

NOMBRES HYPER-REELS.

I - Introduction.

Le but de cet exposé est de donner un sens précis à l'expression :

"x est infiniment près de x_0 ".

Ceci permettra de remplacer la définition de limite classique, dans laquelle on va à la "pêche aux η " par une définition plus algébrique. (le côté existentiel disparaît).

Comme, dans $\mathbb{R}$, le seul élément susceptible de recevoir le label "infiniment petit" est 0, on va être amené à construire un corps $\mathbb{R}^*$, contenant $\mathbb{R}$, et contenant aussi des infiniment petits et infiniment grands.

La construction de $\mathbb{R}^*$ va être tout à fait analogue à la construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy de nombres rationnels.

Nous allons rappeler brièvement comment on peut construire les corps classiques : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p 1er) ; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

II - Construction des corps classiques.

1) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers modulo p . C'est un anneau (commutatif) pour les lois $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$
 $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$

$\overline{x}$ désignant la classe de $x \in \mathbb{Z}$, modulo p ; c'est-à-dire $\overline{x} = x + p\mathbb{Z}$. Si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps (commutatif), c'est-à-dire l'équation $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{1}$ ($\overline{a} \neq 0$) a une et une seule solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Commentons un peu ce résultat.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est un anneau (commutatif, unitaire). Dans $\mathbb{Z}$, l'équation $a \cdot x = 1$ n'a pas toujours de solution.

Puisque l'on ne peut trouver de solution exacte, on va se contenter de solutions approchées $ax = 1 + \epsilon$, ϵ parcourant un ensemble $\mathcal{W}$ d'éléments considérés comme négligeables.

Il est clair que plus $\mathcal{W}$ est gros, plus on a de chances de pouvoir résoudre l'équation $ax = 1 + \epsilon$, ϵ convenable dans $\mathcal{W}$.

On veut bien travailler à ϵ près, mais comme on est raisonnable on demande :

d'abord que la somme de 2 négligeables soit un négligeable, puis que le produit d'un négligeable par un entier quelconque soit encore négligeable.

Enfin qu'il y ait quand même des éléments que l'on ne va pas négliger ; c'est-à-dire que $\mathcal{W} \neq \mathbb{Z}$.

Les deux premières conditions traduisent le fait que $\mathcal{W}$ est ce que l'on appelle un idéal, la troisième condition dit que l'idéal est propre, c'est-à-dire $\neq \mathbb{Z}$.

Dans $\mathbb{Z}$, il se trouve que tout idéal $\mathcal{W}$ est de la forme $\mathcal{W} = n\mathbb{Z}$.

Le fait remarquable est que si $\mathcal{W}$ est le plus gros possible, c'est-à-dire est maximal, ce qui se produit si $\mathcal{W} = p\mathbb{Z}$, p ler, alors, si a n'est pas négligeable, l'équation $ax + 1$ a une solution approchée à ϵ près, unique à ϵ près ($\epsilon \in \mathcal{W}$). Ce qui se traduit algébriquement par : $\bar{a} \bar{x} = \bar{1}$ a une et une seule solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (c'est-à-dire $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps).

Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; c'est $\mathbb{Z}$ dans lequel on travaille à $\epsilon \in p\mathbb{Z} = \mathcal{W}$ (ensemble négligeable maximal) près.

On remarque en passant que tout ensemble négligeable $\mathcal{W} (= n\mathbb{Z})$ est contenu dans un ensemble négligeable maximal $\mathcal{W}' = p\mathbb{Z}$, p ler divisant n .

2) Les constructions de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont (peuvent être) tout à fait analogues.

En effet $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*_{/\mathcal{W}}$; $\mathcal{W} = \{0\} \times \mathbb{Z}^*$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ étant muni d'une structure d'anneau par :

$$(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd) \quad (\text{"addition croisée"})$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$$

On vérifie facilement que $\mathcal{W}$ est un idéal maximal.

$\mathbb{Q}$ est un corps pour les lois $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (a/b désignant la classe de (a,b)).

$\mathbb{R} = \mathcal{C} / \mathcal{W}$ avec $\mathcal{C}$ = ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels
et $\mathcal{W}$ = ensemble des suites tendant vers 0

$\mathcal{C}$ est un anneau pour la somme et le produit composantes par composantes.

