

irem de Grenoble



INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

ACTIVITES POUR LA CINQUIEME

JUIN 1983

Expérimentation et rédaction :

Annie BESSOT

Marie-Thérèse CHABROULET

Madeleine EBERHARD

Maryvonne VERJUS

Composition :

Annie BICAIS

Toutes les remarques et suggestions concernant ce fascicule sont à adresser au groupe ELEM :

I.R.E.M. de GRENOBLE

B.P. 41

38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX

INTRODUCTION

Ces propositions s'insèrent dans les recherches de l'équipe Elémentaire de l'I.R.E.M. de Grenoble consacrées à la géométrie dans l'espace. Dans ce cadre notre réflexion porte plus particulièrement sur le problème des représentations d'objets physiques de l'espace.

Les activités que nous proposons ont été expérimentées dans les cinquièmes de Marie-Thérèse Chabroulet (Collège Lionel Terray de Meylan) et de Maryvonne Verjus (Collège Gérard Philippe de Fontaine) durant deux années scolaires (80-81 et 81-82).

LES THEMES QUE NOUS ABORDONS.

Les thèmes relèvent du programme de cinquième :

1. Tracés de figures planes. Constructions de solides.
2. Représentations d'objets physiques de l'espace.
3. Notion de volume. Volume et aire. Calculs de volumes.

Il n'est pas proposé d'activités sur les objets physiques à surface non plane : sphère, cylindre, cône.

NOS OBJECTIFS.

— «Accumuler des expériences qui serviront de support à des formations ultérieures» et, plus précisément pour la géométrie :

- «Savoir pour différents objets géométriques
 - les reproduire
 - les décrire et les représenter
 - les construire à partir d'une description ou d'une représentation».

Ces objectifs sont empruntés au programme du cycle moyen (B.O. numéro 31 du 11-09-80) : ils constituent pour nous une bonne explicitation de ce que l'on peut entendre par : «observation d'objets physiques de l'espace» (programme de cinquième, B.O. numéro 11 du 24-03-77).

VOUS TROUVEREZ DANS CE FASCICULE :

1. Une description des activités expérimentées dans les classes.
2. En annexe, après chaque description d'activités, des fiches pour les élèves qui peuvent être reproduites.

SOMMAIRE

I – REPRESENTATIONS D’ASSEMBLAGES DE CUBES	7
A – REPRESENTATIONS SPONTANÉES ET DESSINS CODES	7
B – DESSINS CODES ET VUES A PROPOS D’EMPILEMENTS DE CUBES . . .	13
Annexe	25
II – TRACES GEOMETRIQUES ET CONSTRUCTIONS DE SOLIDES . . .	35
A – CONSTRUCTION ET ETUDE DES PROPRIETES D’UN RESEAU DE PARALLELES	35
B – CONSTRUCTION DE POLYEDRES A FACES TRIANGULAIRES	37
Annexe	43
III – OBSERVATION D’UNE FIGURE PLANE COMPLEXE	47
A – TRACE GEOMETRIQUE : REPRODUCTION DE LA FIGURE	47
B – FAMILLES DES QUADRILATERES FORMES PAR LES TRAITES DE LA FIGURE	49
C – ETUDE DES AIRES DES QUADRILATERES FORMES PAR LES TRAITES DE LA FIGURE	53
Annexe	57
IV – REPRESENTATIONS EN PERSPECTIVE DE POLYEDRES SIMPLES	63
A – INTRODUCTION A LA REPRESENTATION EN PERSPECTIVE : REPRESENTATIONS DU TETRAEDRE	63
B – CARACTERISATION DE REPRESENTATIONS EN PERSPECTIVE SELON LES PROPRIETES QU’ELLES CONSERVENT	67
Annexe	73
V – NOTION DE VOLUME	77
A – INTRODUCTION DE LA NOTION DE VOLUME : VOLUME DU PAVE . .	77
B – EXTENSIONS DE LA NOTION DE VOLUME : VOLUME DE PRISMES DROITS	79
C – VOLUME DE SOLIDES COMPLEXES	82
Annexe	87

I – REPRESENTATIONS D'ASSEMBLAGES DE CUBES

(Extrait des articles parus dans *Grand N* n° 26 et dans *Petit x* n° 2 et 3)

Dans cette partie, nous décrivons et analysons des activités qui permettent d'aborder quelques problèmes posés par la représentation d'objets relativement complexes de l'espace.

Dans une première phase (correspondant à la partie A) nous confrontons les élèves à la diversité des représentations possibles d'**assemblage de cubes**.

Dans la deuxième phase (partie B) nous voulons enrichir l'expérience géométrique des enfants : changement du point de vue vis-à-vis d'un objet (ici **empilement de cubes**), passage d'une représentation à une autre...

Avertissement :

Nous recommandons au lecteur de se munir d'une dizaine de cubes pour illustrer définitions et exemples et pour suivre le déroulement et l'analyse des activités décrites. En effet la compréhension du fonctionnement des représentations proposées ne va pas forcément de soi ; elle peut, dans un premier temps, poser des problèmes même à des adultes, indépendamment de leur niveau mathématique.

A – REPRESENTATIONS SPONTANÉES ET DESSINS CODES.

Matériel.

Des cubes accrochables de deux couleurs (ici jaune et bleu), du papier blanc.

Chaque enfant reçoit 8 cubes jaunes et 8 cubes bleus.

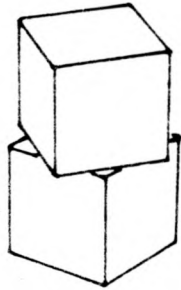
★★★ MISE EN PLACE DES CONTRAINTES QUE DEVRONT RESPECTER LES ASSEMBLAGES.

Les élèves assemblent spontanément des cubes. Les contraintes sont alors formulées à partir d'exemples d'assemblages rejetés ou acceptés par l'enseignant.

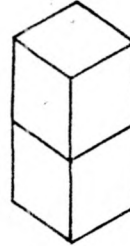
— **Première contrainte.**

Deux cubes qui se touchent par une face sont en contact par toute cette face.

Exemple :



assemblage refusé



assemblage accepté

— **Deuxième contrainte.**

Les assemblages «plans», c'est-à-dire formés d'une seule couche de cubes, ne sont pas autorisés.

Commentaire.

Cette contrainte soulève des difficultés : en effet, la reconnaissance de ces assemblages plans peut nécessiter, pour les élèves, un changement de position de ces assemblages.

Par exemple :



Cet assemblage peut être posé de façon à n'avoir qu'une couche. Il n'est donc pas permis.

★★★ JEU DE COMMUNICATION.

— Description.

Dans ce jeu, chaque élève devra réaliser un assemblage respectant les deux contraintes (assemblage permis) ; puis il devra élaborer un message s'adressant à un autre élève : ce message devra contenir des renseignements permettant au partenaire de reconstituer l'assemblage. Ce sera donc un jeu de communication entre deux partenaires, l'enjeu étant la reconstitution exacte des deux assemblages.

— Objectifs de l'activité.

Nous avons choisi de proposer un jeu de communication **entre élèves** pour favoriser l'émergence de descriptions ou de représentations spontanées et diversifiées d'assemblages de cubes. Le fait que le message s'adresse à un autre enfant et non à la maîtresse devrait diminuer le rôle des représentations conventionnelles, telles les perspectives.

Dans le déroulement du jeu on ne désigne le récepteur du message qu'après la réalisation de ce message pour ne pas faire dépendre son contenu d'un élève particulier.

Ce jeu comporte trois phases :

■ Première phase : écriture des messages.

Consigne.

1. *Avec tes cubes réalise un assemblage permis.*
2. *Ecris sur ta feuille les renseignements nécessaires pour que celui qui les recevra puisse refaire le même assemblage (en jaune).*

Une fois les messages terminés, on forme les équipes arbitrairement. Les partenaires d'une même équipe échangent leur message. On affiche la troisième consigne.

■ Deuxième phase : lecture des messages.

Consigne.

3. *Note ton nom au bas du message que tu as reçu. Indique si tu as compris le message et si tu as refait le même assemblage.*
- Si tu n'as pas compris, indique ce que tu n'as pas compris.*

Commentaire.

Dans l'ensemble des classes observées, nous avons pu distinguer **quatre types de messages** :

1. Messages verbaux, sans dessin.

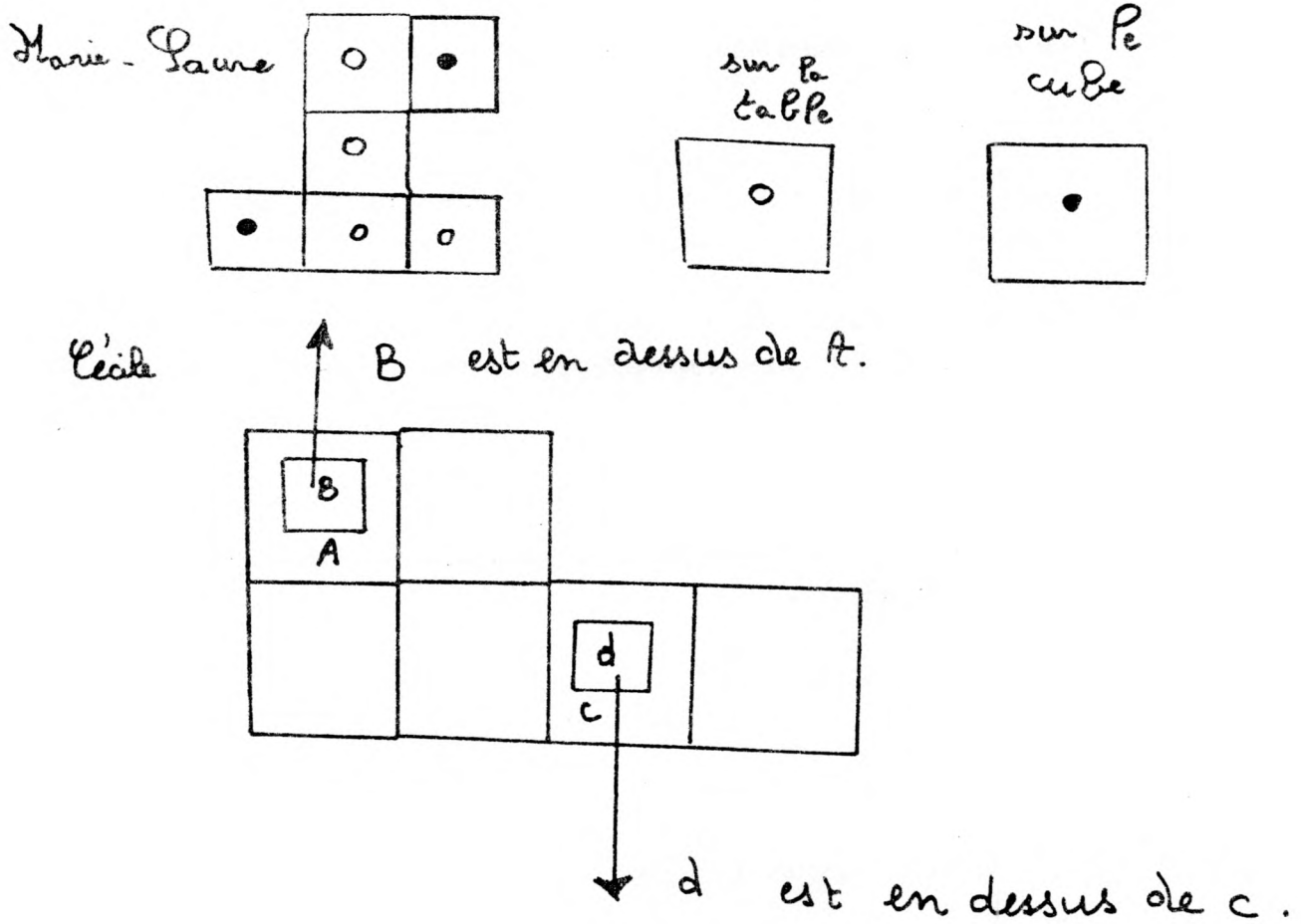
2. Dessins en perspective.

Ces dessins possèdent une **certaine ressemblance visuelle** avec l'assemblage qu'ils représentent. Cette ressemblance résulte d'artifices graphiques qui reposent sur des conventions ingénieuses et complexes, aboutissement d'un long cheminement historique. Les dessins en perspective sont très présents dans l'environnement social ce qui explique que les enfants tentent «spontanément» de s'en inspirer. Ces tentatives, même réussies, ne sont généralement pas l'indice d'une prise de conscience des conventions qui lient les propriétés de l'objet à sa représentation.

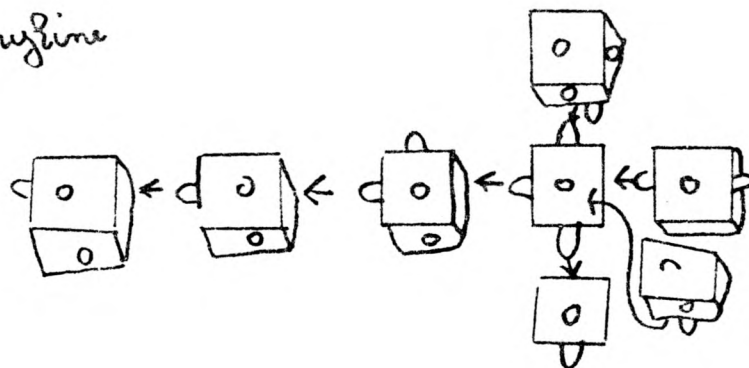
3. Dessins codés.

Si les représentations en perspective reposent sur des conventions implicites fixées socialement pour rendre compte de la vision, les **dessins codés** au contraire résultent de l'élaboration individuelle d'un symbolisme arbitraire explicité par une légende. Ce symbolisme que nous appellerons «code» complète en général le dessin de parties «plates» de l'assemblage. Remarquons cependant que certains signes arbitraires peuvent se passer de légende parce qu'ils sont déjà porteurs de sens : par exemple les flèches, fréquemment utilisées pour représenter une action.

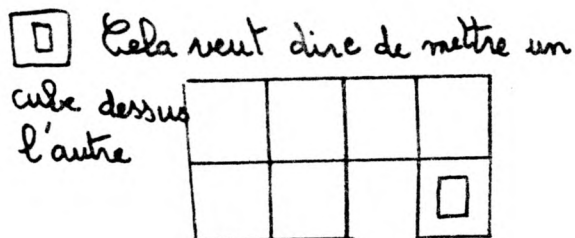
Exemples :



Maryline



Murielle

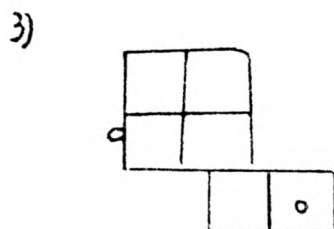
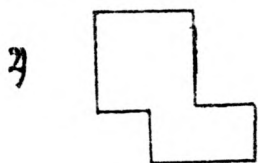


4. Vues.

Nous avons distingué les **vues** comme type de représentations intermédiaires. Il s'agit, pour nous, de dessins se rattachant aux vues du dessin technique. Ces représentations reposent sur des conventions relativement simples privilégiant des positions particulières et normalisées de l'observateur par rapport à l'objet (en face, au-dessus...). Effaçant l'une des trois dimensions, une vue rend compte d'une perception très partielle de l'objet.

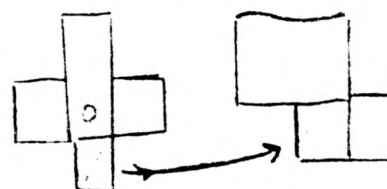
Voici un exemple de message utilisant des vues :

1) caré de cubes



4) mettre 2 cubes sur le caré :

(Face)



Cette classification des descriptions non verbales n'est pas sans poser de problèmes puisque dans plusieurs dessins codés interviennent des éléments de perspective ou une vue de l'assemblage (en général la vue de dessus).

De plus ces messages peuvent décrire indifféremment **deux types d'assemblages** : les empilements et ceux qui n'en sont pas.

Un **empilement de cubes** est une construction qui peut être réalisée sur une table avec des cubes non accrochables, en respectant la première contrainte. Les constructions qui ne sont pas des empilements sont plus complexes et posent des problèmes de représentation plus difficiles : en particulier, comment décrire certains «décrochements», «trous», «surplombs»... ? Soulignons que le matériel proposé aux élèves (cubes accrochables dans toutes les directions) ne favorise pas particulièrement les empilements.

Pour bien comprendre cette distinction, nous conseillons au lecteur de réaliser tous les assemblages de quatre cubes respectant les deux contraintes : ce sont toujours des empilements. Il faut au moins cinq cubes pour trouver un assemblage que ne soit pas un empilement.

■ Troisième phase : mise en place d'un codage collectif.

Il est indispensable de conduire cette phase après une analyse des productions des élèves : cette phase est donc réalisée dans une deuxième séance.

Par le choix de certains messages, nous voulons :

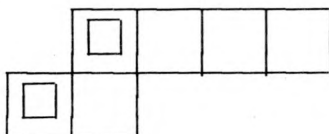
1. confronter chaque élève aux représentations variées produites par la classe ; ceci afin de favoriser la prise de conscience de la diversité des représentations possibles, de leur pertinence, de leur fiabilité, du fait que certaines sont plus performantes que d'autres...

2. privilégier un codage lié aux empilements et provoquer sa transformation pour en faire un outil collectif.

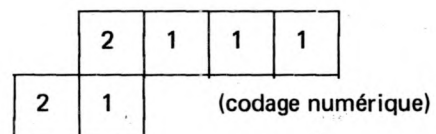
Exemple de déroulement :

1. Présentation du codage que l'on veut privilégier :

celui-ci :



ou celui-là :



2. Présentation de messages concernant des empilements : ces messages sont choisis pour leur complexité ou leur ambiguïté. Il s'agit de les simplifier en utilisant les dessins codés précédents.

3. Si le codage privilégié dans les classes n'est pas un codage numérique, on peut provoquer son évolution vers le codage numérique en proposant de coder des empilements comportant de nombreux étages.

4. Présentation de messages ne concernant pas des empilements. Il s'agit de mettre à l'épreuve le codage numérique adapté aux empilements et de faire apparaître de nouvelles conventions.

Remarque.

Les messages choisis sont reproduits «en plus grand» pour être affichés successivement au tableau.

B – DESSINS CODES ET VUES A PROPOS D'EMPILEMENTS DE CUBES.

Matériel.

Des cubes à faces lisses (non emboîtables). Chaque cube est de trois couleurs, les faces opposées étant de même couleur.

Avec un tel matériel, les seules constructions possibles **avec la contrainte 1** sont des empilements.

Objectifs.

Le codage numérique mis en place dans la séance précédente permet aux élèves de représenter simplement et de manière univoque n'importe quel empilement. Cette représentation, qui revient à donner l'emplacement des piles de cubes et leur hauteur, est très efficace pour communiquer ; mais elle met peu de propriétés géométriques en évidence. C'est pour cela que nous avons voulu faire travailler les élèves sur les vues, représentation plus complexe.

— Les vues, en conservant et en privilégiant certaines propriétés géométriques, font des empilements un objet géométrique plus riche : elles permettent aux élèves de travailler implicitement sur des notions telles que parallélisme, orthogonalité, projection orthogonale...

Il nous a semblé important, également, d'amener les élèves à passer d'une représentation à l'autre (vues et dessins codés) et de provoquer ainsi leur comparaison à travers leur fonctionnement.

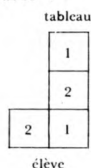
★★★ INTRODUCTION DE LA NOTION DE VUE.

Chaque élève reçoit 6 cubes de trois couleur (ici jaune, rouge et bleu) et la fiche 1.

fiche 1 recto (réduite).

VUES D'UN ASSEMBLAGE DE CUBES

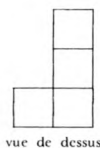
Voici le codage d'un assemblage de cubes :



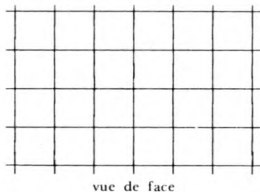
1. Réalise cet assemblage en plaçant chaque cube de la manière suivante :

- les faces jaunes parallèles au plafond,
- les faces rouges parallèles au tableau,
- les faces bleues parallèles aux fenêtres.

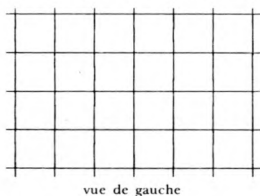
Voici la **vue de dessus** de cet assemblage. C'est ce que tu vois quand tu regardes par-dessus et que tu ne vois que des faces jaunes.



