendamment du contenu des phrases $P_1$, ..., $P_n$, ou si la vérité de cet assemblage dépend du contenu de ses constituants.

De nombreuses présentations de la logique des propositions sont possibles ; à l'occasion seront indiquées des possibilités qui ne sont pas exploitées ici.

## I – DESCRIPTION D'UNE LOGIQUE DES PROPOSITIONS.

Nous utiliserons deux catégories de **signes logiques** :

– Les **lettres** : a, b, ..., a′, ..., a*, ... ; nous supposerons qu'étant donnée une certaine collection (finie) de lettres, il est toujours possible de trouver une lettre qui soit différente de celles qui figurent dans la collection donnée ; par commodité ces lettres seront uniquement des minuscules latines, éventuellement accompagnées d'accents, d'étoiles, etc... Chacune de ces lettres, dans l'interprétation que l'on fait de la logique des propositions, désignera une phrase énonciative particulière ; étant donné ce qu'on attend de la logique des propositions, en général ces phrases, non analysées, ne contiendront pas de mots tels que « ou », « et », etc...

▷ – Les **connecteurs** : $\vee$, $\neg$. Etant donnée l'interprétation que l'on veut faire de ces signes, $\vee$ se lit « ou » et $\neg$ se lit « non ».

– En toute rigueur, il faudrait encore un **signe séparateur** ; nous utiliserons un espace blanc, ou un passage à la ligne.

Les signes sont réunis en **assemblages**, c'est-à-dire en successions (finies) de signes, séparés par le symbole séparateur ; voici, en exemple, cinq assemblages (numérotés de 1 à 5 et séparés par un passage à la ligne).

1) $\vee \vee \vee \neg$
2) a
3) $\vee \vee \vee \neg$
4) $\neg \vee$ f*
5) $\neg$ f* $\vee$

Pour décider que les assemblages des lignes 1) et 3) sont identiques et que les assemblages des lignes 4) et 5) sont différents, il faut naturellement être capable de voir que le signe $\vee$ et le signe $\vee$ sont identiques et que les signes $\neg$ et f* sont différents, mais aussi avoir une expérience suffisante du rangement des collections dans un ordre donné.

Nous abrégerons la succession des signes $\vee$ et $\neg$ par le symbole abréviatif
▷ $\Rightarrow$ ; ainsi, on pourra écrire indifféremment $\vee \neg$ ou $\Rightarrow$, suivant que l'une ou l'autre de ces deux écritures sera plus commode. Le symbole $\Rightarrow$ se lit « implique ».

Nous parlerons constamment d'assemblages non spécifiés, auxquels nous ferons subir certaines opérations ; la clarté du langage impose de désigner ces assemblages par des symboles, distincts des signes logiques (lettres et connecteurs) et des symboles abréviatifs. Pour ne pas alourdir le texte, nous écrirons « soient les assemblages A et B... » au lieu de « soit un assemblage, que nous désignerons dans la suite par A, et soit un assemblage, que nous désignerons dans la suite par B... » ; autrement dit, suivant un usage courant, nous confondrons les objets et les symboles désignant les objets, le contexte permettant de restituer à chacun ce qui lui est dû.

Un autre usage, que nous suivrons également, consiste à mêler dans une même écriture les signes logiques, les symboles abréviatifs et les symboles désignant des assemblages. Ainsi, on écrira $A \Rightarrow a$, ce qui symbolise l'assemblage obtenu en écrivant d'abord l'assemblage symbolisé par A, puis $\Rightarrow$, et enfin a ; si l'on spécifie que A représente $\vee xy$, $A \Rightarrow a$ représente $\vee xy \Rightarrow a$, qui est une abréviation de $\vee xy \vee \neg a$.

On dira qu'on a **substitué** l'assemblage A à la lettre $\alpha$ dans l'assemblage B si l'on a remplacé $\alpha$ par A chaque fois qu'il se rencontre dans B ; on symbolisera le résultat de cette substitution par $(A|\alpha)B$ ; ainsi

$$(\vee xy|y)\ \neg y \neg xy \quad \text{symbolise} \quad \neg \vee xy \neg x \vee xy,$$
$$(\vee xy|y)\ p \quad \text{symbolise} \quad p.$$

Remarquons que sans la convention faite précédemment, le début de ce paragraphe aurait dû s'écrire : « on dira qu'on a substitué l'assemblage désigné par A à la lettre désignée par $\alpha$ dans... » ;

Critère de substitution **CS1** : Soient A, B et C des assemblages et $\alpha$ une lettre ; désignons $(A|\alpha)B$ par $B^*$ et $(A|\alpha)C$ par $C^*$.

i) $\neg B^*$ est identique à $(A|\alpha)\neg B$ ;
ii) $\vee B^*C^*$ est identique à $(A|\alpha)\vee BC$ ;
iii) $\Rightarrow B^*C^*$ est identique à $(A|\alpha)\Rightarrow BC$.

La justification de ce critère, qui repose sur l'expérience concrète que nous avons de la manipulation des objets, n'est qu'une paraphrase du critère ; contentons-nous de la donner pour i) : il revient au même de remplacer $\alpha$ par A dans B puis de mettre $\neg$ devant, ou de mettre $\neg$ devant B et de remplacer $\alpha$ par A dans l'assemblage ainsi obtenu (en effet, $\neg$ n'étant pas une lettre est distinct de $\alpha$).

Nous allons distinguer, parmi les assemblages, ceux qui pourront s'interpréter comme des phrases correctes : nous écarterons ainsi ce qui pourrait s'interpréter comme « ou si la lune est ronde, alors et et » et nous ne conserverons que ce qui correspond à des phrases liées entre elles de façon grammaticalement correcte, comme « si la lune est ronde, alors elle est carrée ». Ce tri est fait par les **constructions formatives.**

Une construction formative est une séquence (finie) d'assemblages ayant la propriété suivante : si A est un assemblage de cette séquence d'assemblages, notée *F*, A vérifie l'une des conditions suivantes :

i) A est une lettre ;

ii) A est précédé dans *F* par un assemblage, soit B, tel que A soit $\neg B$ ;

iii) A est précédé dans *F* par des assemblages, soient B et C, tels que A soit $\vee BC$.

Exemple de construction formative.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | | $x$ | vérifie i) | : $x$ est une lettre. |
| 2) | | $\neg x$ | vérifie ii) | : $\neg x$ est précédé dans *F* par $x$ (ligne 1). |
| 3) | | $\vee \neg xx$ | vérifie iii) | : $\vee \neg xx$ est précédé dans *F* par $\neg x$ (ligne 2) et $x$ (ligne 1). |
| | $F$ | | | |
| 4) | | $p$ | | |
| 5) | | $p$ | | |
| 6) | | $\vee px$ | | |

Un assemblage figurant dans une construction formative est appelé une **proposition.** On voit, d'après la condition i), que toute lettre est une proposition.

Il peut paraître curieux d'écrire $\vee ab$ plutôt que $a \vee b$ ; cette façon de présenter les choses, due à l'école polonaise, fait l'économie des règles d'utilisation des parenthèses ; pour interpréter aisément les assemblages, on écrira le plus souvent $a \vee b$ au lieu de $\vee ab$ et $a \Rightarrow b$ au lieu de $\Rightarrow ab$ et on utilisera les parenthèses, de façon non codifiée, de manière que l'on puisse toujours se ramener à l'écriture formalisée. On peut d'ailleurs se demander si l'écriture codifiée avec parenthèses est beaucoup plus lisible que l'écriture polonaise : ainsi $\Rightarrow \vee \neg xy \neg z$ s'écrira de la façon libre dont nous avons convenu $(\neg x \vee y) \Rightarrow \neg z$ mais un système codifié de parenthèses mènerait à écrire

$$((\neg(x)) \vee (y)) \Rightarrow (\neg(z)).$$

La lecture du symbole $\Rightarrow$ par « implique » se justifie plus naturellement avec la convention d'écriture que nous avons faite : $a \Rightarrow b$ (c'est-à-dire $\Rightarrow ab$) est l'abréviation $\neg a \vee b$ (autrement dit $\vee \neg ab$) ; or « a implique b signifie « si a, alors b », ce qu'on peut encore dire, de façon plus compliquée, « à moins que a ne soit pas, b est vrai ».

Soient *F* et *G* des constructions formatives ; si l'on écrit d'abord les assemblages de *F* dans l'ordre où ils figurent dans *F*, puis les assemblages de *G* dans l'ordre où ils figurent dans *G*, la séquence d'assemblages *H* ainsi écrite est une construction formative.

$$
F \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ . \\ . \\ . \\ A_i \\ . \\ . \\ . \\ A_p \end{array} \right. \qquad
G \left\{ \begin{array}{l} B_1 \\ . \\ . \\ . \\ B_j \\ . \\ . \\ . \\ B_q \end{array} \right. \qquad
H \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ . \\ . \\ . \\ A_i \\ . \\ . \\ . \\ A_p \\ B_1 \\ . \\ . \\ . \\ B_j \\ . \\ . \\ . \\ B_q \end{array} \right.
$$

En effet, soit C un assemblage figurant dans $H$ ; s'il provient de $F$, il est une lettre, ou il est précédé dans $F$, et donc dans $H$, par un assemblage D tel que C soit $\neg$D, ou il est précédé dans $F$, et donc dans $H$, par des assemblages E et F tels que C soit $\vee$EF : dans tous ces cas, C vérifie *par rapport à H*, l'une des trois conditions imposées ; si C provient de $G$ on fait les mêmes constatations. Le résultat provient de ce que les assemblages qui précèdent C dans $F$ (ou dans $G$) précèdent également C dans $H$.

Si $F$ est une construction formative et si A est un assemblage figurant dans $F$, la séquence d'assemblages $F'$ obtenue en écrivant $\neg$A à la suite de $F$ est aussi une construction formative.

En effet, soit B un assemblage figurant dans $F'$ ; si B figure dans $F$, puisque tous les assemblages précédant B dans $F$ précèdent B dans $F'$, l'assemblage B vérifie l'une des trois conditions imposées par rapport à $F'$ ; si B ne figure pas dans $F$, alors B est $\neg$A, et B est précédé par A dans $F'$.

$$
F \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ . \\ . \\ . \\ A_i \\ A \\ A_{i+1} \\ . \\ . \\ . \\ A_n \end{array} \right. \qquad
F' \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ . \\ . \\ . \\ A_i \\ A \\ A_{i+1} \\ . \\ . \\ . \\ A_n \\ \neg A \end{array} \right.
$$

On établit de façon analogue le résultat suivant.

Si $F$ est une construction formative et si A et B sont des assemblages figurant dans $F$, la séquence d'assemblages $F'$ obtenue en écrivant $\vee AB$ à la suite de $F$ est aussi une construction formative.

Critères de formation **CF** : Si A et B sont des propositions,

i) $\neg A$ est une proposition ;

ii) $\vee AB$ est une proposition ;

iii) $\Rightarrow AB$ est une proposition.

Etablissons par exemple le troisième critère ; puisque A et B sont des propositions, elles figurent dans des constructions formatives, soient $F$ et $G$ (il peut se faire d'ailleurs que A soit le premier, ou le dernier assemblage de $F$, ou même l'unique assemblage figurant dans $F$ ; une remarque analogue peut être faite pour B ; il peut aussi arriver que $F$ soit identique à $G$).

$$F\left\{\begin{array}{l} A_1\\ \cdot\\ \cdot\\ A\\ \cdot\\ \cdot\\ A_p \end{array}\right. \qquad G\left\{\begin{array}{l} B_1\\ \cdot\\ \cdot\\ B\\ \cdot\\ \cdot\\ B_q \end{array}\right.$$

Ecrivons successivement les assemblages de $F$ dans l'ordre où ils se présentent, puis ceux de $G$ dans l'ordre où ils se présentent, on obtient ainsi une nouvelle construction formative ; notons-la $H$. En écrivant $\neg A$ à la suite de $H$, on obtient encore une construction formative puisque A figure dans $H$ ; notons $H'$ cette construction formative ; enfin, en écrivant $\vee\neg AB$ à la suite de $H'$, on obtient une construction formative $H''$. Pour terminer, il suffit de remarquer que $\vee\neg AB$ s'abrège en $A \Rightarrow B$.

$$H\left\{\begin{array}{l} A_1\\ \cdot\\ \cdot\\ A\\ \cdot\\ \cdot\\ A_p\\ B_1\\ \cdot\\ \cdot\\ B\\ \cdot\\ \cdot\\ B_q \end{array}\right. \qquad H'\left\{\begin{array}{l} A_1\\ \cdot\\ \cdot\\ A\\ \cdot\\ \cdot\\ A_p\\ B_1\\ \cdot\\ \cdot\\ B\\ \cdot\\ \cdot\\ B_q\\ \neg A \end{array}\right. \qquad H''\left\{\begin{array}{l} A_1\\ \cdot\\ \cdot\\ A\\ \cdot\\ \cdot\\ A_p\\ B_1\\ \cdot\\ \cdot\\ B\\ \cdot\\ \cdot\\ B_q\\ \neg A\\ \vee\neg AB \text{ abrégé en } \Rightarrow AB \end{array}\right.$$

Critère de substitution **CS2** :

Si A et B sont des propositions et si $\alpha$ est une lettre, $(A|\alpha)B$ est une proposition.

En effet, si B est une proposition, B figure dans une construction formative, soit $F$ ; montrons de proche en proche que la propriété est vérifiée pour chaque assemblage dans $F$, ce qui nous permettra de conclure qu'elle est vraie pour B.

$$F \left\{ \begin{array}{l} B_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n \end{array} \right.$$

Supposons que la propriété soit vraie pour tous les assemblages précédant $B_i$ dans $F$. Si $B_i$ est une lettre, ou bien $B_i$ est $\alpha$ et $(A|\alpha)B_i$ est A, donc $(A|\alpha)B_i$ est une proposition, ou bien $B_i$ est une lettre autre que $\alpha$, soit $\beta$, et $(A|\alpha)B_i$ est la proposition $\beta$. Si $B_i$ est précédé dans $F$ par $B_j$ tel que $B_i$ soit $\neg B_j$, par hypothèse $(A|\alpha)B_j$ est une proposition, que nous noterons $B_j^*$ ; alors $(A|\alpha)B_i$ est identique à $(A|\alpha)\neg B_j$, et d'après le critère **CS1**, l'assemblage $(A|\alpha)\neg B_j$ est identique à $\neg B_j^*$ ; or, puisque $B_j^*$ est une proposition, $\neg B_j^*$ en est une aussi d'après le critère **CF** et $(A|\alpha)B_i$ est une proposition. Pour terminer, on montre de façon analogue que si $B_i$ est précédé dans $F$ par $B_j$ et $B_k$ tels que $B_i$ soit $\vee B_j B_k$ alors $(A|\alpha)B_i$ est une proposition.

On appelle **schéma d'axiome** une règle indiquant comment écrire une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions ; cette règle doit être telle que si S est une proposition et $\sigma$ une lettre et si A est une proposition obtenue par application de la règle, $(S|\sigma)A$ soit une proposition que l'on puisse obtenir en appliquant cette même règle.

Exemple de schéma d'axiome (noté **S1**).

**S1** : Si A est une proposition, écrire $(A \vee A) \Rightarrow A$.

Assurons-nous que **S1** est bien un schéma d'axiome. Il faut d'abord vérifier que si A est une proposition, il en est de même pour $(A \vee A) \Rightarrow A$ ; le critère **CF** permet d'affirmer successivement que si A est une proposition, $A \vee A$ en est une puis que $(A \vee A) \Rightarrow A$ est une proposition. Soient maintenant $\sigma$ une lettre et S une proposition : pour terminer, il faut montrer que $(S|\sigma)\,(A \vee A) \Rightarrow A$ s'obtient bien par applica-de **S1** ; désignons $(S|\sigma)A$ par $A^*$ ; puisque A est une proposition, il en est de même pour $A^*$ d'après le critère **CS2** ; d'autre part, d'après le critère **CS1**, l'assemblage $(S|\sigma)\,(A \vee A) \Rightarrow A$ est identique à $\{(S|\sigma)A \vee A\} \Rightarrow A^*$ et $(S|\sigma)A \vee A$ est identique à

$A^* \vee A^*$, donc $(S|\sigma)\ (A \vee A) \Rightarrow A$ est identique à $(A^* \vee A^*) \Rightarrow A^*$ ; or la règle **S1**, appliquée à la proposition $A^*$, indique bien d'écrire $(A^* \vee A^*) \Rightarrow A^*$.

Dans la suite, pour donner un schéma d'axiome que nous voulons désigner par **S1**, nous écrirons simplement :

$$\mathbf{S1} : (A \vee A) \Rightarrow A.$$

Cette présentation indique bien qu'un schéma d'axiome est un moule permettant de produire autant de propositions qu'on le veut, toutes du même type.

Une **théorie** est la juxtaposition d'une liste (finie et éventuellement vide) de schémas d'axiome et d'une liste (finie et éventuellement vide) de propositions.

Les schémas d'axiome figurant dans la première liste sont les schémas d'axiome de la théorie et les propositions écrites par application d'un schéma d'axiome de la théorie sont les **axiomes implicites** de la théorie ; les propositions figurant dans la deuxième liste sont les **axiomes explicites** de la théorie et les lettres figurant dans un axiome explicite de la théorie sont les **constantes** de la théorie.

Exemple.

Puisque **S1** est un schéma d'axiome et que $p \vee p$ est une proposition, **S1** et $p \vee p$ définissent une théorie ; p est l'unique constante de cette théorie.

Soit $T$ une théorie ; une **démonstration** de $T$ est une séquence (finie) de propositions, ayant la propriété suivante : si T est une proposition de cette séquence de propositions, notée $D$, alors T vérifie l'une des conditions suivante :

i) T est un axiome, implicite ou explicite, de $T$ ;

ii) T est précédée dans $D$ par des propositions, soient U et V, telles que V soit $U \Rightarrow T$.

Exemple de démonstration de la théorie admettant **S1** pour unique schéma d'axiome et $p \vee p$ pour unique axiome explicite.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $D$ | $(p \vee p) \Rightarrow p$ | vérifie i) : $(p \vee p) \Rightarrow p$ est un axiome implicite produit par **S1**. |
| 2) | | $p \vee p$ | vérifie i) : $p \vee p$ est un axiome explicite de la théorie. |
| 3) | | p | vérifie ii) : p est précédé dans $D$ par $p \vee p$ (ligne 2) et $(p \vee p) \Rightarrow p$ (ligne 1). |
| 4) | | $(k \vee k) \Rightarrow k$ | vérifie i). |

Une proposition figurant dans une démonstration d'une théorie est un **théorème** de cette théorie ; une démonstration d'une théorie $T$ où figure la proposition A est souvent appelée une **démonstration de** A dans $T$ ou, si cela ne crée pas d'ambiguïté, une démonstration de A. On voit qu'un axiome (implicite ou explicite) d'une théorie est un théorème de cette théorie. Il est bien clair que les notions de démonstration et de théorème sont relatives à une théorie donnée : étant donné deux théories **T** et $T'$, il peut se faire qu'une proposition soit un théorème de $T$ sans être un théorème de $T'$.

La règle ii) permettant de produire des théorèmes d'une théorie $T$ est appelée **règle du détachement** (ou **modus ponens**) ; cette règle est bien évidemment extérieure à la logique. Comme le montre Lewis Caroll dans *Ce que se dirent Achille et la tortue* [20], elle est aussi bien distincte d'un schéma d'axiome qui serait symbolisé par

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B,$$

le signe $\wedge$ s'interprétant comme « et » : un tel schéma ne nous permettrait en aucun cas d'obtenir le théorème B, seule la règle de détachement, en nous autorisant à « casser » des propositions telles que $A \Rightarrow B$ nous permet d'obtenir des propositions ayant une forme véritablement nouvelle.

Soient $T$ une théorie, $D'$ et $D''$ des démonstrations ; si l'on écrit d'abord les propositions de $D'$ dans l'ordre où elles figurent dans $D'$, puis les propositions de $D''$ dans l'ordre où elles figurent dans $D''$, la séquence de propositions $D$ ainsi écrite est une démonstration de $T$.

$$D' \left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_p \end{array} \right. \qquad D'' \left\{ \begin{array}{l} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_q \end{array} \right. \qquad D \left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_p \\ U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_q \end{array} \right.$$

On établit ce résultat de façon analogue à ce qui a été fait page 18 pour les contructions formatives.

De même, si $D$ est une démonstration de la théorie $T$ et si A est un axiome (implicite ou explicite) de $T$, la séquence de propositions $D'$ obtenue en écrivant A à la suite de $D$ est une démonstration de $T$. Si U et V sont des propositions telles que U et U ⇒ V figurent dans $D$, la séquence de propositions $D''$ obtenue en écrivant V à la suite de $D$ est une démonstration de $T$.

$$D \left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ \vdots \\ U \\ \vdots \\ U \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_n \end{array} \right. \qquad D' \left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ \vdots \\ U \\ \vdots \\ U \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_n \\ A \end{array} \right. \qquad D'' \left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ \vdots \\ U \\ \vdots \\ U \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_n \\ V \end{array} \right.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède le critère suivant, qu'on appellera critère de détachement, et qu'on utilisera souvent implicitement dans la suite.

Critère de détachement :

Si U et V sont des propositions telles que U et U ⇒ V soient des théorèmes de la théorie $T$, alors V est un théorème de $T$.

En effet si U et U ⇒ V sont des théorèmes de $T$, ils figurent dans des démonstrations de $T$, soient $D'$ et $D''$ ; en écrivant à la suite les propositions figurant dans $D'$ puis celles figurant dans $D''$ on obtient une nouvelle démonstration de $T$, soit $D$, où U et U ⇒ V figurent ; donc, si l'on écrit V à la suite de $D$, on obtient encore une démonstration de $T$, et V est un théorème de $T$.

$$D' \left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ \vdots \\ U \\ \vdots \\ S_p \end{array} \right. \qquad D'' \left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ \vdots \\ U \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_q \end{array} \right. \qquad D \left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ \vdots \\ U \\ \vdots \\ S_p \\ T_1 \\ \vdots \\ U \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_q \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ \vdots \\ U \\ \vdots \\ S_p \\ T_1 \\ \vdots \\ U \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_q \\ V \end{array} \right.$$

Soient $T$ et $T'$ deux théories ; si tous les schémas de $T$ sont des schémas de $T'$ et si tous les axiomes explicites de $T$ sont des axiomes explicites de $T'$, on dira que $T'$ est une **extension** de $T$ ; ainsi, toute théorie est une extension d'elle-même. On voit aisément que si $T'$ est une extension de $T$, toute démonstration de $T$ est une démonstration de $T'$, et donc que tout théorème de $T$ est un théorème de $T'$ ; mais il peut se faire que la théorie $T'$ ne soit pas une extension de la théorie $T$ et que, pourtant, tout théorème de $T$ soit un théorème de $T'$. Il est évident que si la théorie $T'$ est une extension de la théorie $T$ et si $T''$ est une extension de $T'$, alors $T''$ est une extension de $T$.

On peut vérifier, comme on l'a fait pour **S1**, que la règle schématisée de la façon suivante est un schéma d'axiome.

**S2** : $A \Rightarrow (A \vee B)$.

Soit $T$ une théorie, qui soit une extension de la théorie n'ayant pas d'axiome explicite et ayant **S2** pour seul schéma d'axiome. Supposons que P soit une proposition telle que P et $\neg$P soient des théorèmes de $T$. Soit alors A une proposition quelconque.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg P \Rightarrow (\neg P \vee A)$ | est un axiome implicite de $T$, donc un théorème de $T$ ; |
| 2) | $\neg P$ | est un théorème de $T$ par hypothèse, donc suivant le critère de détachement, |
| 3) | $\neg P \vee A$ | est un théorème de $T$ ; or $\neg P \vee A$ s'abrège en |
| 4) | $P \Rightarrow A$ | et |
| 5) | P | est un théorème de $T$ par hypothèse, donc |
| 6) | A | est un théorème de $T$ d'après le critère de détachement. |

La séquence ci-dessus de suites de symboles représentant des propositions est un **schéma de démonstration**, mais non une démonstration : chaque ligne comprend des symboles (P ou A) qui ne sont ni des signes logiques (lettres ou connecteurs), ni des symboles abréviatifs, et l'introduction des lignes 2) et 5) ne suivent pas les règles permettant d'écrire des démonstrations. Cependant, un tel schéma indique clairement comment il faudrait faire pour écrire la démonstration de A, à supposer que l'on donne explicitement la proposition A et que l'on connaisse des démonstrations de P et $\neg$P : on recopierait la ligne 1) en substituant aux symboles A et P les propositions qu'ils désignent ; on écrirait au-dessous une démonstration de la proposition symbolisée par $\neg$P ; on recopierait ensuite la ligne 3) en faisant les substitutions convenables, etc...

Dans la suite, pour établir des critères de certaines théories, nous donnerons des schémas de démonstration, où les indications justifiant que tel symbole désigne bien un théorème seront plus succintes.

Soit $T$ une théorie ; s'il existe une proposition P telle que P et $\neg$P soient des théorèmes de $T$, on dit que $T$ est **contradictoire** ; s'il existe au moins une proposition qui ne soit pas un théorème de $T$, on dit que $T$ est **consistante.** Il est clair qu'une théorie non consistante est contradictoire ; d'autre part, on vient de voir qu'une théorie contradictoire admettant entre autres **S2** comme schéma d'axiome est non consistante ; une telle théorie est évidemment dépourvue d'intérêt.