On vérifie aussi que $\mathcal{W}$ est un ensemble négligeable maximal.

Enfin on a $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x] / \mathcal{W}$ avec $\mathcal{W}$: ensemble des multiples de $x^2 + 1$.
 $\mathbb{R}[x]$ anneau des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{R}$.

Remarque : les constructions de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se font sur le principe suivant :
on commence par agrandir par des produits cartésiens, puis on compresse par des quotients.

III - Construction du corps $\mathbb{R}^*$ des nombres hyper-réels.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les suites réelles.

C'est un anneau pour l'addition et le produit composante par composante ($\mathcal{S}$ est commutatif et unitaire).

On considère l'ensemble F des suites nulles à partir d'un certain rang. Alors F vérifie les propriétés des ensembles négligeables c'est-à-dire c'est un idéal, $\neq \mathcal{S}$. Mais F n'est pas le plus gros possible. On admet qu'il est contenu dans un ensemble négligeable (idéal) maximal $\mathcal{W}$.

On note $\mathbb{R}^*$ le corps quotient $\mathcal{S} / \mathcal{W}$: $\mathbb{R}^*$ c'est $\mathcal{S}$ où l'on travaille à ϵ près,
 $\epsilon \in \mathcal{W}$

Rappelons donc qu'un élément de $\mathbb{R}^*$ est la classe modulo $\mathcal{W}^0$ d'une suite réelle. C'est-à-dire : $a \in \mathbb{R}^*$ est de la forme $a = \overline{(x_n)} = (x_n) + \mathcal{W}^0$

Si $x = (x_n)$ et $y = (y_n) \in \mathcal{S}$, la somme et le produit dans $\mathbb{R}^*$ sont définis par :

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{y} &= \overline{x+y} = \overline{(x_n + y_n)} \\ \overline{x} \cdot \overline{y} &= \overline{x \cdot y} = \overline{(x_n \cdot y_n)}\end{aligned}$$

Remarque : on montre que $\mathbb{R}^*$ est unique à un isomorphisme près

Propriété : $\mathbb{R}^*$ contient bien $\mathbb{R}$, quand on identifie le réel r avec la classe de la suite constante égale à r .

IV - Structure de $\mathbb{R}^*$.

Il va être commode d'introduire les définitions suivantes :

Définition : soit $X \subset \mathbb{N}$. On note φ_X la suite définie par $\varphi_X(n) = \begin{cases} 1 & n \in X \\ 0 & n \notin X \end{cases}$

Déf. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \varphi_X \text{ est négligeable, i.e. } \varphi_X \in \mathcal{W}^0, X \text{ est dit négligeable} \\ \text{Si } \varphi_X \notin \mathcal{W}^0; X \text{ est dit gros} \end{array} \right.$

Proposition : soit X et $Y \subset \mathbb{N}$. Alors :

- i) X et Y gros $\Rightarrow X \cap Y$ gros
- ii) X gros et $Y \supset X \Rightarrow Y$ gros
- iii) $X \cup Y$ gros $\Rightarrow X$ ou Y gros
- iv) X gros $\Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus X$ négligeable
- v) $\mathbb{N} \setminus X$ fini $\Rightarrow X$ gros (en particulier $\mathbb{N}$ est gros).

i) Supposons φ_X et $\varphi_Y \notin \mathcal{W}^0$. En prenant les classes modulo $\mathcal{W}^0$ on a :
 $\overline{\varphi_X} \neq 0$ et $\overline{\varphi_Y} \neq 0$ donc $\overline{\varphi_{X \cap Y}} = \overline{\varphi_X \cdot \varphi_Y} \neq 0$ puisque $\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{W}^0} = \mathbb{R}^*$ est un corps.