2. Dessine la **vue de face** de l'assemblage. C'est ce que tu vois devant toi en rouge.



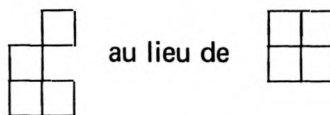
3. Dessine la **vue de gauche**. C'est ce que tu vois devant toi si tu te mets dos à la fenêtre.



Commentaire.

Remarquons qu'il n'y a pas de représentation des décalages des faces, ce qui provoque des erreurs.

Par exemple un élève propose comme vue de face :



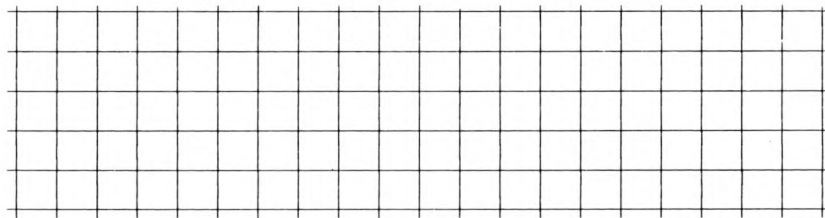
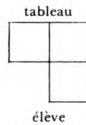
Il représente le décalage des faces par la non contiguïté des carrés. On retrouve également cette erreur dans les dessins de vue de gauche.

Nous nous attendions à cette erreur, liée au conflit entre cette convention et la perception ; aussi sommes-nous intervenues immédiatement chaque fois qu'elle est apparue.

★★★ CERTAINES LIMITES DE VUES.

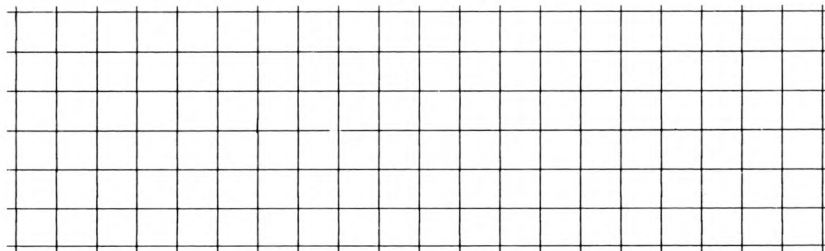
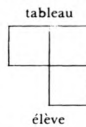
Fiche 1 verso (réduite).

4. Avec 5 cubes, trouve et code tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



- Quand tu en as trouvé 6 demande la fiche correction et vérifie.
- Numérote tes assemblages comme sur la fiche correction.
- Regroupe les numéros des assemblages qui ont la même vue de gauche :

5. Avec 6 cubes, trouve et code tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



- Quand tu en as trouvé 10, demande la fiche correction et vérifie.
- Numérote tes assemblages comme sur la fiche correction.
- Regroupe les numéros des assemblages qui ont la même vue de gauche :

Commentaire.

Une vue ne suffit pas pour décrire un empilement.

Ce problème est abordé ici, puisque l'on demande aux enfants de déterminer tous les empilements de 5 ou 6 cubes correspondant à une vue de dessus.

Deux vues ne suffisent pas non plus !

Nous soulevons ce problème quand nous demandons aux enfants de regrouper les assemblages de même nombre de cubes qui ont même vue de dessus et même vue de gauche. Dans cette partie de la fiche l'élève doit analyser son codage pour regrouper les empilements : en effet, il ne dispose que du nombre de cubes suffisant pour une seule construction.

Voici les fiches solutions dont les élèves pouvaient disposer pour vérifier leurs propositions et les numéroter :

Avec 5 cubes. Voici tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



Avec 6 cubes. Voici tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



Avec 5 cubes, les numéros des empilements qui ont même vue de gauche sont : 2 et 3 ; 4 et 6.

Avec 6 cubes : 2 et 3 ; 5 et 6 ; 7 et 4 ; 9 et 10.

★★★ CONSTRUCTION D'UN EMPILEMENT CORRESPONDANT A TROIS VUES DONNEES.

Chaque élève reçoit 8 cubes de trois couleurs et la fiche 2.

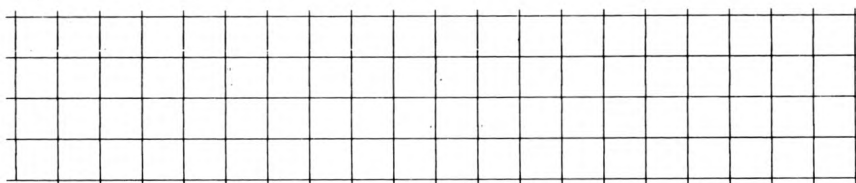
Fiche 2 recto (réduite).

VUE – REVISIONS

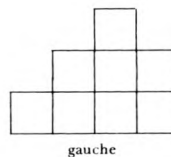
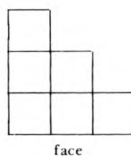
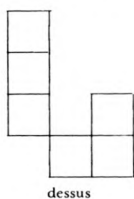
1. Réalise cet assemblage :

tableau		
2	1	1
	1	3
élève		

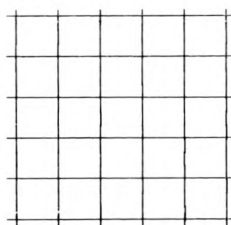
2. Dessine sa vue de dessus (jaune), sa vue de face (rouge) et sa vue de gauche (bleue) :



Voici les trois vues d'un assemblage :



3. Colorie ces vues avec les couleurs qui conviennent.
4. Réalise l'assemblage et code-le.



Commentaire.

Pour trouver un empilement correspondant aux trois vues il s'agit, à la fois, de coordonner les informations fournies par chacune des vues et de prendre conscience du rôle particulier de la vue de dessus qui donne la base de l'empilement.

De plus, la convention utilisée ici (pas de représentation des décalages des faces) peut être un obstacle à la prise en compte des possibilités de décalages. Par exemple, certains élèves se trouvent bloqués après avoir réalisé un empilement plan respectant la vue de face (

3	2	1
---	---	---

)

★★★ REALISATION D'UN JEU.

Chaque élève reçoit 10 cubes de trois couleurs et des fiches de bristol quadrillé (une fiche blanche et une fiche jaune).

fiche 2 verso (réduite).

REALISATION D'UN JEU

1. Prépare deux fiches en carton à petits carreaux :

Nom : PROBLEME N°	Nom : SOLUTION du problème n°
---	---

2. Réalise un assemblage avec le nombre de cubes que tu veux.
3. Sur la fiche «PROBLEME», dessine et colorie ses 3 vues en représentant une face d'un cube par 4 petits carreaux.
4. Sur la fiche «SOLUTION», code ton assemblage.
5. Fais plusieurs fiches «PROBLEME» — «SOLUTION» et n'oublie pas de les numéroté.
6. *Et maintenant jouons.*
 - a) Prends une fiche «PROBLEME».
 - b) Trouve un assemblage et code-le.
 - c) Compare ton codage à celui de la fiche «SOLUTION».
 - d) Si tu n'es pas d'accord, montre ton codage à ton professeur.
 - e) S'il n'y a pas d'erreur, reproduis ton codage sur la fiche «SOLUTION» et écris ton nom en-dessous.

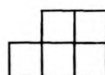
Les fiches blanches seront les fiches «problème», les fiches jaunes les fiches «solution». Un numéro est attribué à chaque enfant pour faciliter le tri et la manipulation des fiches : ce numéro est inscrit à la place n°...

Les fiches «problème» et «solution» produites par les élèves sont vérifiées par l'enseignant. En cas d'erreur ce dernier peut demander aux élèves de les corriger eux-mêmes.

Commentaire.

La grande majorité des erreurs que nous avons relevées concerne la vue de gauche.

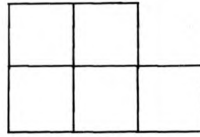
Par exemple pour la vue de gauche
on retrouve les erreurs suivantes :



relative à l'empilement

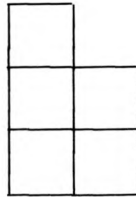
1
2
2 1

erreur 1 :



il s'agit d'une inversion gauche-droite.

erreur 2 :



ce dessin correspond à ce que l'on voit en penchant la tête sans se déplacer.

Une fois les fiches problèmes et solutions rectifiées, le jeu peut commencer.

Pour faciliter le déplacement des élèves, le jeu peut s'organiser autour de trois endroits : à chaque endroit sont disposées deux boîtes, l'une marquée «problèmes» (numéros 1 à 11 par exemple), l'autre marquée «solutions» (numéros 1 à 11).

Consigne.

Dans le fond de la classe, il y a trois endroits où nous avons mis des fiches «problème» et leurs solutions. Vous allez prendre chacun un problème et essayer de le résoudre. Vous écrirez au brouillon le codage de votre construction et vous le comparerez à celui de la fiche solution du problème. Vous aurez réussi si vous trouvez le même codage. Quand vous aurez résolu trois problèmes, je vous donnerai un problème plus difficile que j'ai mis à part.

Nous avons retiré des lots de problèmes ceux que nous qualifierons d'ambigus : un **problème ambigu** est un problème qui peut avoir d'autres solutions que celle proposée par la fiche. En effet, trois vues ne déterminent pas, en général, un empilement unique, même si le nombre de cubes est connu. Dans cette première partie du jeu, il n'y a donc pas de difficultés pour valider la solution proposée.

La principale difficulté du jeu est toujours d'envisager les diverses possibilités d'empilement liées à une même vue : l'aspect ludique de l'activité conduit tous les enfants à la surmonter plusieurs fois.

Exemples de fiche «problème».

Problème sans ambiguïté :

Nom : Bernard n° 24

Problème

J	J	J
		J

B	
B	B

R		R
R	R	R

Solution de Bernard :

2	1	2
		1

Problème ambigu :

Nom : Stéphane n° 27

Problème

R			
R	R		R
R	R	R	R

	J		J
J	J	J	J

face

dessus

	B
B	B
B	B

gauche

Solution de Stéphane :

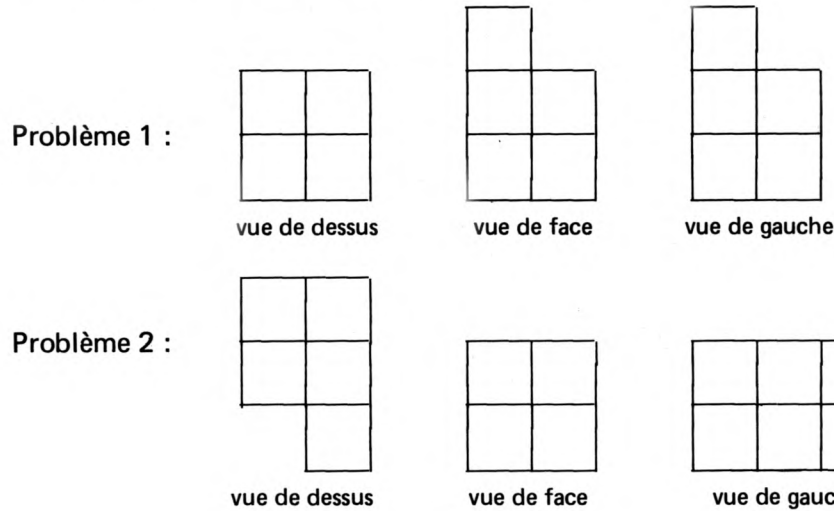
	1		2
3	2	1	1

il existe deux autres solutions
(avec 10 cubes)

A ceux qui ont résolu trois problèmes non ambigus, on donne un problème plus difficile (problème ambigu) : certains élèves trouvent avec surprise une solution qui n'est pas celle proposée par la fiche solution. Il est alors intéressant de demander de rechercher systématiquement les solutions associées à un même problème. C'est que nous avons proposé à l'ensemble de la classe.

Consigne.

Trouvez toutes les solutions des problèmes suivants (avec 10 cubes maximum).



Pour ces deux problèmes, il y a d'abord un travail individuel puis une représentation collective des solutions. On suscite de nouvelles propositions tant que toutes les solutions n'ont pas été trouvées.

Voici les 5 solutions du problème 1 :

4	2	4	1	4	2	4	2	4	1
2	2	2	2	2	1	1	2	1	2

Voici les 8 solutions du problème 2 :

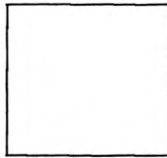
2	2	2	1	2	2	2	1	1	2	1	2
2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	1
	2		2		2		2		2		2

Commentaire.

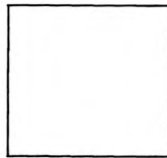
Dans cette dernière partie, nous avons constaté que certains enfants passaient directement des vues au dessin codé, sans construire effectivement d'empilements. Cette intériorisation reste encore fragile puisqu'elle peut conduire à des propositions de dessins codés ne respectant pas la vue de gauche.

★★★ INTRODUCTION DE NOUVELLES CONVENTIONS SUR LES VUES POUR QU'À UN PROBLÈME POSE NE CORRESPONDE QU'UNE SEULE SOLUTION.

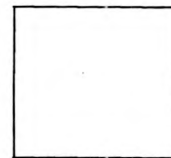
On part du problème suivant :



vue de dessus



vue de face



vue de gauche

(une face d'un cube est représentée par un carré 1 cm × 1cm).

Ce problème a 7 solutions :

2	2
2	2

2	1
2	2

1	2
2	2

2	2
1	2

2	2
2	1

1	2
2	1

2	1
1	2

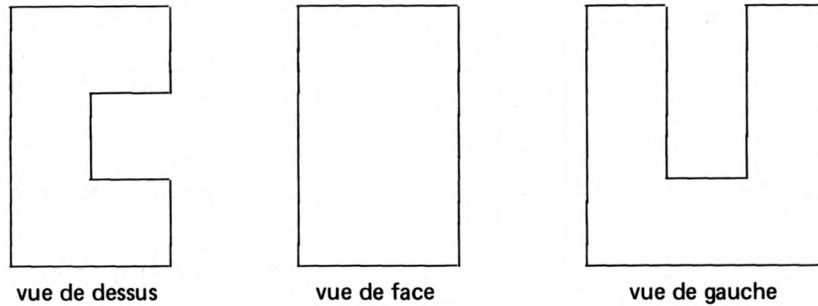
On convient de marquer sur les vues les arêtes des cubes qui sont les arêtes de l'empilement que l'on voit lorsqu'on le regarde de dessus, de face ou de gauche (nouvelles conventions).

Vues avec la nouvelle convention

solution	vue de dessus	vue de face	vue de gauche				
<table><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	2	2	2	2			
2	2						
2	2						
<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	2	1	2	2			
2	1						
2	2						
<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	2	2	2			
1	2						
2	2						
<table><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	2	2	1	2			
2	2						
1	2						
<table><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	2	2	1			
2	2						
2	1						
<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	1	2	2	1			
1	2						
2	1						
<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	2	1	1	2			
2	1						
1	2						

Pour ce problème, à chaque ensemble de trois vues avec la nouvelle convention correspond une seule solution. Est-ce toujours vrai ?

On étudie alors le problème suivant :



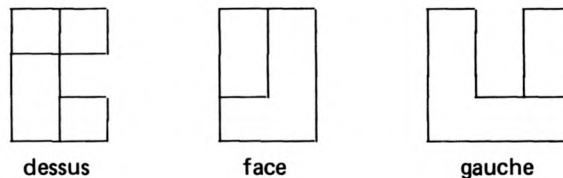
(une face d'un cube est représentée par un carré 1cm X 1cm ou encore quatre carreaux des fiches de bristol !).

Le grand nombre de ses solutions conduit certains élèves à organiser leur recherche. Ils trouvent 19 solutions.

Parmi ces 19 solutions, en existe-t-il qui ont le même ensemble de trois vues avec la nouvelle convention ? Oui, puisque les empilements

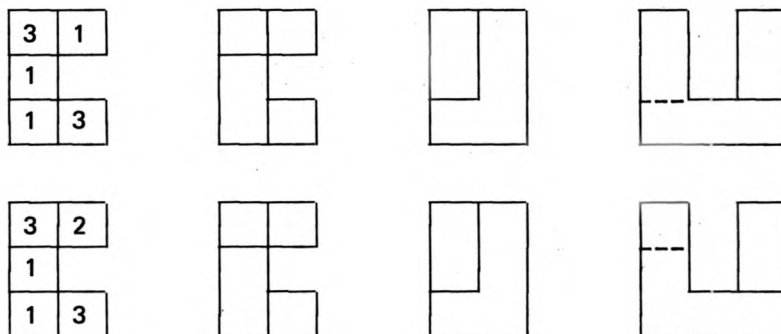
3	1		3	2
1		et	1	
1	3		1	3

ont les mêmes vues avec la nouvelle convention :



On introduit alors **une convention supplémentaire** qui va différencier les ensembles de trois vues de chacune de ces deux solutions : on représente en pointillés les arêtes des cubes qui sont **des arêtes du solide cachées** lorsqu'on le regarde de dessus, de face ou de gauche

Avec cette convention supplémentaire on obtient :



On cherche alors si toutes les solutions ont des vues différentes avec les deux conventions concernant les arêtes vues et cachées.

Prolongement pour le lecteur.

Cette dernière convention ajoutée à la première permet-elle toujours d'associer à l'ensemble de trois vues **une seule** solution ?

Réfléchissez et peut-être trouverez-vous un empilement pour lequel ce n'est pas vrai... (le nombre de cubes dont on dispose n'est pas limité) !

ANNEXE

Fiche 1 (vraie grandeur)

Fiche 2 (vraie grandeur)

Fiches contrôles : fiche 3

fiche 4

VUES D'UN ASSEMBLAGE DE CUBES

Voici le codage d'un assemblage de cubes :

tableau

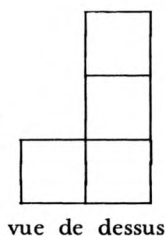
	1
	2
2	1

élève

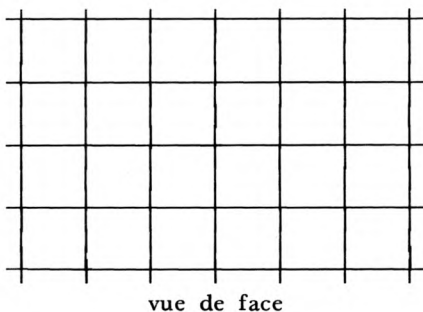
1. Réalise cet assemblage en plaçant chaque cube de la manière suivante :

- les faces jaunes parallèles au plafond,
- les faces rouges parallèles au tableau,
- les faces bleues parallèles aux fenêtres.

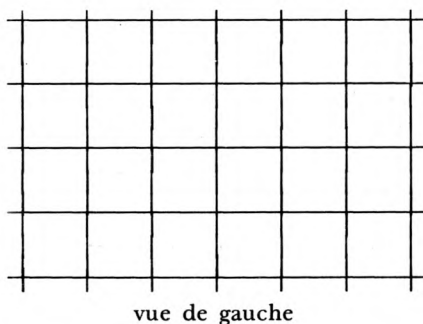
Voici la **vue de dessus** de cet assemblage. C'est ce que tu vois quand tu regardes par-dessus et que tu ne vois que des faces jaunes.



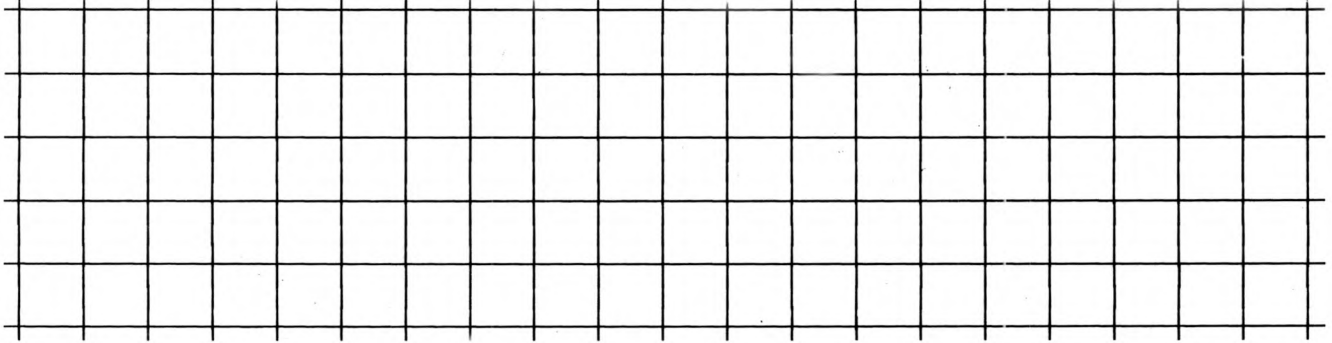
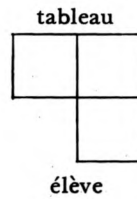
2. Dessine la **vue de face** de l'assemblage. C'est ce que tu vois devant toi en rouge.