## II – QUELQUES CRITERES CLASSIQUES.

▷ Notons $C$ la théorie n'ayant pas d'axiome explicite et ayant les quatre schémas d'axiome suivants.

**S1** : $(A \vee A) \Rightarrow A$ ;
**S2** : $A \Rightarrow (A \vee B)$ ;
**S3** : $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$ ;
**S4** : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))$.

Il faudrait naturellement vérifier, comme on l'a fait pour **S1**, que **S2, S3** et **S4** sont des schémas d'axiome ; cette vérification, fastidieuse, se ferait de façon analogue à ce qui a déjà été fait.

Dans tout le paragraphe II, on désigne par $T$ une extension de $C$ et par A, B et C des propositions.

Critère **C1** (syllogisme) :

Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ sont des théorèmes de $T$, alors $A \Rightarrow C$ est un théorème de $T$.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A \Rightarrow B$ | hypothèse |
| 2) | $B \Rightarrow C$ | hypothèse |
| 3) | $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee C))$ | **S4** |
| 4) | $(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee C)$ | détachement (2, 3) |
| 5) | $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ | abréviation (4) |
| 6) | $A \Rightarrow C$ | détachement (1, 5) |

Nous avons donné pour justifier le critère **C1** un schéma de démonstration ; à la ligne 1, « hypothèse » indique que $A \Rightarrow B$ symbolise une proposition qui, par hypothèse, est un théorème ; à la ligne 3, « **S4** » indique que le schéma d'axiome **S4** permet de produire le théorème symbolisé par $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee C))$ ; à la ligne 4, « détachement (2, 3) » indique que le critère de détachement appliqué aux théorèmes symbolisés aux lignes 2 et 3 permet d'affirmer que $(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee C)$ symbolise un théorème ; à la ligne 5 « abréviation (4) » indique que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est une abréviation de la ligne 4, etc... La dernière ligne du schéma de démonstration est la justification du critère énoncé.

Dans la suite, nous nous contenterons le plus souvent de donner un schéma de démonstration avec des justifications succintes pour établir les critères énoncés.

Critère **C2** (disjonction des cas) :

Si $A \vee B$, $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$ sont des théorèmes de *T*, alors C est un théorème de *T*.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A \vee B$ | hypothèse |
| 2) | $A \Rightarrow C$ | hypothèse |
| 3) | $B \Rightarrow C$ | hypothèse |
| 4) | $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$ | **S4** |
| 5) | $(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$ | détachement (3, 4) |
| 6) | $A \vee C$ | détachement (1, 5) |
| 7) | $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee C))$ | **S4** |
| 8) | $(C \vee A) \Rightarrow (C \vee C)$ | détachement (2, 7) |
| 9) | $(A \vee C) \Rightarrow (C \vee A)$ | **S3** |
| 10) | $(A \vee C) \Rightarrow (C \vee C)$ | **C1** (9, 8) |
| 11) | $(C \vee C) \Rightarrow C$ | **S1** |
| 12) | $(A \vee C) \Rightarrow C$ | **C1** (10, 11) |
| 13) | C | détachement (6, 12) |

Ce critère est utilisé, par exemple, pour montrer que si n est un entier, $n(n+1)$ est pair : sous l'hypothèse que n est un entier, on interprète A comme « n est pair », B comme « n est impair » et C comme « $n(n+1)$ est pair ».

Critère **C3** : $A \Rightarrow (B \vee A)$ est un théorème de *T*.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A \Rightarrow (A \vee B)$ | **S2** |
| 2) | $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$ | **S3** |
| 3) | $A \Rightarrow (B \vee A)$ | **C1** (1, 2) |

Critère **C4** : $A \Rightarrow A$ est un théorème de *T*.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A \Rightarrow (A \vee A)$ | **S2** |
| 2) | $(A \vee A) \Rightarrow A$ | **S1** |
| 3) | $A \Rightarrow A$ | **C1** (1, 2) |

Critère **C4′** : $\neg A \vee A$ est un théorème de $T$.

En effet, $A \Rightarrow A$ est une abréviation de $\neg A \vee A$.

Critère **C5** : $A \vee \neg A$ est un théorème de $T$.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $(\neg A \vee A) \Rightarrow (A \vee \neg A)$ | **S3** |
| 2) | $\neg A \vee A$ | **C4′** |
| 3) | $A \vee \neg A$ | détachement (1, 2) |

Critère **C6** : $A \Rightarrow \neg\neg A$ est un théorème de $T$.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg A \vee \neg\neg A$ | **C5** |
| 2) | $A \Rightarrow \neg\neg A$ | abréviation (1) |

Critère **C7** : $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ est un théorème de $T$.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $(A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow ((B \vee A) \Rightarrow (B \vee \neg\neg A))$ | **S4** |
| 2) | $A \Rightarrow \neg\neg A$ | **C6** |
| 3) | $(B \vee A) \Rightarrow (B \vee \neg\neg A)$ | détachement (2, 1) |
| 4) | $A \Rightarrow (B \vee A)$ | **C3** |
| 5) | $A \Rightarrow (B \vee \neg\neg A)$ | **C1** (4, 3) |
| 6) | $(B \vee \neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \vee B)$ | **S3** |
| 7) | $A \Rightarrow (\neg\neg A \vee B)$ | **C1** (5, 6) |
| 8) | $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ | abréviation (7) |

Critère **C7′** : Si $A$ est un théorème de $T$, alors $\neg A \Rightarrow B$ est un théorème de $T$.
Conséquence immédiate du critère **C7** et du critère de détachement.

Critère **C8** : Si $B$ est un théorème de $T$, alors $A \Rightarrow B$ est un théorème de $T$.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $B$ | hypothèse |
| 2) | $B \Rightarrow (\neg A \vee B)$ | **C3** |
| 3) | $\neg A \vee B$ | détachement (1, 2) |
| 4) | $A \Rightarrow B$ | abréviation (3) |

L'interprétation des critères **C7**, **C7′** et **C8** a fait couler beaucoup d'encre, parce qu'elle nous amène à accepter pour vraies des phrases comme « si $2 = 4$, alors le dernier « théorème » de Fermat est vrai », ou « si $2 = 1 + 1$, alors les hauteurs d'un triangle quelconque sont concourantes » ; et en effet de telles phrases sont contraires à l'usage de la langue, même mathématique. Il arrive fréquemment, quand un concept courant est repris dans un exposé rigoureux, que son sens soit précisé et que son champ soit modifié ; ainsi en va-t-il pour « impliquer », et on peut se demander pourquoi l'interprétation du signe $\Rightarrow$ a conduit à de telles discussions, alors que l'interprétation usuelle du signe $\vee$ ne soulève guère de passion ; pourtant elle nous amène à considérer que la phrase suivante est correcte : « Pierre est petit ou (Pierre est) intelligent » qui est pour le moins surprenante.

Cependant, l'expression « si les poules avaient des dents, je serais immortel » est très proche d'une interprétation du critère **C7′** ; d'ailleurs, si l'on refusait que $A \Rightarrow B$ et $A \Rightarrow (\neg B)$ puissent être vraies toutes les deux (sous réserve naturellement que A soit fausse), on serait confronté à des paradoxes tels que celui qui est décrit par Lewis Caroll dans *les trois coiffeurs* [20].

Il semble que si l'on accepte de donner à « si A, alors B » le sens de « à moins que non A, B » toutes ces difficultés s'évanouissent : il se trouve que chaque fois que l'usage autorise à dire « si A, alors B », l'autre expression lui est réellement synonyme, et par ailleurs les phrases qui paraissaient de prime abord paradoxales deviennent simplement des curiosités ; seulement, on écrit très rarement ces dernières parce qu'elles ne correspondent pas à des opérations intellectuelles qui nous sont utiles. On peut d'ailleurs signaler qu'en mathématiques on est amené à considérer comme vraie l'expression « $X \in \phi \Rightarrow P$ », quelle que soit la propriété désignée par P.

Critère **C9** : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ est un théorème de *T*.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $(B \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B))$ | **S4** |
| 2) | $B \Rightarrow \neg\neg B$ | **C6** |
| 3) | $(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B)$ | détachement (2, 1) |
| 4) | $(\neg A \vee \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$ | **S3** |
| 5) | $(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$ | **C1** (3, 4) |
| 6) | $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | abréviation (5) |

Critère **C10** : Si $A \Rightarrow B$ est un théorème de *T*, alors $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est un théorème de *T*.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A \Rightarrow B$ | hypothèse |
| 2) | $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | **C9** |
| 3) | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | détachement (1, 2) |
| 4) | $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((C \vee \neg B) \Rightarrow (C \vee \neg A))$ | **S4** |
| 5) | $(C \vee \neg B) \Rightarrow (C \vee \neg A)$ | détachement (3, 4) |
| 6) | $(\neg B \vee C) \Rightarrow (C \vee \neg B)$ | **S3** |
| 7) | $(\neg B \vee C) \Rightarrow (C \vee \neg A)$ | **C1** (6, 5) |
| 8) | $(C \vee \neg A) \Rightarrow (\neg A \vee C)$ | **S3** |
| 9) | $(\neg B \vee C) \Rightarrow (\neg A \vee C)$ | **C1** (7, 8) |
| 10) | $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ | abréviation (9) |

Le critère suivant fait intervenir une théorie $T'$ à côté de la théorie $T$ ; il sera commode, pour distinguer les théorèmes de $T'$ de ceux de $T$ d'utiliser le symbole $\vdash$ : si $S$ est une théorie et P une proposition, on se contentera d'écrire « $S \vdash P$ » au lieu de « P est un théorème de $S$ ». Il faut remarquer que $\vdash$ n'est pas un signe logique ou une abréviation de signes logiques : c'est une abréviation de la langue de l'observateur.

On est amené, lorsque $A \Rightarrow B$ est un théorème de $S$, à écrire « $S, A \vdash B$ » et, plus brièvement, « $A \vdash B$ » lorsqu'on opère dans la seule théorie $S$ ; l'expression $A \vdash B$ se lit donc « $A \Rightarrow B$ est vrai (dans la théorie $S$) » ; à première vue, il peut paraître séduisant d'avoir un signe particulier pour indiquer « $A \Rightarrow B$ est vrai ». Mais pratiquement l'usage du signe $\vdash$ est réservé à la logique, et cela s'explique : si l'on donne un symbole abréviatif pour « $A \Rightarrow B$ est vrai », il n'y a pas de raison de privilégier la relation $\Rightarrow$, et il fraudrait des symboles particuliers pour abréger « $A \vee B$ est vrai », « $\Gamma = \Delta$ est vrai », etc..., ce qui conduirait à un alourdissement considérable des notations. C'est finalement le contexte qui doit permettre de comprendre si une relation est un théorème (est vraie), ou si c'est une hypothèse ou encore une équation : l'usage veut que toute relation écrite pour laquelle le contraire n'est pas spécifié soit un théorème. D'ailleurs il semble qu'en dehors du domaine particulier de la logique on n'ait guère l'occasion d'utiliser le symbole $\Rightarrow$ si on se sert du symbole $\vdash$, ce qui fait que ces deux signes feraient double usage.

Critère **C11** (hypothèse auxiliaire) :

Soit A une proposition ; notons $T'$ l'extension de $T$ admettant les mêmes schémas d'axiome que $T$ et dont les axiomes explicites sont ceux de $T$ augmentés de A. Si B est un théorème de $T'$, alors $A \Rightarrow B$ est un théorème de $T$.

Supposons que B soit un théorème de $T'$ : la proposition B figure dans une démonstration $D'$ de $T'$.

$$D' \left\{ \begin{array}{l} B_1 \\ . \\ . \\ . \\ B_i \\ . \\ . \\ . \\ B_p \end{array} \right.$$

Montrons de proche en proche que si $B_i$ figure dans $D'$, alors $T \vdash A \Rightarrow B_i$. Supposons donc que si $B_j$ précède $B_i$ dans $D'$, alors $T \vdash A \Rightarrow B_j$.

— Si $B_i$ est un axiome de $T'$, deux cas peuvent se présenter : $B_i$ est A, et $T \vdash A \Rightarrow A$ d'après le critère **C4**, donc $A \Rightarrow B_i$ est un théorème de $T$ ; sinon, $B_i$ est un axiome de $T$, donc un théorème de $T$, et $T \vdash A \Rightarrow B_i$ d'après le critère **C8**.

— Si $B_i$ n'est pas un axiome de $T'$, alors $B_i$ est précédé dans $D'$ par des propositions, soient $B_j$ et $B_k$, telles que $B_k$ soit identique à $B_j \Rightarrow B_i$ ; donc $T \vdash A \Rightarrow B_j$ et $T \vdash A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$ ; on peut alors donner le schéma de démonstration de $T$ suivant.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A \Rightarrow B_j$ | hypothèse |
| 2) | $A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$ | hypothèse |
| 3) | $(B_j \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ | **C10** (1) |

| | | |
|---|---|---|
| 4) | $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ | **C1** (2, 3) |
| 5) | $\neg A \Rightarrow (\neg A \vee B_i)$ | **S2** |
| 6) | $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ | abréviation (5) |
| 7) | $A \vee \neg A$ | **C5** |
| 8) | $A \Rightarrow B_i$ | **C2** (7, 4, 6) |

Donc si la propriété est vérifiée pour les propositions précédant $B_i$ elle est vraie pour $B_i$ : la propriété est établie de proche en proche pour tous les éléments de $D'$.

Critère **C12** (démonstration par l'absurde) :

Soit A une proposition ; notons $T'$ l'extension de $T$ admettant les mêmes schémas d'axiome que $T$ et dont les axiomes explicites sont ceux de $T$ augmentés de $\neg A$. Si $T'$ est une théorie contradictoire, A est un théorème de $T$.

La théorie $T$ est une extension de la théorie sans axiome explicite admettant **S2** pour seul schéma d'axiome ; il en est donc de même pour $T'$, et comme elle est contradictoire elle n'est pas consistante ; donc en particulier $T' \vdash A$, et $T \vdash \neg A \Rightarrow A$ d'après le critère **C11.** On peut alors terminer par le schéma de démonstration de $T$ suivant.

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg A \Rightarrow A$ | d'après ce qui précède |
| 2) | $A \Rightarrow A$ | **C4** |
| 3) | $A \vee \neg A$ | **C5** |
| 4) | $A$ | **C2** (3, 2, 1) |

Nous arrêterons ici l'étude des critères de $T$. On serait amené par la suite à introduire et étudier de nouveaux symboles abréviatifs dont les plus courants sont $\wedge$ qui se lit « et » et $\Longleftrightarrow$ qui se lit « équivaut à » ; $A \wedge B$ est l'abréviation de $\neg(\neg A \vee \neg B)$ et $A \Longleftrightarrow B$ est l'abréviation de $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ (si l'on préfère, $\wedge AB$ abrège $\neg \vee \neg A \neg B$ ; $\Longleftrightarrow AB$ abrège $\wedge \Rightarrow AB \Rightarrow BA$, soit encore $\neg \vee \neg \vee \neg AB \neg \vee \neg BA$). On peut également introduire le symbole | de Schaeffer, $A|B$ étant l'abréviation de $(\neg A) \vee (\neg B)$, et le symbole W, l'assemblage A W B étant l'abréviation de $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ et se lisant par exemple « ou bien A, ou bien B ». Par abus de langage les symboles $\Rightarrow$, $\wedge$, $\Longleftrightarrow$, | et W sont appelés **connecteurs,** comme $\vee$ et $\neg$.

On peut établir que si A et B sont des propositions, les propositions suivantes sont des théorèmes de $T$ :

$$\neg A \Longleftrightarrow (A|A) \quad ; \quad (A \vee B) \Longleftrightarrow ((A|A)|(B|B)).$$

On comprend alors qu'il soit possible de prendre pour unique connecteur primitif le connecteur | et d'aboutir à des résultats analogues à ceux que nous avons obtenus ; si l'on désire mieux satisfaire le goût de l'unité, on pourra se contenter (à la place de quatre schémas d'axiome) de l'unique schéma d'axiome suivant (datant de 1918).

$$\mathbf{S} : ||A|BC||D|DD||EB||AE|AE.$$

Enfin si l'on veut se débarasser de la collection inépuisable des lettres, on écrira 0* au lieu de a, 0** au lieu de b, 0*** au lieu de c, etc... On pourra alors, à l'aide des trois signes |, 0 et $*$, d'un signe séparateur et du seul schéma **S**, bâtir une logique des propositions contenant une théorie équivalente à $C$ ; mais la pauvreté du matériel initial se paie par une complication considérable du début du développement de la théorie.

En dehors de la voie que nous avons suivie et de celle qui est indiquée ci-dessus, bien d'autres choix initiaux sont possibles : on peut choisir comme connecteurs primitifs d'autres connecteurs que $\vee$ et $\neg$, par exemple $\Rightarrow$ et $\neg$, ou encore $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, et $\Longleftrightarrow$ ; un choix de connecteurs primitifs étant fait, plusieurs systèmes de schémas d'axiome peuvent être choisis, chacun d'eux permettant d'édifier une théorie équivalente à $C$.

Le symbolisme de la logique n'étant pas unifié, on pourra rencontrer les signes les plus divers pour exprimer la même chose ; ainsi, au lieu de $\Rightarrow$, on pourra voir $\rightarrow$, $\supset$, $\subset$ ou C ; au lieu de $\vee$, on pourra rencontrer $+$, $\cup$ ou A ; au lieu de $a \wedge b$, on pourra voir ab, a.b, $a \cap b$, a & b ou Kab ; pour $\neg a$, on pourra avoir $\sim a$, $\overline{a}$, $a'$, -a ou Na ; au lieu de $\Longleftrightarrow$, on pourra trouver $\equiv$, $\longleftrightarrow$, $\sim$ ou E ; c'est dans la notation polonaise qu'on utilise les lettres C, A, K, etc... Il semble qu'en dehors des ouvrages de logique, les symboles $\Rightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ soient à peu près universellement utilisés en mathématiques ; on rencontre fréquemment « non » pour $\neg$, « ou » pour $\vee$ et « et » pour $\wedge$ dans des formules par ailleurs complètement formalisées. On pourra consulter [22].

## III – ETUDE DE $C$.

Nous allons d'abord donner une méthode permettant de reconnaître si un assemblage est une proposition (comme on le verra, c'est une méthode qui peut être appliquée par un observateur de la théorie, qui prend donc la théorie pour objet d'étude).

Soit A un assemblage. A chaque signe qui figure dans A, associons l'entier 1 si c'est une lettre, 0 si c'est $\neg$ et -1 si c'est $\vee$ ; puis, à chaque signe de A, associons la somme des entiers qui sont associés à lui-même et aux signes qui sont à sa gauche. Voici deux exemples :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — assemblages | : | $\neg$ | $\vee$ | a | $\vee$ | b | x | $\vee$ | a | c | | $\vee$ | $\vee$ | a | x | $\vee$ | $\vee$ | $\neg$ | x | u | $\neg$ | t' |
| — entiers associées | : | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| — sommes associées | : | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | | -1 | -2 | -1 | 0 | -1 | -2 | -2 | -1 | 0 | 0 | 1 |

Montrons qu'un assemblage est une proposition si et seulement si

— la somme associée au signe le plus à droite de l'assemblage est 1, et

— les sommes associées aux autres signes sont toutes négatives ou nulles.

Il est aisé de montrer de proche en proche que tout élément d'une construction formative donnée a cette propriété.

Pour montrer qu'un assemblage qui a cette propriété est bien une proposition, on raisonne par récurrence. Soit A un assemblage, ayant n signes, qui a cette propriété, et supposons que les assemblages plus courts qui ont cette propriété soient des propositions. Si A commence par $\neg$, la preuve est immédiate. Si A commence par une lettre, il est identique à cette lettre, car sinon, une somme associée à un signe autre que le dernier serait positive. Si A commence par $\vee$ on vérifie qu'il existe au moins un signe de A qui a 0 pour somme associée ; notons alors $\alpha_r$ le premier signe (en allant de gauche à droite) dont la somme partielle est 0. Ce n'est pas le signe le plus à droite de A ; notons l'assemblage A ainsi : $\vee\alpha_2 \ldots \alpha_r\alpha_{r+1} \ldots \alpha_n$ ; notons B l'assemblage $\alpha_2 \ldots \alpha_r$ et C l'assemblage $\alpha_{r+1} \ldots \alpha_n$ (par exemple, si A est $\vee\vee ax \vee\vee\neg xu\neg t'$, l'assemblage B est $\vee ax$ et l'assemblage C est $\vee\vee\neg xu\neg t'$) ; par hypothèse de récurrence, on voit que B et C sont des propositions, et donc A est une proposition.

On déduit facilement de cette caractérisation des propositions que si P, Q, P′ et Q′ sont des propositions telles que $\vee$PQ et $\vee$P′Q′ soient des assemblages identiques, P est identique à P′ et Q est identique à Q′. Il est évident que si $\neg$P et $\neg$P′ sont identiques, alors P et P′ sont identiques.

▷ Soient *L* la collection (infinie) des lettres et *P* la collection des propositions ; nous avons vu précédemment que toute lettre est une proposition. Notons {0, 1} la collection des deux symboles 0 et 1.

Si $\Gamma$ est une correspondance entre *P* et {0, 1} telle que $\Gamma$ fasse correspondre un et un seul des deux symboles 0 et 1 à chaque proposition, nous dirons que $\Gamma$ est une **valuation**, ou **valuation binaire**, ce qui sera symbolisé par $\Gamma : P \to \{0, 1\}$. Si A est une proposition, on pourra désigner par $\Gamma$(A) le symbole unique, qui est soit 0, soit 1, que $\Gamma$ fait correspondre à A.

Une valuation $\Gamma$ sera dite **régulière** (pour les tableaux I et II) si elle vérifie les deux conditions suivantes.

i) Si A est une proposition, $\Gamma(\neg A)$ se déduit de $\Gamma(A)$ suivant le tableau I ci-dessous.

I

| $\Gamma(A)$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\Gamma(\neg A)$ | 0 | 1 |

ce qui se lit : si $\Gamma(A)$ est 1, alors $\Gamma(\neg A)$ est 0 et si $\Gamma(A)$ est 0, alors $\Gamma(\neg A)$ est 1.

ii) Si A et B sont des propositions, $\Gamma(A \vee B)$ se déduit de $\Gamma(A)$ et $\Gamma(B)$ suivant le tableau II ci-dessous.

II

| $\Gamma(A)$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $\Gamma(B)$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\Gamma(A \vee B)$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

ce qui se lit : si $\Gamma(A)$ et $\Gamma(B)$ sont 1, alors $\Gamma(A \vee B)$ est 1, etc...

Notons $\Psi$ la valuation qui à chaque proposition associe 0 : ce n'est pas une valuation régulière car, par exemple, $\Psi(a)$ et $\Psi(\neg a)$ sont identiques alors que d'après le tableau I ils devraient être différents.

Propriété 1.

Soit $\Delta$ une correspondance entre $L$ et $\{0, 1\}$ qui à chaque lettre fasse correspondre un et un seul des symboles 0 et 1 : on peut associer à $\Delta$ une et une seule valuation régulière $\Gamma$ telle que $\Gamma(\alpha)$ soit identique à $\Delta(\alpha)$ pour toute lettre $\alpha$.

Montrons d'abord que $\Gamma$ est unique ; pour cela supposons que $\Gamma$ et $\Gamma'$ soient des valuations régulières, distinctes et telles que $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma'(\alpha)$ soient identiques à $\Delta(\alpha)$ pour toute lettre $\alpha$.

Soit D une proposition telle que $\Gamma'(D)$ soit différent de $\Gamma(D)$ : il existe une telle proposition, sinon $\Gamma$ et $\Gamma'$ ne seraient pas distinctes. Soit $F$ une construction formative où figure D et soit A la première proposition de $F$ pour laquelle $\Gamma'(A)$ est différent de $\Gamma(A)$ (à toutes les propositions précédant A dans $F$, s'il y en a, $\Gamma$ et $\Gamma'$ associent le même symbole) : on rencontrera une telle proposition en parcourant la séquence $F$, sinon $\Gamma$ et $\Gamma'$ associeraient les mêmes symboles à chaque proposition de $F$ et en particulier à D.

Si A était une lettre, $\Gamma(A)$ et $\Gamma'(A)$ seraient identiques à $\Delta(A)$ et ne pourraient donc pas être distincts ; donc A n'est pas une lettre. Si A était précédé par B dans $F$ tel que A soit identique à $\neg B$, les symboles $\Gamma(B)$ et $\Gamma'(B)$ seraient identiques (puisqu'à toute proposition précédant A dans $F$ les valuations $\Gamma$ et $\Gamma'$ associent le même symbole) et donc, suivant le tableau I, les symboles $\Gamma(A)$ et $\Gamma'(A)$ seraient identiques, ce qui est impossible. On voit de même, en utilisant le tableau II, qu'il est impossible que A soit $B \vee C$ où B et C sont des propositions précédant A dans $F$. L'hypothèse faite mène à une contradiction qui permet de conclure qu'il existe au plus une valuation régulière $\Gamma$ telle que pour toute lettre $\alpha$, le symbole $\Gamma(\alpha)$ soit identique à $\Delta(\alpha)$.

Montrons maintenant qu'il existe bien une telle valuation.