Donc $\varphi_{X \cap Y} \notin \mathcal{W}^0$ et $X \cap Y$ est gros.

ii) Soit $\varphi_X \in \mathcal{W}^0$ c'est-à-dire $\overline{\varphi_X} = 0$. Si $Y \supset X$ alors $\varphi_X = \varphi_Y \cdot \varphi_X$ d'où
 $\overline{\varphi_X} \cdot \overline{\varphi_Y} = 0$. Donc $\overline{\varphi_Y} = 0$ et $\varphi_Y \in \mathcal{W}^0$ c'est-à-dire Y gros.

iii) On a $\varphi_{xuy} = \varphi_x + \varphi_y - \varphi_{xy}$. Si X et Y sont négligeables alors φ_x et φ_y sont dans $\mathcal{N}$ c'est-à-dire $\overline{\varphi_x} = \overline{\varphi_y} = 0$ et $\overline{\varphi_{xuy}} = 0$ c'est-à-dire xuy négligeable

iv) Soit $\overline{\varphi_x} \neq 0$ on a $\overline{\varphi_x} \cdot \overline{\varphi_{N-X}} = 0$, donc $\overline{\varphi_x} \cdot \overline{\varphi_N} = 0$ et donc $\overline{\varphi_N} = 0$ car $\mathbb{R}^*$ est un corps. D'où $N-X$ négligeable

Réciproquement si $\overline{\varphi_{N-X}} = 0$, comme $\varphi_x + \varphi_{(N-X)} = 1$ on a $\overline{\varphi_x} = 1$. et ainsi $\varphi_x \notin \mathcal{N}$ c'est-à-dire X gros.

v) Si X est fini alors par définition on a $\varphi_x \in \mathcal{N}$, donc X est négligeable et $N - X$ est gros.

Proposition : soit $\overline{(x_n)}$ et $\overline{(y_n)} \in \mathbb{R}^*$ alors: $\overline{(x_n)} = \overline{(y_n)} \iff \{n, x_n = y_n\} = X$ gros

$$\text{on a : } \varphi_x(n) = \begin{cases} 1 & n \in X \text{ c'est-à-dire } x_n - y_n = 0 \\ 0 & n \notin X \text{ c'est-à-dire } x_n - y_n \neq 0 \end{cases}$$

donc $\varphi_x + (x_n - y_n)n \geq 0 \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ donc inversible donc $\notin \mathcal{N}$

donc $\overline{\varphi_x} + \overline{(x_n - y_n)} \neq 0$ comme $\overline{(x_n - y_n)} = 0$, on a $\overline{\varphi_x} \neq 0$ c'est-à-dire $\varphi_x \notin \mathcal{N}$ c'est-à-dire : x gros.

Définition d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^*$. Soit $a = \overline{(x_n)}$ et $b = \overline{(y_n)} \in \mathbb{R}^*$

On définit une relation $\leq$ sur $\mathbb{R}^*$ par : $a \leq b \iff \{n, x_n \leq y_n\}$ est gros c'est bien une définition car si $\overline{(x_n)} = \overline{(x'_n)}$, alors $\{n, x_n \leq y_n\}$ est gros

Proposition : la relation " $\leq$ " est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^*$, compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}^*$, qui prolonge l'ordre sur $\mathbb{R}$.

i) $a \leq a$ car $\{n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_n\} = \mathbb{N}$ gros

ii) Soit $a \leq b$ et $b \leq c$ alors : $\{n, x_n \leq y_n\}$ et $\{n, y_n \leq z_n\}$ sont gros donc $\{n, x_n \leq y_n\} \cap \{n, y_n \leq z_n\} = \{n, x_n \leq y_n \leq z_n\}$ est gros donc on a : $a \leq c$.

iii) Soit $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $\{n, x_n \leq y_n\}$ et $\{n, y_n \leq x_n\}$ sont gros, donc $X = \{n, x_n = y_n\}$ est gros ; donc $\varphi_x \notin \mathcal{N}$ mais $(x_n - y_n) \times \varphi_x(n) = 0$ quelque soit n ; donc la suite $n \mapsto x_n - y_n$ est dans $\mathcal{N}$; donc $\overline{(x_n - y_n)} = 0$ c'est-à-dire $\overline{(x_n)} = \overline{(y_n)}$ c'est-à-dire $a = b$

iv) Soit $a = \overline{(x_n)}$ et $b = \overline{(y_n)}$ soit $X = \{n, x_n \leq y_n\}$; alors X ou $\mathbb{N} \setminus X$ est gros. Si X est gros on a $a \leq b$; si $\mathbb{N} \setminus X$ est gros on a $a > b$.