3. Dessine la **vue de gauche**. C'est ce que tu vois devant toi si tu te mets dos à la fenêtre.

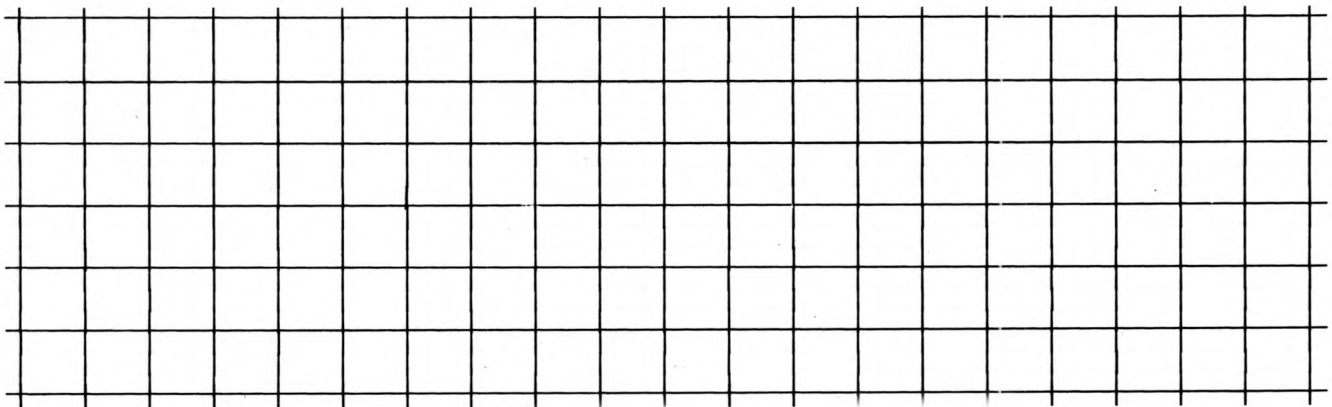
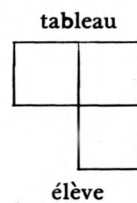


4. Avec 5 cubes, trouve et code tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



- a) Quand tu en as trouvé 6 demande la fiche correction et vérifie.
 - b) Numérote tes assemblages comme sur la fiche correction.
 - c) Regroupe les numéros des assemblages qui ont la même vue de gauche :
-

5. Avec 6 cubes, trouve et code tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



- a) Quand tu en as trouvé 10, demande la fiche correction et vérifie.
 - b) Numérote tes assemblages comme sur la fiche correction.
 - c) Regroupe les numéros des assemblages qui ont la même vue de gauche :
-

VUE – REVISIONS

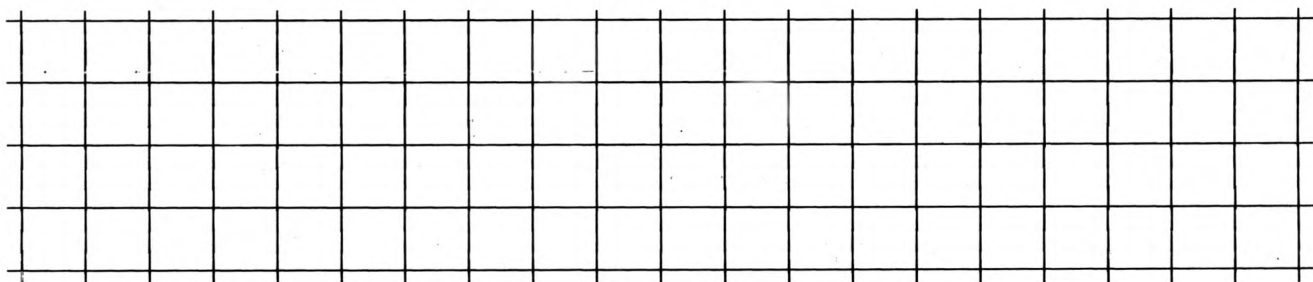
1. Réalise cet assemblage :

tableau

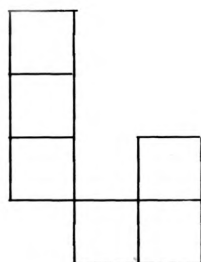
2	1	1
	1	3

élève

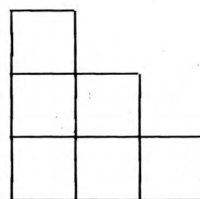
2. Dessine sa vue de dessus (jaune), sa vue de face (rouge) et sa vue de gauche (bleue) :



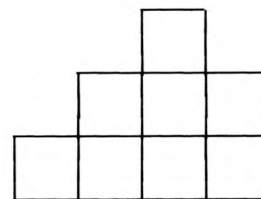
Voici les trois vues d'un assemblage :



dessus

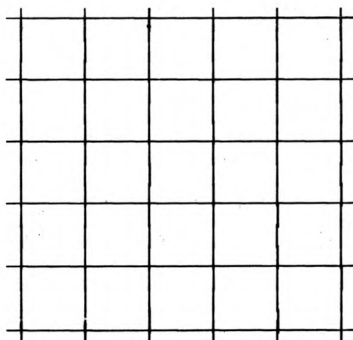


face



gauche

3. Colorie ces vues avec les couleurs qui conviennent.
4. Réalise l'assemblage et code-le.



REALISATION D'UN JEU

1. Prépare deux fiches en carton à petits carreaux :

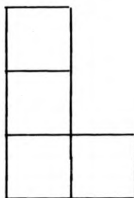
Nom : PROBLEME N°

Nom : SOLUTION du problème n°
--

2. Réalise un assemblage avec le nombre de cubes que tu veux.
- 3 Sur la fiche «PROBLEME», dessine et colorie ses 3 vues en représentant une face d'un cube par 4 petits carreaux.
4. Sur la fiche «SOLUTION», code ton assemblage.
5. Fais plusieurs fiches «PROBLEME» — «SOLUTION» et n'oublie pas de les numéroté.
6. *Et maintenant jouons.*
 - a) Prends une fiche «PROBLEME».
 - b) Trouve un assemblage et code-le.
 - c) Compare ton codage à celui de la fiche «SOLUTION».
 - d) Si tu n'es pas d'accord, montre ton codage à ton professeur.
 - e) S'il n'y a pas d'erreur, reproduis ton codage sur la fiche «SOLUTION» et écris ton nom en-dessous.

FAISONS LE POINT (1)

On réalise des assemblages de 6 cubes qui ont pour vue de face :

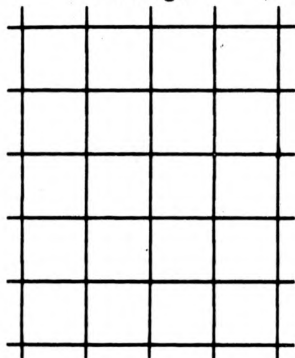


Dans ces assemblages chaque cube doit toucher au moins un autre cube par toute une face. Il y a de nombreuses solutions :

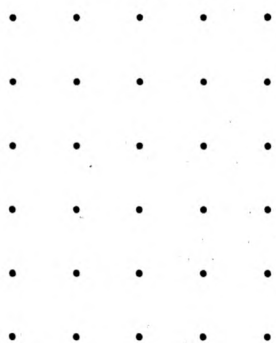
Code au moins douze d'entre elles et pour chacune dessine sa vue de gauche.

codage	vue de gauche	codage	vue de gauche

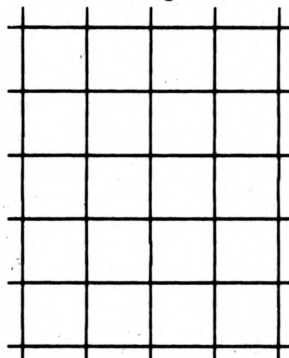
codage



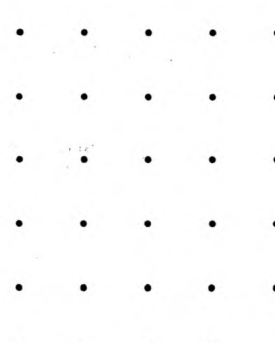
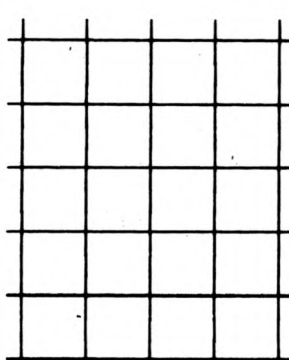
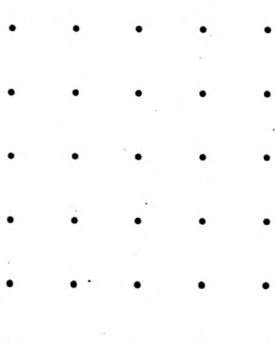
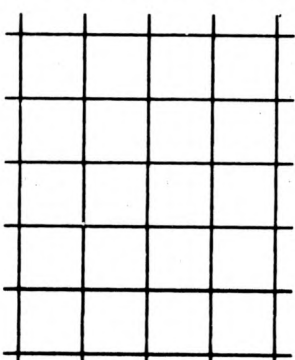
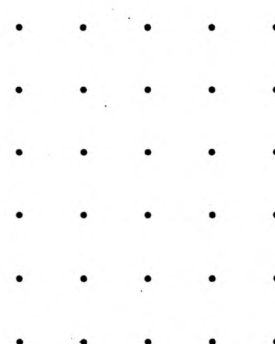
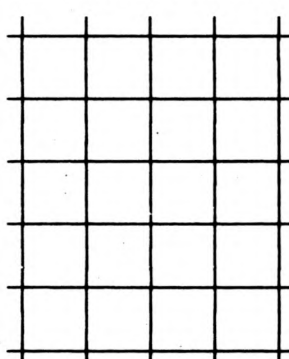
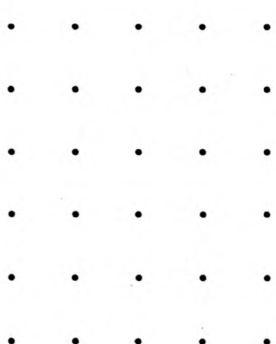
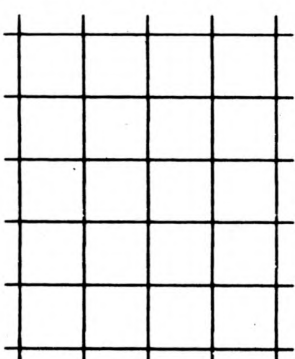
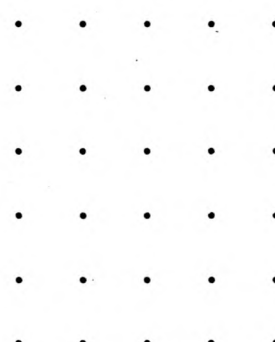
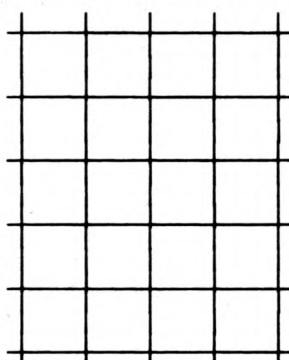
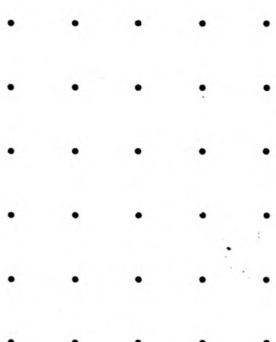
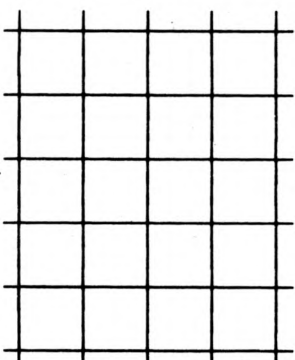
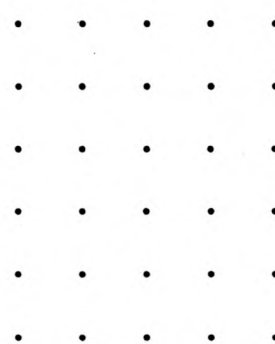
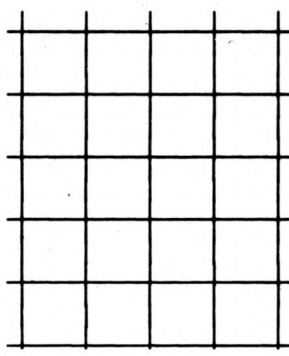
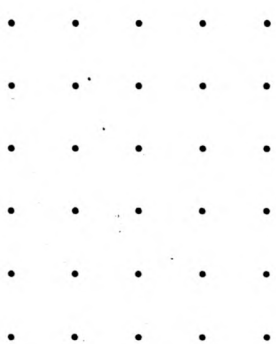
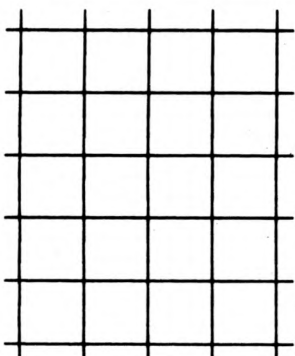
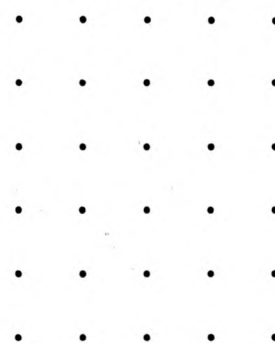
vue de gauche



codage

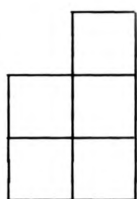


vue de gauche

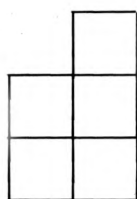


FAISONS LE POINT (2)

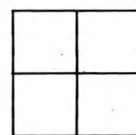
PROBLEME



vue de face



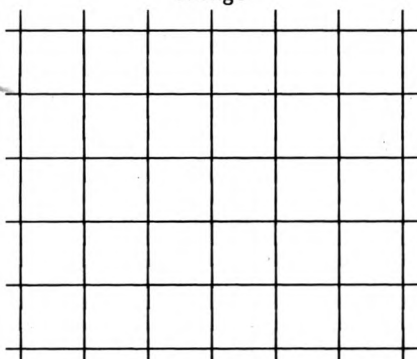
vue de gauche



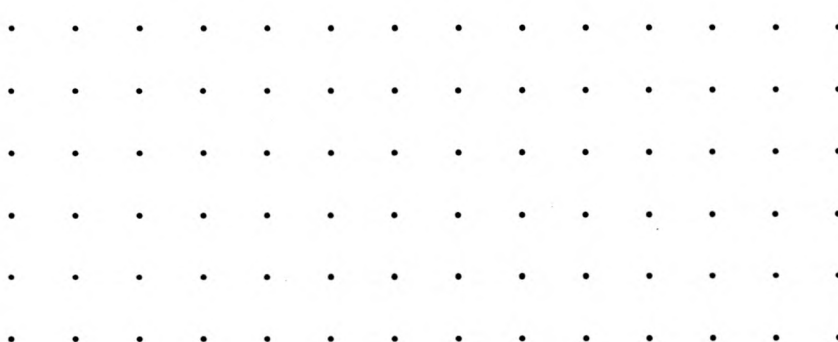
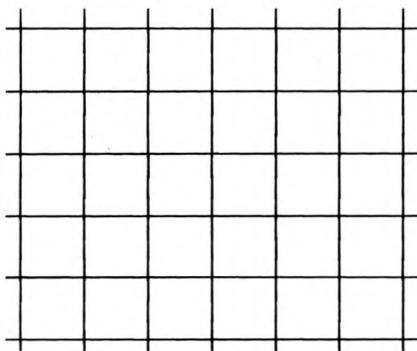
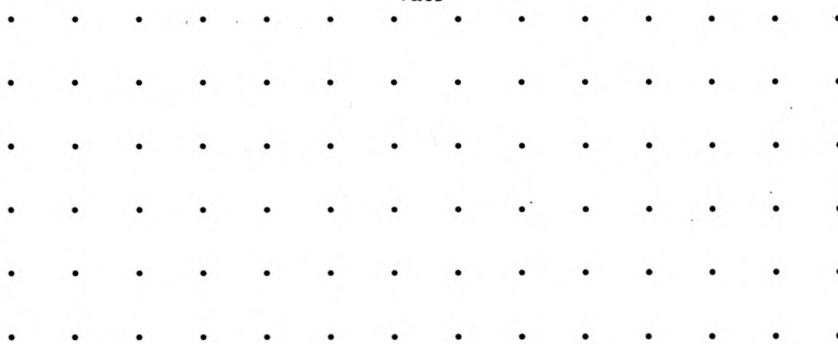
vue de dessus

1. Code les deux solutions de ce problème.
2. Pour chacune de ces solutions dessine les 3 vues avec les nouvelles conventions.

codage



vues



II – TRACES GEOMETRIQUES ET CONSTRUCTION DE SOLIDES

A – CONSTRUCTION ET ETUDE DES PROPRIETES D'UN RESEAU DE PARALLELES.

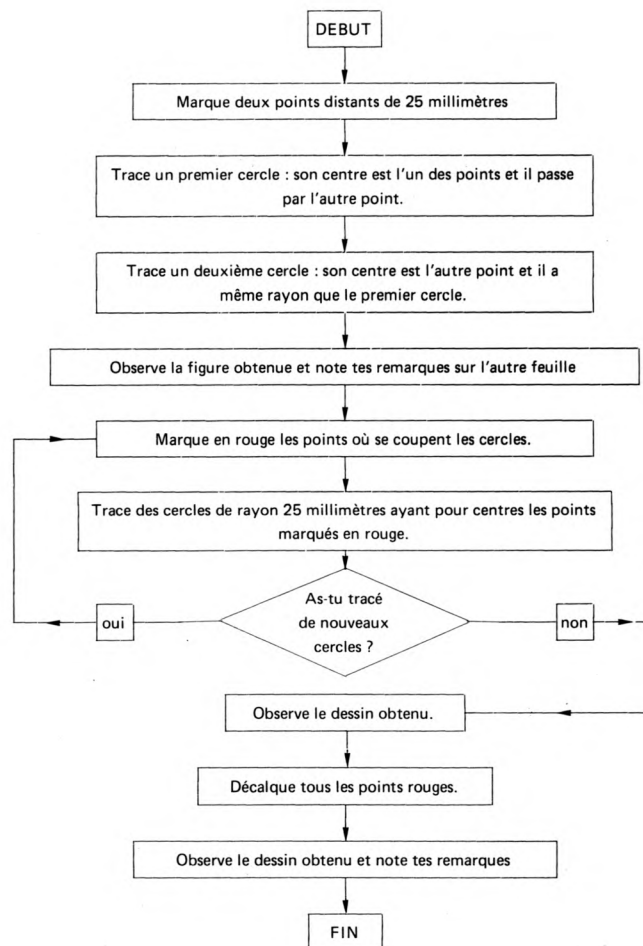
Première activité.

Matériel.

Compas, règle graduée, deux demi-feuilles de papier blanc 21 X 29,7, une demi-feuille de papier pointé (réseau triangulaire) (voir l'annexe), fiche 1.