Soit $F$ une construction formative. Montrons de proche en proche qu'il est possible de construire une correspondance $\Gamma_F$ entre les propositions de $F$ et $\{0, 1\}$ telle que

– chaque proposition de $F$ soit associée par $\Gamma_F$ à un seul symbole de $\{0, 1\}$,

– si $\alpha$ est une lettre figurant dans $F$, alors $\Gamma_F(\alpha)$ soit identique à $\Delta(\alpha)$,

– si A et $\neg A$ sont des propositions de $F$, alors $\Gamma_F(\neg A)$ se déduise de $\Gamma_F(A)$ à l'aide du tableau I,

– si A, B et $A \vee B$ sont des propositions de $F$, alors $\Gamma_F(A \vee B)$ se déduise de $\Gamma_F(A)$ et de $\Gamma_F(B)$ à l'aide du tableau II.

Soit donc $A_i$ un élément de $F$ ; supposons que nous ayons associé de façon convenable à chaque assemblage qui précède $A_i$ dans $F$ un et un seul des symboles 0 et 1. Si $A_i$ est une lettre, nous choisirons $\Gamma_F(A_i)$ identique à $\Delta(A_i)$. Si $A_i$ est $\neg A_j$, l'assemblage $A_j$ figure au moins une fois dans $F$ avant $A_i$ ; et s'il figure plusieurs fois, d'après l'hypothèse de récurrence nous avons associé le même symbole à chacune de ses apparitions dans $F$ avant $A_i$ ; nous pouvons alors déterminer $\Gamma_F(A_i)$ à l'aide du symbole en question (0 ou 1) et du tableau I. Si $A_i$ est $\vee$ B, il existe des assemblages $A_j$ et $A_k$ qui précédent $A_i$ dans $F$ et tels que B soit $A_jA_k$. D'après ce qui précède (caractérisation des propositions) ces assemblages $A_j$ et $A_k$ sont uniques, même s'ils figurent plusieurs fois dans $F$ ; ceci permet d'attribuer, comme dans le cas précédent, une valeur convenable à $A_i$.

On montre ensuite que si la proposition A figure dans des constructions formatives $F$ et $G$, les symboles $\Gamma_F(A)$ et $\Gamma_G(A)$ sont identiques (par récurrence sur le nombre de signes qui figurent dans A). On peut alors définir $\Gamma(A)$ comme le symbole $\Gamma_F(A)$, où $F$ est l'une quelconque des constructions formatives où figure A ; pour terminer, on s'assure que $\Gamma$ est bien une valuation régulière qui prolonge $\Delta$.

Si une proposition P est telle que $\Gamma(P)$ soit 1 quelle que soit la valuation régulière $\Gamma$, on dit que P est une **tautologie** ; si $\Gamma(P)$ est 0 quelle que soit la valuation régulière
▷ $\Gamma$, on dit que P est une **contradiction.** On note $\models$ P le fait que P soit une tautologie.

Exemples.

Vérifions que $a \vee (\neg a)$ est une tautologie. En effet, soit $\Gamma$ une valuation régulière ; si $\Gamma(a)$ est 1, alors $\Gamma(a \vee (\neg a))$ est 1 d'après le tableau II ; si $\Gamma(a)$ est 0, d'après le tableau I, le symbole $\Gamma(\neg a)$ est 1, et il en est donc de même pour $\Gamma(a \vee (\neg a))$. Le tableau suivant résume ces remarques.

| a | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\neg a$ | 0 | 1 |
| $a \vee \neg a$ | 1 | 1 |

On voit aisément que $\neg(a \vee (\neg a))$ est une contradiction et que $(\neg a) \vee (\neg a)$ (c'est-à-dire $a \Rightarrow (\neg a)$) n'est ni une tautologie ni une contradiction.

| a | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\neg a$ | 0 | 1 |
| $a \vee (\neg a)$ | 1 | 1 |
| $\neg(a \vee (\neg a))$ | 0 | 0 |

| a | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\neg a$ | 0 | 1 |
| $(\neg a) \vee (\neg a)$ | 0 | 1 |

Propriété 2.

Tout théorème de $C$ est une tautologie ; toute tautologie est un théorème de $C$.

Montrons d'abord que tous les axiomes de $C$ sont des tautologies. Soit un axiome produit par **S1**, il s'écrit $(A \vee A) \Rightarrow A$, où A est une proposition ; soit $\Gamma$ une valuation régulière : si $\Gamma(A)$ est 1, on constate suivant les tableaux I et II que $\Gamma(A \vee A)$ est 1, que $\Gamma(\neg(A \vee A))$ est 0, et que $\Gamma(\neg(A \vee A) \vee A)$, c'est-à-dire $\Gamma((A \vee A) \Rightarrow A)$, est 1 ; on trouve de façon analogue que si $\Gamma(A)$ est 0, alors $\Gamma((A \vee A) \Rightarrow A)$ est 1.

Les tableaux suivants résument cette discussion, ainsi que celles que l'on pourrait faire à propos des axiomes produits par **S2, S3** et **S4**.

| $A$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $A \vee A$ | 1 | 0 |
| $\neg(A \vee A)$ | 0 | 1 |
| **S1** $\begin{cases} \neg(A \vee A) \vee A \\ (A \vee A) \Rightarrow A \end{cases}$ | 1 | 1 |

| $A$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\neg A$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $A \vee B$ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| **S2** $\begin{cases} \neg A \vee (A \vee B) \\ A \Rightarrow (A \vee B) \end{cases}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $B \vee A$ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\neg(A \vee B)$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **S3** $\begin{cases} \neg(A \vee B) \vee (B \vee A) \\ (A \vee B) \Rightarrow (B \vee A) \end{cases}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $B$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $C$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\neg A$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\left\{\begin{array}{l}\neg A \vee B\\ A \Rightarrow B\end{array}\right.$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $C \vee A$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $C \vee B$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\neg(C \vee A)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\left\{\begin{array}{l}\neg(C \vee A) \vee (C \vee B)\\ (C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)\end{array}\right.$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\neg(A \Rightarrow B)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **S4** $\left\{\begin{array}{l}\neg(A \Rightarrow B) \vee ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))\\ (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))\end{array}\right.$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Soit maintenant *D* une démonstration de *C* ; montrons de proche en proche que tout théorème de *C* figurant dans *D* est une tautologie. Soit $B_i$ un théorème de *D*, supposons que tous les théorèmes précédant $B_i$ dans *D* soient des tautologies. Si $B_i$ est un axiome de *C*, il a été produit par l'un des schémas d'axiome **S1, S2, S3** et **S4**, et d'après ce qui précède, $B_i$ est une tautologie ; sinon $B_i$ est précédé dans *C* par deux théorèmes de *C*, soient $B_j$ et $B_k$, tels que $B_k$ soit identique à $B_j \Rightarrow B_i$. Soit $\Gamma$ une valuation régulière : on sait par hypothèse que $\Gamma(B_j)$, $\Gamma(B_j \Rightarrow B_i)$ et donc $\Gamma(\neg B_j \vee B_i)$ sont identique à 1 ; on en déduit que $\Gamma(\neg B_j)$ est identique à 0. Donc si $\Gamma(B_i)$ était identique à 0, alors $\Gamma(\neg B_j \vee B_i)$ serait identique à 0, ce qui est contraire à l'hypothèse : $\Gamma(B_i)$ est bien identique à 1. Le tableau suivant résume cette discussion.

impossible par hypothèse

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $B_j$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B_i$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\neg B_j$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\left\{\begin{array}{l}\neg B_j \vee B_i\\ B_j \Rightarrow B_i\end{array}\right.$ | 1 | 0 | 1 | 1 |

impossible par hypothèse

Nous ne justifierons pas ici la réciproque de cette propriété ; on trouvera dans Chauvineau [14] et dans Kleene [17] des indications pour le faire.

Etant donné une proposition A il est possible de décider à l'aide d'un procédé systématique si elle est une tautologie ou non ; il suffit de considérer une construction formative *F* où elle figure, d'associer à chacune des lettres dans *F* les symboles 1 ou 0 de toutes les manières possibles, et pour chacun de ces choix d'associer aux autres propositions de *F* les symboles 0 et 1 suivant les règles données par les tableaux I et II ; si pour chacun de ces choix A est associé à 1, et seulement dans ce cas, A est une tautologie (on sait que le résultat obtenu est indépendant de la construction formative sur laquelle on travaille). Puisqu'on dispose d'une procédure mécanique permettant de décider si une proposition est une tautologie ou non, suivant la propriété 2 on sait décider par la même procédure si une proposition est un théorème de *C* ou non : on dit que *C* est une théorie **décidable.**

On emprunte souvent la démarche suivante pour construire une logique des propositions : après avoir défini les propositions comme on l'a fait ici à l'aide de constructions formatives, on définit les tautologies. Cette méthode est appelée **théorie des modèles,** alors que nous avons construit aux paragraphes I et II une **théorie déductive** ; la propriété 2 montre que les théorèmes de la théorie des modèles sont les théorèmes de *C*.

Propriété 3.

La théorie *C* n'est pas contradictoire.

En effet, soit T un théorème de *C* : on sait que T est une tautologie. Si $\Gamma$ est une valuation régulière, $\Gamma(T)$ est 1 et $\Gamma(\neg T)$ est 0 ; il s'ensuit que $\neg T$ n'est pas une tautologie, et donc n'est pas un théorème de *C* : on ne peut pas trouver de proposition T telle que T et $\neg T$ soient des théorèmes de *C*.

Notons $\{0, 1, 2\}$ la collection des trois symboles 0, 1 et 2 ; si $\Lambda$ est une correspondance entre *P* et $\{0, 1, 2\}$ telle que $\Lambda$ fasse correspondre un et un seul des trois symboles 0, 1 et 2 à chaque proposition, nous dirons que $\Lambda$ est une **valuation ternaire.**

On montre, par des moyens analogues à ceux utilisés pour les valuations binaires, qu'étant donné une correspondance $\Xi$ entre *L* et $\{0, 1, 2\}$ qui associe à chaque lettre un et un seul des symboles 0, 1 et 2, il existe une valuation ternaire unique $\Lambda$ qui a les propriétés suivantes :

i) quelle que soit la lettre $\alpha$, le symbole $\Lambda(\alpha)$ est identique à $\Xi(\alpha)$,

ii) si A est une proposition, $\Lambda(\neg A)$ se déduit de $\Lambda(A)$ suivant le tableau $I_1$ ci-dessous,

$I_1$

| $\Lambda(A)$ | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|
| $\Lambda(\neg A)$ | 1 | 2 | 0 |

iii) si A et B sont des propositions, $\Lambda(A \vee B)$ se déduit de $\Lambda(A)$ et $\Lambda(B)$ suivant le tableau $II_1$ ci-dessous.

$II_1$

| $\Lambda(A)$ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda(B)$ | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $\Lambda(A \vee B)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 |

On dira que la valuation ternaire $\Lambda$ est régulière (pour les tableaux $I_1$ et $II_1$) si $\Lambda$ a les propriétés ii) et iii).

Soit $T_1$ la théorie sans axiome explicite admettant pour schémas d'axiome **S2**, **S3** et **S4**.

Propriété 4.

Si T est un théorème de $T_1$, quelle que soit la valeur ternaire $\Lambda$ régulière pour les tableaux $I_1$ et $II_1$, le symbole $\Lambda(T)$ est 2.

Pour établir cette propriété on montre d'abord que si $\Lambda$ est une valuation ternaire régulière pour les tableaux $I_1$ et $II_1$, quel que soit l'axiome A de $T_1$, le symbole $\Lambda(A)$ est 2 ; donnons par exemple un tableau indiquant comment on pourrait vérifier cette propriété pour un axiome implicite produit par **S2**.

| A | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $A \vee B$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| $\neg A$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **S2** $\begin{cases} \neg A \vee (A \vee B) \\ A \Rightarrow (A \vee B) \end{cases}$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

On peut aisément faire une vérification analogue pour les axiomes produits par **S3** et **S4**, la vérification concernant **S4** exigeant toutefois un tableau à vingt-sept colonnes.

Soit alors *D* une démonstration de $T_1$ ; montrons de proche en proche que tout théorème de $T_1$ figurant dans *D* a la propriété annoncée.

On suppose que $B_i$ figure dans *D* et que toutes les propositions précédant $B_i$ dans *D* ont cette propriété. D'après ce qui précède, si $B_i$ est un axiome de $T_1$ et si $\Lambda$ est une valuation ternaire régulière, alors $\Lambda(B_i)$ est identique à 2. Sinon, $B_i$ est précédé dans *D* par des propositions $B_j$ et $B_k$ telles que $B_k$ soit identique à $B_j \Rightarrow B_i$ ; soit $\Lambda$ une valuation ternaire régulière, on sait par hypothèse que $\Lambda(B_j)$ et $\Lambda(B_j \Rightarrow B_k)$ sont identiques à 2. Le tableau suivant indique comment terminer le raisonnement.

impossible par hypothèse

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_j$ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $B_i$ | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $\neg B_j$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| $\neg B_j \vee B_i$ / $B_j \Rightarrow B_i$ | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 |

impossible par hypothèse — impossible par hypothèse

Montrons que les théorèmes de *C* ne sont pas nécessairement des théorèmes de $T_1$ : soit $\Lambda$ une valuation ternaire régulière telle que $\Lambda(a)$ soit 0 ; les symboles associés par $\Lambda$ aux propositions $a \vee a$, $\neg(a \vee a)$ et $\neg(a \vee a) \vee a$ sont données par le tableau suivant.

| | |
|---|---|
| a | 0 |
| $a \vee a$ | 2 |
| $\neg(a \vee a)$ | 1 |
| $\neg(a \vee a) \vee a$ / $(a \vee a) \Rightarrow a$ | 0 |

Donc, puisqu'il existe une valuation ternaire régulière $\Lambda$ telle que $\Lambda((a \vee a) \Rightarrow a)$ soit différent de 2, la proposition $(a \vee a) \Rightarrow a$ n'est pas un théorème de $T_1$ ; or c'est un axiome implicite de *C* produit par **S1**, et donc un théorème de *C* : nous dirons que **S1** est un schéma d'axiome **indépendant** de **S2, S3** et **S4**. De façon plus imagée nous pouvons dire qu'en enlevant **S1** à *C*, nous avons « perdu » des théorèmes.

Ce qui a été fait pour **S1** peut être répété pour **S2, S3** et **S4**. Pour **S2**, on utilise les valuations ternaires régulières pour les tableaux suivants.

$I_2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Lambda(A)$ | 2 | 1 | 0 |
| $\Lambda(\neg A)$ | 1 | 2 | 0 |

$II_2$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda(A)$ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\Lambda(B)$ | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $\Lambda(A \vee B)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |

Si $T_2$ est la théorie sans axiome explicite ayant **S1, S3** et **S4** pour schémas d'axiome, on vérifie que tous les théorèmes de $T_2$ sont associés à 2 par ces valuations ternaires et que $a \Rightarrow (a \vee b)$, proposition produite par **S2**, n'est pas un théorème de $T_2$.

Pour **S3**, on utilise les valuations régulières pour les tableaux suivants, le symbole associé aux théorèmes de $T_3$ étant encore 2 (la théorie $T_3$ est la théorie sans axiome explicite ayant **S1, S2** et **S4** pour schémas d'axiome).

$I_3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Lambda(A)$ | 2 | 1 | 0 |
| $\Lambda(\neg A)$ | 1 | 0 | 2 |

$II_3$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda(A)$ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\Lambda(B)$ | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $\Lambda(A \vee B)$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 |

Pour **S4**, on est amené à utiliser les **valuations quaternaires** (correspondances entre $P$ et $\{0, 1, 2, 3\}$ qui associent à chaque proposition un et un seul des symboles 0, 1, 2 et 3) qui sont régulières pour les tableaux suivants ; le symbole mis en relation avec les théorèmes de $T_4$ est ici 3 (les schémas d'axiome de $T_4$ sont **S1, S2** et **S3**, et $T_4$ n'a pas d'axiome explicite).

$I_4$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Lambda(A)$ | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $\Lambda(\neg A)$ | 2 | 3 | 0 | 3 |

$II_4$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda(A)$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\Lambda(B)$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $\Lambda(A \vee B)$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 0 | 3 | 0 |

Chacun des schémas d'axiome de $C$ étant indépendant des trois autres, nous dirons que les schémas d'axiome de $C$ sont **indépendants.**

Nous avons étudié ce qui se passe lorsqu'on enlève un schéma d'axiome à $C$, nous allons étudier maintenant ce qui arrive lorsqu'on ajoute un schéma d'axiome à $C$ ; auparavant établissons le critère suivant.

Critère de substitution **CS3.**

Soient $T$ une théorie, A et B des propositions et $\beta$ une lettre ; si A est un théorème de $T$ et *si $\beta$ n'est pas une constante de $T$*, alors $(B|\beta)A$ est un théorème de $T$.

En effet, soit $D$ une démonstration de $T$ ; il suffit de montrer de proche en proche que si $A_i$ figure dans $D$, alors $(B|\beta)A_i$ est un théorème de $T$ ; soit donc $A_i$ une proposition figurant dans $D$ et supposons que si $A_j$ précède $A_i$ dans $D$, la proposition $(B|\beta)A_i$ soit un théorème de $T$. Etant donné un assemblage P, nous désignerons ici par P* l'assemblage $(B|\beta)P$.

Si $B_i$ est un axiome implicite de $T$, par définition des schémas d'axiome, $B_i^*$ est un axiome implicite de $T$ produit par le même schéma d'axiome que $B_i$, donc $B_i^*$ est un théorème de $T$.

Si $B_i$ est un axiome explicite de $T$, toutes les lettres de $B_i$ sont des constantes de $T$ et donc $\beta$ n'est pas une lettre figurant dans $B_i$ ; donc $B_i^*$ est identique à $B_i$, et $B_i^*$ est un théorème de $T$.

Si $B_i$ est précédé dans $T$ par $B_j$ et $B_k$ tels que $B_k$ soit identique à $B_j \Rightarrow B_i$, on sait par hypothèse que $B_j^*$ et $(B_j \Rightarrow B_i)^*$ sont des théorèmes de $T$ ; or, suivant le critère **CS1**, l'assemblage $(B_j \Rightarrow B_i)^*$ est identique à $B_i^* \Rightarrow B_i^*$ ; puisque $B_j^*$ et $B_j^* \Rightarrow B_i^*$ sont des théorèmes de $T$, il en est de même pour $B_i^*$, ce qui permet de conclure.

Soit maintenant **S5** un schéma d'axiome et soit $T$ la théorie sans axiome explicite ayant pour schémas d'axiome **S1, S2, S3, S4** et **S5** ; supposons qu'on puisse trouver une proposition qui soit un théorème de $T$ sans être un théorème de $C$ ; soit A une telle proposition. Suivant la propriété 2, la proposition A n'est pas une tautologie ; il existe donc des valuations binaires régulières associant 0 à A ; soit $\Gamma$ l'une d'elle ($\Gamma(A)$ est donc 0).

Soit $F$ une construction formative où figure A et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les lettres figurant dans $F$ ; soit $\gamma$ une lettre distincte de celles-ci. Notons U la proposition $\gamma \vee \neg\gamma$, qui est une tautologie, et V la proposition $\neg(\gamma \vee \neg\gamma)$, qui est une contradiction. Associons à chacune des lettres $\alpha_i$ figurant dans $F$ la proposition U ou la proposition V suivant que $\Gamma(\alpha_i)$ est 1 ou 0, et notons $W_i$ cette proposition. Puisque U est une tautologie, quelle que soit la valuation régulière $\Omega$, le symbole $\Omega(U)$ est 1 ; donc si $W_i$ est U, alors $\Omega(W_i)$ et $\Gamma(\alpha_i)$ sont identiques ; une remarque analogue concernant V permet d'affirmer que quelle que soit la valuation régulière $\Omega$, le symbole $\Omega(W_i)$ est identique à $\Gamma(\alpha_i)$.

Dans chaque assemblage $A_j$ figurant dans $F$, substituons à chacune des lettres $\alpha_i$ la proposition $W_i$, et notons $A_j^*$ le résultat de cette substitution. Comme $\gamma$ est distincte des lettres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ on aurait pu obtenir $A_j^*$ en faisant les opérations successives suivantes : substitution de $W_1$ à $\alpha_1$ dans $A_j$, donnant l'assemblage $A_j^1$ ; puis substitution de $W_2$ à $\alpha_2$ dans $A_j^1$, donnant l'assemblage $A_j^2$, etc..., la dernière opération étant la substitution de $W_n$ à $\alpha_n$ dans $A_j^{n-1}$. Il s'ensuit que des applications répétées du critère **CS2** permettent d'affirmer que $A_j^*$ est une proposition, et que si $A_j$ et $A_k$ figurent dans *F*, des applications répétées du critère **CS1** montrent que $(\neg A_j)^*$ est identique à $\neg A_j^*$ et que $(A_j \vee A_k)^*$ est identique à $A_j^* \vee A_k^*$. Enfin, *T* étant une théorie sans axiome explicite, les lettres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ne sont pas des constantes de *T* ; donc, A étant un théorème de *T*, en appliquant plusieurs fois le critère **CS3**, on montre que $A^*$ est un théorème de *T*.

Montrons maintenant de proche en proche que si $A_j$ figure dans *F* et si $\Omega$ est une valuation régulière, $\Omega(A_j^*)$ est identique à $\Gamma(A_j)$. Soit $\Omega$ une valuation régulière quelconque et soit $A_j$ figurant dans *F* ; supposons que si $A_k$ précède $A_j$ dans *F*, alors $\Omega(A_k^*)$ soit identique à $\Gamma(A_k)$ ; il suffit de montrer que sous cette hypothèse $\Omega(A_j^*)$ est identique à $\Gamma(A_j)$. Si $A_j$ est une lettre, c'est l'une des lettres $\alpha_i$, et l'on a convenu que $\alpha_i^*$ est $W_i$, de sorte que $\Omega(\alpha_i^*)$ est identique à $\Gamma(\alpha_i)$. Si $A_j$ est précédé dans *F* par $A_k$ tel que $A_j$ soit $\neg A_k$, on sait par hypothèse que $\Omega(A_k^*)$ est identique à $\Gamma(A_k)$ ; donc, puisque $\Omega$ et $\Gamma$ sont des valuations régulières, $\Omega(\neg A_k^*)$ est identique à $\Gamma(\neg A_k)$, c'est-à-dire $\Gamma(A_j)$ ; or $\neg A_k^*$ est identique à $(\neg A_k)^*$, c'est-à-dire $A_j^*$ ; donc $\Omega(A_j^*)$ est bien identique à $\Gamma(A_j)$. On montre de même que si $A_j$ est précédé dans *F* par $A_k$ et $A_l$ tels que $A_j$ soit $A_k \vee A_l$, le symbole $\Omega(A_j^*)$ est identique à $\Gamma(A_j)$, ce qui achève d'établir le résultat.

En particulier, quelle que soit la valuation régulière $\Omega$, le symbole $\Omega(A^*)$ est identique à $\Gamma(A)$, c'est-à-dire à 0 ; donc $A^*$ est une contradiction et $\neg A^*$ est une tautologie ; il en découle que $\neg A^*$ est un théorème de *C*, et puisque *T* est une extension de *C*, la proposition $\neg A^*$ est un théorème de *T* ; par ailleurs, on a vu que $A^*$ est un théorème de *T* ; donc *T* est une théorie contradictoire, d'où la propriété suivante.

Propriété 5.

Si *T* est une extension de *C* sans axiome explicite, *T* est contradictoire ou tous les théorèmes de *T* sont des théorèmes de *C*.

Les résultats concernant *C* que nous avons établis jusqu'ici expliquent que l'on considère cette théorie comme la théorie classique de la logique des propositions. En particulier, la propriété 5 montre que d'une certaine manière on ne peut rien lui ajouter (nous étudierons plus loin les extensions de *C* qui ont les mêmes schémas que *C* et qui ont des axiomes explicites). Toutefois, on peut envisager des théories ayant moins de théorèmes, comme la **logique intuitionniste** qui a été mise sur pied au début de ce siècle ; transcrite dans le formalisme utilisé ici, cette logique est une théorie moins forte que *C* : ainsi, pour des raisons qui méritent un examen attentif, même si on les rejette, le critère **C5** (si A est une proposition, $A \vee \neg A$ est un théorème) n'est pas un critère de la logique intuitionniste. On pourra lire [23].

On a cherché à établir d'autres résultats dans des directions tout à fait différentes, en particulier dans les **logiques modales** qui font intervenir, outre les connecteurs habituels, des connecteurs tels que $\Box$ qui peut se lire « il est nécessaire que » et $\Diamond$ qui peut se lire « il est possible que ». Dans les constructions formatives, les connecteurs $\Box$ et $\Diamond$ se comportent comme le symbole $\neg$ (ils s'appliquent à une seule proposition, et dans l'interprétation qu'on en fait, ils modifient le sens de la proposition à laquelle ils s'appliquent), et on est amené à ajouter aux schémas d'axiome classiques des schémas où figurent $\Box$ et $\Diamond$. Les logiques modales, qui permettent d'étudier des nuances de la langue courante qui sont ignorées par la logique classique des propositions, ne sont pas utilisées en mathématiques. On pourra consulter, pour une introduction aux logiques modales, *De l'interprétation* dans l'*Organon* d'Aristote [3], et [16] et [26].

Pour terminer, examinons ce qui se passe quand on ajoute des axiomes explicites à $C$. Soit $T$ une extension de $C$ ; on peut montrer que si A et B sont des théorèmes de $T$, il en est de même de $A \wedge B$ (le symbole $\wedge$ est le symbole abréviatif défini précédemment qui se lit « et ») ; réciproquement, si $A \wedge B$ est un théorème de $T$, alors A et B sont des théorèmes de $T$. Aussi, A étant une proposition, nous nous contenterons d'étudier la théorie $T_A$ ayant A pour unique axiome explicite et **S1**, **S2**, **S3** et **S4** pour schémas d'axiome.