La compatibilité de " $\leq$ " avec "+" et "x" se démontre d'une manière analogue.

Définition : soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $|a| = a$ si $a \geq 0$; $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

Définition : soit $a \in \mathbb{R}^*$. On dit que a est

- i) fini, s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq r$
- ii) infiniment petit si $|a| < r$ pour tout $r > 0$
- iii) infiniment grand si $|a| > r$ pour tout $r > 0$

Exemple : soit $x_n = \frac{1}{n+1}$ et $y_n = n$; alors $a = \overline{(x_n)}$ est infiniment petit et $b = \overline{(y_n)}$ est infiniment grand.

Montrons que a est infiniment petit. Soit r réel > 0
 $a < r \iff \{n, x_n < r\}$ est gros. Or il existe n_0 tel que
 $\{n, x_n < r\} \supset \{n, n \geq n_0\}$. Ce dernier ensemble est gros d'où le résultat.
 On procède d'une manière analogue pour montrer que b est infiniment grand.

Proposition : soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Alors :

- i) $x_n \rightarrow 0 \iff \forall k \geq 0, \{n, |x_n| \leq \frac{1}{k}\}$ est cofini (c'est-à-dire est le complémentaire d'un ensemble fini)
- ii) $\overline{(x_n)}$ est infiniment petit $\iff \forall k \geq 0, \{n, |x_n| \leq \frac{1}{k}\}$ est gros.

i) est évident,
 ii) est aussi évident car la condition $\{n, |x_n| \leq \frac{1}{k}\}$ gros est équivalente au fait que $\overline{(x_n)}$ est inférieur à $1/k$

Corollaire : si x_n tend vers 0, alors $\overline{(x_n)}$ est infiniment petit.

En effet tout sous ensemble cofini de $\mathbb{N}$ est gros.

Remarque : 0 est le seul infiniment petit réel. Il n'y a pas d'infiniment grand dans $\mathbb{R}$.

Notation : $x \sim y \iff x - y$ infiniment petit.

Proposition : La somme de deux infiniment petits est un infiniment petit, le produit d'un infiniment petit par un hyper-réel fini est un infiniment petit.

Théorème de structure. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, a fini, il existe un réel r unique tel que $a \sim r$ (c'est-à-dire tel que $a = r + \varepsilon$, avec ε infiniment petit).

Ce réel r s'appelle la partie réelle, ou la partie standard ou encore l'ombre de a et se note a^0 .

Démonstration : soit donc $a \in \mathbb{R}^*$, a fini

soit $X = \{s \in \mathbb{R}, s \leq a\}$ X est une partie majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure que l'on va noter r . Montrons que $a - r$ est infiniment petit. Supposons pour cela le contraire, c'est-à-dire : il existe $r' > 0$, réel, tel que $|a - r| > r'$

1er cas : $a < r$ alors $r - a > r'$

c'est-à-dire $a < r - r' < r$

mais r étant une borne supérieure, il existe $s \in X$ tel que $a < r - r' < s \leq r$ ce qui est impossible d'après la définition de X .

2ème cas : $a > r$ alors $a - r > r'$

c'est-à-dire $a > r + r' > r$

mais ceci est impossible car on aurait $r + r' \in X$ et $r + r' > \sup X$.

L'unicité provient du fait que 0 est le seul réel infiniment petit.

$(a \sim r \sim r' \Rightarrow r - r' \sim 0 \Rightarrow r = r')$

Exemple : soit $x_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_{n \text{ fois}}$ et $a = \overline{(x_n)}$ alors $a^0 = 1$ et $a \neq 1$

En effet $x_n \rightarrow 1$ donc $a \sim 1$; $a \neq 1$ car $\{n, x_n = 1\} = \emptyset$.