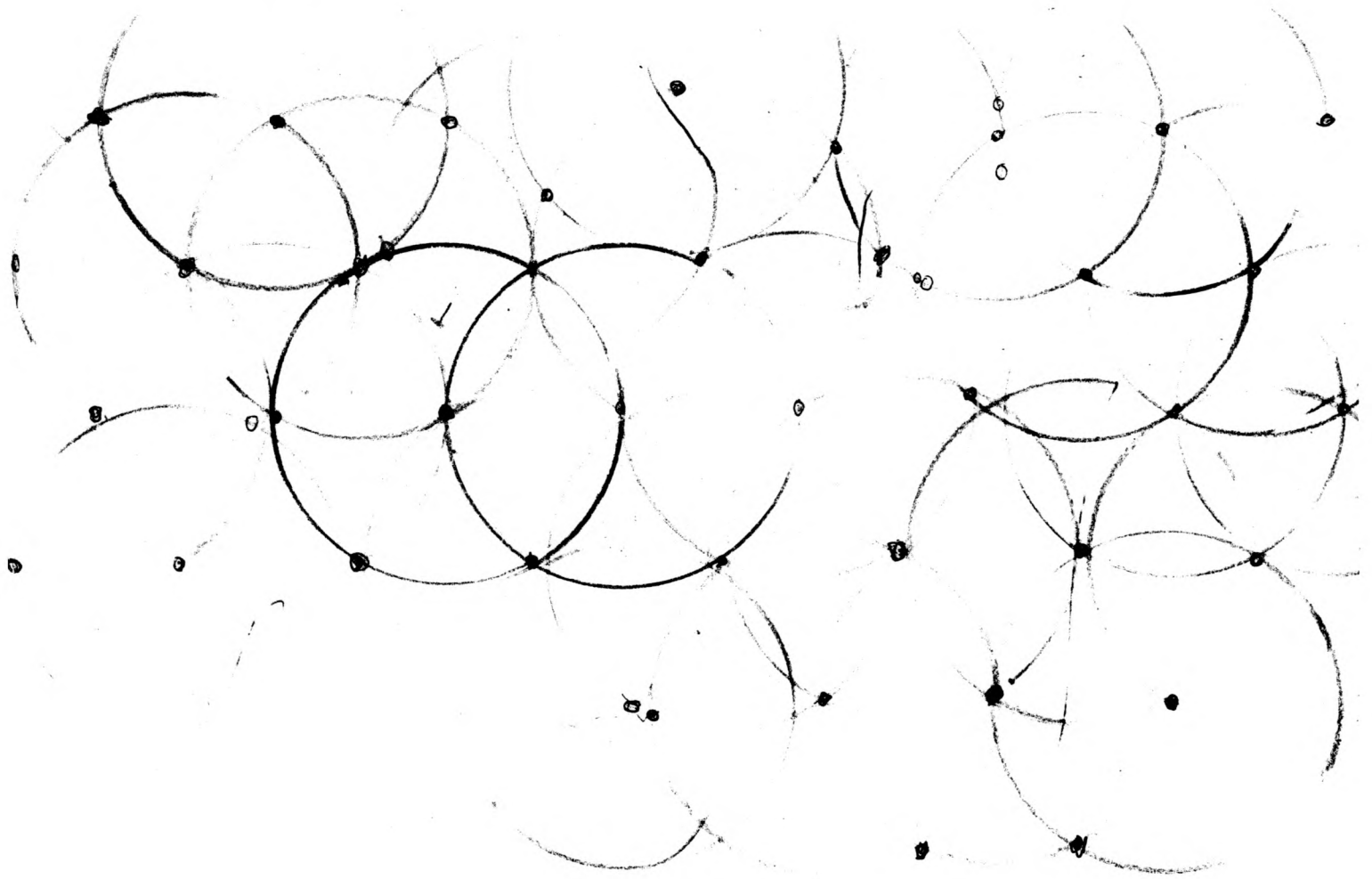
1. Tracés de cercles.

Fiche 1



Cette fiche est donnée aux enfants avec un commentaire précisant comment se fait la lecture de l'organigramme.

Après avoir tracé une douzaine de cercles les enfants commencent à prendre conscience des propriétés d'intersection de ces cercles. Dans le cas, fréquent, où le rayon des cercles n'a pas été maintenu constant il apparaît des groupes de 2 ou 3 points rouges distincts là où il devrait n'y avoir qu'un seul point d'intersection. Par exemple :



Après avoir fait expliciter les raisons de ces «détailages», on demande de recommencer le tracé.

Une synthèse sur les remarques notées par les enfants permet de mettre en évidence les propriétés d'alignement vérifiées par les points rouges : ces points déterminent des directions privilégiées que l'on peut mettre en évidence en traçant plusieurs familles de parallèles.

2. Tracé d'un réseau régulier de droites parallèles.

Chaque élève dispose de la demi-feuille de papier pointé.

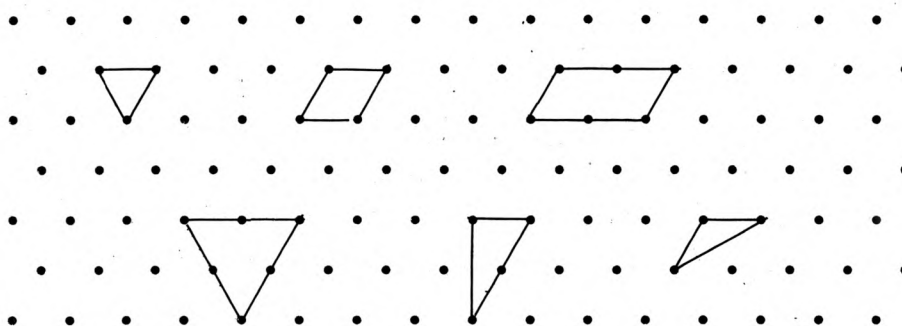
Consigne.

Trace des familles de droites parallèles.

Chaque point de ta feuille doit être sur une droite.

Les droites doivent former une famille de figures toutes identiques.

Voici quelques-unes des figures de base que l'on peut obtenir :



B – CONSTRUCTION DE POLYEDRES A FACES TRIANGULAIRES.

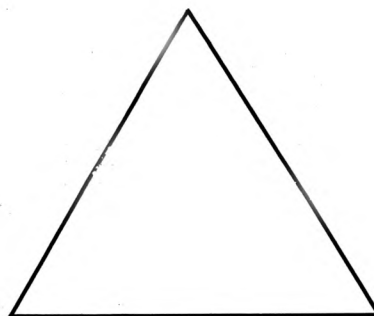
Deuxième activité.

Construction de polyèdres dont les faces sont des triangles équilatéraux.

Matériel.

Ciseaux, scotch, 3 feuilles de papier cartonné 21 × 29,7 imprimé d'un réseau à maille triangulaire, des feuilles de papier ordinaire 21 × 29,7 avec le même réseau (voir annexe).

Voici une maille du réseau :



On présente à la classe quelques polyèdres (boîtes ou chutes de menuiserie, éventuellement) et on rappelle ce que désignent les mots face, arête et sommet. On précise la forme des faces de ces polyèdres.

Consigne.

1. *Construis avec le papier ordinaire un polyèdre dont chaque face est un triangle équilatéral. Reproduis-le en papier cartonné en donnant le moins de coups de ciseaux possibles et en n'utilisant que le papier nécessaire pour former les faces.*

2. *Essaie de réaliser le plus possible de polyèdres différents.*

La plupart des élèves commencent par construire un tétraèdre (dont, parfois, chaque face est formée de 4 triangles). Lors de la reproduction, certains enfants réussissent à faire un découpage d'un seul tenant.

Puis les procédures se diversifient :

- certains juxtaposent les triangles au hasard puis essayent de «fermer» ;
- d'autres fabriquent des «chapeaux» avec 3, 4 ou 5 triangles ayant un sommet commun. Puis ils complètent par symétrie avec un deuxième chapeau identique ;
- d'autres, enfin, juxtaposent des tétraèdres.

Lors de la phase de reproduction il arrive que, malgré la consigne demandant de donner le moins de coups de ciseaux possibles, certains enfants continuent à découper séparément chaque face.

1. Classement des polyèdres obtenus.

Les polyèdres peuvent être classés selon divers critères :

- avoir ou non la propriété d'être convexe (de ne pas présenter de «creux») ;
- le nombre de faces ;
- la taille des faces...

Pour les solides convexes, le classement selon le nombre de faces met en évidence que ce nombre est pair.

Ceci peut se justifier par les remarques suivantes : une arête est formée par 2 faces. Si on compte le nombre d'arêtes différentes A , on compte le nombre A de couples de faces. Mais à chaque face correspondent 3 arêtes : chaque face est donc considérée 3 fois dans ce comptage. Il vient donc :

$$2 A = 3 F.$$

2. Construction de certains polyèdres.

Selon les résultats obtenus, on demande aux élèves :

- soit, par exemple, de construire le polyèdre à 10 faces (triangles équilatéraux), en donnant le moins de coups de ciseaux possibles. Une fois la construction réalisée, on demande d'en trouver un patron c'est-à-dire une forme d'un seul tenant

faite de 10 triangles équilatéraux et donnant, par pliage, le polyèdre à 10 faces ;
 — soit de compléter la liste des polyèdres convexes, de celui à 4 faces à celui à 20 faces (il n'y en a pas à 18 faces !).

Des procédures systématiques peuvent alors apparaître. Par exemple pour obtenir les polyèdres à 6, 8 et 10 faces il suffit de construire 2 «chapeaux» identiques formés respectivement de 3, 4 et 5 triangles.

L'icosaèdre régulier (20 faces) peut être obtenu en séparant les «chapeaux» par une «bande» de 10 triangles. En séparant les paires de chapeaux formées de 3 (ou 4) triangles par des bandes de 6 (ou 8) triangles, on obtient le polyèdre à 12 faces (ou à 16).

Troisième activité : Patrons de polyèdres.

Matériel.

Crayons de couleur, papier imprimé d'un réseau à mailles triangulaires, papier pointé à mailles triangulaires.

Consigne.

Trouve tous les assemblages différents d'un seul tenant et formés de 4 triangles équilatéraux. Dessine-les sur le papier pointé.

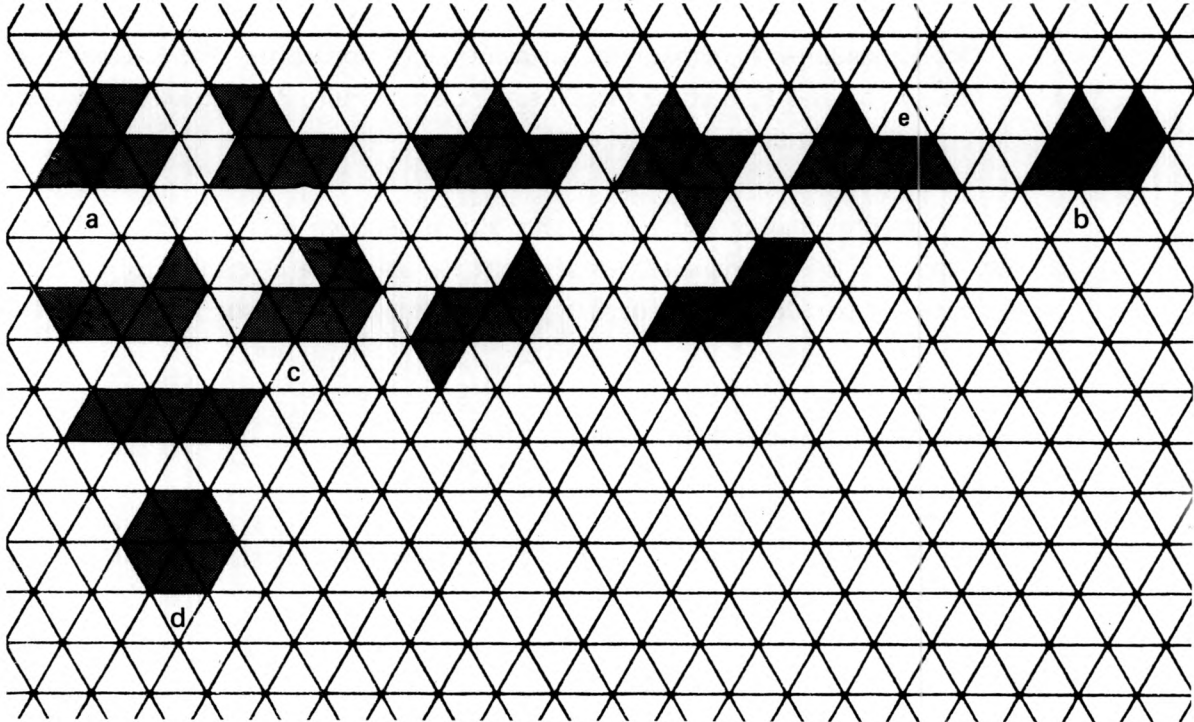
Une fois cette recherche terminée on demande : *quels sont parmi ces assemblages, ceux qui sont des patrons du tétraèdre ?*

Les enfants sont invités à justifier leur réponse en utilisant des formes identiques à leur assemblage et découpées dans le papier à réseau triangulaire. Dans le cas où la forme s'avère être un patron on fait observer comment se forment les arêtes : certaines s'obtiennent par pliage d'autres sont formées par l'assemblage des côtés de deux triangles.

Consigne.

Pour chacun des patrons que tu as trouvés, colorie avec une même couleur les 2 côtés des triangles qui s'assemblent pour former une même arête. Choisis une couleur par arête.

La même activité peut être reprise avec des assemblages de 6 triangles.
Voici les 12 solutions :



Parmi celles-ci a, b, c et d ne sont pas des patrons.

Ceci est prévisible sans utiliser de forme découpée : en effet ces 4 assemblages contiennent chacun 5 triangles avec un sommet commun. Or l'hexaèdre à faces triangulaires comporte 2 sommets associés chacun à 3 faces et 3 sommets associés à 4 faces adjacentes.

Par contre, c'est par pliage qu'on vérifie que les 8 autres formes sont bien des patrons.

Enfin, il y a 2 manières de former un hexaèdre à partir du patron e.

Patron d'un tétraèdre non régulier.

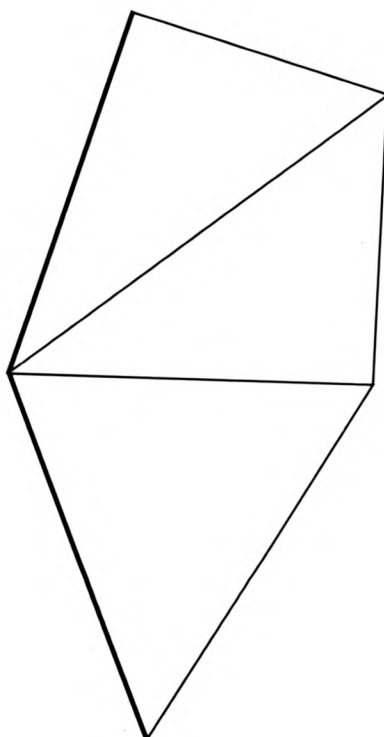
Matériel.

Règle, compas.

Chaque élève dispose d'un tétraèdre régulier construit lors des activités précédentes. Il reçoit la fiche :

Fiche 2

Complète le dessin pour obtenir le patron d'un tétraèdre.



Légende : les côtés en trait gras forment une même arête.

On invite les élèves à effectuer leur recherche à partir d'un calque du dessin.

En général les élèves réalisent assez vite qu'il suffit de compléter le dessin en ajoutant un triangle et que ce triangle a un côté commun avec les côtés non « gras » de la figure. Certains mettent du temps à réaliser que ce triangle n'est pas équilatéral ni même isocèle : en effet, les figures qu'ils construisent selon ces critères sont telles

que les côtés qui devraient s'assembler pour former une arête ne sont pas égaux. Mais ceci est découvert dès qu'on essaie de réaliser le polyèdre.

Cette prise de conscience réalisée, il reste à résoudre un problème de construction plane que l'on peut formuler ainsi : «construire un triangle dont l'un des côtés est donné, les deux autres côtés étant égaux à des segments donnés».

C'est pour les enfants un véritable problème. Ce n'est qu'après de nombreux essais infructueux en utilisant la règle graduée qu'ils pensent à se servir du compas.

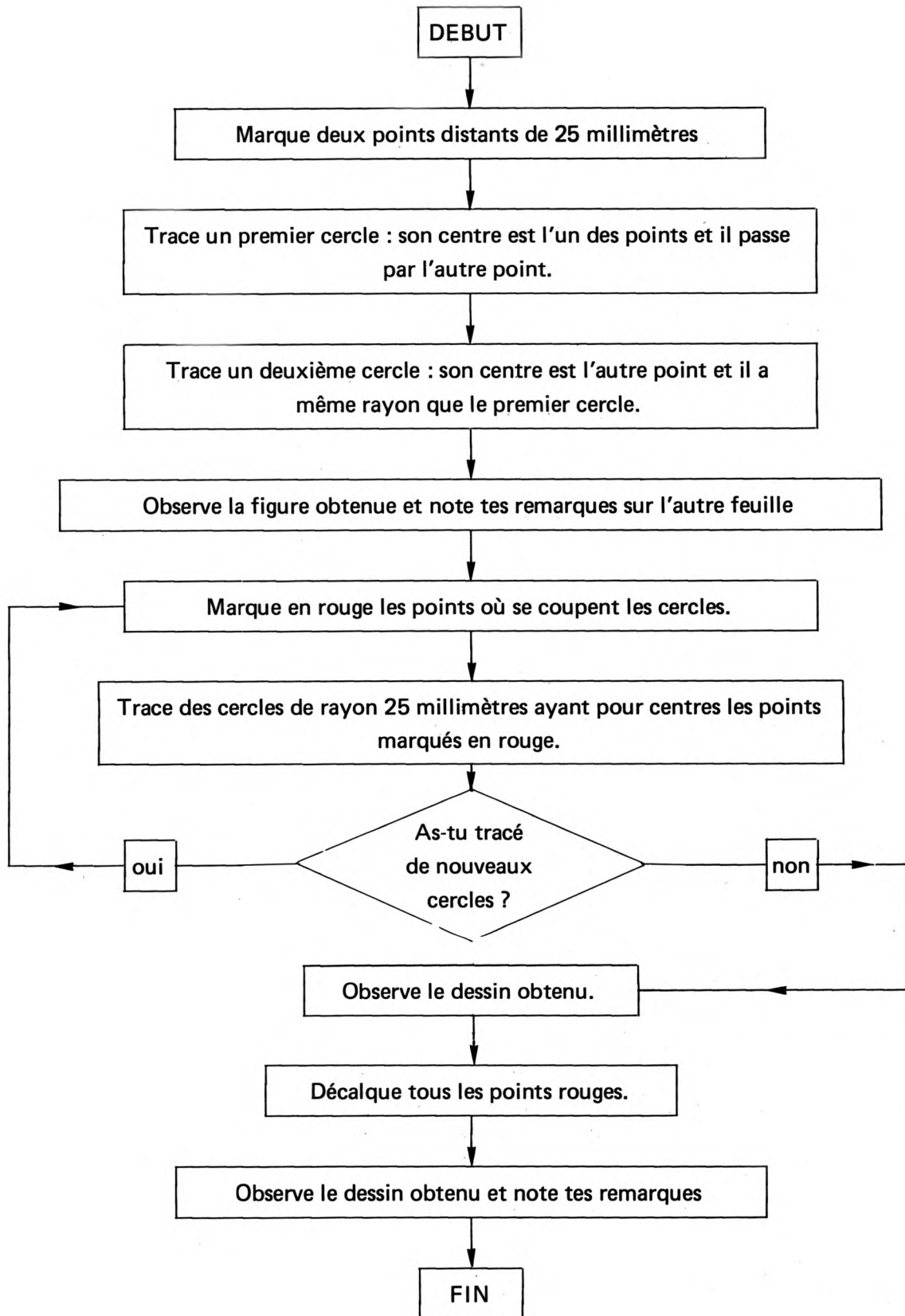
ANNEXE

Fiche 1

Fiche 2

Fiche 1

TRACES DE CERCLES

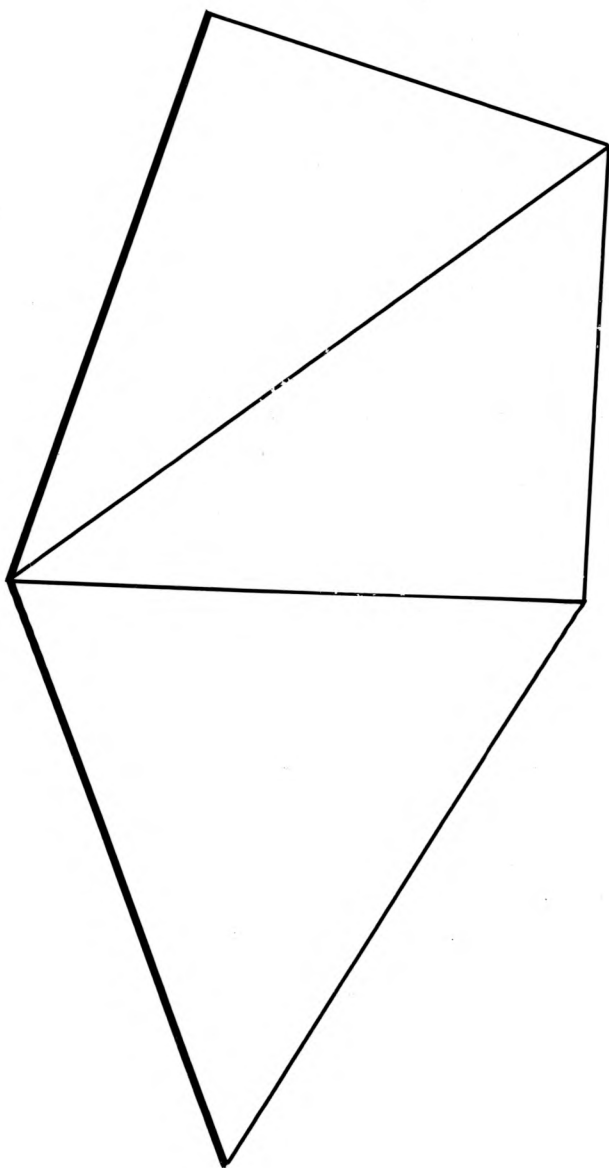


Nom :

Prénom :

Fiche 2

Complète le dessin pour obtenir le patron d'un tétraèdre.