Soit $\Gamma$ une valuation binaire régulière ; nous dirons qu'elle est compatible avec A si $\Gamma(A)$ est identique à 1. Les valuations régulières compatibles avec A jouent pour $T_A$ le même rôle que les valuations régulières pour $C$.

Propriété 6.

Une proposition P est un théorème de $T_A$ si et seulement si, quelle que soit la valuation régulière $\Gamma$ compatible avec A, le symbole $\Gamma(P)$ est 1.

En effet, soit $D$ une démonstration de $T_A$ et soit $\Gamma$ une valuation compatible avec A ; montrons de proche en proche que quel que soit le théorème $B_i$ de $T_A$ figurant dans $D$, le symbole $\Gamma(B_i)$ est 1. Supposons que $B_i$ figure dans $D$ et que, pour toutes les proposition $B_j$ précédant $B_i$ dans $D$, le symbole $\Gamma(B_j)$ soit 1. Si $B_i$ est un axiome implicite de $T_A$, alors $B_i$ est un axiome de $C$ et est donc une tautologie ; puisque $\Gamma$ est une valuation régulière, $\Gamma(B_i)$ est 1. Si $B_i$ est A (seul axiome explicite de $T_A$), puisque $\Gamma$ est compatible avec A, le symbole $\Gamma(A)$ est 1. Enfin si $B_i$ est précédé dans $D$ par $B_j$ et $B_k$ tels que $B_k$ soit $B_j \Rightarrow B_i$, on sait par hypothèse que $\Gamma(B_j)$ et $\Gamma(B_j \Rightarrow B_i)$ sont identiques à 1 ; puisque $\Gamma$ est une valuation régulière, il s'ensuit que $\Gamma(B_i)$ est identique à 1 comme on l'a vu en établissant la propriété 2.

Réciproquement, soit B une proposition telle que, quelle que soit la valuation régulière $\Gamma$ compatible avec A, le symbole $\Gamma(B)$ soit 1. Montrons d'abord que $A \Rightarrow B$ est une tautologie. Soit $\Gamma$ une valuation régulière ; si $\Gamma(A)$ est 0, alors $\Gamma(\neg A)$ est 1 et $\Gamma(\neg A \vee B)$, qui est $\Gamma(A \Rightarrow B)$, est identique à 1 ; si $\Gamma(A)$ est 1, alors $\Gamma$ est compatible avec A et $\Gamma(B)$ est 1 ; on en déduit que dans ce cas également $\Gamma(\neg A \vee B)$, c'est-à-dire $\Gamma(A \Rightarrow B)$, est identique à 1. Donc $A \Rightarrow B$ est un théorème de $C$ et puisque $T_A$ est une extension de $C$, la proposition $A \Rightarrow B$ est un théorème de $T_A$ ; comme par ailleurs A est un théorème de $T_A$ (car A est un axiome de $T_A$), la proposition B est bien un théorème de $T_A$.

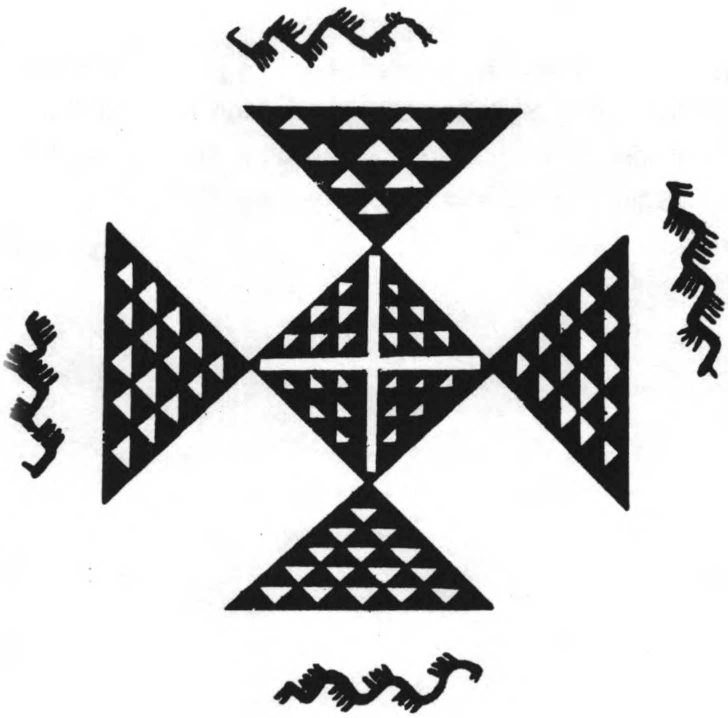
Ce résultat permet de montrer facilement que $T_A$ est décidable.

Propriété 7.

$T_A$ est contradictoire si et seulement si A est une contradiction.

Supposons d'abord que A soit une contradiction : la proposition $\neg A$ est alors une tautologie, donc un théorème de $C$ ; et puisque $T_A$ est une extension de $C$, la proposition $\neg A$ est également un théorème de $T_A$ ; donc $T_A$, qui admet A et $\neg A$ comme théorèmes, est contradictoire.

Réciproquement, si A n'est pas une contradiction, on peut trouver une valuation régulière $\Gamma$ telle que $\Gamma(A)$ soit 1. Si P était une proposition telle que P et $\neg P$ soient des théorèmes de $T_A$, d'après la proposition 6 il faudrait que $\Gamma(P)$ et $\Gamma(\neg P)$ soient identiques à 1 ; mais puisque $\Gamma$ est une valuation régulière, $\Gamma(P)$ et $\Gamma(\neg P)$ sont différents, d'où la conclusion.



# Chapitre III
# LOGIQUE QUANTIFIEE ET THEORIE DES ENSEMBLES

Alors que la logique des propositions a pour ambition de rendre compte des rapports que l'on constate entre les propositions, la logique quantifiée s'interprète comme la description des propositions et de leur contenu : les phrases énonciatives telles que « $\int_0^x \sin t\, dt = 0$ » ou « César a franchi le Rubicon », ne sont plus seulement considérées globalement ; on s'intéresse aussi aux constantes telles que « 0 », « César » ou « le Rubicon », aux variables telles que « x » et aux relations qui les lient, telles que « = » ou « a franchi ». Outre son interprétation dans le langage courant, la logique quantifiée permet surtout de construire un formalisme commode pour développer les mathématiques.

On suivra ici une présentation particulière de la logique quantifiée, en indiquant seulement certaines des autres voies possibles.

## I – DESCRIPTION D'UNE LOGIQUE QUANTIFIEE.

Les **signes logiques** utilisés sont les suivants :

– Les **lettres** : a, b, ..., z, a′, ..., z′, a*, ... ; nous supposerons ici aussi qu'étant donnée une collection finie de lettres, il est possible d'écrire une lettre différente de celles qui figurent dans la collection donnée ; ces lettres seront des minuscules latines, éventuellement agrémentées d'ornements divers tels qu'étoiles, accents, etc... Contrairement à ce qui se passe pour la logique des propositions, ces lettres peuvent être interprétées comme désignant des objets.

▷ – Les **connecteurs** : $\vee$, $\neg$ ; on lit $\vee$ « ou » et $\neg$ « non ».

▷ – Les signes **agglutinants** : $\forall$, $\iota$ ; le signe $\forall$ se lit « tout » ; le signe $\iota$ est la lettre grecque « iota ».

▷ – Le signe $\square$.

▷ – Le signe **égale** : =.

▷ – Le signe **d'appartenance** : $\in$.

Par un abus commode, nous utiliserons ici les lettres et connecteurs déjà utilisés en logique des propositions ; nous *soulignerons* les symboles appartenant à cette dernière quand il y aura un risque de les confondre avec ceux de la logique quantifiée.

Les signes sont réunis en **assemblages** : un assemblage est une succession (finie) de signes, certains d'entre eux étant éventuellement reliés par des traits ; voici quatre exemples d'assemblages.

1) $\vee \neg \forall \iota \square = \in$

2) $x$

3) $= uv$

4) $\vee \iota = \square \square \square$

En toute rigueur, ici aussi il faudrait en outre un signe pour séparer les assemblages les uns des autres ; nous utiliserons encore le changement de ligne comme ci-dessus, ou des espaces blancs.

Nous suivrons les usages courants de représentation et désignation d'assemblages ou de parties d'assemblages, qui on été signalés à l'occasion de la description des assemblages de la logique des propositions ; nous introduirons également des abréviations et des représentations conventionnelles d'assemblages.

C'est ainsi qu'on abrégera $\vee\neg$ par $\Rightarrow$, comme en logique des propositions ; on introduira de même les signes $\wedge$ et $\Longleftrightarrow$.

Si A est un assemblage et $\alpha$ une lettre,

$$(\forall\alpha)(A) \quad \text{et} \quad \iota_\alpha(A)$$

représentent les assemblages obtenus quand on recopie A en remplaçant $\alpha$ par le signe $\square$ chaque fois que $\alpha$ se rencontre, en écrivant $\forall$ (ou $\iota$) devant l'assemblage ainsi obtenu et en reliant le signe $\forall$ (ou $\iota$) qui vient d'être écrit aux signes $\square$ écrits à la place de la lettre $\alpha$.

Ainsi, si A et l'assemblage $\neg\in xy$, alors $(\forall x)(A)$ représente l'assemblage $\forall\neg\in\square y$ ; si B est l'assemblage $\forall\neg\in\square y$, alors $\iota_y(B)$ représente l'assemblage $\iota\forall\neg\in\square\square$ ; la lettre z ne figure pas dans B, c'est pourquoi $\iota_z(B)$ représente l'assemblage $\iota\forall\in\square y$.

Si A est un assemblage et $\alpha$ une lettre, l'assemblage $\neg(\forall\alpha)(\neg A)$ est représenté par $(\exists\alpha)(A)$ ; ainsi, si B est l'assemblage $\forall\neg\in\square y$, alors $(\exists y)(B)$ représente l'assemblage $\neg(\forall y)(\neg\forall\neg\in\square y)$, soit encore $\neg\forall\neg\forall\in\square\square$, ce qu'on écrira plus volontiers $(\exists y)(\forall x)(\neg\in xy)$, ou encore $(\exists y)(\forall x)(x \notin y)$.

On appelle $\forall$ le **quanteur** (ou **quantificateur**) **universel**, et $\exists$ le **quanteur existentiel.**

Dans la suite, lorsque A pourra être interprété comme une propriété concernant $\alpha$, nous interpréterons $(\forall\alpha)(A)$ comme l'affirmation que la propriété A est vérifiée par tous les objets et $(\exists\alpha)(A)$ comme indiquant qu'il y a au moins un objet vérifiant la propriété A ; enfin, sous réserve de certaines conditions, $\iota_\alpha(A)$ sera l'unique objet vérifiant la propriété A.

Remarquons bien que si A est un assemblage et $\alpha$ une lettre, les assemblages $(\forall\alpha)(A)$, $(\exists\alpha)(A)$ et $\iota_\alpha(A)$ *ne contiennent pas* la lettre $\alpha$ comme les exemples précédents permettent de s'en persuader ; ainsi, si l'on énonce la phrase

(1) « il existe un entier n pour lequel $2^{(n^2)} > 3^{3n}$»,

on n'a pas introduit la lettre (la variable) n ; si l'on veut utiliser l'un des entiers ayant cette propriété, on l'introduira par un énoncé tel que :

« Soit p un tel entier ; puisque $2^{(p^2)} > 3^{3p}$, ... »

ou

« Soit n pour lequel $2^{(n^2)} > 3^{3n}$, ... »

mais on se gardera d'écrire immédiatement après la phrase (1), comme si n était déjà défini, « puisque $2^{(n^2)} > 3^{3n}$, ... ».

Les critères de substitution suivants montreraient encore plus, si c'était nécessaire, que $\alpha$ ne joue qu'un rôle de marque-place dans les assemblages $(\forall\alpha)(A)$, $(\exists\alpha)(A)$ et $\iota_\alpha(A)$ – de même que t dans les expressions $t \longmapsto t^2 - 1$ ou $\int_0^x \sin t \, dt$.

Etant donnés des assemblages A et B et une lettre $\alpha$, on dira qu'on a substitué A à $\alpha$ dans B si on a remplacé $\alpha$ par A chaque fois que cette lettre se rencontre dans
▷ A ; on symbolisera le résulat de cette substitution par $(A|\alpha)B$. Exemple :

$$(\iota\forall\neg\in\square\square|y)\forall\neg\in\square y \quad \text{symbolise} \quad \forall\neg\in\square\iota\forall\neg\in\square\square.$$

Cet exemple persuadera à nouveau de l'utilité des symboles abréviatifs et des conventions d'écriture, qui par exemple permettent d'écrire $(\forall x)(\neg\in x\phi)$ (ou $(\forall x)(x\notin\phi)$) à la place de l'assemblage précédent.

Au lieu d'écrire $(A|\alpha)B$, on se permettra d'écrire dans la suite B(A) si l'on a écrit précédemment $B(\alpha)$ pour indiquer que $\alpha$ est une lettre à laquelle on prête une attention particulière dans l'assemblage B.

Critère de substitution **CS1** : Soient A, B et C des assemblages et $\alpha$ une lettre ; si M est un assemblage, désignons par M* l'assemblage $(A|\alpha)M$.

1) $=B^*C^*$ est identique à $(A|\alpha)=BC$ ;
2) $\in B^*C^*$ est identique à $(A|\alpha)\in BC$ ;
3) $\neg B^*$ est identique à $(A|\alpha)\neg B$ ;
4) $\vee B^*C^*$ est identique à $(A|\alpha)\vee BC$ ;
5) si $\beta$ est une lettre distincte de $\alpha$ et ne figure pas dans A,
   $(\forall\beta)(B^*)$ est identique à $(A|\alpha)(\forall\beta)(B)$ et
   $\iota_\beta(B^*)$ est identique à $(A|\alpha)\iota_\beta(B)$ ;
6) Si $\beta$ est une lettre qui ne figure pas dans B,
   $(\forall\alpha)(B)$ est identique à $(\forall\beta)((\beta|\alpha)B)$ et
   $\iota_\alpha(B)$ est identique à $\iota_\beta((\beta|\alpha)B)$.

Seuls les deux derniers critères demandent un peu de soin pour être justifiés ; plutôt que de donner une justification générale, illustrons par trois exemples le critère 5), qui feront sentir la nécessité des conditions imposées à $\beta$ :

i) $\beta$ remplit les conditions imposées :

$\alpha : x$ ; $\beta : y$ ; $B : =xy\in$ ; $A : x\neg z$.

$B^* : =x\neg zy\in$ $\quad$ $(\forall\beta)(B) : \forall=x\square\in$

$(\forall\beta)(B^*) : \forall=x\neg z\square\in$ $\quad$ $(A|\alpha)(\forall\beta)(B) : \forall=x\neg z\square\in$

ii) $\beta$ est identique a $\alpha$ :

$\alpha : x$ ; $\beta : x$ ; $B : =xy\in$ ; $A : u\neg z$.

$B^* : =u\neg zy\in$ $\quad$ $(\forall\beta)(B) : \forall=\square y\in$

$(\forall\beta)(B^*) : \forall=u\neg zy\in$ $\quad$ $(A|\alpha)(\forall\beta)(B) : \forall=\square y\in$

iii) $\beta$ figure dans A :

$\alpha : x$ ; $\beta : y$ ; $B : =xy\in$ ; $A : y\neg z$.

$B^* : =y\neg zy\in$ $\quad$ $(\forall\beta)(B) : \forall=x\square\in$

$(\forall\beta)(B^*) : \forall=\square\neg z\square\in$ $\quad$ $(A|\alpha)(\forall\beta)(B) : \forall=y\neg z\square\in$

Nous allons ici, comme pour la logique des propositions, faire un tri parmi les assemblages à l'aide des **constructions formatives.** Donnons auparavant les définitions suivantes : un assemblage sera dit de **première espèce** s'il commence par une lettre, $\iota$ ou $\square$ ; il sera dit de **seconde espèce** dans les autres cas.

Une construction formative est une séquence (finie) d'assemblages ayant la propriété suivante : si A est un assemblage de cette séquence d'assemblages notée *F*, A vérifie l'une des conditions suivantes :

1) A est une lettre ;

2) A est précédé dans $F$ par des assemblages de première espèce, soient B et C, tels que A soit $=$BC ;

3) A est précédé dans $F$ par des assemblages de première espèce, soient B et C, tels que A soit $\in$BC ;

4) A est précédé dans $F$ par un assemblage de seconde espèce, soit B, tel que A soit $\neg$B ;

5) A est précédé dans $F$ par des assemblages de seconde espèce, soient B et C, tels que A soit $\vee$ BC ;

6) A est précédé dans $F$ par un assemblage de seconde espèce, soit B, et il y a une lettre, soit $\alpha$, tels que A soit $\iota_\alpha$(B) ;

7) A est précédé dans $F$ par un assemblage de seconde espèce, soit B, et il y a une lettre, soit $\alpha$, tels que A soit $(\forall\alpha)$(B).

Exemple de construction formative :

| | | |
|---|---|---|
| $F$ | x | vérifie 1) : x est une lettre ; |
| | y | vérifie 1) : y est une lettre ; |
| | $\in$xy | vérifie 3) : $\in$xy est précédé dans $F$ par x et y, de première espèce ; |
| | $\neg\in$xy | vérifie 4) : $\neg\in$xy est précédé dans $F$ par $\in$xy, de deuxième espèce ; |
| | $\forall\neg\in\square$y | vérifie 7) : $(\forall x)(\neg\in xy)$ est précédé de $\neg\in$xy, de deuxième espèce ; |
| | $\iota\forall\neg\in\square\square$ | vérifie 6) : $\iota_y((\forall x)(\neg\in xy))$ est précédé de $(\forall x)(\neg\in xy)$, de deuxième espèce ; |
| | $\vee\forall\neg\in\square$y$\in$xy | vérifie 5) : $\forall\neg\in\square$y et $\in$xy sont de deuxième espèce ; |
| | $=\iota\forall\neg\in\square\square$y | vérifie 2) : $\iota\forall\neg\in\square\square$ et y sont de première espèce. |

Un assemblage figurant dans une construction formative est dit **bien formé** ; il est appelé **terme** s'il est de première espèce, **relation** s'il est de seconde espèce ; on distingue souvent les assemblages bien formés où ne figurent pas de lettre en disant qu'ils sont **clos.** Une relation close est souvent appelée **prédicat.**

Les règles qui viennent d'être énoncées font l'économie des parenthèses ( et ), et de leur mode d'emploi ; suivant le système polonais, on écrit donc d'abord le signe relationnel, puis les écritures qui sont mises en relation par ce signe. Pour suivre la coutume et rendre l'interprétation des formules plus aisée, on écrira le plus souvent $x \in y$, $u = v$ et $(x = y) \Rightarrow (u \in v)$ plutôt que $\in$xy, $=$uv et $\Rightarrow =$xy$\in$uv, en utilisant les parenthèses de façon non codifiée ; on fera cette transcription de manière que l'on puisse toujours se ramener à l'écriture formalisée telle qu'elle est décrite ci-dessus. Dans ces transcriptions, nous conviendrons que $=$ et $\in$ ont la priorité sur les connecteurs, et nous écrirons donc, par exemple, $x=y \Rightarrow x\in y$ au lieu de $(x=y) \Rightarrow (x\in y)$ ; cette économie de parenthèses devrait rendre les formules moins difficiles à lire.

On peut remarquer que chaque signe (ou catégorie de signes) exige une règle indiquant comment l'employer. Pour alléger l'exposé, nous avons introduit les seuls signes qui seront effectivement utilisés ici ; on pourrait cependant vouloir faire intervenir d'autres signes relationnels primitifs que $=$ et $\in$, qui mettraient en relation deux ou plusieurs termes, ou même des signes qui indiqueraient une relation où serait impliqué un seul terme : par exemple $\subset$ et $\leqslant$ mettent en relation deux termes ; la relation en $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ « $\alpha$ est entre $\beta$ et $\gamma$ » est un exemple de relation ternaire ; dans certaines théories, on introduit le signe **m** qui, appliqué au terme T, signifie que T est un ensemble (le mot allemand « Menge », qui commence par la lettre m, signifie « ensemble »). On pourrait de même imaginer des signes substantifiques qui, à l'aide d'un ou plusieurs termes, permettent de construire un nouveau terme ; ainsi $\mathcal{P}$, appliqué à un terme T, désignera l'ensemble des sous-ensembles de T ; chacun des signes $+$ et $( , )$ permet de construire un nouveau terme à l'aide de deux autres (somme et couple).

On constate sans peine que si l'on met bout à bout deux constructions formatives, on obtient une nouvelle construction formative ; on en déduit aisément, suivant les méthodes utilisées pour les critères de formation de la logique des propositions, les critères suivants.

Critères de formation **CF1** :

1) Si $\alpha$ est une lettre, $\alpha$ est un terme ;
2) Si U et V sont des termes, $=$UV est une relation ;
3) Si U et V sont des termes, $\in$UV est une relation ;
4) Si A est une relation, $\neg$A est une relation ;
5) Si A et B sont des relations, $\vee$ AB est une relation ;
6) Si A est une relation et $\alpha$ est une lettre, $\iota_\alpha$(A) est un terme ;
7) Si A est une relation et $\alpha$ est une lettre, $(\forall\alpha)$(A) est une relation.

On peut également établir le critère suivant, qui utilise les résultats de la logique des propositions.

Critère de formation **CF2** :

Si $\underline{P}$ est une proposition (de la logique des propositions) où figurent les lettres $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, ..., $\underline{\lambda}$, et si A, B, ..., L sont des relations (de la logique quantifiée), l'expression obtenue en substituant A à $\underline{\alpha}$, B à $\underline{\beta}$, ..., L à $\underline{\lambda}$ et $\neg$ à $\underline{\neg}$, $\vee$ à $\underline{\vee}$ dans $\underline{P}$ est une relation.

En effet, soit $\underline{F}$ une construction formative où figure $\underline{P}$ ; montrons de proche en proche que la propriété est vraie pour toutes les propositions figurant dans $\underline{F}$.

$$F \begin{cases} \underline{P}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{P}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{P}_n \end{cases}$$

Notons $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, ..., $\underline{\lambda}$ les lettres qui figurent dans les propositions $\underline{P}_1$, ..., $\underline{P}_n$, et désignons par $P_i^*$ l'expression obtenue en substituant A à $\underline{\alpha}$, ..., L à $\underline{\lambda}$ dans $\underline{P}_i$ ; supposons que si $\underline{P}_j$ précède $\underline{P}_i$ dans $\underline{F}$, $P_j^*$ soit une relation. Si $\underline{P}_i$ est une lettre, $P_i^*$ est la relation associée à cette lettre ; si $\underline{P}_i$ est $\underline{\neg P}_j$, on sait par hypothèse que $P_i^*$ est une relation, et on voit facilement que $(\neg P_j)^*$ est identique à $\neg P_j^*$ ; donc $P_i^*$ est une relation ; on raisonne de même si $\underline{P}_i$ est $\underline{\vee P}_j \underline{P}_k$.

Critère de substitution **CS2** :

Si $\alpha$ est une lettre, T et U sont des termes et A est une relation, alors $(T|\alpha)A$ est une relation.

Les signes $\forall$ et $\iota$ font que ce critère est un peu délicat à établir. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous ne donnerons que le plan d'une démarche possible (on pourra se reporter à [13] pour plus de détails). On montre d'abord qu'étant données une construction formative $F$ et une lettre $\beta$ ne figurant dans aucun des assemblages de $F$, si l'on substitue $\beta$ à $\alpha$ dans chacun de ces assemblages, on obtient une nouvelle construction formative. On montre ensuite que si $\gamma$ est une lettre, figurant éventuellement dans certains des assemblages de $F$, si l'on substitue $\gamma$ à $\alpha$ dans $F$ on obtient une séquence d'assemblages bien formés.

Pour terminer, en substituant un terme T à la lettre $\alpha$, on utilise les résultats précédents en se ramenant au cas où les lettres de T ne figurent pas dans les assemblages de $F$.

On appelle **schéma d'axiome** une règle indiquant comment écrire une relation à l'aide de relations et de termes ; cette règle doit être telle que si T est un terme et $\tau$ est une lettre, et si A est une relation obtenue par application de la règle, $(T|\tau)A$ soit une relation que l'on puisse obtenir en appliquant cette même règle.

Exemple de schéma d'axiome (noté $\Sigma$**6**).

$\Sigma$**6** : Si A et B sont des relations et si $\alpha$ est une lettre qui ne figure pas dans A, écrire

$$(\forall\alpha)(A \vee B) \Rightarrow (A \vee (\forall\alpha)(B)).$$

Vérifions que $\Sigma 6$ est bien un schéma d'axiomes.