Exercice : Soit a et $b \in \mathbb{R}^*$, finis. Alors

- i) si $a \sim b$ on a $a^0 = b^0$
- ii) si $a \leq b$ alors $a^0 \leq b^0$
- iii) $(a+b)^0 = a^0 + b^0$
- iv) $(ab)^0 = a^0 b^0$

i) $a = r + \varepsilon$; $b = r' + \varepsilon'$; si $a \sim b$ alors $a - b = r - r' + \varepsilon - \varepsilon'$ est infiniment petit donc $r - r'$ aussi donc $r = r'$.

ii) $a^0 \sup. \{s \in \mathbb{R}, s \leq a\} \leq \sup. \{s \in \mathbb{R}, s \leq b\} = b^0$.

iii) $a = r + \varepsilon, b = r' + \varepsilon' \Rightarrow \begin{aligned} a + b &= r + r' + \varepsilon + \varepsilon' \\ a.b &= rr' + r\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon' \end{aligned}$

On conclut à l'aide de l'unicité de la partie standard.

Remarque : si $\mathbb{R}_f^*$ = ensemble des éléments finis de $\mathbb{R}^*$ alors $\mathbb{R}_f^*$ est un anneau et l'application "0" est un homomorphisme de $\mathbb{R}_f^*$ dans (et sur) $\mathbb{R}$ de noyau l'idéal I des infiniment petits.

On a donc $\mathbb{R}_f^* / I \simeq \mathbb{R}$.

Remarque : si a et b finis $a^0 \leq b^0 \not\Rightarrow a \leq b$.
prendre $b = 0$; $a = \varepsilon$ et $a' = -\varepsilon$

V - Extensions et prolongements.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On veut caractériser la continuité de f en $x_0 \in \mathbb{R}$ par les valeurs que f prend en des points infiniment près de x_0 .

Pour cela il faut avant tout que f puisse être définie (prolongée) en de tels points. C'est ce dont nous allons nous occuper.

Définition : soit $A \subset \mathbb{R}$. On pose : $A^* = \{a = \overline{(x_n)} \in \mathbb{R}^*, \{n, x_n \in A\} \text{ gros}\}$
C'est bien une définition.

Exercice : Montrer que

- i) $[a, b]^* = [a, b]_{\mathbb{R}^*} = \{x \in \mathbb{R}^*, a \leq x \leq b\}$.
- ii) $x \in [a, b]^* \Rightarrow x^0 \in [a, b]$ et x fini.

- i) $x = \overline{(x_n)} \in [a, b]^* \Rightarrow \{n, a \leq x_n \leq b\} \text{ gros} \Leftrightarrow a \leq x \leq b$.
- ii) si $x \in [a, b]^*$ alors $a \leq x \leq b$ d'où $a = a^0 \leq x^0 \leq b^0 = b$.

Proposition : Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On a alors :

- i) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$
- ii) $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$,
- iii) $(\mathbb{R} \setminus A)^* = \mathbb{R} \setminus A^*$

Exercice : soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A est fini alors $A^* = A$.

Définition : Soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit un prolongement de f , soit

$f^* : A^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, par :

si $a = \overline{(x_n)} \in A^*$ alors $f^*(a) = \overline{(y_n)}$ avec $y_n = \begin{cases} \text{élem. qq.} & \text{si } x_n \notin A \\ f(x_n) & \text{si } x_n \in A \end{cases}$

Ceci est bien une définition car l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_n \in A$ est gros et l'on sait que : $\overline{(\alpha_n)} = \overline{(\beta_n)}$ si et seulement si $\{n, \alpha_n = \beta_n\}$ est gros.

Remarque : f^* est bien un prolongement de f

Proposition :

- i) $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$
- ii) $(g+f)^* = g^* + f^*$; $(gf)^* = g^* \cdot f^*$
- iii) $f \leq g$ sur $A \Rightarrow f^* \leq g^*$ sur A^* .

Démonstration laissée en exercice.

VI - Limite et Continuité.

Proposition : soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \bar{A}$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors :

$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff$ pour tout $a \in A^* : a \sim x_0 \Rightarrow f(a) \sim l$.

sens $\Rightarrow \varepsilon > 0$ donné, on prend $\eta > 0$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \eta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
soit $a = (\alpha_n) \in A^*$ avec $a \sim x_0$. Alors $|a - x_0| < \eta$. Donc on a :

$\left. \begin{array}{l} \{n, |\alpha_n - x_0| < \eta\} \text{ gros} \\ \{n, \alpha_n \in A\} \text{ gros} \end{array} \right\} \Rightarrow \{n, \alpha_n \in A \text{ et } |\alpha_n - x_0| < \eta\} \text{ gros}$

donc $\{n, |f(\alpha_n) - l| < \varepsilon\}$. Ceci étant vrai pour tout ε réel > 0 , on a bien $f^*(a) \sim l$.