Légende : les côtés en trait gras forment une même arête.

III – OBSERVATION D'UNE FIGURE PLANE COMPLEXE

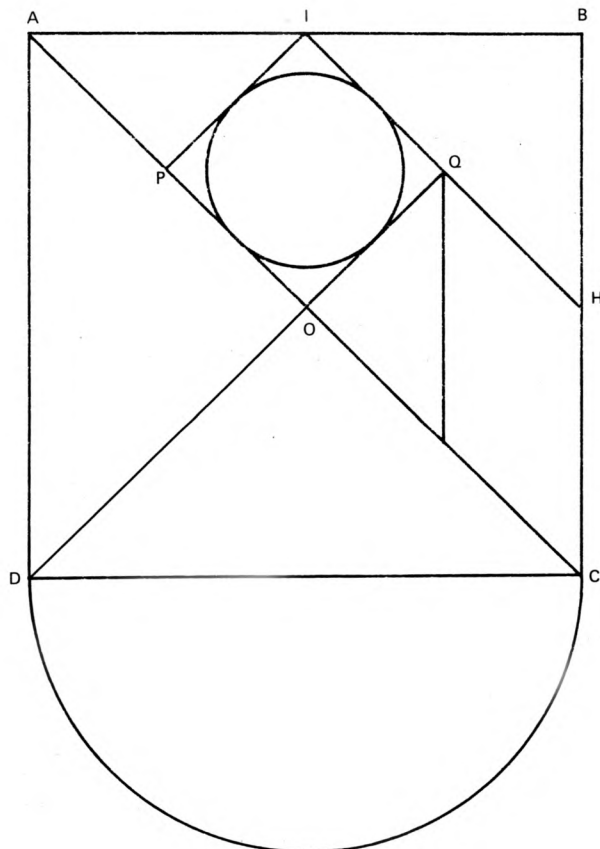
A – TRACE GEOMETRIQUE : REPRODUCTION DE LA FIGURE.

Première séance.

Matériel par élève.

Equerre, compas, règle graduée, feuille de dessin.

La figure ci-dessous, dessinée sur du papier quadrillé (5 mm X 5 mm) cartonné, est affichée au tableau :



Nota bene : le côté du carré mesure en vraie grandeur 32 cm ; les lettres ont été ajoutées pour la rédaction du compte rendu.

Consigne.

1. Reproduis la figure sachant que le côté du carré mesure 16 cm sur ta feuille. (Tu peux te déplacer pour faire des vérifications sur le dessin).

2. Quelles sont les différentes formes que tu vois dans la figure que tu as reproduite ?

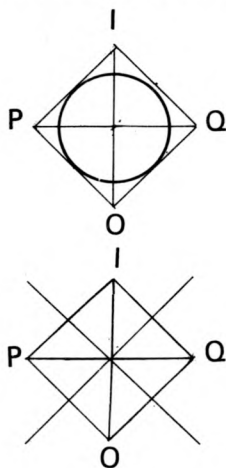
Commentaires.

La figure a été disposée de deux façons différentes selon les classes, avec le demi-cercle au-dessous ou au-dessus du carré. Cette différence de disposition peut entraîner des comportements différents chez les élèves. Avec la disposition «le demi-cercle au-dessus» beaucoup d'élèves ont éprouvé le besoin de vérifier l'égalité des côtés du carré mais ils ne se sont pas posé la question de l'orthogonalité de ces côtés : le demi-cercle perturberait-il alors la perception du carré ?

Avec la disposition «le demi-cercle au dessous», le carré a été unanimement adopté sans vérification.

Plus ou moins nombreux selon les groupes, des élèves se sont déplacés pour vérifier que I et H sont les milieux des côtés AB et BC. Le parallélisme de AC et IH a été observé. Mais faute de moyen technique pour tracer IH, les élèves ont d'abord marqué I et H puis tracé IH.

Le demi-cercle de diamètre DC a été tracé sans difficulté. Par contre la recherche du centre et du rayon du cercle inscrit dans le carré a été plus longue et différentes méthodes ont été utilisées :



a) tracé des diagonales du carré IQOP, puis tracé du cercle «tangent» aux côtés, centré au point d'intersection des diagonales. Nombreux sont les élèves qui marquent les milieux des côtés et trouvent le cercle en le faisant «passer» par ces points ;

b) tracé des médianes du carré IQOP, puis tracé du cercle centré au point d'intersection des médianes ;

c) recherche des milieux des côtés du carré IQOP et recherche intuitive du centre en prenant comme écartement du compas la moitié du côté du carré ;

d) tracé d'une diagonale et recherche du milieu de la diagonale.

Erreurs relevées.

- Constructions ne s'appuyant que sur certaines propriétés du carré, nécessaires mais non suffisantes. Exemple : construction du carré respectant l'égalité des côtés mais négligeant l'orthogonalité.
- Conviction de l'égalité des longueurs de la diagonale et du côté du carré.
- Persistance d'erreurs de mesure. Exemple : bout de la règle pris comme zéro.
- Erreurs liées aux opérations sur les mesures décimales.
- Le carré IPOQ est appelé losange à cause de sa disposition sur le dessin.

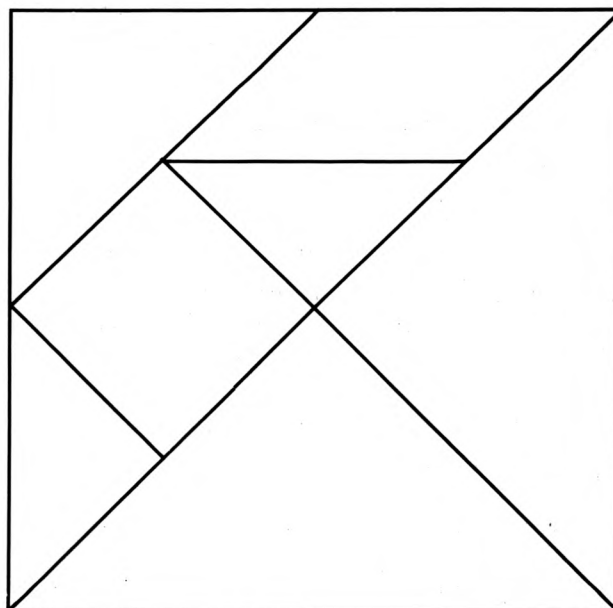
B – FAMILLES DES QUADRILATERES FORMES PAR LES TRAITS DE LA FIGURE.**Deuxième séance.**

Recherche de tous les quadrilatères formés par les traits de la figure donnée à la première séance.

Matériel.

Une feuille de papier quadrillé (5 mm X 5 mm) et les instruments de la première séance.

Chaque élève reçoit une feuille blanche sur laquelle est dessinée la figure ci-dessous (les cercles ont été effacés ; c'est donc le tangram) :

Fiche 1

La séance commence par une discussion sur la question : «qu'est-ce qu'un quadrilatère ?».

Consigne.

1. *Reproduis sur ta feuille tous les quadrilatères différents formés par les traits de la figure. Tu les reproduis un à un, à la même échelle.*

2. *Si tu connais le nom de certaines figures, écris-le au-dessous du dessin.*

Voici les solutions :

- 2 carrés,
- 1 parallélogramme,
- 2 trapèzes isocèles,
- 2 trapèzes rectangles,
- 1 quadrilatère convexe avec 2 angles droits,
- 1 quadrilatère non convexe,
- 1 quadrilatère croisé.

Commentaire.

Les élèves ont presque tous trouvé facilement 8 quadrilatères, mais quelques uns ont dessiné des quadrilatères identiques. Ils ont oublié, en général, le quadrilatère non convexe.

Quelques élèves ont découvert le quadrilatère croisé sans donner son nom (ADOQR)*.

Le nom des autres quadrilatères n'a pas toujours été trouvé excepté le carré. En général le parallélogramme est connu ; le trapèze l'est beaucoup moins. Le petit carré (IPOQ)* a été nommé «losange» par beaucoup d'élèves en raison de sa disposition particulière par rapport à des directions privilégiées.

Peu d'élèves se servent du compas pour la construction ; ils utilisent plutôt la règle et l'équerre.

Troisième séance.

Recherche des propriétés caractéristiques des quadrilatères nommés dans la deuxième séance.

1. Phase orale.

Tous les quadrilatères trouvés au cours de la deuxième séance sont dessinés au tableau.

* Voir la figure page 47

Consigne.

Nommez les quadrilatères, trouvez des propriétés pour chacun d'eux et comparez ces propriétés.

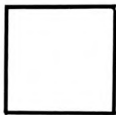
A la fin de cette phase le nom de chaque quadrilatère est écrit au tableau.

2. Phase écrite.**Matériel.**

Chaque élève reçoit une feuille sur laquelle tous les quadrilatères sont dessinés.

Fiche 2

*Donne le maximum de noms à chacune de ces figures d'après leurs propriétés.
Justifie ta réponse.*

Consigne.

Donne le maximum de noms à chacune des figures d'après leurs propriétés. Justifie chaque nom.

Commentaires.

La phase orale a permis de dégager, par comparaison des figures entre elles, les propriétés caractéristiques des quadrilatères. Ces propriétés pourraient définir chaque type de quadrilatère. (Dans l'une des classes observées ces définitions ont été formulées). La phase écrite a été moins productive et plus difficile pour un bon nombre d'élèves. Certains ne sont pas arrivés à faire des listes exhaustives des noms possibles pour une figure, ne retenant que la propriété qui la distingue des autres. Exemple : le nom « trapèze » n'est pas attribué au parallélogramme les élèves ne retenant que la propriété des côtés parallèles deux à deux.

Quatrième séance.

Correction complète de la séance précédente. Construction de parallélogramme sans mesurer avec une règle graduée.

Matériel.

Compas, règle non graduée, ainsi que la fiche suivante.

Fiche 3

**CONSTRUCTIONS DE PARALLELOGRAMMES
SANS MESURER AVEC UNE REGLE GRADUEE**

1. Construis un parallélogramme.

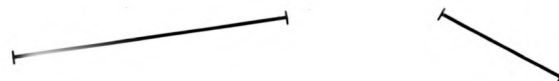
- Les côtés ont pour longueur celle des segments



- Une hauteur a pour longueur celle du segment

**2. Construis un parallélogramme.**

- Les côtés ont pour longueur celle des segments



- Un angle mesure 33° .

Commentaires.

La phase de correction a été très longue et a permis de faire une mise au point utile sur les propriétés caractéristiques des trapèzes, parallélogrammes, losanges et carrés. Dans l'une des classes observées, les élèves ont écrit sur leur cahier les définitions de ces différents quadrilatères.

Une autre séance a été nécessaire pour mener jusqu'au bout la construction des parallélogrammes (sans utiliser la règle graduée). Les difficultés portaient particulièrement sur

- l'utilisation du compas comme instrument de report de longueurs ;
- l'utilisation du rapporteur pour la deuxième construction ;
- le tracé de deux droites parallèles ;
- l'introduction d'une troisième donnée : la hauteur.

On a pu observer un manque de rigueur et de précision dans la construction, les élèves ne cherchant pas à vérifier leurs constructions et se satisfaisant d'un résultat «à peu près».

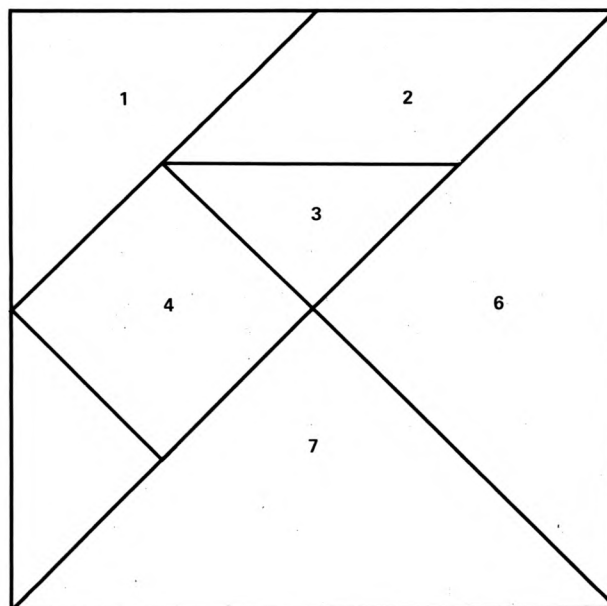
C – ETUDE DES AIRES DES QUADRILATERES FORMES PAR LES TRAITS DE LA FIGURE.

Cinquième séance.

Comparaison des aires des pièces du tangram et calcul de ces aires avec différentes unités.

Matériel.

Fiche 4



Fiche 5

AIRES

Numéros des pièces	Unité d'Aire : le cm^2	Unité d'aire : aire du triangle 1
3 - 5		
1 - 4 - 2		
6 - 7		

Consignes.

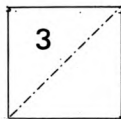
- 1) *Découpe la figure suivant les traits. Tu obtiens 7 pièces numérotées.*
- 2) *Parmi ces pièces, quelles sont celles qui ont la même aire ?*
- 3) *Range ces pièces d'après leur aire, de la plus petite aire à la plus grande aire.*
- 4) a) *Calcule l'aire de chacune des pièces sachant que l'unité d'aire est l'aire du triangle 1.*
 b) *Calcule l'aire de chacune des pièces en cm^2 sans mesurer les côtés des différentes pièces, sachant que le côté du grand carré mesure 12 cm. Tu utilisera la fiche 6 pour écrire tes résultats*.*

* Ce travail aurait pu aussi bien être mené sur tous les quadrilatères de la figure.

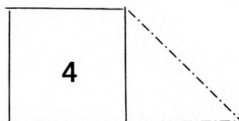
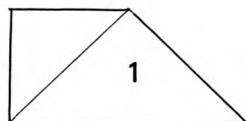
Commentaires.

a) La séquence de comparaison des pièces a été très fructueuse, les élèves ayant mis en œuvre des procédés différents et intéressants. Très rapidement les élèves remarquent :

- 3 et 5 ont la même aire, 6 et 7 aussi.
- 3 est deux fois plus petit que 4 ; les élèves trouvent ce résultat en posant ainsi 3 sur 4 :

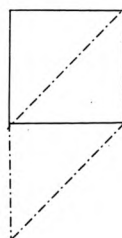


- 4 a la même aire que 1 : les élèves posent ainsi 1 et 4 :

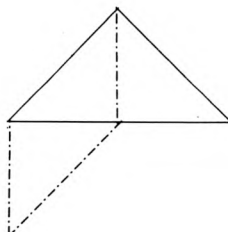


Voici les dispositions utilisées par les élèves.

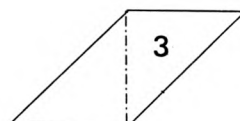
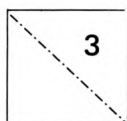
Pour comparer 2 et 4 :



Pour comparer 2 et 1 :



Pour comparer 2 et 4, en utilisant la pièce 3 comme intermédiaire, soit par pliage, soit par superposition :



b) Le calcul des aires a été beaucoup plus délicat. Cette séquence a été menée collectivement, trop de difficultés surgissaient pour un travail individuel.

Le choix du triangle pour unité d'aire crée un blocage car les élèves ont cherché un procédé de calcul sans utiliser les résultats des questions 2 et 3. Il a fallu les mettre sur la voie.

Le calcul en cm^2 s'est engagé plus facilement, les élèves ayant l'idée d'utiliser des formules. Nous avons choisi de rappeler celle donnant l'aire du carré (souvent confondue avec la formule du périmètre).

Les aires des pièces en cm^2 peuvent donc être obtenues par formules ou par comparaison à une pièce dont l'aire est calculée. Le dernier procédé a permis de retrouver la formule donnant l'aire du triangle puis celle du parallélogramme.

ANNEXE

Fiche 1

Fiche 2

Fiche 3

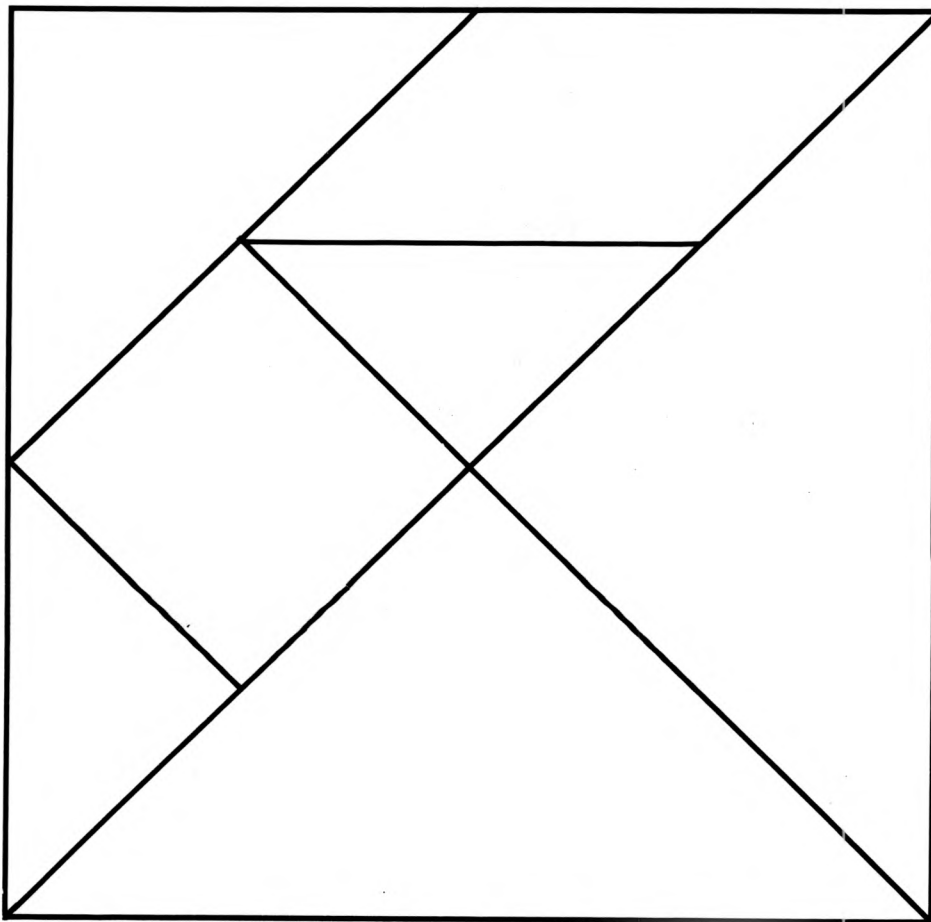
Fiche 4

Fiche 5

Nom :

Prénom :

Fiche 1

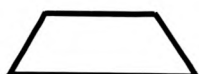
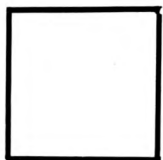


Nom :

Prénom :

Fiche 2

*Donne le maximum de noms à chacune de ces figures d'après leurs propriétés.
Justifie ta réponse.*



Nom :

Prénom :

Fiche 3

**CONSTRUCTIONS DE PARALLELOGRAMMES
SANS MESURER AVEC UNE REGLE GRADUEE**

1. *Construis un parallélogramme.*

- Les côtés ont pour longueur celle des segments

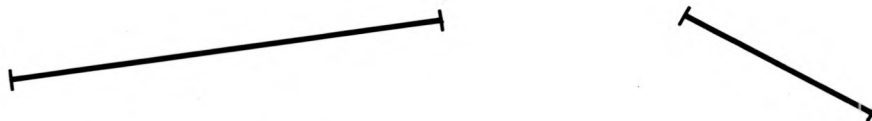


- Une hauteur a pour longueur celle du segment



2. *Construis un parallélogramme.*

- Les côtés ont pour longueur celle des segments

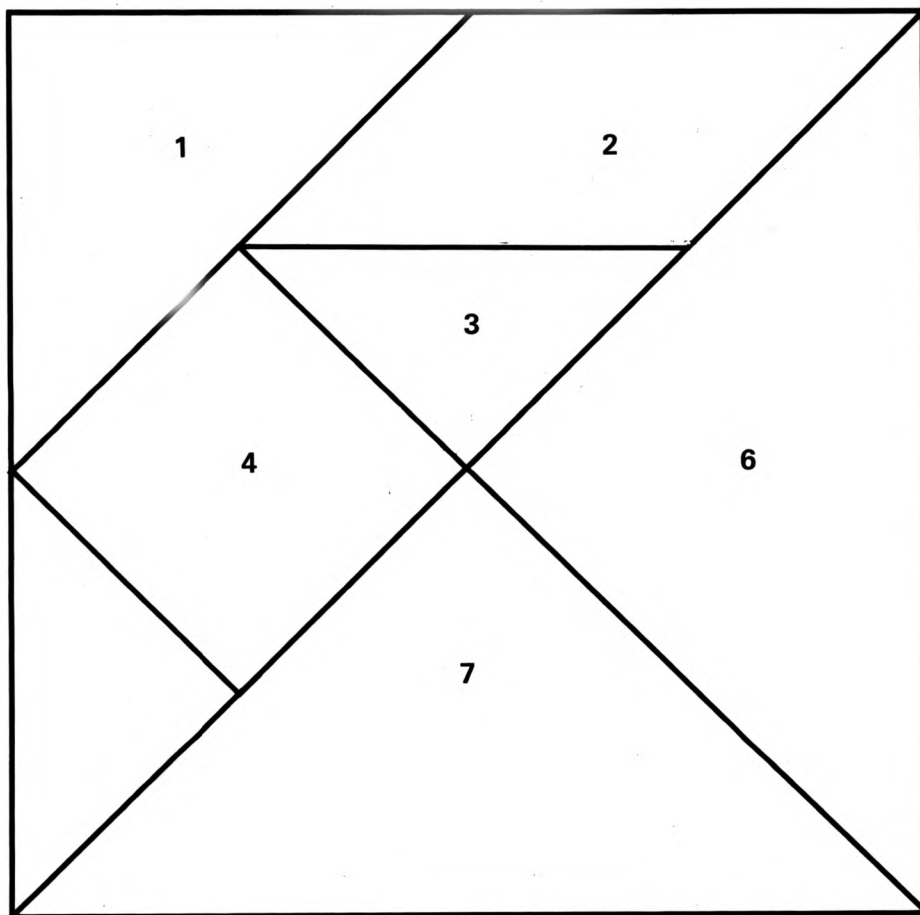


- Un angle mesure 33° .