Les critères de formation **CF1** permettent d'affirmer que si A et B sont des relations et $\alpha$ est une lettre, $(\forall\alpha)(A \vee B) \Rightarrow (A \vee (\forall\alpha)(B))$ est bien une relation. Soient T un terme et $\tau$ une lettre ; pour un assemblage M, désignons $(T|\tau)M$ par $M^*$. Le critère **CS1** permet d'écrire que $[(\forall\alpha)(A \vee B) \Rightarrow (A \vee (\forall\alpha)(B))]^*$ est identique à $[(\forall\alpha)(A \vee B)]^* \Rightarrow [A \vee (\forall\alpha)(B)]^*$ et que $[A \vee (\forall\alpha)(B)]^*$ est identique à $A^* \vee [(\forall\alpha)(B)]^*$. Soit $\beta$ une lettre distincte de $\tau$ et des lettres qui figurent dans A, B et T : pour un assemblage M, désignons $(\beta|\alpha)M$ par $M^\circ$. D'après le critère **CS1**, l'assemblage $(\forall\alpha)(A \vee B)$ est identique à $(\forall\beta)((A \vee B)^\circ)$, qui est lui-même identique à $(\forall\beta)(A^\circ \vee B^\circ)$ et donc à $(\forall\beta)(A \vee B^\circ)$ puisque $\alpha$ ne figure pas dans A ; de même, $(\forall\alpha)(B)$ est identique à $(\forall\beta)(B^\circ)$. Puisque $\beta$ est distinct de $\tau$ et des lettres qui figurent dans T, l'assemblage $[(\forall\beta)(A \vee B^\circ)]^*$ est identique à $(\forall\beta)((A \vee B^\circ)^*)$, qui est lui-même identique à $(\forall\beta)(A^* \vee B^{\circ *})$, et $[(\forall\beta)(B^\circ)]^*$ est identique à $(\forall\beta)(B^{\circ *})$. Finalement,

$$[(\forall\alpha)(A \vee B) \Rightarrow (A \vee (\forall\alpha)(B))]^*$$

est identique à $(\forall\beta)(A^* \vee B^{\circ *}) \Rightarrow (A^* \vee (\forall\beta)(B^{\circ *}))$ ; puisque $A^*$ et $B^{\circ *}$ sont des relations d'après le critère **CS2** et que $\beta$ est une lettre qui ne figure pas dans $A^*$, ce dernier assemblage peut être écrit en appliquant la règle $\Sigma 6$ : cette règle est bien un schéma d'axiome.

De façon parallèle à ce qui s'est fait pour la logique des propositions, on appelle **théorie** la juxtaposition d'une liste (finie et éventuellement vide) de schémas d'axiome et d'une liste (finie et éventuellement vide) de relations. Ces derniers sont les **axiomes explicites** de la théorie, et les lettres qui figurent dans un axiome explicite de la théorie sont les **constantes** de la théorie ; enfin, les relations écrites par application d'un schéma d'axiome de la théorie sont les **axiomes implicites** de la théorie.

Soit $T$ une théorie ; une **démonstration** de $T$ est une séquence (finie) de relations ayant la propriété suivante : si R est une relation de cette séquence notée $D$, alors R vérifie l'une des conditions suivantes :

i) R est un axiome, implicite ou explicite, de $T$ ;

ii) R est précédée dans $D$ par des relations, soient S et T, telles que T soit $S \Rightarrow R$ ;

iii) R est précédée dans $D$ par une relation, soit S, et il y a une lettre qui *n'est pas une constante de* $T$, soit $\alpha$, telles que R soit $(\forall\alpha)(S)$.

Une relation qui figure dans une démonstration de $T$ est un **théorème** de $T$ ; en particulier, les axiomes de $T$ sont des théorèmes de $T$.

La règle ii) est la **règle de détachement.** La règle iii) est la **règle de généralisation** ; cette dernière s'interprète raisonnablement : si $\alpha$ est une lettre *qui n'est pas une constante* et $A(\alpha)$ une relation, affirmer $A(\alpha)$ consiste à dire que pour la lettre $\alpha$ quelconque la propriété $A(\alpha)$ est vérifiée ; $(\forall\alpha)A(\alpha)$ signifiera que $A(\alpha)$ est vrai quel que soit l'objet qu'on désigne par $\alpha$ : ces deux expressions ont des sens très voisins comme on peut s'en persuader en comparant les expressions « l'âne est un quadrupède » et « tous les ânes sont des quadrupèdes ». Par contre, on voit bien que si $\alpha$ est une constante, le fait que $A(\alpha)$ soit vrai n'indique pas si $A(\beta)$ est vrai ou non.

On voit aisément que si l'on met bout à bout deux démonstrations d'une théorie $T$, on obtient une nouvelle démonstration de $T$, ce qui permet d'établir le critère suivant.

Critère de détachement :

Si R et S sont des relations telles que S et $S \Rightarrow R$ soient des théorèmes de la théorie $T$, alors R est un théorème de $T$.

On obtient aussi facilement le critère suivant.

Critère de généralisation :

Si R est un théorème de la théorie $T$ et si $\alpha$ est une lettre *qui n'est pas une constante de* $T$, alors $(\forall\alpha)(R)$ est un théorème de $T$.

Critère de substitution **CS3** :

Si R est un théorème de la théorie $T$, si $\alpha$ est une lettre *qui n'est pas une constante de* $T$ et si T est un terme, alors $(T|\alpha)R$ est également un théorème de $T$.

On pourra se reporter à l'annexe (page 76) pour trouver une preuve de ce critère, qui est un peu long à établir.

Soient $T$ et $T'$ deux théories ; si tous les schémas d'axiome de $T$ sont des schémas d'axiome de $T'$ et si tous les axiomes explicites de $T$ sont des axiomes explicites de $T'$, on dit que $T'$ est une **extension** de $T$. On peut vérifier que si $T'$ est une extension de $T$, tous les théorèmes de $T$ sont des théorèmes de $T'$ (cf. l'annexe, page 76).

On dit qu'une théorie $T$ est **contradictoire** s'il existe une relation R qui est un théorème de $T$ et telle que $\neg R$ soit aussi un théorème de $T$. S'il existe au moins une relation qui n'est pas théorème d'une théorie $T$, on dit que $T$ est **consistante.** Si une théorie n'est pas consistante, elle est évidemment contradictoire.

Soit $T$ une extension de la théorie sans axiome explicite qui admet pour unique schéma d'axiome le schéma $\Sigma$**2** suivant.

$\Sigma$**2** : si A et B sont des relations, écrire $A \Rightarrow (A \vee B)$.

En utilisant une technique semblable à celle utilisée en logique des propositions, on montre que si $T$ est contradictoire elle n'est pas consistante, c'est-à-dire que toutes les relations sont des théorèmes de $T$.

## II – THEORIES QUANTIFIEES.

▷ Notons $T_0$ la théorie sans axiome explicite ayant les quatre schémas suivants (les schémas sont indiqués de façon abrégée ; on ne vérifiera pas ici, ni dans la suite, que les règles indiquées sont bien des schémas).

**Σ1** : $(A \vee A) \Rightarrow A$ (A : relation)

**Σ2** : $A \Rightarrow (A \vee B)$ (A, B : relations)

**Σ3** : $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$ (A, B : relations)

**Σ4** : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))$ (A, B, C : relations)

Critère **C1** :

Si $\underline{P}$ est un théorème de la théorie *C* de la logique des propositions où figurent les lettres $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, ..., $\underline{\lambda}$, si A, B, ..., L sont des relations, la relation obtenue en substituant A à $\underline{\alpha}$, ..., L à $\underline{\lambda}$ et $\neg$ à $\underline{\neg}$, $\vee$ à $\underline{\vee}$ dans $\underline{P}$ est un théorème de $T_0$.

On obtient aisément ce résultat, en procédant de façon analogue à ce qui a été fait pour établir le critère **CF2**.

Dans la suite, on utilisera souvent ce critère sans le citer.

▷ Notons $T_1$ la théorie sans axiome explicite, ayant les six schémas d'axiome suivants.

**Σ1 ; Σ2 ; Σ3 ; Σ4 ;**

**Σ5** : $(\forall\alpha)(R) \Rightarrow (T|\alpha)R$ (R : relation ; T : terme ; $\alpha$ : lettre)

**Σ6** : $(\forall\alpha)(R \vee S) \Rightarrow (R \vee (\forall\alpha)(S))$ (R, S : relations ; $\alpha$ : lettre *ne figurant pas dans* R)

On peut interpréter le schéma **Σ5** de la façon suivante : si R est vérifiée pour tout objet, elle l'est en particulier pour l'objet T.

Dans tout le paragraphe II, on désigne par *T* une extension de $T_1$ ; une telle théorie sera dite **théorie quantifiée.**

Soient R une relation et $\alpha$ une lettre ; puisqu'une lettre est un terme et que $(\alpha|\alpha)R$ est identique à R, d'après **Σ5** la relation $(\forall\alpha)R \Rightarrow R$ est un théorème de *T* ; donc si $(\forall\alpha)(R)$ est un théorème de *T*, alors R est un théorème de *T* ; et d'après le critère de généralisation, si R est un théorème et si $\alpha$ n'est pas une constante, $(\forall\alpha)(R)$ est un théorème. Il est donc indifférent d'écrire, sous réserve que $\alpha$ ne soit pas une constante,

« $(\forall\alpha)(R)$ est un théorème »

ou

« R est un théorème »,

et on peut se dispenser très souvent d'écrire le quanteur $\forall$ ; c'est pour des raisons de commodité qu'on choisira de l'utiliser ou pas.

Ainsi il est indifférent d'écrire

« $(\forall\epsilon)(\forall x)(\forall y)((\epsilon\in \mathbb{R}_+^* \wedge x\in \mathbb{R} \wedge y\in \mathbb{R} \wedge |x-y|<\epsilon \Rightarrow |\sin x - \sin y|<\epsilon)$ »

ou

« $(\epsilon\in \mathbb{R}_+^* \wedge x\in \mathbb{R} \wedge y\in \mathbb{R} \wedge |x-y|<\epsilon) \Rightarrow |\sin x - \sin y|<\epsilon$ »

compte-tenu de la convention que toute formule écrite pour laquelle on n'a pas spécifié le contraire est vraie.

Mais il faut remarquer qu'il est incorrect d'écrire $R \Rightarrow (\forall\alpha)(R)$ si R est une relation quelconque, même si $\alpha$ est une lettre qui n'est pas une constante : si la relation $x = 2 \Rightarrow (\forall x)(x = 2)$ était un théorème, d'après le critère **CS3** il en serait de même de $(2|x)(x = 2 \Rightarrow (\forall x)(x = 2))$, c'est-à-dire de $2 = 2 \Rightarrow (\forall x)(x = 2)$, ce qui est manifestement faux.

Critère **C2** :

Soient R une relation, T un terme et $\alpha$ une lettre ; $(T|\alpha)R \Rightarrow (\exists\alpha)(R)$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet, d'après **Σ5**, la relation $(\forall\alpha)(\neg R) \Rightarrow (T|\alpha)(\neg R)$ est un théorème de $\mathcal{F}$ ; on en déduit que $\neg(T|\alpha)\neg R \Rightarrow \neg(\forall\alpha)(\neg R)$, et donc que $(T|\alpha)R \Rightarrow (\exists\alpha)(R)$ est un théorème de $\mathcal{T}$ ; en effet, $\neg(T|\alpha)\neg R$ est identique à $\neg\neg(T|\alpha)R$ et $(T|\alpha)R \Rightarrow \neg\neg(T|\alpha)R$ est un théorème.

Le critère **C1** ne nous dispense pas d'établir les deux critères suivants (on s'apercevra en particulier que les arguments avancés ne s'appliqueraient pas à la théorie $\mathcal{T}_0$).

Critère **C3** (hypothèse auxiliaire) :

Soit A une relation ; notons $\mathcal{T}'$ l'extension de $\mathcal{T}$ admettant les mêmes schémas d'axiome que $\mathcal{T}$ et dont les axiomes explicites sont ceux de $\mathcal{T}$ augmentés de A. Si B est un théorème de $\mathcal{T}'$, alors $A \Rightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet, supposons que B soit un théorème de $\mathcal{T}'$ ; il figure dans une démonstration $\mathcal{D}'$ $(B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_p)$ de $\mathcal{T}'$. Montrons de proche en proche que si $B_i$ figure dans $\mathcal{D}'$, alors $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B_i$. Supposons donc que si $B_j$ précède $B_i$ dans $\mathcal{D}'$, alors $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow B_j$ :

— Si $B_i$ est un axiome de $\mathcal{T}'$, ou si $B_i$ est précédé dans $\mathcal{D}'$ par des relations $B_j$ et $B_k$ telles que $B_k$ soit identique à $B_j \Rightarrow B_i$, on utilise des arguments analogues à ceux qui ont été développés en logique des propositions (critère **C11** de la théorie $\mathcal{C}$, page 28).

— Supposons que $B_i$ soit précédé par $B_j$ telle que $B_i$ soit $(\forall\alpha)(B_j)$, où $\alpha$ n'est pas une constante de $T'$ ; en particulier, puisque A est un axiome de $T'$, la lettre $\alpha$ ne figure ni dans A ni dans $\neg$A ; puisque $T$ est une extension de $T_1$, d'après $\Sigma$**5**,

$$T \vdash (\forall\alpha)(\neg A \vee B_j) \Rightarrow (\neg A \vee (\forall\alpha)(B_j)),$$

c'est-à-dire

$$T \vdash (\forall\alpha)(A \Rightarrow B_j) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall\alpha)(B_j)) \;;$$

par hypothèse de récurrence, $T \vdash A \Rightarrow B_j$ ; les constantes de $T$ sont des constantes de $T'$, donc $\alpha$ n'est pas une constante de $T$, et $T \vdash (\forall\alpha)(A \Rightarrow B_j)$. On en déduit par le critère de détachement que

$$T \vdash A \Rightarrow (\forall\alpha)(B_j),$$

c'est-à-dire que

$$T \vdash A \Rightarrow B_i.$$

Critère **C4** (démonstration par l'absurde) :

Soit A une relation ; notons $T'$ l'extension de $T$ admettant les mêmes schémas d'axiome que $T$, et dont les axiomes explicites sont ceux de $T$ augmentés de $\neg$A. Si $T'$ est une théorie contradictoire, A est un théorème de $T$.

On utilise ici des arguments analogues à ceux qui ont été développés en logique des propositions (critère **C12** de la théorie $C$, page 29).

Critère **C5** :

Si A est une relation et $\alpha$ une lettre qui *ne figure pas* dans A, alors $A \Rightarrow (\forall\alpha)(A)$ et $(\exists\alpha)(A) \Rightarrow A$ sont des théorèmes de $T$.

Puisque $T$ est une extension de $T_1$, il suffit de montrer que la propriété est vraie dans $T_1$. Puisque $\alpha$ ne figure pas dans A, et donc dans $\neg$A,

$$T_1 \vdash (\forall\alpha)(\neg A \vee A) \Rightarrow (\neg A \vee (\forall\alpha)(A)).$$

Par utilisation du critère **C1**, la relation $\neg A \vee A$ est un théorème de $T_1$ ; puisque $T_1$ n'a pas de constante, $\alpha$ n'est pas une constante de $T_1$ et $(\forall\alpha)(\neg A \vee A)$ est un théorème de $T_1$, (critère de généralisation) ; on en déduit $\neg A \vee (\forall\alpha)(A)$, c'est-à-dire $A \Rightarrow (\forall\alpha)(A)$ par le critère de détachement.

Puisque $\alpha$ ne figure pas dans $\neg$A, la relation $\neg A \Rightarrow (\forall\alpha)(\neg A)$ est un théorème de $T_1$, dont on déduit $\neg(\forall\alpha)(\neg A) \Rightarrow A$, c'est-à-dire $(\exists\alpha)(A) \Rightarrow A$.

Critère **C6** :

Soient R et S des relations et $\alpha$ une lettre *qui n'est pas une constante de T*. Si $R \Rightarrow S$ est un théorème de $T$, alors $(\forall\alpha) R \Rightarrow (\forall\alpha) S$ et $(\exists\alpha) R \Rightarrow (\exists\alpha) S$ sont des théorèmes de $T$.

En effet, puisque $\alpha$ est un terme, $(\forall\alpha)(R) \Rightarrow R$ est un théorème de $T$ d'après **Σ5**, et puisque $R \Rightarrow S$ est un théorème de $T$, il en est de même de $(\forall\alpha)(R) \Rightarrow S$. Notons $T'$ l'extension de $T$ ayant les mêmes schémas que $T$ et admettant comme axiomes explicites les axiomes explicites de $T$ augmentés de $(\forall\alpha)(R)$ ; puisque $T'$ est une extension de $T$, la relation $(\forall\alpha)(R) \Rightarrow S$ est un théorème de $T'$, donc S est un théorème de $T'$ ; la lettre $\alpha$ n'est pas une constante de $T$ et ne figure pas dans $(\forall\alpha)(R)$, elle n'est donc pas une constante de $T'$, et par le critère de généralisation, $(\forall\alpha)(S)$ est un théorème de $T'$ ; suivant le critère de l'hypothèse auxiliaire, $(\forall\alpha)(R) \Rightarrow (\forall\alpha)(S)$ est un théorème de $T$.

De même, puisque $\neg S \Rightarrow \neg R$ est un théorème de $T$ d'après l'hypothèse, $(\forall\alpha)(\neg S) \Rightarrow (\forall\alpha)(\neg R)$ est un théorème dont on déduit $\neg(\forall\alpha)(\neg R) \Rightarrow \neg(\forall\alpha)(\neg S)$, c'est-à-dire $(\exists\alpha)(R) \Rightarrow (\exists\alpha)(S)$.

Critère **C7** :

Soient R une relation et $\alpha$ une lettre : $(\forall\alpha)(\neg R) \Longleftrightarrow \neg(\exists\alpha)(R)$ est un théorème de $T$ ; si $\alpha$ n'est pas une constante de $T$, la relation $(\exists\alpha)(\neg R) \Longleftrightarrow \neg(\forall\alpha)(R)$ est un théorème de $T$.

La première équivalence est une transposition de la définition du quanteur $\exists$ : en effet $(\exists\alpha)(R)$ est l'abréviation de $\neg(\forall\alpha)(\neg R)$.

Puisque $\neg\neg R \Longleftrightarrow R$ est un théorème de $T$ et que $\alpha$ n'est pas une constante de $T$, la relation $(\forall\alpha)(\neg\neg R) \Longleftrightarrow (\forall\alpha)(R)$ est un théorème de $T$ d'après le critère **C6**, ainsi que $\neg(\forall\alpha)(\neg\neg R) \Longleftrightarrow \neg(\forall\alpha)(R)$, c'est-à-dire $(\exists\alpha)(\neg R) \Longleftrightarrow \neg(\forall\alpha)(R)$.

Critère **C8** :

Soient R une relation et $\alpha$ et $\beta$ des lettres ; les relations suivantes sont des théorèmes de $T$ :

$(\forall\alpha)(\forall\beta)(R) \Longleftrightarrow (\forall\beta)(\forall\alpha)(R)$ ;
$(\exists\alpha)(\exists\beta)(R) \Longleftrightarrow (\exists\beta)(\exists\alpha)(R)$ ;
$(\exists\alpha)(\forall\beta)(R) \Rightarrow (\forall\beta)(\exists\alpha) R$.

Il suffit d'établir ces théorèmes dans $T_1$, dont $T$ est une extension.

Puisque $\beta$ est un terme et $\alpha$ n'est pas une constante de $T_1$, les relations $(\forall\beta)(R) \Rightarrow R$ et $(\forall\alpha)(\forall\beta)(R) \Rightarrow (\forall\alpha)(R)$ sont des théorèmes de $T_1$. Notons $T_1'$ la théorie ayant les mêmes schémas que $T_1$ et admettant $(\forall\alpha)(\forall\beta) R$ pour unique axiome explicite ; suivant le critère de détachement, $(\forall\alpha)(R)$ est un théorème de $T_1'$, et puisque $\beta$ n'est pas une constante de $T_1'$ ($\beta$ ne figure pas dans $(\forall\alpha)(\forall\beta)(R)$), le critère de généralisation assure que $(\forall\beta)(\forall\alpha)(R)$ est un théorème de $T_1'$ ; d'après le critère de l'hypothèse auxiliaire, $(\forall\alpha)(\forall\beta)(R) \Rightarrow (\forall\beta)(\forall\alpha)(R)$ est un théorème de $T_1$ ; il en est évidemment de même pour $(\forall\beta)(\forall\alpha)(R) \Rightarrow (\forall\alpha)(\forall\beta)(R)$.

Puisque $\neg R$ est une relation, $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\neg R) \Longleftrightarrow (\forall\beta)(\forall\alpha)(\neg R)$ est un théorème de $T_1$, de même que $\neg(\forall\alpha)(\forall\beta)(\neg R) \Longleftrightarrow \neg(\forall\beta)(\forall\alpha)(\neg R)$ ; si A est une relation, $A \Longleftrightarrow \neg\neg A$ est un théorème de $T_1$, et puisque $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas des constantes de $T_1$, les relations $(\forall\alpha)(A) \Longleftrightarrow (\forall\alpha)(\neg\neg A)$ et $(\forall\beta)(A) \Longleftrightarrow (\forall\beta)(\neg\neg A)$ sont des théorèmes de $T_1$ ; donc il en est de même pour

$$\neg(\forall\alpha)(\forall\beta)(\neg R) \Longleftrightarrow \neg(\forall\alpha)(\neg\neg(\forall\beta)(\neg R))$$

et
$$\neg(\forall\beta)(\forall\alpha)(\neg R) \Longleftrightarrow \neg(\forall\beta)(\neg\neg(\forall\alpha)(\neg R)) \;;$$

donc
$$\neg(\forall\alpha)(\neg\neg(\forall\beta)(\neg R)) \Longleftrightarrow \neg(\forall\beta)(\neg\neg(\forall\alpha)(\neg R)),$$

c'est-à-dire
$$(\exists\alpha)(\exists\beta)(R) \Longleftrightarrow (\exists\beta)(\exists\alpha)(R),$$

est un théorème de $T_1$.

Puisque $(\forall\beta)(R) \Rightarrow R$ est un théorème de $T_1$ et que $\alpha$ n'est pas une constante de $T_1$ la relation $(\exists\alpha)(\forall\beta)(R) \Rightarrow (\exists\alpha)(R)$ est un théorème de $T_1$ ; notons $T_1''$ l'extension de $T_1$ ayant les mêmes schémas que $T_1$ et ayant pour unique axiome explicite $(\exists\alpha)(\forall\beta)(R)$ ; suivant le critère de détachement, $(\exists\alpha)(R)$ est un théorème de $T_1''$ et par le critère de généralisation ($\beta$ n'est pas une constante de $T_1''$), il en est de même pour $(\forall\beta)(\exists\alpha)(R)$ ; donc $(\exists\alpha)(\forall\beta)(R) \Rightarrow (\forall\beta)(\exists\alpha)(R)$ est un théorème de $T_1$.

Remarquons qu'en général la relation $(\forall\beta)(\exists\alpha)(R) \Rightarrow (\exists\alpha)(\forall\beta)(R)$ n'est pas un théorème de $T$.

Critère **C9** :

Si R et S sont des relations et si $\alpha$ est une lettre, les relations suivantes sont des théorèmes de $T$ :

$(\forall\alpha)(R \wedge S) \Longleftrightarrow ((\forall\alpha)(R) \wedge (\forall\alpha)(S))$ ;
$(\exists\alpha)(R \vee S) \Longleftrightarrow ((\exists\alpha)(R) \vee (\exists\alpha)(S))$ ;
$((\forall\alpha)(R) \vee (\forall\alpha)(S)) \Rightarrow (\forall\alpha)(R \vee S)$ ;
$(\exists\alpha)(R \wedge S) \Rightarrow ((\exists\alpha)(R) \wedge (\exists\alpha)(S))$.

Rappelons que $\wedge$ se lit « et », et établissons par exemple le premier résultat, qu'il suffit de montrer dans la théorie $T_1$ qui n'a pas de constante. Notons $T_1'$ la théorie obtenue en adjoignant $(\forall\alpha)(R \wedge S)$ à $T_1$ ; puisque $(\forall\alpha)(R \wedge S) \Rightarrow (R \wedge S)$ est un théorème de $T_1'$, il en est de même pour $R \wedge S$, et donc de R et de S ; la lettre $\alpha$ n'étant pas une constante de $T_1'$, les relations $(\forall\alpha)(R)$ et $(\forall\alpha)(S)$ sont des théorèmes de $T_1'$, et donc $(\forall\alpha)(R) \wedge (\forall\alpha)(S)$ également ; il s'ensuit que

$$(\forall\alpha)(R \wedge S) \Rightarrow ((\forall\alpha)(R) \wedge (\forall\alpha)(S))$$

est un théorème de $T_1$. Soit maintenant $T_1''$ la théorie obtenue en adjoignant $(\forall\alpha)(R) \wedge (\forall\alpha)(S)$ à $T_1$ ; on montre successivement que $(\forall\alpha)(R)$, $(\forall\alpha)(S)$, R, S, $R \wedge S$ et $(\forall\alpha)(R \wedge S)$ sont des théorèmes de $T_1''$, d'où l'on conclut que

$$((\forall\alpha)(R) \wedge (\forall\alpha)(S)) \Rightarrow (\forall\alpha)(R \wedge S)$$

est un théorème de $T_1$.

Remarquons encore qu'en général $(\forall\alpha)(R \vee S) \Rightarrow (\forall\alpha)(R) \vee (\forall\alpha)(S))$ et $((\exists\alpha)(R) \wedge (\exists\alpha)(S)) \Rightarrow (\exists\alpha)(R \wedge S)$ ne sont pas des théorèmes de $T$ ; c'est toutefois le cas si $\alpha$ ne figure pas dans R (ou dans S), éventualité dans laquelle $R \Longleftrightarrow (\forall\alpha)(R)$ et $(\exists\alpha)(R) \Longleftrightarrow R$ sont des théorèmes de $T$ d'après le critère **C5.**

Critère **C10** (constante auxiliaire) :

Soient R et S des relations, $\alpha$ une lettre qui n'est pas une constante de $T$ et qui ne figure pas dans S. Si $(\exists\alpha)(R)$ est un théorème de $T$ et si S est un théorème de la théorie obtenue en adjoignant l'axiome explicite R à $T$, alors S est un théorème de $T$.