Réciproque : supposons $l \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour

tout $\eta > 0$, il existe $x \in A$ et $|x - x_0| < \eta$ tel que $|f(x) - 1| > \varepsilon$. En prenant $\eta = 1/n$ on met en évidence une suite $x_n \in A$; $x_n \rightarrow x_0$ et $|f(x_n) - 1| > \varepsilon$. Posons alors $a = \overline{(x_n)}$; on a $a \in A^*$ et $a \sim x_0$ mais $|f^*(a) - 1| > \varepsilon$ car $\{n, |f(x_n) - 1| > \varepsilon\} = \mathbb{N}$ est gros; donc $f^*(a) \neq 1$.

Corollaire : soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est continue sur A si et seulement si : pour tout $a \in A^*$ et tout $x \in A$: $a \sim x \Rightarrow f^*(a) \sim f(x)$.

Proposition : soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors f est uniformément continue sur A si et seulement si pour tout $a \in A^*$ et tout $b \in A^*$ on a :

$$a \sim b \Rightarrow f^*(a) \sim f^*(b)$$

sens $\Rightarrow$ soit ε donné et $\eta > 0$ tel que $|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
soit $a = \overline{(\alpha_n)}$ et $b = \overline{(\beta_n)} \in A^*$, avec $a \sim b$; on a $|a - b| < \eta$ et donc :

$$\{n, |\alpha_n - \beta_n| < \eta\} \text{ gros}$$

$$\{n, \alpha_n \in A\} \text{ gros} \quad \Rightarrow \quad \{n, \alpha_n \text{ et } \beta_n \in A \text{ et } |\alpha_n - \beta_n| < \eta\} \text{ gros}$$

$$\{n, \beta_n \in A\} \text{ gros}$$

donc $\{n, |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| < \varepsilon\}$ gros, c'est-à-dire $|f^*(a) - f^*(b)| < \varepsilon$

Ceci étant vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$; on a bien $f^*(a) \sim f^*(b)$.

Réciproque : si f n'est pas uniformément continue sur A alors on peut mettre en évidence deux suites α_n et $\beta_n \in A$ telles que :

$$\alpha_n - \beta_n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq r > 0.$$

si on pose : $a = \overline{(\alpha_n)}$ et $b = \overline{(\beta_n)}$; on a : $a \in A^*$, $b \in A^*$, $a \sim b$ et $|f^*(a) - f^*(b)| \geq r > 0$; c'est-à-dire $f^*(a) \not\sim f^*(b)$.

Corollaire : soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est uniformément continue.

Soit x et $y \in [a, b]^*$, avec $x \sim y$. Alors x et y sont finis
donc x^0 et y^0 existent et on a : $x^0 = y^0 = r \in [a, b]$

donc puisque f est continue en r on a :

$$f^*(x) \sim f(r) \sim f^*(y) \text{ et } f \text{ est uniformément continue sur } [a, b].$$

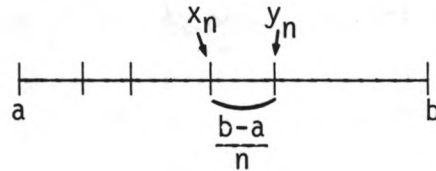
Corollaire : soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$, il existe $r \in [a,b]$ avec $f(r) = 0$.

Soit n un entier quelconque (>0). On partage l'intervalle $[a,b]$ en n parties égales. Il existe alors 2 points consécutifs du partage que l'on note x_n et y_n tels que $f(x_n) \leq 0$; $f(y_n) \geq 0$ (et $(x_n - y_n) = \frac{b-a}{n}$).

Cette construction étant valable pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, par extension, ω étant un entier infiniment grand, on a deux points x_ω^* et y_ω^* de $[a,b]^*$ tels que $|x_\omega^* - y_\omega^*| = \frac{b-a}{\omega}$ et $f^*(x_\omega^*) \leq 0$, $f^*(y_\omega^*) \geq 0$.