Nom :

Prénom :

Fiche 4



Nom :

Prénom :

Fiche 5

AIRES

Numéros des pièces	Unité d'Aire : le cm^2	Unité d'aire : aire du triangle 1
3 - 5		
1 - 4 - 2		
6 - 7		

IV – REPRESENTATIONS EN PERSPECTIVE DE POLYEDRES SIMPLES

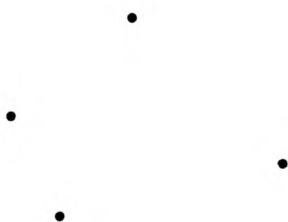
A – INTRODUCTION A LA REPRESENTATION EN PERSPECTIVE : REPRESENTATIONS DU TETRAEDRE.

Première activité : fiche 1 (de 5 à 10 minutes).

Cette fiche est donnée sans commentaire aux enfants. Ceux-ci disposent d'un tétraèdre régulier construit précédemment et on rappelle qu'un tétraèdre est un solide ayant 4 faces triangulaires et 6 arêtes.

Ce travail se situe à la fin d'une séance. Les fiches sont relevées et le travail est poursuivi la séance suivante.

Fiche 1



Ces quatre points correspondent aux quatre sommets d'un tétraèdre.

1. *Relie-les pour obtenir une représentation en perspective de ce tétraèdre.*

2. *Observe bien ton dessin.*

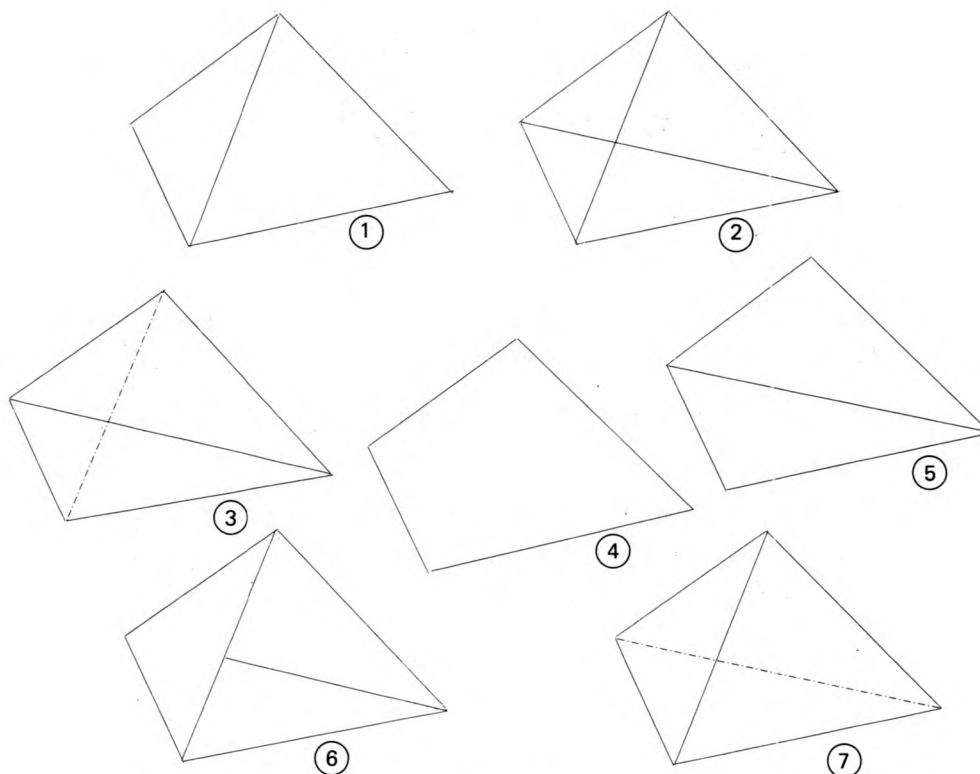
Combien d'arêtes du tétraèdre sont vues ?.....

Combien d'arêtes du tétraèdre sont cachées ?.....

Combien de faces du tétraèdre sont vues ?.....

Combien de faces du tétraèdre sont cachées ?.....

Deuxième activité : fiche 2.



1. Parmi ces dessins quels sont ceux qui sont des représentations en perspective d'un tétraèdre ?

2. Pour le dessin ①, on a obtenu les réponses suivantes :

AV	4	FV	3
AC	4	FC	3
AV	5	FV	2
AC	1	FC	2
AV	3	FV	2
AC	1	FC	2

AV	3	FV	3
AC	2	FC	1
AV	3	FV	2
AC	3	FC	2
AV	5	FV	2
AC	3	FC	3

Barre les réponses qui te paraissent fausses.

Légende : AV : arêtes vues FV : faces vues
AC : arêtes cachées FC : faces cachées

Tous les dessins proposés par les enfants sur la fiche 1 ont été relevés.

Chaque enfant est ainsi amené à réfléchir sur d'autres représentations que celle qu'il avait faite.

Une synthèse suit immédiatement la réponse à la question 1 de la fiche 2 :

■ « Dans une représentation en perspective du tétraèdre on dessine ce que l'on voit ».

Cette définition a conduit certains enfants à ne donner que ① et ⑤.

- «Mais on peut aussi indiquer en pointillés les arêtes cachées».

Alors (3) et (7) sont aussi des représentations en perspective du tétraèdre.

- On arrive à la convention suivante ; dans une représentation en perspective, on dessine les arêtes que l'on voit en trait plein et les arêtes cachées en pointillés.

Ceci conduit à éliminer (2) retenu initialement par plusieurs enfants comme représentation possible.

Après cette synthèse il y a peu d'erreurs pour la question 2 alors que de nombreuses erreurs avaient été relevées sur la fiche 1 à propos du nombre d'arêtes vues ou cachées et du nombre de faces vues ou cachées.

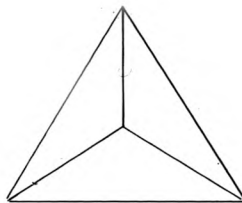
Troisième activité.

Consigne.

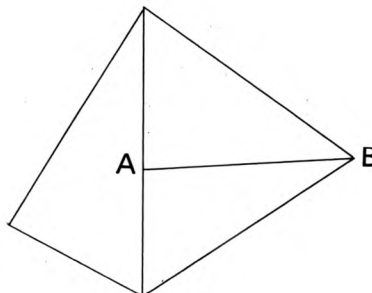
Place des points et relie-les pour que ton dessin représente un tétraèdre dont tu vois 3 faces ; puis recommence pour un tétraèdre dont tu vois une face. (Les arêtes cachées seront marquées).

Remarques.

- a) Pour trois faces vues, la plupart des enfants dessinent :



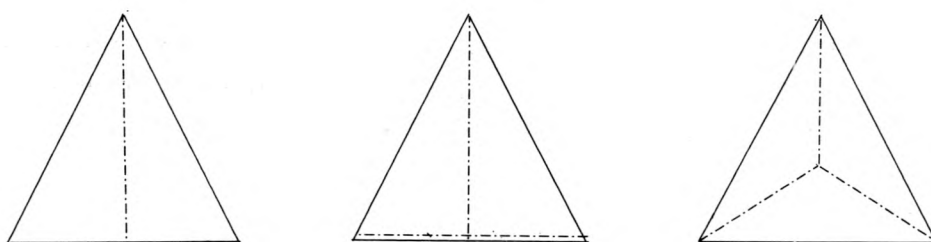
Mais ceux qui commencent par placer 4 points disposés comme sur la fiche 1 recherchent sur la fiche 3 la réponse au problème posé et dessinent :



La manipulation du tétraèdre permet de constater qu'aucune position du tétraèdre ne permet de le voir ainsi : le segment AB ne peut pas représenter une arête du tétraèdre.

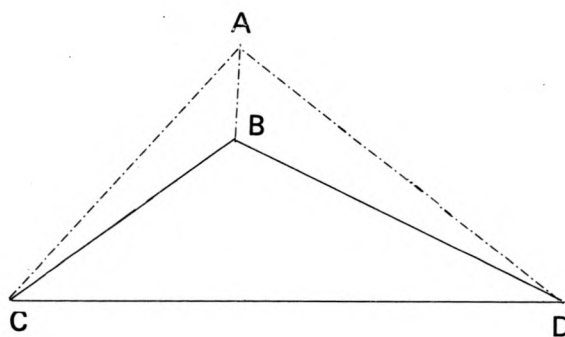
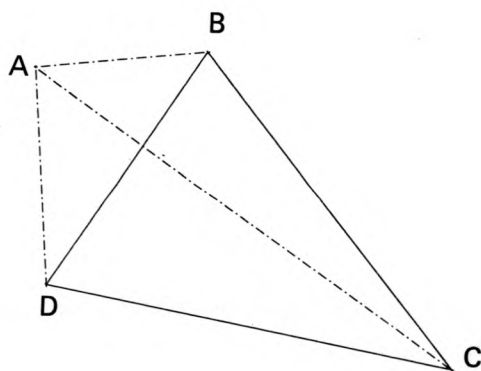
b) Pour une face vue.

On obtient fréquemment les dessins :



Quelques enfants ont de sérieuses difficultés pour représenter un tétraèdre dont on ne voit qu'une face.

Le triangle vu est dessiné en premier et le sommet caché qui se trouve en arrière de la face vue n'est jamais placé à l'intérieur de ce triangle mais à l'extérieur au-dessus ; ils dessinent :



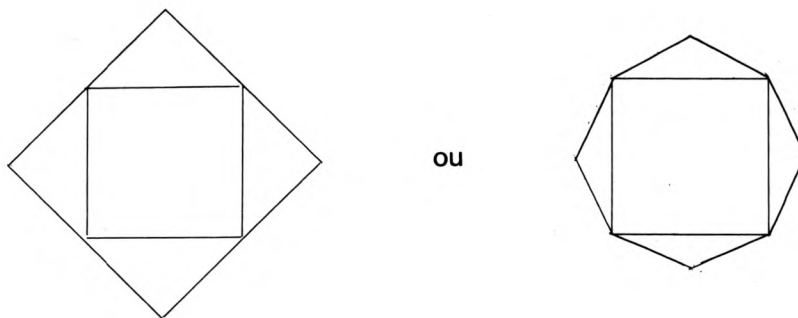
B – CARACTERISATION DE REPRESENTATIONS EN PERSPECTIVE SELON LES PROPRIETES QU'ELLES CONSERVENT.

Quatrième activité.

Les enfants doivent construire une pyramide à base carrée de côté 5 cm dont toutes les autres faces sont des triangles isocèles non équilatéraux. Ce travail se fait à partir d'une feuille de dessin. (Des pyramides en plastique de base carrée de 10 cm de côté sont dans la classe).

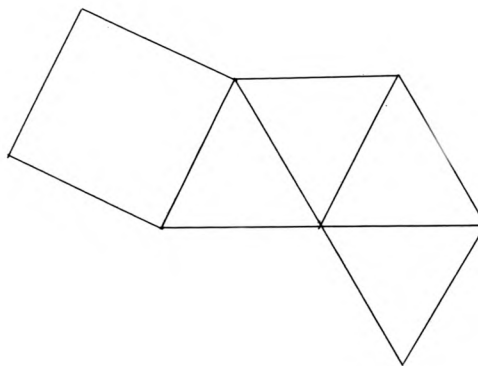
Remarques.

- Certains enfants confondent patron et dessin en perspective.
- Malgré la consigne de nombreux enfants construisent le patron d'une pyramide à base carrée de 5 cm de côté dont toutes les autres faces sont des triangles équilatéraux de 5 cm de côté.
- Quelques-uns construisent des triangles isocèles qui ne permettent pas de fabriquer la pyramide :

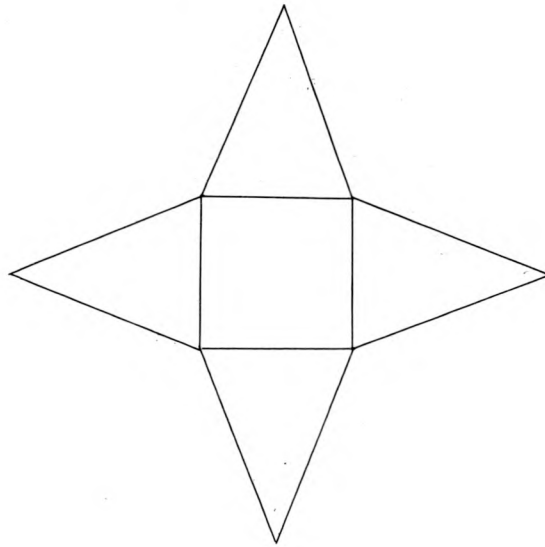


Ce n'est qu'après avoir découpé et essayé de coller qu'ils se rendent compte de leur erreur.

- Une seule élève fait un patron du type :



Tous les autres sont du type :

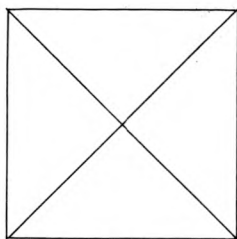


Cinquième activité.

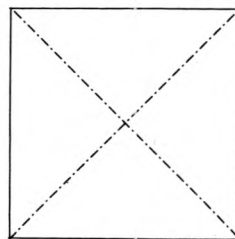
Tous les enfants disposent de la pyramide construite. Ils doivent dessiner sur une feuille de papier quadrillé différentes représentations en perspective de cette pyramide. (On choisit du papier quadrillé pour faciliter le tracé des parallèles).

Les premières représentations dessinées sont en général les suivantes qui conservent simultanément :

- le carré de 5 cm de côté ;
- les triangles isocèles.



①



②

Ensuite de nombreux enfants sont ennuyés car ils ne voient plus comment faire à la fois un carré de 5 cm de côté et 4 triangles isocèles.

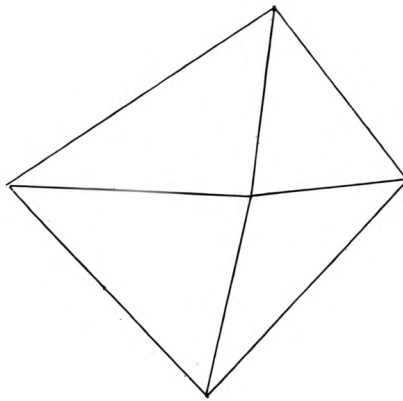
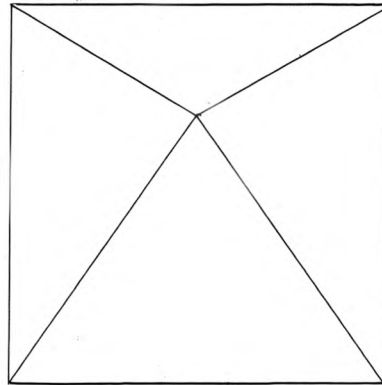
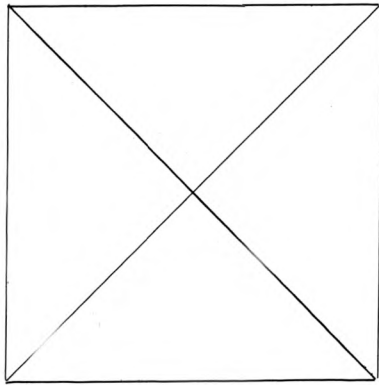
En revenant sur le travail précédent concernant le tétraèdre on trouve que

① correspond à 4 faces vues pour la pyramide et ② à 1 face vue.

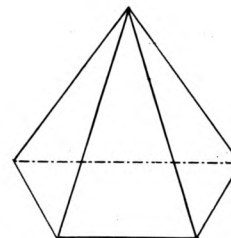
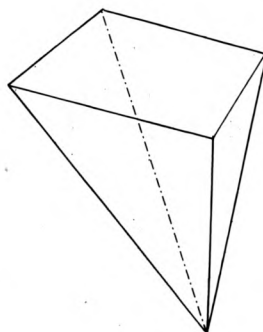
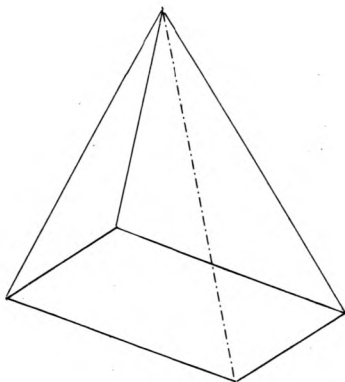
On fait alors remarquer qu'il y a certainement d'autres positions de la pyramide qui permettent de voir 1 face, 2 faces ou 3 faces. Il faut dessiner ce que l'on voit et indiquer en pointillés les arêtes cachées.

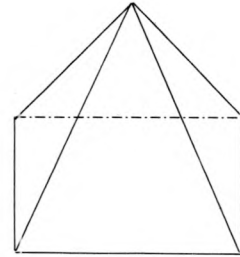
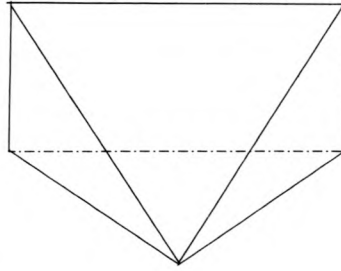
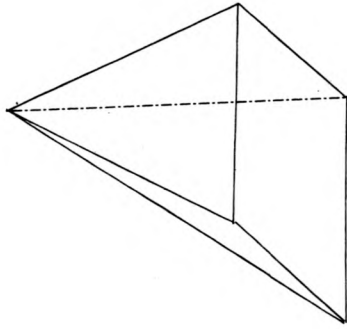
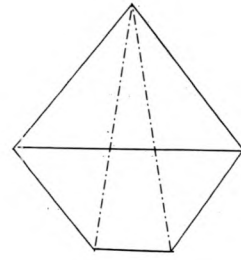
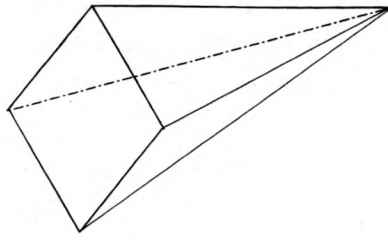
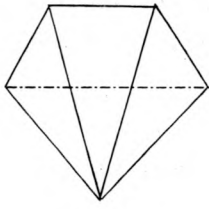
Tous les dessins faits par les enfants sont relevés dans les pages suivantes.

4 faces vues.

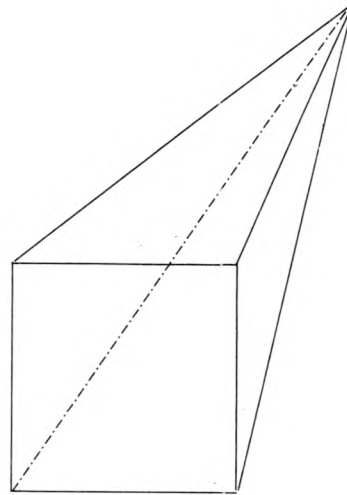
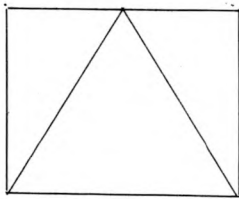
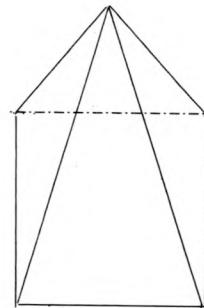
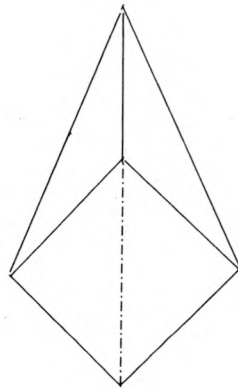
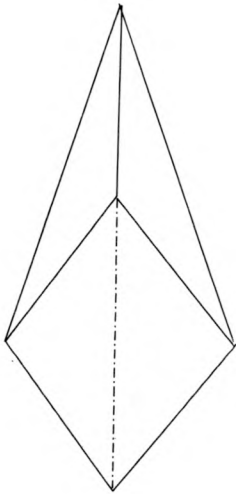


3 faces vues.