D'après le critère **C3** de l'hypothèse auxiliaire, $R \Rightarrow S$ est un théorème de $T$. Puisque $\alpha$ n'est pas une constante de $T$, d'après le critère **C6**, $(\exists\alpha)(R) \Rightarrow (\exists\alpha)(S)$ est également un théorème de $T$ ; il en est de même pour $(\exists\alpha)(S)$ par le critère de détachement ; enfin, puisque $\alpha$ ne figure pas dans S, la relation $(\exists\alpha)(S) \Rightarrow S$, et donc S, sont des théorèmes de $T$.

Ce critère est utilisé lorsqu'un objet sert d'auxiliaire dans un raisonnement, mais ne figure pas dans la conclusion. Par exemple, pour étudier un ensemble E de polynômes réels à une variable, on pourra être amené à dire « soit p un polynôme de E non nul de degré minimum » : c'est l'hypothèse auxiliaire ; si avec cette hypothèse on peut démontrer un résultat où p ne figure pas, par exemple « E est un idéal », sous réserve qu'il existe bien au moins un polynôme non nul de degré minimum dans E, « E est un idéal » est bien un théorème.

La phrase utilisée pour introduire p (soit p un polynôme...) ne doit pas faire croire qu'on a désigné par p un objet particulier de la théorie dans laquelle on travaille : la lettre p est une lettre qui n'est pas une constante de cette théorie ; donc, en particulier p n'est pas l'abréviation d'un terme ne contenant que des constantes de la théorie ; c'est seulement le signe $\iota$ qui permettra d'introduire de nouveaux objets.

On est parfois amené à considérer une relation intervenant souvent dans un exposé ; soit A une telle relation. Pour abréger le discours, on écrira alors, si R est une relation

$$(\underset{A}{\forall}\alpha)(R) \quad \text{au lieu de} \quad (\forall\alpha)(A(\alpha) \Rightarrow R)$$

et

$$(\underset{A}{\exists}\alpha)(R) \quad \text{au lieu de} \quad (\exists\alpha)(A(\alpha) \wedge R).$$

On peut remarquer que $(\exists\alpha)(A \wedge R)$ est identique à $\neg(\forall\alpha)(\neg(A \wedge R))$ ; comme $\neg(A \wedge R) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg R))$ est un théorème de $T_1$ et que $\alpha$ n'est pas une constante de $T_1$, d'après le critère **C6** la relation $(\forall\alpha)(\neg(A \wedge R)) \Longleftrightarrow (\forall\alpha)((\neg A) \vee (\neg R))$ est un théorème de $T_1$, de même que $\neg(\forall\alpha)((\neg A) \vee (\neg R)) \Longleftrightarrow \neg(\forall\alpha)(A \Rightarrow \neg R)$ ; autrement dit dans $T_1$, et dans $T$ qui est une extension de $T_1$,

$$(\exists_{A}\alpha)(R) \Longleftrightarrow \neg(\forall_{A}\alpha)(\neg R)$$

est un théorème, ce qu'on peut rapprocher de la définition de $(\exists\alpha)(R)$.

On rencontre souvent ce type d'abréviation sous une forme telle

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, |y|<x \Rightarrow |\sin y|<\frac{1}{2}$$

qui doit donc se comprendre comme

$$(\exists x)(x\in \mathbb{R}_+^* \wedge (\forall y)(y \in \mathbb{R} \Rightarrow (|y|<x \Rightarrow |\sin y|<\frac{1}{2}))).$$

Avec le même sens, on trouve plus rarement une écriture telle que

$$\exists_{\mathbb{R}_+^*} x, \forall_{\mathbb{R}} y, |y|<x \Rightarrow |\sin y|<\frac{1}{2}.$$

Malgré l'inconvénient de ses deux étages, cette dernière écriture semble préférable car elle s'harmonise mieux avec la lecture usuelle des formules, et elle est plus facile à analyser d'un coup d'œil.

Lorsqu'on veut transformer de telles relations, c'est-à-dire le plus souvent écrire des relations équivalentes ou leur négation, il est naturellement prudent de se rappeler le sens de l'abréviation utilisée.

## III – THEORIES QUANTIFIEES EGALITAIRES.

Soient $\alpha$ et $\beta$ des lettres et $R(\alpha)$ une relation ; on abrègera la relation

$$(\forall\alpha)(\forall\beta)((R(\alpha)\wedge R(\beta)) \Rightarrow (\alpha=\beta))$$

▷ par « R est **univoque** en $\alpha$ », ce qui peut s'interpréter par : il existe au plus un objet $\Delta$ tel que $R(\Delta)$, ou : si $\Delta$ et $\Delta'$ vérifient R, alors $\Delta=\Delta'$. On abrègera la relation ($R(\alpha)$ ▷ est univoque en $\alpha$) $\wedge$ $(\exists\alpha)(R(\alpha))$ par « R est **fonctionnelle** en $\alpha$ », ce qui s'interpréte par : il existe un et un seul objet qui réalise R. Remarquons que dans cette interprétation, nous comprenons l'égalité $\Delta=\Delta'$ comme l'indication que $\Delta$ et $\Delta'$ sont deux écritures désignant un même objet.

▷ Notons $T_2$ l'extension de $T_1$ sans axiome explicite admettant, outre les schémas de $T_1$, les trois schémas suivants.

$\Sigma$**7** : $T=T$ (T : terme)

$\Sigma$**8** : $U=V \Rightarrow (R(U) \Longleftrightarrow R(V))$ (U, V : termes ; R : relation)

$\Sigma$**9** : ($R(\alpha)$ est fonctionnelle en $\alpha$) $\Rightarrow R(\iota_\alpha(R))$ ($\alpha$ : lettre ; $R(\alpha)$ : relation).

Le schéma $\Sigma$**7** indique que tout terme est égal à lui-même ; le schéma $\Sigma$**8** signifie que deux termes égaux sont interchangeables dans n'importe quelle relation ; enfin le schéma $\Sigma$**9** permet, lorsqu'on sait qu'un objet unique vérifie la relation R, de donner un nom à cet objet : $\iota_\alpha(\mathrm{R})$.

Dans tout le paragraphe III, on désigne par $\mathcal{T}$ une extension de $\mathcal{T}_2$ ; une telle théorie est dite **théorie quantifiée égalitaire.**

Critère **C11** :

Si U, V et W sont des termes,

$$\mathrm{U}=\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{V}=\mathrm{U}$$

et

$$(\mathrm{U}=\mathrm{V} \wedge \mathrm{V}=\mathrm{W}) \Rightarrow \mathrm{U}=\mathrm{W}$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

Notons R la relation y=x ; suivant $\Sigma$**8,**

$$x=y \Rightarrow ((x|y)\mathrm{R} \Longleftrightarrow (y|y)\mathrm{R}),$$

c'est-à-dire

$$x=y \Rightarrow (x=x \Longleftrightarrow y=x)$$

est un théorème de $\mathcal{T}_2$ ; si $\mathcal{T}_2'$ est la théorie obtenue en adjoignant x=y à $\mathcal{T}_2$, alors $x=x \Longleftrightarrow y=x$ est un théorème de $\mathcal{T}_2'$, de même que x=x, grâce à $\Sigma$**7**, et donc y=x.

Donc $x=y \Rightarrow y=x$ est un théorème de $\mathcal{T}_2$ ; comme x et y sont des lettres qui ne sont pas des constantes de $\mathcal{T}_2$ (théorie sans constante), on conclut grâce au critère **CS3** que $\mathrm{U}=\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{V}=\mathrm{U}$ est un théorème de $\mathcal{T}_2$, et donc de $\mathcal{T}$.

Notons maintenant S la relation x=z, qui est une relation en z ; d'après $\Sigma$**8,** la relation $y=z \Rightarrow (x=y \Longleftrightarrow x=z)$ est un théorème de $\mathcal{T}_2$. Puisque $y=z \Rightarrow (x=y \Longleftrightarrow x=z)$ est un théorème de $\mathcal{T}_2$, il en est de même pour $y=z \Rightarrow (x=y \Rightarrow x=z)$, relation équivalente dans $\mathcal{T}_2$ à $(x=y \wedge y=z) \Rightarrow x=z$, ce qui permet de conclure.

Critère **C12** :

Soient $\alpha$ une lettre, U, V et T($\alpha$) des termes ;

$$\mathrm{U}=\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{T}(\mathrm{U})=\mathrm{T}(\mathrm{V})$$

est un théorème de $\mathcal{T}$.

Notons R la relation T(x)=T(y) ; la relation $x=y \Rightarrow (\mathrm{T}(x)=\mathrm{T}(y) \Longleftrightarrow \mathrm{T}(y)=\mathrm{T}(y))$ est un théorème de $\mathcal{T}_2$ ; dans la théorie $\mathcal{T}_2'$ obtenue en adjoignant x=y à $\mathcal{T}_2$, la relation $\mathrm{T}(x)=\mathrm{T}(y) \Longleftrightarrow \mathrm{T}(y)=\mathrm{T}(y)$ est un théorème, et donc aussi T(x)=T(y) d'après $\Sigma$**7.**

Il en résulte que $x=y \Rightarrow T(x)=T(y)$ est un théorème de $\mathcal{T}_2$ ; puisque x et y ne sont pas des constantes de $\mathcal{T}_2$, la relation $U=V \Rightarrow T(U)=T(V)$ est un théorème de $\mathcal{T}_2$, et donc de $\mathcal{T}$.

Ce critère, et le schéma **Σ8**, permettent de dire que deux termes égaux sont absolument interchangeables ; ce qui est conforme à l'interprétation que l'on a faite en disant que si l'on écrit U=V, cela signifie que U et V sont deux désignations du même objet.

Nous avons étudié les critères les plus couramment utilisés des théories quantifiées égalitaires. Pour aboutir à des résultats analogues, on peut naturellement choisir des voies différentes de celle qui a été suivie ici : on peut d'abord choisir d'autres connecteurs primitifs que $\neg$ et $\vee$, et remplacer en conséquence les schémas **Σ1**, **Σ2**, **Σ3** et **Σ4** ; on pourra se rapporter pour des indications sur ce sujet au chapitre 2 (logique des propositions). Indépendamment du choix des schémas de la logique des propositions, on peut décider de prendre $\exists$ seul, ou $\exists$ et $\forall$ comme quanteurs primitifs, avec un système de schémas convenable. Enfin, on omet souvent le symbole $\iota$, mais cette omission interdit de rendre compte d'une opération que l'on effectue fréquemment dans la pratique : donner un nom à un objet qui est connu par une propriété qu'il est le seul à avoir.

L'écriture des quanteurs, ou quantificateurs, n'est pas universelle ; au lieu de $(\forall x)$, on pourra rencontrer par exemple $(x)$, $\forall x$, et au lieu de $(\exists x)$, on pourra trouver $(Ex)$, $\exists x$ ; l'écriture $\exists! x$ ou $E!x$ est parfois utilisée pour indiquer « il existe un x unique tel que... ».

Dans les textes de mathématiques courants, on rencontre fréquemment des écritures telles que

$$\exists x \ \forall y \ y \notin x$$

ou

$$\exists x, \ \forall y, \ y \notin x$$

plutôt que

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) \ ;$$

elles ont l'avantage d'être plus lisibles et ne prêtent en général pas à confusion.

Par contre le signe = est universel. Pour les auteurs qui l'utilisent, il y a des variations mineures sur le signe $\iota$.

Pour les différentes écritures des connecteurs, on pourra se reporter au chapitre 2.

On doit à Hilbert un système différent de celui qui a été développé ici, qu'on trouvera dans Bourbaki [13] : les signes $\exists$, $\forall$ et $\iota$ ne sont pas pris comme signes primitifs ; à leur place on utilise le signe $\eta$ (dans [13], c'est le signe $\tau$ qui est utilisé), qui se comporte comme $\iota$ dans les constructions formatives. Si $\alpha$ est une lettre et R une relation, $\eta_\alpha(R)$ est un terme qu'on interprète en disant que si la propriété R est vérifiée par au moins un objet, alors elle l'est par $\eta_\alpha(R)$.Autrement dit, dès qu'on peut affirmer qu'un objet au moins vérifie R, on est capable de privilégier l'un de ces objets, et de lui donner un nom : dans ces conditions, $(\exists\alpha)(R(\alpha))$ sera l'abréviation de $R(\eta_\alpha(R))$. Cette présentation est d'une certaine façon économique : dès qu'il y a une notion d'isomorphisme (bijection pour la cardinalité, isomorphisme de structure algébrique, homéomorphisme, isométrie,...), on est capable de nommer à l'aide de $\eta$ un représentant privilégié d'une classe d'objets tous isomorphes, *même si cette classe n'est pas un ensemble* : ainsi le cardinal d'un ensemble X, dans ce système, est $\eta_Y(R(X,Y))$ où $R(X,Y)$ est la relation « il existe une bijection de X vers Y » ; les schémas d'axiome sont évidemment tels que si X et Y sont en bijection, les cardinaux de X et Y sont égaux. Malheureusement, cette économie se paie par une démarche qui s'écarte beaucoup du raisonnement intuitif habituel.

## IV – ETUDE DE $T_2$.

Nous allons montrer que $T_2$ n'est pas contradictoire, en utilisant le fait que la théorie $C$ de la logique des propositions n'est pas contradictoire.

Soit $F$ une construction formative (de la logique quantifiée). Nous allons associer à $F$ une construction formative $\underline{F}$ de la logique des propositions (éventuellement vide) : en face des termes de $F$, nous n'écrivons rien ; en face des relations $A_i$ de $F$, nous écrivons les propositions $\underline{A}_i$ de $\underline{F}$ en suivant les règles suivantes :

si $A_i$ commence par $=$, nous écrivons $\underline{a}$ ;

si $A_i$ commence par $\in$, nous écrivons $\underline{b}$ ;

si $A_i$ est $\vee A_j A_k$, où $A_j$ et $A_k$ précèdent $A_i$ dans $F$, nous écrivons $\underline{\vee}\, \underline{A}_j \underline{A}_k$ ;

si $A_i$ est $\neg A_j$, où $A_j$ précède $A_i$ dans $F$, nous écrivons $\underline{\neg} \underline{A}_j$ ;

si $A_i$ est $(\forall\alpha)(A_j)$, où $A_j$ précède $A_i$ dans $F$ et $\alpha$ est une lettre, nous écrivons $\underline{A}_j$.

Exemple :

$$F\left\{\begin{array}{lcl} x & \text{———} & \\ y & \text{———} & \\ \in yx & \text{———} & \underline{b} \\ \neg\in yx & \text{———} & \underline{\neg b} \\ \forall\neg\in\square x & \text{———} & \underline{\neg b} \\ \iota\forall\neg\in\square\square & \text{———} & \\ =x\iota\forall\neg\in\square\square & \text{———} & \underline{a} \\ \vee\in yx=x\iota\forall\neg\in\square\square & \text{———} & \underline{\vee\, b\, a} \end{array}\right\}\underline{F}$$

Nous avons donc un procédé qui permet de transformer chaque relation en une proposition (il faudrait encore montrer que si une relation A figure dans deux constructions formatives $F$ et $F'$, sa transformée $\underline{A}$ dans $\underline{F}$ et sa transformée $\underline{A}'$ dans $\underline{F}'$ sont identiques ; c'est plus fastidieux que difficile, et nous ne le ferons pas ici).

On montre ensuite que si T est un terme, $\alpha$ une lettre et R une relation, $\underline{(T|\alpha)R}$ est identique à $\underline{R}$. On procède pour cela par étapes successives : soient $F$ une construction formative, $\lambda$ et $\mu$ des lettres, $\mu$ ne figurant dans aucun des assemblages de $F$ ; si $F'$ est la séquence obtenue en remplaçant $\lambda$ par $\mu$ dans chacun des assemblages de $F$, on constate de proche en proche que $F'$ est une construction formative et que $\underline{F}'$ est identique à $\underline{F}$. On constate ensuite que si $\nu$ est une lettre (figurant éventuellement dans l'assemblage R), $\underline{(\nu|\lambda)R}$ est identique à $\underline{R}$ ; dans les assemblages de $F$, on remplace alors $\alpha$ et les lettres $\lambda$, $\mu$, ..., $\omega$, qui figurent dans T par des lettres $\alpha'$, $\lambda'$, $\mu'$, ..., $\omega'$, ne figurant ni dans T ni dans les assemblages de $F$, puis l'on substitue T à $\alpha'$ dans ces nouveaux assemblages construisant ainsi une nouvelle séquence $F^*$ ; on constate encore, de proche en proche, que $\underline{F}^*$ est identique à $\underline{F}$. Pour terminer, il ne reste plus qu'à tenir compte du fait que $(\lambda|\lambda')\ldots(\omega|\omega')(T|\alpha')(\alpha'|\alpha)(\lambda'|\lambda)\ldots(\omega'|\omega)R$ est identique à $(T|\alpha)R$.

Notons alors $A$ la théorie de la logique des propositions admettant **S1, S2, S3** et **S4** comme schémas d'axiome et $\underline{a}$ comme unique axiome explicite. Puisque $\underline{a}$ est une proposition qui n'est pas une contradiction, $A$ n'est pas contradictoire (cf. le chapitre 2).

Soit R un axiome implicite de $T_2$. Si R provient de **Σ1, Σ2, Σ3** ou **Σ4**, alors $\underline{R}$ est produit par **S1, S2, S3** ou **S4**. Si R provient de **Σ5**, alors R est de la forme $(\forall\alpha)(A) \Rightarrow (T|\alpha)A$ où A est une relation, $\alpha$ une lettre et T un terme ; d'après ce qui précéède $\underline{R}$ s'écrit alors $\underline{A} \Rightarrow \underline{A}$, qui est un théorème de $C$, et donc de $A$ qui est une extension de $C$. Si R provient de **Σ6**, alors R est de la forme $(\forall\alpha)(A\vee B) \Rightarrow (A\vee(\forall\alpha)B)$, où A et B sont des relations et $\alpha$ est une lettre, et $\underline{R}$ s'écrit $(\underline{A}\vee\underline{B}) \Rightarrow (\underline{A}\vee\underline{B})$, qui est un théorème de $C$, et donc de $A$. Si R provient de $\Sigma$**7**, il est de la forme T=T, et $\underline{R}$ est $\underline{a}$, qui est un axiome de $A$. Si R provient de $\Sigma$**8**, il est de la forme $(U=V) \Rightarrow (A(U) \Longleftrightarrow A(V))$, U et V étant des termes et A une relation ; $\underline{R}$ s'écrit dans ce cas $\underline{a} \,\underline{\Rightarrow}\, (\underline{A} \,\underline{\Longleftrightarrow}\, \underline{A})$, qui est un théorème de $C$ puisque $\underline{A} \,\underline{\Longleftrightarrow}\, \underline{A}$ est un théorème de $C$. Examinons enfin le cas où R provient de $\Sigma$**9** : dans ce cas, R s'écrit alors (A est fonctionnelle en $\alpha$) $\Rightarrow A(\iota_\alpha(A))$ ; « A est fonctionnelle en $\alpha$ » est l'abréviation de

$$(\exists\alpha)(A) \wedge (\forall\beta)(\forall\gamma)(A(\beta)=A(\gamma) \Rightarrow \beta=\gamma)$$

soit encore

$$\neg(\forall\alpha)(\neg A) \wedge (\forall\beta)(\forall\gamma)(A(\beta)=A(\gamma) \Rightarrow \beta=\gamma) \ ;$$

donc $\underline{R}$ est $(\underline{\neg}\,\underline{\neg}\,\underline{A} \,\underline{\wedge}\, (\underline{a} \,\underline{\Rightarrow}\, \underline{a})) \,\underline{\Rightarrow}\, \underline{A}$ qui est un théorème de $C$ : en effet, $\underline{\neg}\,\underline{\neg}\,\underline{A} \,\underline{\Rightarrow}\, \underline{A}$ est un théorème de $C$.

Donc, si R est un axiome de $T_2$, $\underline{R}$ est un théorème de $A$ ; on en déduit aisément que si R est un théorème de $T_2$, $\underline{R}$ est un théorème de $A$. Supposons alors que R et $\neg$R soient des théorèmes de $T_2$ : on en déduit que $\underline{R}$ et $\underline{\neg}\,\underline{R}$ sont des théorèmes de $A$, et donc que $A$ est contradictoire. Comme $A$ n'est pas contradictoire, il en résulte que $T_2$ n'est pas contradictoire.

On peut montrer par ailleurs que les schémas d'axiome de $T_2$ sont indépendants, nous ne le ferons pas ici. D'autre part, d'une certaine manière, $T_2$ est complète, en un sens que nous allons préciser.

Soit $\Xi$ une collection d'objets ; supposons par exemple que $\Xi$ comprenne trois objets, que nous appellerons $\xi$, $\eta$ et $\zeta$. Considérons par ailleurs la collection des deux symboles 0 et 1, que nous noterons $\{0, 1\}$. Une **fonction logique** à une place sur $\Xi$ associe à chacun des signes $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ un et un seul des symboles 0 et 1 ; une telle fonction sera par exemple symbolisée par le tableau suivant,

| $\xi$ | $\eta$ | $\zeta$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |

ce qui signifie qu'elle associe 0 à $\xi$, 1 à $\eta$ et 0 à $\zeta$. Il y a $2^3$ fonctions logiques à une place sur $\Xi$ ; une fonction logique à deux places sur $\Xi$ associe à chacune des suites de deux signes pris parmi $\xi$, $\eta$ et $\zeta$, éventuellement avec répétition, l'un des symboles 0 et 1. Par exemple, une telle fonction peut être symbolisée ainsi.

| $\xi, \xi$ | $\xi, \eta$ | $\xi, \zeta$ | $\eta, \xi$ | $\eta, \eta$ | $\eta, \zeta$ | $\zeta, \xi$ | $\zeta, \eta$ | $\zeta, \zeta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Pour chaque naturel n, on peut définir de façon analogue les fonctions logiques à n places.

On associe au signe = la fonction logique à deux places données en exemple ci-dessus (elle associe 1 aux suites dont les deux lettres sont identiques, 0 aux autres), et au signe $\in$ une fonction logique à deux places L tout à fait arbitraire. Donnons un exemple pour montrer comment, le choix de L étant fait, on peut associer une fonction logique à n places à toute relation où figure n lettres et *où ne figure pas le signe* $\iota$, et comment on peut attribuer l'un des symboles 0 et 1 aux relations closes où ne figure pas le signe $\iota$ ; on appellera fonction logique à 0 place cette attribution d'un des symboles 0 ou 1 à une relation close.

Commençons par choisir arbitrairement L que nous associons à $\in$.

L :

| $\xi, \xi$ | $\xi, \eta$ | $\xi, \zeta$ | $\eta, \xi$ | $\eta, \eta$ | $\eta, \zeta$ | $\zeta, \xi$ | $\zeta, \eta$ | $\zeta, \zeta$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $y \in x$ |

On en déduit alors la fonction logique associée à $\notin$.

| $\xi, \xi$ | $\xi, \eta$ | $\xi, \zeta$ | $\eta, \xi$ | $\eta, \eta$ | $\eta, \zeta$ | $\zeta, \xi$ | $\zeta, \eta$ | $\zeta, \zeta$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | $y \notin x$ |

Puis on associe à $(\forall y)(y \notin x)$ la fonction logique à une place suivante.

| $\xi$ | $\eta$ | $\zeta$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $(\forall y)(y \notin x)$ |

On remarque, pour fixer le signe associé à $\xi$, que dans la ligne associée à $y \notin x$, il y a au moins une case correspondant à une séquence dont la deuxième lettre est $\xi$ où se trouve 0 (ici : $(\zeta,\xi) \to 0$) ; on remplit les deux autres cases de façon analogue.

Par contre, le tableau correspondant à $(\forall x)(y \notin x)$ est le suivant.

| $\xi$ | $\eta$ | $\zeta$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |

En effet, dans le tableau associé à $y \notin x$, toutes les cases correspondant à une séquence dont la première lettre est $\eta$ contiennent 1.

Le tableau correspondant à $\neg(\forall y)(y \notin x)$ s'écrit sans peine.

| $\xi$ | $\eta$ | $\zeta$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

On en déduit qu'on associe à $(\forall x)(\neg(\forall y)(y \notin x))$ le symbole 1 et à $\neg(\forall x)(\neg(\forall y)(y \notin x))$, c'est-à-dire à $(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$ le symbole 0 pour le choix initial que l'on fait pour L. On trouvera facilement une fonction logique à deux places L' associée à $\in$ telle que le symbole associé à cette même relation soit 1.

Une relation **valide** pour la collection $\Xi$ est une relation close telle que quel que soit le choix fait pour L, la fonction logique à 0 place qui lui est associé lui fasse correspondre 1. Ainsi $(\exists x(\forall y)(y \notin x)$ n'est pas valide pour $\Xi$. On constate, avec un peu de patience, que $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)((x \neq y \wedge u \neq x \wedge u \neq y) \Rightarrow u = z)$ est valide dans $\Xi$.

L'opération que nous venons de décrire consiste à interpréter les relations dans $\Xi$, en attribuant à chaque lettre l'un des objets de $\Xi$, en indiquant que chaque objet est égal à lui-même (l'interprétation de $\in$ étant laissée libre) et en indiquant que $(\forall x)(A(x))$ n'est vraie (dans $\Xi$) que si A(x) est vraie quand on remplace x par n'importe quel objet de la collection $\Xi$ ; l'interprétation de $\neg A$ et $A \vee B$ se fait comme au chapitre II : la relation $\neg A$ est vraie si et seulement si A ne l'est pas, $A \vee B$ est vraie si l'une au moins des deux relations A et B est vraie.