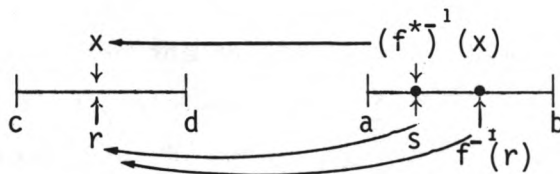
Si $r =$ partie réelle commune à x_ω^* et y_ω^* on a par continuité de f en r :

$$\left. \begin{array}{l} f(r) \sim f^*(x_\omega^*) \leq 0 \\ \sim f^*(y_\omega^*) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(r) = 0 \quad (\text{car } f(r) \text{ est } \underline{\text{réel}})$$



Corollaire : soit $f : [a,b] \rightarrow [c,d]$ continue et bijective alors f^{-1} est continue.

Supposons le contraire : il existe $x \in [c,d]^*$ et $r \sim x$, et $r \in [c,d]$ ($\Rightarrow r = x^0$), avec $(f^{-1})^*(x) \not\sim f^{-1}(r)$, c'est-à-dire :

$$s = ((f^{-1})^*(x))^0 \neq f^{-1}(r)$$


Comme f est continue on a $f^*((f^*)^{-1}(x)) = x \sim f(s)$ donc $f(s) = r$ (car $f(s)$ et r sont réels) et f n'est pas injective, contradiction. C.Q.F.D.

VII - Cas particulier des suites.

Proposition : soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle, et $l \in \mathbb{R}$. On a alors :

- i) $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \iff$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$, infiniment grand, on a $x_\omega^* \sim l$
- ii) l est limite d'une sous suite de $(x_n)_{n \geq 0} \iff$ il existe $\omega \in \mathbb{N}^*$, infiniment grand tel que $x_\omega^* \sim l$.

i) Démonstration identique à celle de la limite d'une fonction.
D'ailleurs on peut s'y ramener en considérant l'application :

$$\mathbb{N}^* \ni n \rightarrow \frac{1}{n} \in A = \{1/p, p \in \mathbb{N}, p > 0\}$$

ii) sens $\Rightarrow$: supposons $x_{n_k} \rightarrow l$ qd $k \rightarrow +\infty$ alors d'après i) pour ω infiniment grand on a $x_{n_\omega}^* \sim l$; mais $n_k \geq k$ pour tout k donc $n_\omega^* \geq \omega$ infiniment grand. Ainsi il existe $\omega' = n_\omega^*$ infiniment grand tel que $x_{\omega'}^* \sim l$.

Réciproque : supposons qu'aucune sous suite de $(x_n)_{n \geq 0}$ ne tende vers l . Alors il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait : $|x_n - l| \geq r$. Par extension pour tout ω infiniment grand de $\mathbb{N}^*$ on a : $|x_\omega^* - l| \geq r$, c'est-à-dire $x_\omega^* \not\sim l$.

Exercice : Montrer que toute suite réelle croissante majorée a une limite

soit $x_n \leq A$ et x_n croissante - soit ω infiniment grand on a :

$$n \leq \omega \Rightarrow x_n = x_n^* \leq x_\omega^* \leq A. \text{ Donc } x_\omega^* \text{ est fini ; on a :}$$

$$x_n^0 = x_n \leq (x_\omega^*)^0. \text{ Donc pour } \omega' \text{ infiniment grand on a :}$$

$x_{\omega'}^* \leq (x_\omega^*)^0 \Rightarrow (x_{\omega'}^*)^0 \leq (x_\omega^*)^0$. Par symétrie on a pour tout ω et ω' infiniment grand : $(x_\omega^*)^0 = (x_{\omega'}^*)^0$. Cette valeur commune est la limite de la suite x_n .

Exercice : Toute suite réelle bornée admet une sous suite convergente.

Soit donc $|x_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $|x_\omega^*| \leq A$ pour tout $\omega \in \mathbb{N}^*$ infiniment grand. D'où $x_\omega^* \sim (x_\omega^*)^0 = r$ et il y a une sous suite qui converge vers r .