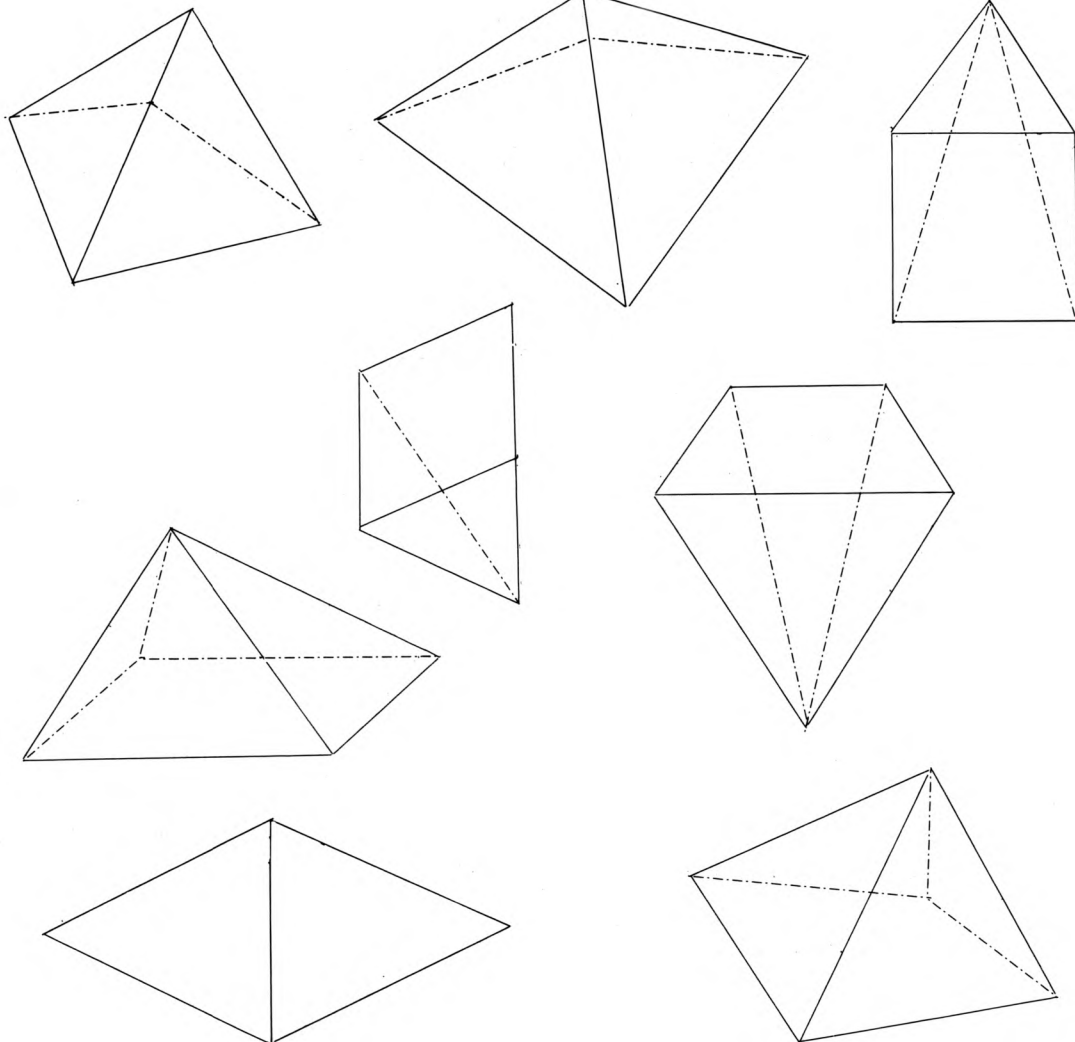




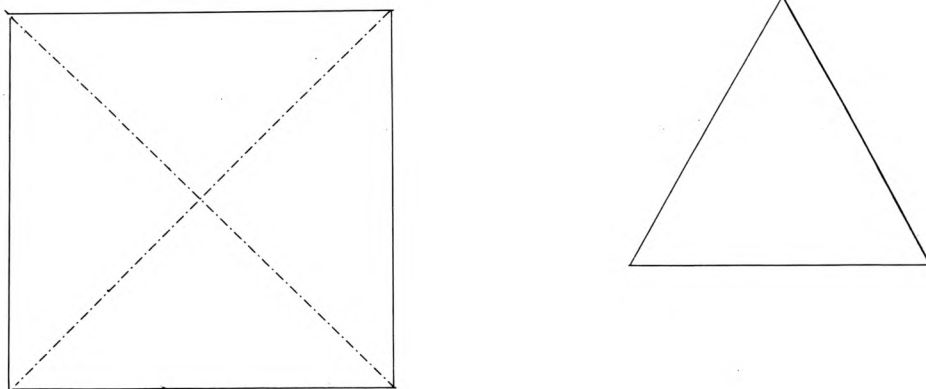
3 faces vues.



2 faces vues.



1 face vue.



Les comparaisons des dessins trouvés dans un même groupe permettent de voir que certaines représentations

- conservent les angles droits de la base ;
- le parallélisme ;
- les triangles isocèles.

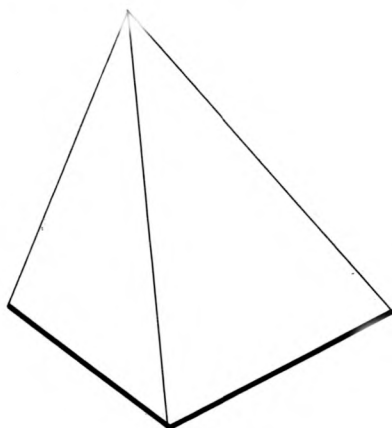
C'est l'occasion de rappeler les noms des quadrilatères particuliers et leurs propriétés.

Sixième activité.

Les enfants disposent toujours de leur pyramide.

Consigne.

Complète ce dessin pour qu'il représente la pyramide dans une perspective qui conserve le parallélisme.



(Ce dessin est réalisé cette-fois ci sur une feuille de papier blanc).

Les arêtes de base sont représentées par un trait gras.

Beaucoup d'enfants, à juste titre, veulent représenter la base par un parallélogramme mais voulant le faire au jugé, ils ont de sérieuses difficultés à tracer des parallèles.

La construction au compas du 4ème sommet du parallélogramme est alors exigée. Elle constitue un véritable problème.

Ce travail sur la perspective conservant le parallélisme se poursuit lors des activités portant sur le volume.

ANNEXE

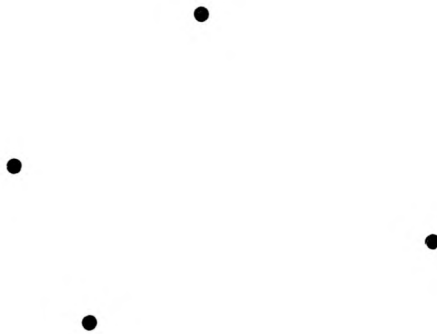
Fiche 1

Fiche 2

Nom :

Classe :

Fiche 1



Ces quatre points correspondent aux quatre sommets d'un tétraèdre.

1. *Relie-les pour obtenir une représentation en perspective de ce tétraèdre.*

2. *Observe bien ton dessin.*

Combien d'arêtes du tétraèdre sont vues ?.....

Combien d'arêtes du tétraèdre sont cachées ?.....

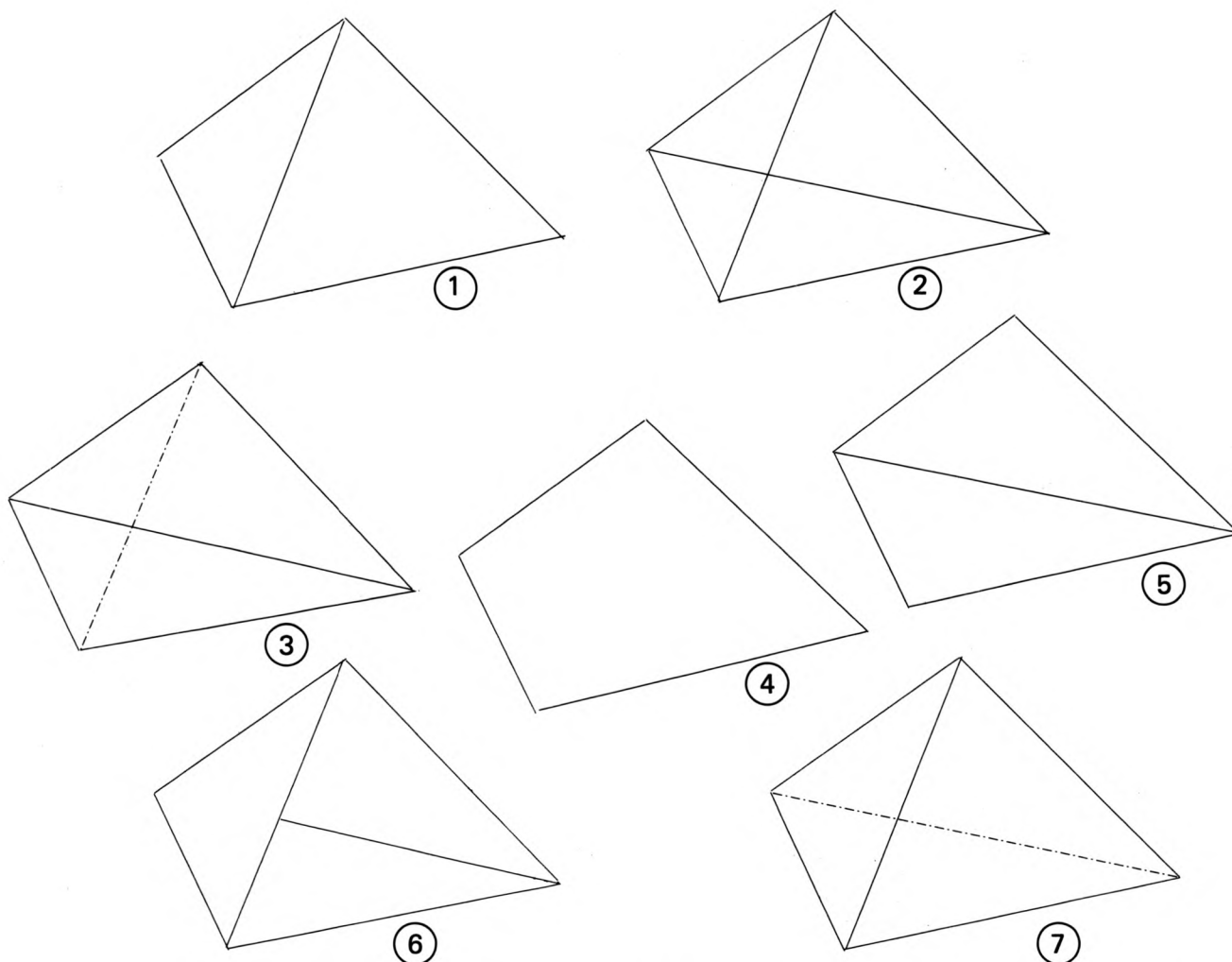
Combien de faces du tétraèdre sont vues ?.....

Combien de faces du tétraèdre sont cachées ?.....

Nom :

Classe :

Fiche 2



1. Parmi ces dessins quels sont ceux qui sont des représentations en perspective d'un tétraèdre ?

2. Pour le dessin ①, on a obtenu les réponses suivantes :

AV	4	FV	3
AC	4	FC	3
AV	5	FV	2
AC	1	FC	2
AV	3	FV	2
AC	1	FC	2

AV	3	FV	3
AC	2	FC	1
AV	3	FV	2
AC	3	FC	2
AV	5	FV	2
AC	3	FC	3

Barre les réponses qui te paraissent fausses.

Légende : AV : arêtes vues
AC : arêtes cachées

FV : faces vues
FC : faces cachées

V – NOTION DE VOLUME

Les activités décrites ici succèdent à celles sur la représentation en perspective. On n'y considère que les volumes des pavés droits, des prismes droits et des pyramides à bases carrée.

A – INTRODUCTION DE LA NOTION DE VOLUME : VOLUME DU PAVE.

Première activité.

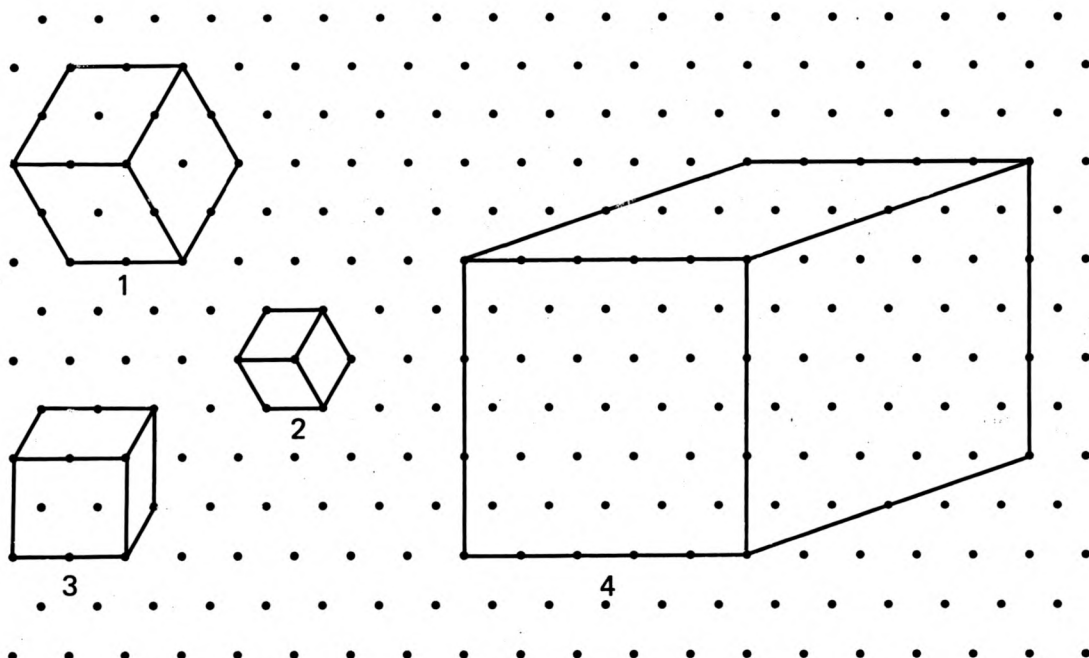
Chaque élève dispose de 24 cubes emboîtables et d'une feuille de papier pointé (réseau triangulaire).

On donne successivement les consignes suivantes :

- 1) *Construis un pavé avec les 24 cubes emboîtables.*
- 2) *Il y a d'autres pavés formés de 24 cubes : trouve-les tous et désigne-les.*
- 3) *Dessine un cube sur la feuille de papier pointé dans une perspective qui conserve le parallélisme et l'égalité des côtés : les sommets doivent être sur les points du réseau.*

Commentaire.

A la suite de cette consigne les élèves proposent plusieurs solutions :



L'emprise de la représentation standard  du cube est telle que les élèves ont des difficultés à s'en détacher (cf. dessins 3 et 4).

Deuxième activité.

On choisit le dessin 2 pour représenter un cube emboîtable.

Consigne.

Dessine tous les pavés de 24 cubes dans la même perspective sur une feuille de papier pointé.

Une fois les dessins réalisés, on introduit ainsi la notion de **volume** :

Si on choisit comme **unité de volume** le volume de l'un des cubes emboîtables, tous ces pavés ont pour volume 24.

On fait alors établir la relation qui lie le nombre 24 à la mesure des côtés des pavés (si cela n'a pas été déjà découvert).

On en déduit la **formule générale du volume d'un pavé droit** dont les arêtes mesurent a , b , c :

$$V = a \times b \times c.$$

Troisième activité : Volume du pavé et aire de sa surface.

On demande aux élèves de remplir le tableau suivant pour les pavés de volume 24 trouvés dans la séance précédente :

Désignation du pavé	Aire de la surface du pavé

(Unité d'aire : aire d'une face du cube unité).

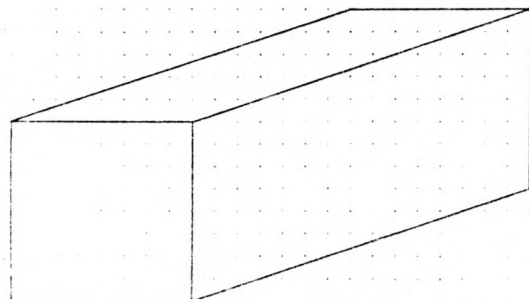
Quel est le pavé qui a l'aire la plus petite ?

Quel est le pavé qui a l'aire la plus grande ?

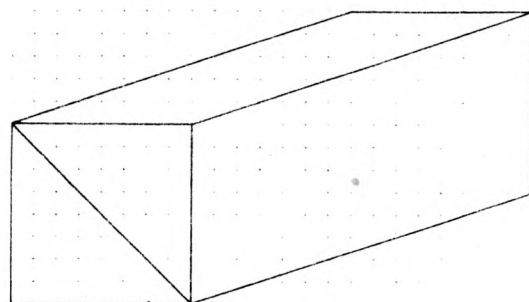
On établit des **formules générales** donnant l'aire de la surface du pavé.

B – EXTENSIONS DE LA NOTION DE VOLUME : VOLUME DE PRISMES DROITS.**Quatrième activité : première extension.**

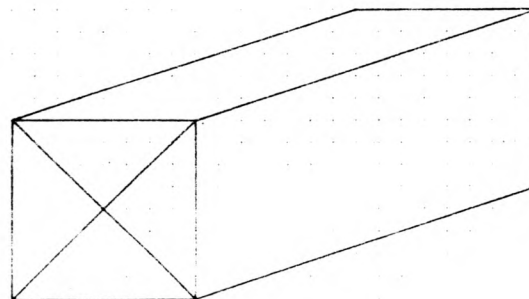
On affiche successivement au tableau les représentations suivantes en les commentant :



(réduction)



(réduction)



(réduction)

C'est l'occasion d'introduire, s'il n'est pas connu, le terme «**prisme à base triangulaire**» : les deux coupes successives permettent d'obtenir quatre prismes droits à base triangulaire égaux.

On demande aux élèves de construire en vraie grandeur l'un des quatre prismes, puis de calculer son volume.

Puis on pose la question : «Est-il vrai que le volume de ce prisme est égal au produit de l'aire du triangle de base par la hauteur du prisme ? Justifie ta réponse».

Cinquième activité : deuxième extension.