On dit qu'une relation (où ne figure pas le signe $\iota$) est **valide**, si elle est valide pour *toute* collection finie ou infinie ; on peut montrer qu'une relation est valide si et seulement si elle est une relation close qui est un théorème de $T_2$ où ne figure pas $\iota$. Cette méthode, la plus couramment employée par les logiciens, est la **théorie des modèles** ou **théorie sémantique** (alors que celle que nous avons suivie est une **théorie déductive,** ou **théorie syntaxique**) ; elle consiste à définir les relations, comme nous l'avons fait ici, puis à étudier les relations valides. On trouvera une bonne description de cette démarche dans Kleene [17].

Indiquons pour terminer, quelques directions différentes de celle que nous avons explorée. On peut d'abord chercher à quantifier une théorie différente de la théorie $C$ : c'est ainsi qu'il existe des théories modales quantifiées, ou des théories intuitionnistes quantifiées (on se reportera au chapitre 2). La **théorie des types** se propose de généraliser la quantification : au lieu de s'occuper uniquement des variables d'individu comme on l'a fait ici (quel que soit l'objet x, la relation x=x est vraie), on introduit des variables de relations, en formalisant des expressions telles que : « quelle que soit la relation X, l'implication $X \Rightarrow X$ est vraie », puis des variables de relation de relations, etc... D'une certaine manière, la théorie des types n'est pas plus riche que la **logique du premier ordre** qui est celle où les seules variables sont des variables d'individu et où les quanteurs ne portent pas sur les relations. On doit à Russel (cf. [29]) l'introduction de la théorie des types, qui n'est pas utilisée du tout en mathématiques.

## V – UNE THEORIE DES ENSEMBLES.

Pour terminer, indiquons comment construire une théorie des ensembles comme extension de $T_2$. Cette théorie, qui est assez proche de l'usage naïf des ensembles, n'est évidemment pas la seule possible. Elle considère qu'il y a une seule sorte d'objets, les **ensembles.** Pour rendre le discours plus intelligible, on sera d'ailleurs amené à remplacer dans certains cas le mot « ensemble » par d'autres, tels que « élément » ou « collection » suivant le rôle que l'on fait jouer à un ensemble.

Suivant un usage déjà signalé, les mots « terme » et « ensemble » ne sont toutefois pas synonymes. Un terme est un assemblage vérifiant certaines conditions ; on confond seulement des graphismes semblables, en disant par exemple que

$$\iota = \square a \quad \text{et} \quad \iota = \square a$$

sont identiques, ou sont un même terme ; autrement dit, pratiquement on décide qu'on est capable de reconnaître si un graphisme est analogue à un graphisme donné, ou non, et on appelle terme indifférent la classe concrète de tous les graphismes identiques à un graphisme donné, ou un seul élément de cette classe ; ce qui précède vaut d'ailleurs pour tous les assemblages. Mais si U et V désignent des termes tels que $=$UV soit un théorème de la théorie étudiée, on confondra les termes U et V en disant que c'est le même ensemble, ou deux écritures désignant le même ensemble.

Décider si deux graphismes sont identiques dépend de la perception qu'on a des forme ; juger si deux termes désignent le même ensemble dépend en outre du raisonnement ; dans les deux cas il n'est d'ailleurs pas sûr qu'on soit toujours en mesure de trancher.

Dans une autre théorie, on distingue, parmi les objets qu'on appelle « classes », les ensembles proprement dits, et les classes qui ne sont pas des ensembles ; il y aura alors, par exemple, une classe de tous les ensembles (mais il n'y a pas de classe de toutes les classes). Cette théorie, et la théorie que nous allons décrire, sont en fait profondément équivalentes sous réserve d'un choix d'axiomes convenable : tout théorème de la première où n'interviennent que des ensembles est un théorème de la seconde, et tout théorème de la seconde est un théorème de la première.

La **théorie de Zermelo-Fraenkel** est une extension sans constante de $T_2$ obtenue en lui adjoignant un schéma d'axiome, **Σ10**, et quatre axiomes sans constante **A1, A2, A3** et **A4.**

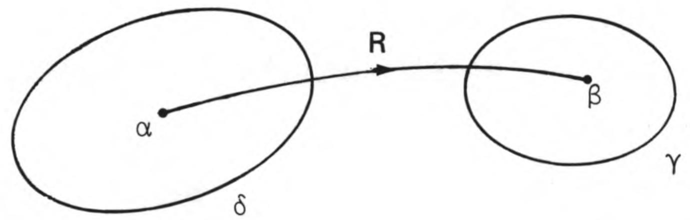
**Σ10** : « $R(\alpha, \beta)$ est univoque en $\beta$ »

$$\Rightarrow (\forall\delta)(\exists\gamma)(\forall\beta)(\beta\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in\delta \wedge R(\alpha,\beta)))$$

($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ : lettres distinctes, $\gamma$ et $\delta$ ne figurant pas dans R ; R : relation).

Ce schéma peut s'interpréter ainsi : si R fait correspondre à chaque $\alpha$ au plus un $\beta$, et si $\delta$ est un ensemble, alors il existe un ensemble $\gamma$, qui est unique comme on le verra plus loin, et qui contient exactement les éléments $\beta$ correspondant par

R aux éléments $\alpha$ qui sont dans $\delta$ ; il peut se faire d'ailleurs qu'à certains $\alpha$ qui sont dans $\delta$, R ne fasse correspondre aucun $\beta$.




Ce schéma s'appelle **schéma de substitution.**

Si $\gamma$ est une lettre et si U et V sont des termes, on abrégera la relation
▷ $(\forall\gamma)(\gamma\in U \Rightarrow \gamma\in V)$ par $U \subset V$ : on dit que U est **inclus** dans V.

**A1** : $(\forall x)(\forall y)((x\subset y \wedge y\subset x) \Longleftrightarrow x=y)$.

Cet **axiome,** dit **d'extensionnalité,** indique que deux ensembles sont égaux si chacun d'eux est inclus dans l'autre.

**A2** : $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Longleftrightarrow (\exists t)(t\in x \wedge z\in t))$.

Cet **axiome,** dit **de l'union,** indique qu'étant donné un ensemble x d'ensembles, il existe un ensemble qui contient les éléments qui appartiennent à au moins un ensemble qui appartient à x.

**A3** : $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Longleftrightarrow z\subset x)$.

C'est l'**axiome de l'ensemble des parties,** qui affirme qu'il y a un ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné.

**A4 : axiome de l'infini.**

Nous donnerons plus loin l'énoncé de cet axiome, qui, comme les trois premiers, ne contient pas de lettre. Etablissons d'abord quelques critères et théorèmes.

Critère **C13** :

Soient $\alpha$ et $\beta$ des lettres distinctes, $R(\alpha,\beta)$ une relation et E un ensemble (un terme) ; si $R(\alpha,\beta)$ est univoque en $\beta$, il existe un ensemble unique F tel que $\beta\in F$ si et seulement si $(\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta))$.

Soient $\gamma$ et $\delta$ des lettres distinctes, distinctes de $\alpha$ et $\beta$ et ne figurant pas dans R. Grâce à $\Sigma$**10**, on peut affirmer que $(\forall\delta)(\exists\gamma)(\forall\beta)(\beta\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in\delta \wedge R(\alpha,\beta)))$ est un théorème ; puisque E est un terme (un ensemble), la relation suivante est aussi un théorème :

$$(\exists\gamma)(\forall\beta)(\beta\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta)))\ ;$$

par ailleurs la relation $(\forall\beta)(\beta\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta)))$ est univoque en $\gamma$ : en effet, soit $\gamma'$ une lettre et supposons que

$$(\forall\beta)(\beta\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta))) \wedge (\forall\beta)(\beta\in\gamma' \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta)))\ ;$$

on en déduit successivement :

$\beta\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta))$,
$\beta\in\gamma' \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta))$,
$\beta\in\gamma \Longleftrightarrow \beta\in\gamma'$,
$\beta\in\gamma \Rightarrow \beta\in\gamma'$,
$(\forall\beta)(\beta\in\gamma \Rightarrow \beta\in\gamma')$, c'est-à-dire $\gamma\subset\gamma'$ et, de même,
$\gamma'\subset\gamma$ ; donc
$\gamma\subset\gamma' \wedge \gamma'\subset\gamma$, et
$\gamma=\gamma'$ d'après l'axiome **A1**.

Abrégons le terme $\iota_\gamma((\forall\beta)(\beta\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta))))$ par F : d'après le schéma **Σ9**, la relation $(\forall\beta)(\beta\in F \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta)))$ est un théorème.

▷ On note habituellement F par $\{\beta : (\exists\alpha)(\alpha\in E \wedge R(\alpha,\beta))\}$ ; on peut remarquer que cette écriture est l'abréviation d'un terme où ne figurent ni $\alpha$, ni $\beta$.

Critère **C14** :

Soient $\alpha$ une lettre, $A(\alpha)$ une relation et E un terme (ensemble). Il existe un ensemble unique F tel que $\alpha\in F$ si et seulement si $\alpha\in E$ et $A(\alpha)$.

Soit $\beta$ une lettre distincte de $\alpha$, ne figurant pas dans A ; notons $R(\alpha,\beta)$ la relation $\alpha=\beta \wedge A(\alpha)$ : cette relation est univoque en $\beta$ d'après le critère **C11**.

Notons F le terme $\{\alpha : (\exists\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha))\}$, c'est-à-dire le terme

$$\iota_\gamma((\forall\alpha)(\alpha\in\gamma \Longleftrightarrow (\exists\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha)))).$$

Vérifions que $(\exists\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha)) \Longleftrightarrow (\alpha\in E \wedge A(\alpha))$ est un théorème. Supposons d'abord que $(\exists\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha))$ soit un théorème. Soit $\beta$ tel que $\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha)$ (critère de la constante auxiliaire) ; alors $\beta\in E$ et $\alpha=\beta$, d'où l'on déduit, en utilisant **Σ8**, que $\alpha\in E$ : sous l'hypothèse faite, $\alpha\in E \wedge A(\alpha)$ est un théorème. Inversement, supposons que $\alpha\in E \wedge A(\alpha)$ soit un théorème ; puisque $(\alpha|\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha))$ est un théorème, il en résulte que $(\exists\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha))$ est un théorème d'après le critère **C2**.

D'après ce qui précède,

$$\alpha\in F \Longleftrightarrow (\exists\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha)) \text{ et } (\alpha\in E \wedge A(\alpha)) \Longleftrightarrow (\exists\beta)(\beta\in E \wedge \alpha=\beta \wedge A(\alpha))$$

sont des théorèmes ; il en est donc de même pour $\alpha \in F \Longleftrightarrow (\alpha \in E \wedge A(\alpha))$, et donc pour $(\forall \alpha)(\alpha \in F \Longleftrightarrow (\alpha \in E \wedge A(\alpha)))$. L'unicité de F provient de **A1**.

▷ On a l'habitude d'écrire $F = \{\alpha : \alpha \in E$ et $A(\alpha)\}$, ou encore $F = \{\alpha \in E : A(\alpha)\}$. Ces écritures abrègent un assemblage où ne figure pas $\alpha$.

Soit $\alpha$ une lettre et $B(\alpha)$ une relation ; s'il existe un ensemble unique E tel que $\alpha \in E$ si et seulement si $B(\alpha)$ est vérifié, on désigne cet ensemble par $\{\alpha : B(\alpha)\}$. Les critères **14** et **15** donnent des exemples d'utilisation de cette écriture, qu'on lit : « l'ensemble des $\alpha$ tels que $B(\alpha)$ ».

Soit $U(\beta_1, ..., \beta_n)$ un terme et $R(\beta_1, ..., \beta_n)$ une relation où figurent les lettres $\beta_1, ..., \beta_n$. L'écriture

$$\{\alpha : (\exists \beta_1) ... (\exists \beta_n)(\alpha = U(\beta_1, ..., \beta_n) \text{ et } R(\beta_1, ..., \beta_n)\}$$

peut paraître excessivement lourde, et difficile à lire. Dans ce cas, on pourra se permettre de lui substituer, par abus,

$$\{U(\beta_1, ..., \beta_n) : R(\beta_1, ..., \beta_n)\},$$

ce qu'on lira : l'ensemble des $U(\beta_1, ..., \beta_n)$ tels que $R(\beta_1, ..., \beta_n)$.

L'usage de cet abus est une affaire d'opportunité. On lit plus aisément

$$\{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 1\},$$

que
$$\{U : (\exists x)(\exists y)(U = (x,y) \quad \text{et} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 1)\} ;$$

dès qu'on a bien compris l'usage de cet abus, on voit clairement que

$$\{ab : a \in 2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in 3\mathbb{Z}\} = 6\mathbb{Z}.$$

Mais si f est une application de E dans F, il paraît regrettable d'écrire que par définition $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble $\{f(x) : x \in E\}$ puisque justement, ici, il s'agit de faire comprendre que $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des éléments y pour lesquels il existe x dans E vérifiant $U = f(x)$ ; autrement dit, que $\operatorname{Im} f = \{y : (\exists x)(x \in E \text{ et } y = f(x))\}$.

Quand on souhaite avoir une écriture contenant moins de symboles, on peut aussi écrire :

« l'ensemble des éléments de la forme $U(\beta_1, ..., \beta_n)$ tels que $R(\beta_1, ..., \beta_n)$ » ou toute autre expression synonyme. On écrira, par exemple,

« l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 1$ »,

ou encore

« l'ensemble des entiers de la forme ab où $a \in 2\mathbb{Z}$ et $b \in 3\mathbb{Z}$ ».

Critère **C15** :

Soit X un ensemble. Il existe un ensemble unique, soit Y, tel que, si $\alpha$ et $\beta$ sont des lettres qui ne figurent pas dans l'écriture de X, alors $(\forall\beta)(\beta\in Y \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in X \wedge \beta\in\alpha))$.

L'existence provient de **A2**, et l'unicité de l'application de **A1** ; cet ensemble, $\iota_Y((\forall\beta)(\beta\in Y \Longleftrightarrow (\exists\alpha)(\alpha\in X \wedge \beta\in\alpha)))$, s'abrège en $\bigcup\limits_{\alpha\in X}\alpha$ et se lit « **union** des $\alpha$ appartenant à X » ; comme cette écriture abrège un terme où ne figure pas $\alpha$, on peut évidemment remplacer la lettre $\alpha$ par n'importe quelle lettre ne figurant pas dans X. On peut remarquer qu'il est totalement inutile, lorsqu'on a un ensemble d'ensembles dont on veut écrire l'union, que ces ensembles soient indexés pour se ramener a l'écriture $\bigcup\limits_{i\in I}\alpha_i$. Remarquons que si $\alpha : I \longrightarrow X$, et si Y est l'image de I par $\alpha$, par définition $\bigcup\limits_{i\in I}\alpha_i = \bigcup\limits_{\beta\in Y}\beta$ . (C'est par anticipation que nous parlons maintenant d'une application ; ici, on dira que $\alpha$ est une famille d'ensembles indexée sur I). Un peu plus loin, nous définirons l'écriture $\{A,B\}$; en général, on écrira plutôt $A\cup B$ que $\bigcup\limits_{\alpha\in\{A,B\}}\alpha$ .

Critère **C16** :

Soient X un ensemble et $\alpha$ une lettre ne figurant pas dans l'écriture de X. Il existe un ensemble unique, soit Y, tel que $\alpha\in Y$ si et seulement si $\alpha\subset X$.

Ce critère se prouve par application de **A3** (pour l'existence) et **A1** (pour l'unicité). On note $\mathscr{P}(X)$ et on lit « **ensemble des parties** de X » cet ensemble unique.

Théorème 1 :

$(\exists x)(\forall y)(y\notin x)$.

Appliquons le critère **C14** à la relation $x\neq x$ et au terme a ; soit $V_a$ tel que $(\forall x)(x\in V_a \Longleftrightarrow (x\in a \wedge x\neq x)$.
(Donc $V_a$ est l'abréviation de $\iota_y((\forall x)(x\in y \Longleftrightarrow (x\in a \wedge x\neq x)))$, où seule figure la lettre a).

Les relations suivantes sont des théorèmes.

| | |
|---|---|
| $x\in V_a \Rightarrow x\neq x$ | d'après ce qui précède et $\Sigma 9$ |
| $x=x \Rightarrow x\notin V_a$ | logique des propositions (d'après le théorème précédent) |
| $x=x$ | $\Sigma 7$ |
| $x\notin V_a$ | critère de détachement |
| $(\forall x)(x\notin V_a)$ | critère de généralisation |

Puisque $(V_a|x)(\forall y)(y\notin x))$ est un théorème, il en est de même pour $(\exists x(\forall y)(y\notin x)$.

L'axiome **A1** montre que $(\forall y)(y \notin x)$ est univoque en x ; on abrège alors ▷ $\iota_x((\forall y)(y \notin x))$, qui est un terme sans lettre, par $\phi$, qu'on lit « **ensemble vide** ». C'est l'unique ensemble qui ne contient pas d'élément.

On peut remarquer que $V_a = \phi$ (de même que $V_b = \phi$, etc...) ; le symbole $\phi$ est l'abréviation de $\iota\forall\neg\in\square\square$ ; un peu de patience permet de vérifier que $V_a$ est l'abréviation de

$$\iota\forall\neg\vee\neg\vee\neg\in\square\square\neg\vee\neg\in\square a\neg\neg=\square\square\neg\vee\neg\neg\vee\neg\in\square a\neg\neg=\square\square\in\square\square.$$

Voici deux termes, bien différents (en particulier l'un contient une lettre, et l'autre pas), qui sont cependant égaux ; avec la convention faite, on dira donc que $V_a$ est le même ensemble que $\phi$.

Théorème 2 :

$(\forall x)(x \neq \phi \Rightarrow (\exists y)(\forall z)(z \in y \Longleftrightarrow (\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t)))$.

Faisons l'hypothèse que $x \neq \phi$. Définissons y :

$$y = \{z : z \in \bigcup_{\alpha \in x} \alpha \wedge (\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t)\}.$$

Alors $z \in y \Rightarrow (\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t)$. Montrons que $(\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t) \Rightarrow z \in y$. Soit $t_0$ tel que $t_0 \in x$ (constante auxiliaire). Soit z tel que $(\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t)$ ; en particulier $t_0 \in x \Rightarrow z \in t_0$ et donc $z \in t_0$ ; nous savons que $t_0 \in x$, donc $t_0 \subset \bigcup_{\alpha \in x} \alpha$ et $z \in \bigcup_{\alpha \in x} \alpha$. Finalement si $(\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t)$ alors $z \in \bigcup_{\alpha \in x} \alpha$ et donc $z \in y$, ce qui achève la démonstration.

L'hypothèse que $x \neq \phi$ est essentielle, car la relation $(\forall t)(t \in \phi \Rightarrow z \in t)$ est vérifiée pour tout z ; aussi, sans la restriction que $x \neq \phi$, on aurait établi l'existence d'un ensemble de tous les ensembles, ce qui montrerait, en utilisant la méthode indiquée dans l'introduction, que la théorie de Zermolo-Fraenkel est contradictoire.

On montre à l'aide de **A1** que la relation $(\forall z)(z \in y \Longleftrightarrow (\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t))$ est ▷ univoque en y et on abrège le terme $\iota_y((\forall z)(z \in y \Longleftrightarrow (\forall t)(t \in x \Rightarrow z \in t)))$ par $\bigcap_{\alpha \in x} \alpha$ qu'on lit « **intersection** des $\alpha$ appartenant à x ». On ne sait dire quelque chose sur ce terme que si $x \neq \phi$.

Théorème 3 :

$(\forall x)(\forall y)(\exists t)(\forall z(z \in t \Longleftrightarrow (z = x \vee z = y))$.

On établit d'abord les deux relations suivantes :

$$u \in \mathcal{P}(\phi) \Longleftrightarrow u = \phi \ ;$$

$$u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) \Longleftrightarrow (u = \phi \vee u = \mathcal{P}(\phi)).$$

On constate que la relation en u et v

$$(u=\phi \wedge v=x) \vee (u=\mathcal{P}(\phi) \wedge v=y)$$

est univoque en v ; notons cette relation $R(u,v)$. D'après **Σ10**, la relation

$$(\exists t)(\forall z)(z\in t \Longleftrightarrow (\exists u)(u\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) \wedge R(u,v)))$$

est un théorème. On note $\{x,y\}$ l'unique ensemble associé à cette relation par le critère **C13** et il est bien tel que $(\forall z)(z\in\{x,y\} \Longleftrightarrow (z=x \vee z=y))$. Etant donnés des éléments X et Y, on dit que $\{X,Y\}$ est « la **paire** des éléments X et Y » si $X\neq Y$. Si l'on sait que $X=Y$, on écrit le plus souvent $\{X\}$ au lieu de $\{X,X\}$, et on dit que $\{X\}$ est « le **singleton** X ». Remarquons que $\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))=\{\phi,\mathcal{P}(\phi)\}=\{\phi,\{\phi\}\}$.

Théorème 4 :

$$(\forall x)(\forall y)(\forall x')(\forall y')(\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x'\},\{x',y'\}\} \Longleftrightarrow (x=x' \wedge y=y')).$$

Ce dernier théorème, aisé à établir, conduit à abréger $\{\{U\},\{U,V\}\}$ par $(U,V)$ ; on dit que $(U,V)$ est « le **couple** U, V ».

Théorème 5 :

Si $A(x,y,z)$ désigne la relation $(\exists u)(\exists v)(z=(u,v) \wedge u\in x \wedge v\in y)$ alors

$$(\forall x)(\forall y)(\exists t)(\forall z)(z\in t \Longleftrightarrow A(x,y,z)).$$

Le théorème 5 affirme qu'étant donnés des ensembles x et y, il existe un ensemble formé des couples (u, v) tels que $u\in x$ et $v\in y$. L'unicité de cet ensemble est évidente ; on le note $x\times y$ et on l'appelle « **produit cartésien** de x et y » (la démonstration repose sur l'application du critère **C14** à la relation $A(x,y,z)$ et à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x\cup y))$ : en effet, si z est tel que $A(x,y,z)$, alors $z\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(x\cup y))$).

Nous arrêterons ici l'étude des théorèmes et critères de la théorie de Zermelo-Fraenkel ; le produit cartésien permet de définir les applications , et les outils principaux de la théorie des ensembles sont en place : on abrégera par « g est le **graphe** d'une application de x vers y », la relation (qui ne contient que les lettres g, x et y) :

$$g\subset x\times y \wedge (\forall u)(u\in x \Rightarrow \text{« } (u,v)\in g \text{ est fonctionnelle en v »}).$$

On abrègera par « f est une **application** de x vers y » la relation (qui ne contient que les lettres f, x et y).

$$(\exists g)(f=(x,y,g) \wedge \text{« g est le graphe d'une application de x vers y »})$$

(on définit évidemment (x, y, g) comme ((x, y), g)). Il est clair que si f est une application de x vers y, il existe un graphe g unique d'une application de x vers y tel que $f=(x,y,g)$ : on dira que g est le graphe de f. On pourra définir facilement les applications injectives et surjectives.

On dira que x est **infini** s'il existe une application de x vers x qui est injective sans être surjective. Pour des raisons techniques (possibilité de construire une théorie des ordinaux), l'axiome **A4** s'écrit comme suit :

$$\mathbf{A4} : (\exists x)(\phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

La théorie des ordinaux permet de montrer que si x est tel que $\phi \in x$ et $(\forall y)(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)$, alors x est infini.

On pourra trouver dans Krivine [25] des réflexions sur la théorie de Zermelo-Fraenkel. Bien qu'il ait adopté une base logique différente de celle qui a été construite ici, on peut utiliser le chapitre 2 de Bourbaki [13] pour continuer à construire la théorie des ensembles usuelle.

Pour terminer, indiquons quelques résultats à propos de cette théorie (certains sont prouvés dans [25]).

Gödel a donné, en 1931, les deux résultats suivants (une preuve du second se trouve dans l'article de Ladrière, *limites de la formalisation* [26]) :

— Même si l'on utilise l'arithmétique usuelle de façon intuitive, il est impossible de prouver que la théorie de Zermelo-Fraenkel n'est pas contradictoire ; en fait ce résultat surprenant est valable pour toute théorie dans laquelle on pourra construire $\mathbb{N}$ et ses propriétés usuelles. D'une certaine manière, cela signifie qu'une telle théorie ne contient pas elle-même la preuve de sa consistance.

— Si la théorie de Zermelo-Fraenkel n'est pas contradictoire, il existe des relations closes (c'est-à-dire ne contenant aucune lettre) R telles que ni R, ni $\neg$R ne soit un théorème de cette théorie ; on donnera plus loin deux exemples de telles relations. Mais, bien plus, quels que soient les axiomes que l'on ajoute (en nombre fini) à cette théorie, l'une seulement des deux situations suivantes est possible :

1) la nouvelle théorie est contradictoire ;

2) il existe des relations closes R, telles que ni R ni $\neg$R ne soient des théorèmes de cette nouvelle théorie.

On peut se demander si l'axiome de l'infini est utile : il est relativement facile de montrer que si la théorie de Zermelo-Fraenkel est consistante, la théorie obtenue en remplaçant l'axiome **A4** par l'axiome **A4'** : « tout ensemble est fini » est également consistante. Mais on ne sait pas montrer que si la théorie obtenue en supprimant **A4** est consistante, alors il en est de même pour la théorie de Zermelo-Fraenkel et pour la théorie obtenue en substituant **A4'** à **A4** dans la théorie de Zermelo-Fraenkel.

**L'axiome du choix** a un grand nombre de présentations équivalentes ; voici l'une d'elle :

**A5** : quel que soit l'ensemble x d'ensembles non vides disjoints deux à deux, il existe un ensemble contenant exactement un élément de chacun des ensembles appartenant à x.

Gödel et Cohen (cf. [21]) ont montré que si la théorie de Zermelo-Fraenkel est consistante, la théorie obtenue en adjoignant **A5** et la théorie obtenue en adjoignant la négation de **A5** sont *toutes les deux* consistantes.

En général, on travaille dans la théorie de Zermelo-Fraenkel augmentée de **A5** ; c'est grâce à ce dernier axiome que l'on peut établir, entre autres, les théorèmes suivants :

— s'il existe une surjection de x vers y, il existe une injection de y vers x ; par contre, on démontre sans l'axiome du choix que s'il existe une injection de y non vide vers x, il existe une surjection de x vers y ;

— tout espace vectoriel a une base (au moins) ;

— dans un anneau unitaire, tout idéal propre bilatère est contenu dans un idéal propre maximal ;

— dans $\mathbb{R}^p$, à la suite de boules B de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$, on peut associer une suite de points x telle que $x_n \in B_n$ pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ (un axiome moins fort que **A5** permettrait d'établir ce dernier énoncé).

La relation **A5**, qui ne contient aucune lettre, est donc telle que ni elle-même ni sa négation ne peuvent être démontrées dans la théorie de Zermelo-Fraenkel, sous réserve que cette dernière ne soit pas contradictoire. Voici une autre relation, que l'on appelle **hypothèse généralisée du continu**, qui ne contient aucune lettre et telle que ni elle-même ni sa négation ne peuvent être démontrées dans la théorie de Zermelo-Fraenkel augmentée de **A5** (avec la même réserve).

**HC** : Soit x un ensemble infini ; il n'existe pas d'ensemble strictement plus puissant que x et strictement moins puissant que $\mathcal{P}(x)$.

On dit que y est plus puissant que x s'il existe une injection de x vers y ; s'il existe aussi une injection de y vers x, on peut montrer sans l'axiome du choix (théorème de Cantor-Bernstein) qu'il existe une bijection de x vers y et on dit alors que x et y ont même puissance, ou qu'ils sont équipotents ; sinon, on dit que x est strictement moins puissant que y. On a vu dans l'introduction que, quel que soit l'ensemble x, il est strictement moins puissant que $\mathcal{P}(x)$. Avant de connaître le résultat concernant l'énoncé **HC**, on pensait généralement (**hypothèse du continu**) qu'il n'existait pas d'ensemble strictement plus puissant que $\mathbb{N}$ et strictement moins puissant que $\mathbb{R}$ (on sait que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). L'énoncé de l'hypothèse du continu, généralisée ou pas, ne joue pratiquement aucun rôle dans les mathématiques classiques.

## VI – ANNEXE.

*Une preuve du* critère **CS3** *et du résultat concernant les extensions* (page 53).

Soit $T$ une théorie et soit $T'$ une extension de $T$ ; soit $D$ ($R_1$, ..., $R_n$) une démonstration de $T$. Nous allons établir successivement quatre propriétés.

1) Soient $\alpha$ et $\beta$ des lettres qui ne sont pas des constantes de $T$, la lettre $\beta$ ne figurant dans aucun des assemblages de $D$ ; sous ces hypothèses, $(\beta|\alpha)R_1$, ..., $(\beta|\alpha)R_n$ est une démonstration de $T$, qu'on notera $(\beta|\alpha)D$.

Pour établir ce résultat, on procède de proche en proche. Soit $R_i$ l'un des assemblages de $D$ ; l'hypothèse convenable étant faite pour les assemblages précédant $R_i$, on examine les cas suivants :

a) $R_i$ est un axiome implicite : puisque $\beta$ est une lettre, c'est un terme, et d'après la définition des schémas d'axiome, $(\beta|\alpha)R_i$ est également un axiome implicite.

b) $R_i$ est un axiome explicite : puisque $\alpha$ n'est pas une constante de $T$, la lettre $\alpha$ ne figure pas dans $R_i$, et $(\beta|\alpha)R_i$ est identique à $R_i$ ; donc $(\beta|\alpha)R_i$ est un axiome explicite de $T$.

c) $R_i$ est précédé de $R_j$ et $R_j \Rightarrow R_i$ ; donc $(\beta|\alpha)R_j$ et $(\beta|\alpha)(R_j \Rightarrow R_i)$ précèdent $(\beta|\alpha)R_i$ dans $(\beta|\alpha)D$ ; or $(\beta|\alpha)(R_j \Rightarrow R_i)$ est identique à $(\beta|\alpha)R_j \Rightarrow (\beta|\alpha)R_i$ d'après **CS1** : la règle du détachement a été appliquée pour écrire $(\beta|\alpha)R_i$ dans $(\beta|\alpha)D$.

d) $R_i$ est $(\forall\gamma)(R_j)$, la relation $R_j$ précédant $R_i$ dans $D$ et $\gamma$ étant une lettre qui n'est pas une constante de $T$ : si $\gamma$ est distincte de $\alpha$ et $\beta$, alors $(\beta|\alpha)(\forall\gamma)(R_j)$ est identique à $(\forall\gamma)((\beta|\alpha)R_j)$ d'après **CS1**, et la règle de généralisation est appliquée pour écrire $(\beta|\alpha)R_i$ (la lettre $\gamma$ n'est pas une constante de $T$). Si $\gamma$ est $\alpha$, la relation $R_i$ est $(\forall\alpha)(R_j)$, qui est identique à $(\forall\beta)((\beta|\alpha)R_j)$ d'après **CS1** puisque $\beta$ ne figure pas dans $R_j$ ; or, $\alpha$ ne figurant pas dans $(\forall\alpha)(R_j)$, l'assemblage $(\beta|\alpha)R_i$ est identique à $R_i$, qui a été obtenu en appliquant la règle de généralisation à $(\beta|\alpha)R_j$ (la lettre $\beta$ n'est pas une constante). Enfin, si $\gamma$ est $\beta$, puisque $\beta$ ne figure pas dans $R_j$, l'assemblage $R_i$ est identique à $(\forall\beta)(R_j)$, soit encore $\forall R_j$ (le signe $\forall$ suivi de l'assemblage $R_j$), et de ce fait $(\beta|\alpha)R_i$ est $\forall(\beta|\alpha)R_j$, soit $(\forall\delta)((\beta|\alpha)R_j)$ où $\delta$ est une lettre distincte de toutes celles qui figurent dans $(\beta|\alpha)R_j$ et qui n'est pas une constante de $T$ : ici encore $(\beta|\alpha)R_i$ a été obtenu par l'application de la règle de généralisation.

2) Soient $\alpha$ et $\beta$ des lettres, $\alpha$ n'étant pas une constante de $T$: la suite $(\beta|\alpha)R_1$, ..., $(\beta|\alpha)R_n$ est une suite de théorèmes de $T$ (ici aucune hypothèse n'est faite sur $\beta$, mais la suite de théorèmes obtenue n'est pas forcément une démonstration).

Pour montrer ce résultat de proche en proche, on considère $R_i$ figurant dans $D$, et on fait l'hypothèse convenable sur les assemblages précédant $R_i$.

Les cas où $R_i$ est un axiome ou est précédé par $R_j$ et $R_j \Rightarrow R_i$ se traitent comme en 1). Examinons le cas où $R_i$ est $(\forall\gamma)(R_j)$, l'assemblage $R_j$ précédant $R_i$ dans $D$ ; si $\gamma$ est distinct de $\alpha$ et de $\beta$, on procède comme en 1d). Regardons ce qui se passe si $\gamma$ est $\alpha$ ou si $\gamma$ est $\beta$. Si $\gamma$ est $\alpha$, alors $R_i$ est $(\forall\alpha)(R_j)$, et puisque $\alpha$ ne figure pas dans $(\forall\alpha)(R_j)$, l'assemblage $(\beta|\alpha)(\forall\alpha)(R_j)$ est identique à $(\forall\alpha)(R_j)$, c'est-à-dire $R_i$ ; comme $R_i$ figure dans $D$, la relation $R_i$ est un théorème de $T$, donc $(\beta|\alpha)R_i$ est un théorème de $T$. Si $\gamma$ est $\beta$, alors $R_i$ est $(\forall\beta)(R_j)$ et $\beta$ n'est donc pas une constante de $T$ : en effet, on a utilisé la règle de généralisation pour écrire $(\forall\beta)(R_j)$. Soit $\beta'$ une lettre distincte de $\beta$, de $\alpha$, des constantes de $T$ et des lettres qui figurent dans $R_1, \ldots, R_n$ : la suite $(\beta'|\beta)D$ est une démonstration d'après 1), ainsi que $(\beta|\alpha)(\beta'|\beta)D$ puisque $\beta$ n'est pas une constante et ne figure pas dans les assemblages de $(\beta'|\beta)D$ ; en particulier, $(\beta|\alpha)(\beta'|\beta)R_j$ est un théorème, et comme $\beta'$ n'est pas une constante, $(\forall\beta')((\beta|\alpha)(\beta'|\beta))R_j)$ est également un théorème ; on constate sans peine que cet assemblage est identique à $(\beta|\alpha)(\forall\beta)(R_j)$.

3) Soient T un terme et $\alpha$ une lettre qui n'est pas une constante : la suite $(\mathrm{T}|\alpha)R_1, \ldots, (\mathrm{T}|\alpha)R_n$ est une suite de théorèmes de $T$ (on retrouve l'énoncé du critère **CS3**).

En effet : soient $\beta, \ldots, \lambda$ les lettres qui figurent dans T, parmi lesquelles, éventuellement, $\alpha$. Soient $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'$ des lettres qui ne sont pas des constantes de $T$ et qui ne figurent ni dans T, ni dans les assemblages $R_1, \ldots, R_n$ ; on suppose que $\beta', \ldots, \lambda'$ sont distincts deux à deux, et que $\alpha'$ est distinct de $\beta', \ldots, \lambda'$ si $\alpha$ ne figure pas dans T ; si $\alpha$ figure dans T et est donc l'une des lettres $\beta, \ldots, \lambda$, soit par exemple $\beta$, la lettre $\alpha'$ est alors la lettre $\beta'$.

D'après 1), la suite $(\lambda'|\lambda) \ldots (\beta'|\beta)(\alpha'|\alpha)D$ est une démonstration de $T$ ; montrons de proche en proche que $(\mathrm{T}|\alpha')(\lambda'|\lambda) \ldots (\beta'|\beta)(\alpha'|\alpha)D$ est une suite de théorèmes de $T$ : soit $R_i'$ un assemblage de $(\lambda'|\lambda) \ldots (\beta'|\beta)(\alpha'|\alpha)D$ et faisons l'hypothèse convenable sur les assemblages précédant $R_i'$ dans $(\lambda'|\lambda) \ldots (\beta'|\beta)(\alpha'|\alpha)D$.

Si $R_i'$ est un axiome ou si $R_i'$ est précédé de $R_j'$ et $R_j' \Rightarrow R_i'$, les considérations faites en 1) a, b et c valent également ici. Supposons que $R_i'$ soit $(\forall\omega)(R_j')$ ; dans ce cas, $\omega$ n'est pas une constante de $T$. Si $\omega$ est distincte de $\alpha'$ et ne figure pas dans T, alors $(\mathrm{T}|\alpha')(\forall\omega)(R_j')$ est identique à $(\forall\omega)((\mathrm{T}|\alpha')(R_j')$ d'après **CS1** ; puisque $(\mathrm{T}|\alpha')R_j'$ est un théorème par hypothèse et que $\omega$ n'est pas une constante de $T$, l'assemblage $(\mathrm{T}|\alpha')R_i'$ est un théorème. Si $\omega$ est $\alpha'$, l'assemblage $(\mathrm{T}|\alpha')(\forall\omega)(R_j')$ est identique à $(\forall\omega)(R_j')$, c'està-dire $R_i'$, qui est un théorème de $T$. Enfin, si $\omega$ figure dans $T$, la lettre $\omega$ ne figure pas dans $R_j'$, et $(\forall\omega)(R_j')$ est identique à $(\forall\omega')(R_j')$ où $\omega'$ est une lettre ne figurant ni dans T, ni dans $R_j'$, ni dans les constantes de $T$, et $(\mathrm{T}|\alpha')R_i'$ est identique à $(\forall\omega')((\mathrm{T}|\alpha')R_j')$, qui est bien un théorème de $T$ : en effet $(\mathrm{T}|\alpha')R_j'$ est un théorème par hypothèse et $\omega'$ n'est pas une constante de $T$.

Pour terminer, remarquons que si $(T|\alpha')R_i'$ est un théorème de $T$, il en est de même de $(\beta|\beta') \dots (\lambda|\lambda')(T|\alpha')R_i'$ d'après 2), et que $(T|\alpha)R_i$ est identique à

$$(\beta|\beta') \dots (\lambda|\lambda')(T|\alpha')(\lambda'|\lambda) \dots (\beta'|\beta)(\alpha'|\alpha)R_i.$$

4) Les assemblage de $D$ sont des théorème de $T'$.

Soient $\alpha, \dots, \lambda$ les constantes de $T'$ qui ne sont pas des constantes de $T$ ; soient $\alpha', \dots, \lambda'$ des lettres distinctes deux à deux qui ne sont pas des constantes de $T'$ et qui ne figurent dans aucun des assemblages de $D$. D'après 1), la suite $(\lambda'|\lambda) \dots (\alpha'|\alpha)D$ est une démonstration de $T$. Montrons de proche en proche que c'est aussi une démonstration de $T'$ : soit $R_i'$ un assemblage figurant dans $(\lambda'|\lambda) \dots (\alpha'|\alpha)D$, et faisons l'hypothèse convenable sur les assemblages précédant $R_i'$. Si $R_i'$ est un axiome de $T$, puisque $T'$ est une extension de $T$, c'est un axiome de $T'$ ; si $R_i'$ est précédé de $R_j'$ et $R_j' \Rightarrow R_i'$, la relation $R_i'$ est obtenue par la règle de détachement. Supposons enfin que $R_i'$ soit $(\forall\omega)(R_j')$ : la lettre $\omega$ n'est pas une constante de $T$ ; si $\omega$ n'est pas une constante de $T'$, la relation $(\forall\omega)(R_j')$ est obtenue par la règle de généralisation dans $T'$ ; si $\omega$ est une constante de $T'$, la lettre $\omega$ ne figure pas dans $R_j'$ et $(\forall\omega)(R_j')$ est identique à $(\forall\omega')(R_j')$ où $\omega'$ est une lettre qui ne figure pas dans $R_j'$ et n'est pas une constante de $T'$ : dans ce cas également, $R_i'$ est obtenu par la règle de généralisation dans $T'$.

Pour terminer, il suffit de remarquer que $R_i$ est identique à

$$(\alpha|\alpha') \dots (\lambda|\lambda')(\lambda'|\lambda) \dots (\alpha'|\alpha)R_i,$$

et que si $R_i'$ est un théorème de $T'$, d'après 2) la relation $(\alpha|\alpha')( \dots (\lambda|\lambda')R_i'$ est également un théorème de $T'$.

# INDEX TERMINOLOGIQUE

Les numéros des pages du chapitre II sont suivis du signe ▪, ceux du chapitre III le suivent. On remarquera qu'un même mot peut avoir des sens différents dans chacun de ces deux chapitres.

## TABLE DES CRITERES, SCHEMAS ET PROPRIETES DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS (chapitre II)



## TABLE DES CRITERES, SCHEMAS, AXIOMES ET THEOREMES DE LA LOGIQUE QUANTIFIEE ET DE LA THEORIE DES ENSEMBLES (chapitre III)

# TABLE DES SYMBOLES

La remarque faite en tête de l'index terminologique s'applique également ici. Certains symboles, faits de plusieurs morceaux, ménagent un ou plusieurs espaces destinés à être occupés par d'autres symboles ou assemblages de symboles ; ces espaces sont indiqués ici par .. . Certains symboles ont plusieurs sens, éventuellement dans un même chapitre.
En principe, les variations graphiques des symboles logiques ne sont pas répertoriées ici (voir pages 30 et 62).

# BIBLIOGRAPHIE

Les livres cités sont regroupés en quatre rubriques.

Les chiffres entre parenthèses indiquent la date de la première édition quand elle est connue et, éventuellement, la date de la traduction citée.

Tous les ouvrages cités sont en français, sauf ceux signalés par *, qui sont en anglais.

## ▪ Histoire de la logique.

[1] **Robert BLANCHÉ** - ***La logique et son histoire d'Aristote à Russel*** - **Armand Colin - Paris (1970).**

Les détails sont moins nombreux que dans [2], les thèses sont exposées et discutées avec détails. La partie consacrée à l'antiquité et au Moyen-Age est très développée.

*** [2] I.M. BOCHENSKY** - ***A history of formal logic*** - **Chelsea publishing company - New-York (1956 - traduit de l'allemand en anglais en 1961).**

Histoire très complète, n'allant toutefois pas plus loin que 1930.

**[3] Heinrich SCHOLZ** - ***Esquisse d'une histoire de la logique*** - **Aubier - Paris (1931 - traduit de l'allemand en 1968).**

Vue d'ensemble de la logique occidentale.

## ▪ Textes.

[4] **ARISTOTE** - ***Organon*** - **Librairie Vrin - Paris (traduit du grec de 1950 à 1966).**

L'***Organon*** comprend six livres ; le livre III, ***Les premièrs analytiques,*** fait l'étude du syllogisme dans ses diverses figures ; le livre IV, ***Les seconds analytiques,*** décrit l'application du syllogisme au raisonnement.

**[5] Gottlob FREGE - *Les fondements de l'arithmétique* - Le Seuil - Paris (1884 - traduit de l'allemand en 1969).**

Justification d'une introduction formalisée des nombres à partir de l'analyse de la notion de nombre.

**[6] Gottlob FREGE - *Ecrits logiques* - Le Seuil - Paris (1879 à 1925 - traduit de l'allemand en 1971).**

Justification de la formalisation des mathématiques.

**[7] Gerhard GENTZEN - *Recherches sur la déduction logique* - P.U.F. - Paris (1934 - traduit de l'allemand en 1955).**

L'auteur a édifié un formalisme qui cherche à refléter très exactement la démarche des démonstrations mathématiques ; les règles de déduction y jouent un rôle capital.

**[8] HERBRAND - *Ecrits logiques* - P.U.F. - Paris (1968 ; textes écrits de 1928 à 1931).**

Les écrits logiques de l'un des rares logiciens français antérieurs à 1940. On y trouvera en particulier les résultats importants qu'il a donnés, relatifs à la décidabilité et à la consistance.

**[9] Willard V.O. QUINE - *Philosophie de la logique* - Aubier - Paris (traduit de l'anglais en 1975).**

Réflexions portant en particulier sur les relations entre la logique et la vérité. Cf. aussi **[18]**.

**[10] Bertrand RUSSEL - *Signification et vérité* - Flammarion - Paris (vers 1940 - traduit de l'anglais en 1969).**

La difficulté de faire entrer la logique quotidienne dans un cadre rigoureux. Cf. aussi **[29]**.

**[11] Alfred TARSKI - *Logique, sémantique, métamathématique* - 2 tomes - Armand Colin - Paris (1923 à 1924 - traduit (en partie) de l'anglais en 1972. On consultera les présentations pour connaître la langue originale et les divers avatars des textes présentés).**

A. Tarski fut l'un des membres de l'école polonaise de logique. Si quelques articles sont ardus, beaucoup se lisent sans préparation particulière. Des problèmes logiques et para-logiques très variés sont abordés. On comparera avec **[9]** et **[10]** le célèbre et passionnant ***La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique.***

**[12] Jean LARGEAULT - *Logique mathématique* - Textes - Armand Colin - Paris (1972 - les textes, traduits de l'allemand ou de l'anglais, s'échelonnent de 1915 à 1950).**

La présentation des textes de Beth, Gödel, Henkin, Hilbert, Löwenheim, Lukasiewicz, Post et Skolem par J. Largeault en rend l'abord attrayant.

- **Exposés suivis de logique.**

**[13] N. BOURBAKI - *Théorie des ensembles* - ch. 1 et 2 - Hermann, ASI 1212 - Paris (1934).**

Décrit, pratiquement sans commentaire, une théorie permettant de construire les mathématiques ; l'axiomatique choisie ici n'est pas la plus répandue. Austère.

**[14] Jean CHAUVINEAU - *La logique moderne* - P.U.F. - Que sais-je - Paris (1957).**

Exposé simple, donnant des idées intuitives avant d'indiquer une construction formelle de la logique.

**[15] Roland FRAISSÉ - *Cours de logique* - tome 1 : Relation et formule logique - Gauthier-Villars (1971).**

Premier d'un cours en trois tomes. Présente un point de vue uniquement sémantique ; demande une attention soutenue pour aboutir, de façon complète, à des résultats profonds.

**[16] Jean-Blaise GRIZE - *Logique moderne* - 3 fascicules - Gauthier-Villars et Mouton - Paris et La Haye (1969 à 1973).**

Cours destiné à un public plus particulièrement orienté vers les sciences humaines ; d'une lecture aisée, il n'en est pas moins parfaitement rigoureux. Reprends le point de vue de [7], puis donne une présentation sémantique et une présentation syntaxique. Le fascicule 3 est consacré à l'étude de plusieurs problèmes (l'implication, les logiques modales, les logiques polyvalentes, logique combinatoire, ontologie et méréologie de Lesiniewski).

**[17] Stephen C. KLEENE - *Logique mathématique* - Armand Colin - Paris (1967 - traduit de l'anglais en 1971).**

Traité de logique très clair, présenté par un grand logicien. De très nombreux et très intéressants commentaires éclairent cet exposé qui peut être lu sans connaissances préalables.

**[18] Willard V.O. QUINE - *Méthode logique* — Armand Colin - Paris (1950 - traduit de l'anglais en 1972).**

Présentation et discussion de la logique élémentaire et de quelques problèmes. Des commentaires et des notes historiques agrémentent cet exposé d'abord assez facile.

[19] **Alfred TARSKI** - ***Introduction à la logique*** **- Gauthier-Villars et E. Nanwelaerts - Paris et Louvain (1936 - l'auteur a donné en 1941, en anglais, une version modifiée du texte polonais - traduit de l'anglais en 1956).**

Donne une initiation peu formalisée à la logique, dont on appréciera particulièrement les riches commentaires. Bibliographie commentée.

- **Divers.**

**[20] Lewis CARROLL** - ***Logique sans peine*** **- Hermann - Paris (1887 à 1896 - traduit de l'anglais en 1966).**

Les textes de l'auteur d'***Alice au pays des merveilles*** réunis ici forment un cours de logique élémentaire rempli d'exercices amusants ; on trouve également deux paradoxes apparents fort instructifs.

*** [21] Paul J. COHEN** - ***Set theory and the continuum hypothesis*** **- W.A. Benjamin - New-York, Londres et Amsterdam (1966).**

Cette lecture est difficile ; elle donne accès à une démonstration et des résultats importants de la théorie des ensembles (en particulier, indépendance de l'axiome du choix, indépendance de l'hypothèse du contenu).

*** [22] Robert FEYS et Frédéric B. FITCH** - ***Dictionary of symbols of mathematical logic*** **- North-Holland publishing company - Amsterdam (1969).**

Dictionnaire raisonné et commenté.

*** [23] A. HEYTING** - ***Intuitionism, an introduction*** **- North-Holland publishing company - Amsterdam (1956).**

On trouvera en une vingtaine de pages les bases de la logique intuitionniste, éclairées par le dialogue et les exemples géométriques qui les précèdent.

**[24] David HILBERT** - ***Les fondements de la géométrie*** **- Dunod - Paris (1899 - traduit de l'allemand dans une édition critique en 1971).**

Ce classique n'est pas de la logique ; mais il permet d'avoir un exemple lumineux de la méthode axiomatique : la logique étant supposée constituée (sans théorie des ensembles), comment fonder une théorie particulière (ici, la géométrie classique).

**[25] Jean-Louis KRIVINE** - ***Théorie axiomatique des ensembles*** **- P.U.F., collection SUP - Paris (1969).**

Les résultats classiques de la logique étant supposés connus, donne des systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles, définit ordinaux et cardinaux et étudie si les théories introduites sont contradictoires.

[26] **Sous la direction de PIAGET** - ***Logique et connaissance scientifique*** - **Gallimard, encyclopédie de la Pléïade - Paris (1967).**

Le premiers tiers, consacré à la logique, contient des articles présentant divers aspects de la logique contemporaine.

[27] **Georges PÓLYA** - ***Les mathématiques et le raisonnement «plausible»*** - **Gauthier-Villars - Paris (1954 - traduit de l'anglais en 1958).**

Ce livre bien connu permettra de réfléchir à nouveau sur les relations entre la logique et le raisonnement. On y trouve en particulier la description de stratégies utiles pour aborder des problèmes mathématiques.

[28] **J. TRICOT** - ***Traité de logique formelle*** - **Librairie Vrin - Paris (1928).**

Donne le vocabulaire de la logique classique (celle d'Aristote et du Moyen-âge). Méconnaissance absolue de la logique contemporaine.

[29] **Cahiers pour l'analyse - n° 10 :** ***La formalisation*** - **Revue éditée au Seuil - Paris (1969).**

Des textes de Boole, Cantor, Gödel, Russell et des articles sur des sujets divers.