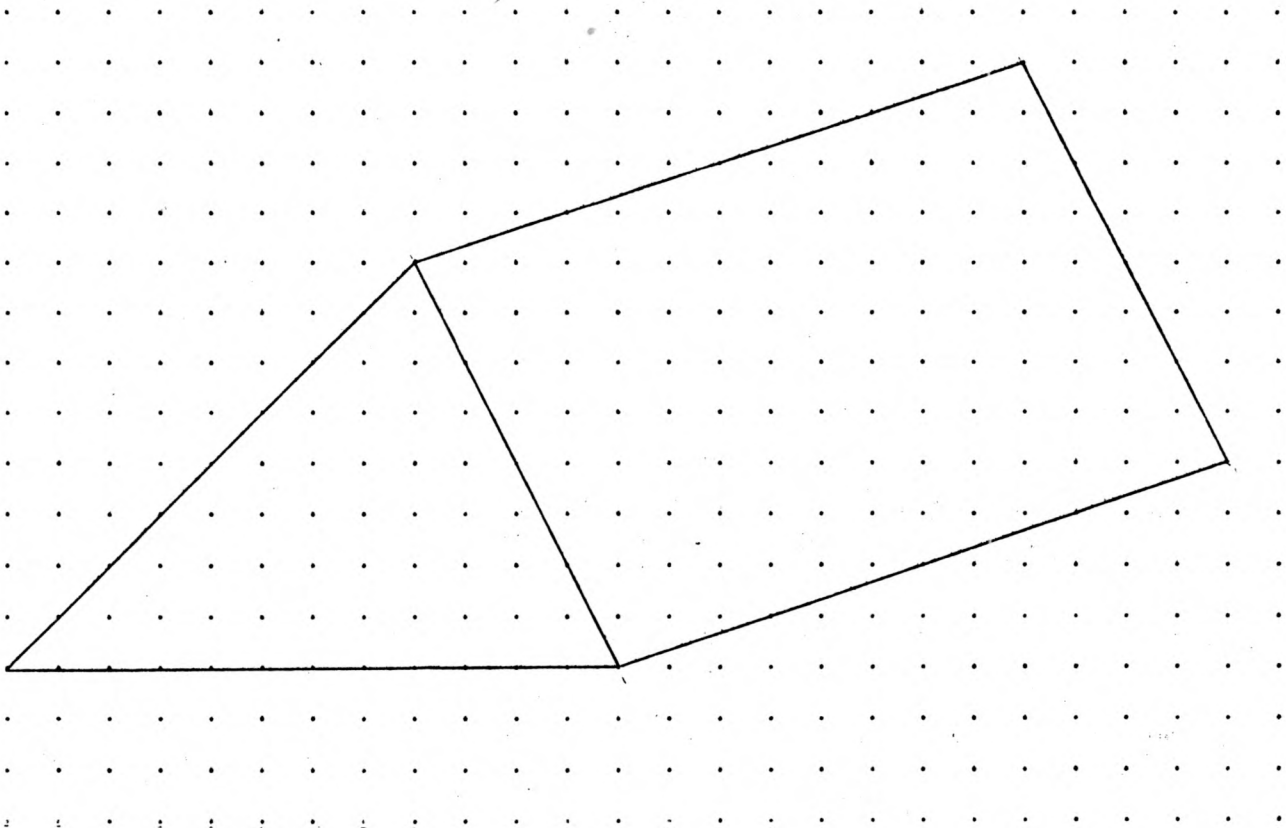
On présente à la classe trois solides : ces solides sont trois prismes droits à base triangulaire **inégaux**, respectivement jaune, bleu et rouge. Les prismes bleu et rouge assemblés convenablement donnent le prisme jaune et on peut former un pavé droit avec les trois prismes. (L'assemblage des trois prismes en pavé reste sous les yeux des élèves).

On distribue à chaque élève la fiche suivante (fiche 2).

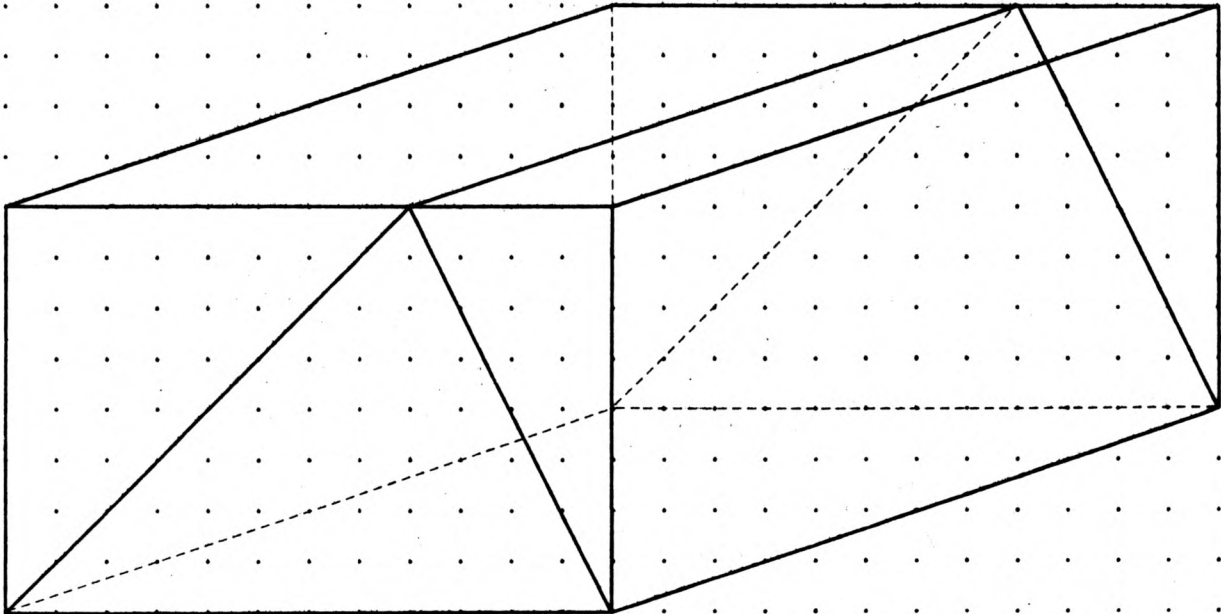
PRISME à base triangulaire

Ce dessin représente le prisme jaune dans une perspective conservant le parallélisme :

- indique en pointillés jaunes les arêtes cachées ;
- complète le dessin pour qu'il représente le pavé par les prismes bleu, jaune et rouge (dans la même perspective).



Voici la solution :



On demande le volume du pavé représenté ; puis celui du prisme jaune.

On pose la question : «Est-il vrai que le volume de ce prisme est égal au produit de l'aire du triangle de base par la hauteur du prisme ? Justifie ta réponse».

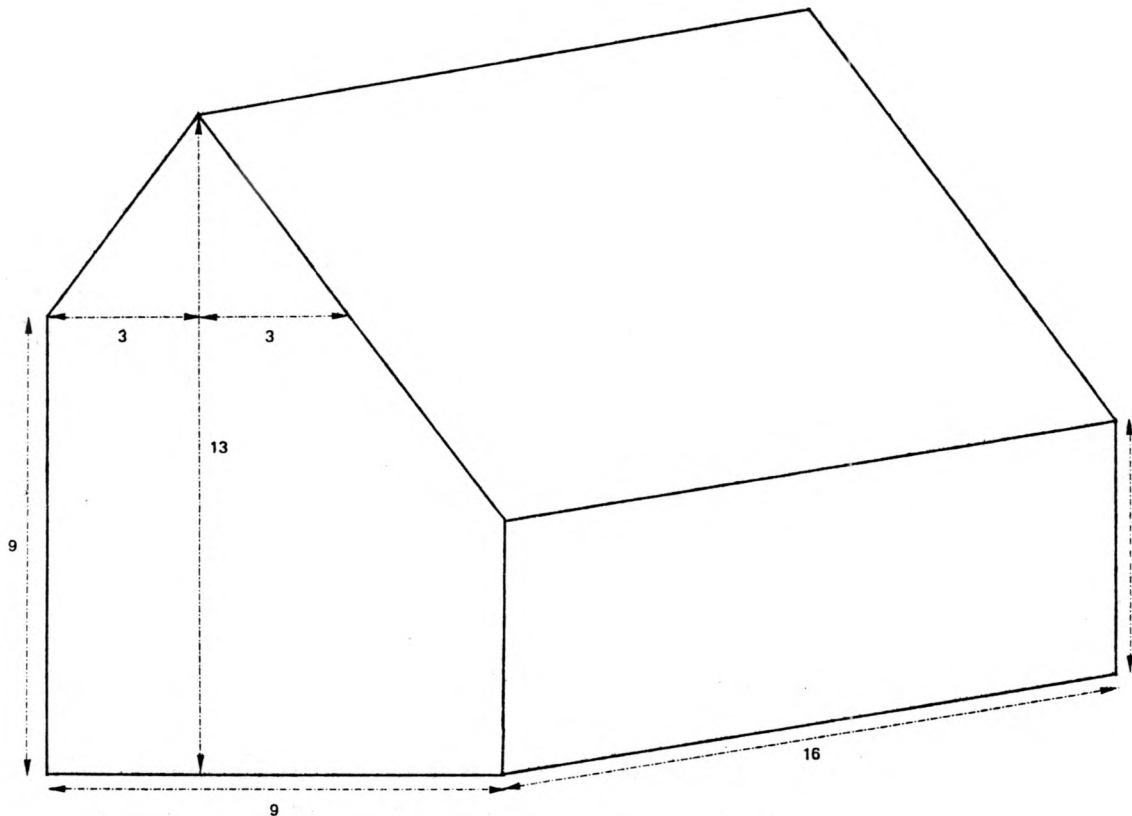
On généralise alors la **formule donnant le volume du prisme** dans les cas particuliers étudiés) à un prisme droit quelconque.

C – VOLUME DE SOLIDES COMPLEXES.

a) Volume de «la maison».

Sixième activité :

Chaque élève reçoit la fiche suivante (fiche3).



Les élèves cherchent individuellement le volume de la maison : ce solide est donné par sa représentation en perspective cavalière, **côtée en mètres**.

Commentaire.

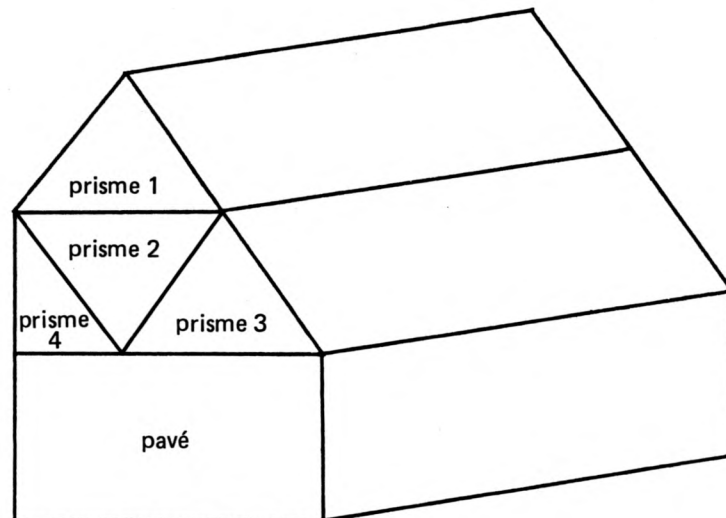
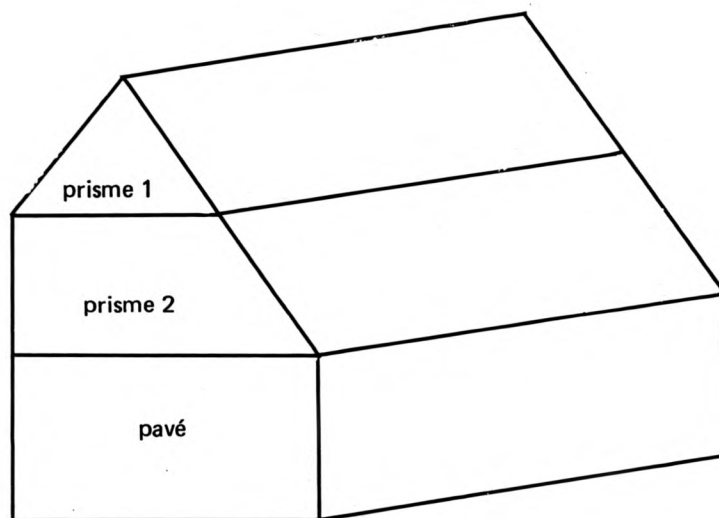
Dans la recherche du volume, les élèves ont mis en œuvre différentes procédures. Nous en donnons ci-après quelques exemples*.

■ Procédures consistant à découper la maison en prismes plus simples, puis à calculer le volume de chacun de ces prismes, le volume de la maison étant la somme du volume des prismes élémentaires.

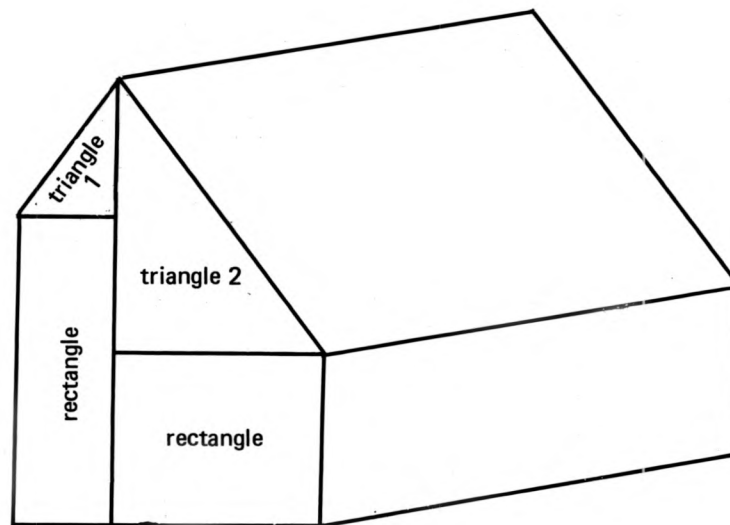
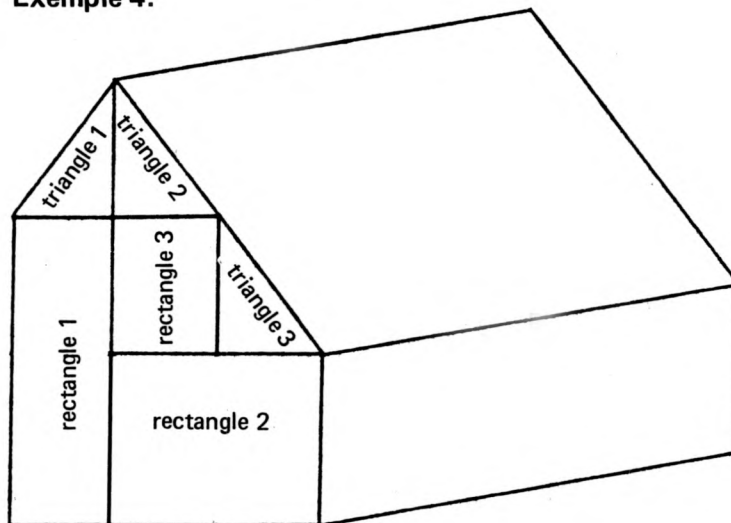
* Les procédures sont données à partir des découpages opérés sur «la maison».

Exemple 1.

Cette procédure a été la plus fréquente dans l'une des classes concernées. Remarquons que les prismes 1, 2 et 3 sont identiques et que le prisme 4 est la moitié de chacun de ces prismes.

**Exemple 2.**

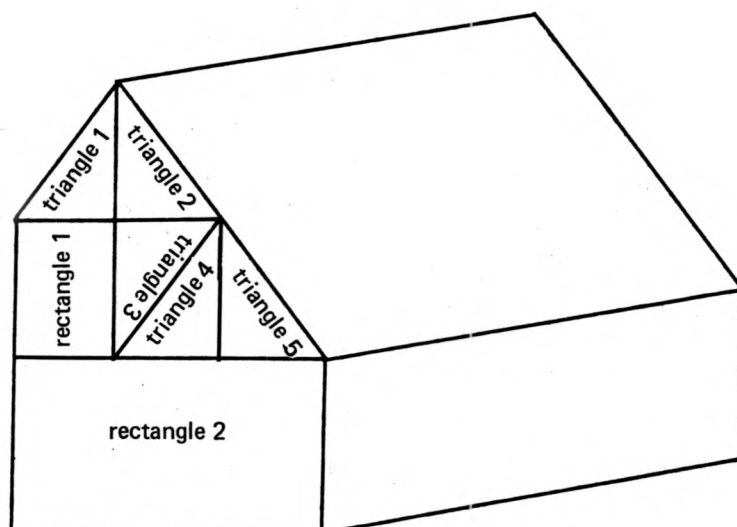
■ Procédures consistant à calculer l'aire de la base du prisme «maison» en décomposant cette base en surfaces plus simples, l'aire de la base étant la somme de l'aire des surfaces élémentaires. Le volume est alors calculé comme le produit de l'aire de la base par la hauteur du prisme «maison».

Exemple 3.**Exemple 4.**

Remarquer que les
3 triangles mis en
évidence sont égaux.

Exemple 5.

Cette procédure est
très fréquente dans
l'autre classe concer-
née.



Après cette recherche individuelle du volume de «la maison», on peut demander aux élèves de réaliser une maquette de la maison au 1/100 ème, à l'aide d'un patron.

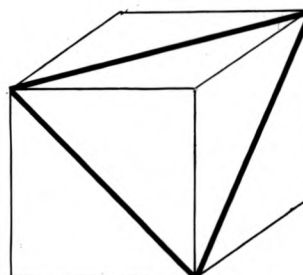
b) Volume de la pyramide.

Une série d'activités sur les patrons de solides obtenus en sciant un cube va permettre de retrouver le volume de la pyramide.

Septième activité.

Un cube en bois de 5 cm d'arête est scié en deux morceaux. La lame de la scie suit les traits gras.

Dessiner le patron du tétraèdre obtenu.



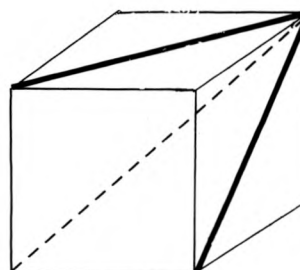
Commentaire.

Certains enfants pensent qu'avec 4 tétraèdres de ce type on peut reconstituer le cube. On constate que c'est faux : il manque un tétraèdre dont certains construisent le patron.

Huitième activité.

Un cube en bois de 5 cm d'arête est scié en trois morceaux. La lame de la scie suit les traits gras.

Dessiner le patron de la pyramide à base carrée obtenue.



Un certain nombre de ces pyramides ayant été construites on constate qu'avec 3 pyramides on reconstitue le cube.

On retrouve alors la formule du volume d'une pyramide :

(aire de base $\times$ hauteur) : 3.

Commentaires sur l'ensemble des activités proposées sous le chapitre volume.

Ces activités possèdent certaines caractéristiques :

1) on ne considère que les volumes de prismes droits à base quelconque et de la pyramide ;

2) le calcul du volume de ces solides n'est présenté que dans le cas où la mesure des côtés est un **nombre entier** ;

3) de ce fait, le volume calculé est toujours un nombre plus grand que la mesure des côtés du solide.

Il est donc nécessaire de généraliser la notion de volume mis en place :

- formules du volume du cylindre, du cône de révolution, de la sphère ;
- calcul de volumes faisant intervenir **des nombres décimaux** supérieurs ou inférieurs à 1.

ANNEXE

Fiche 1 exemples d'activités sur le cube et son patron

Fiche 2 (vraie grandeur)

Fiche 3 (vraie grandeur)

deux exemplaires de papier pointé

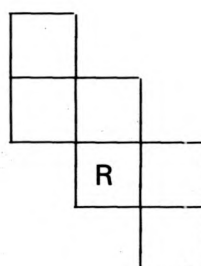
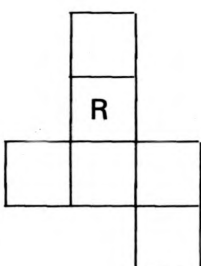
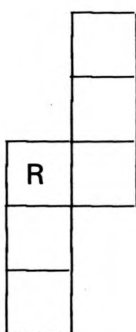
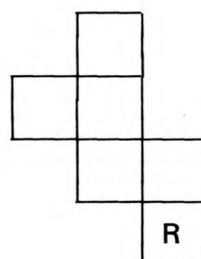
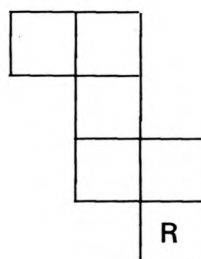
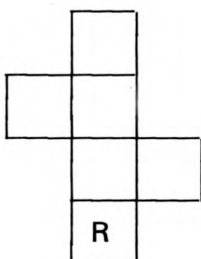
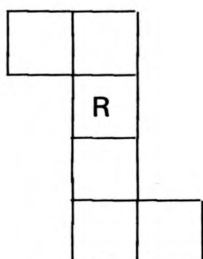
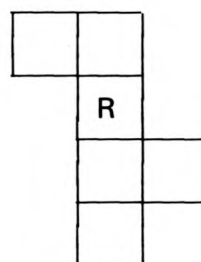
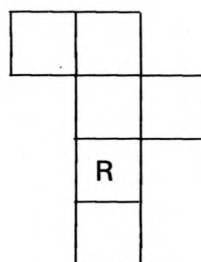
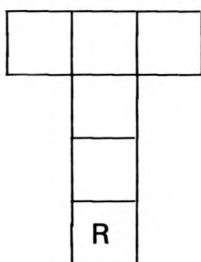
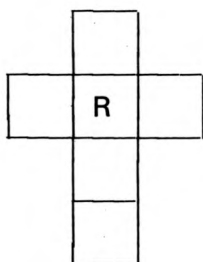
Nom :

Prénom :

Fiche 1

PATRONS DU CUBE

Colorier chaque carré pour que le patron soit celui d'un cube de 3 couleurs B, R et J (2 faces opposées sont de même couleur, 2 faces adjacentes de couleurs différentes).



Nom :

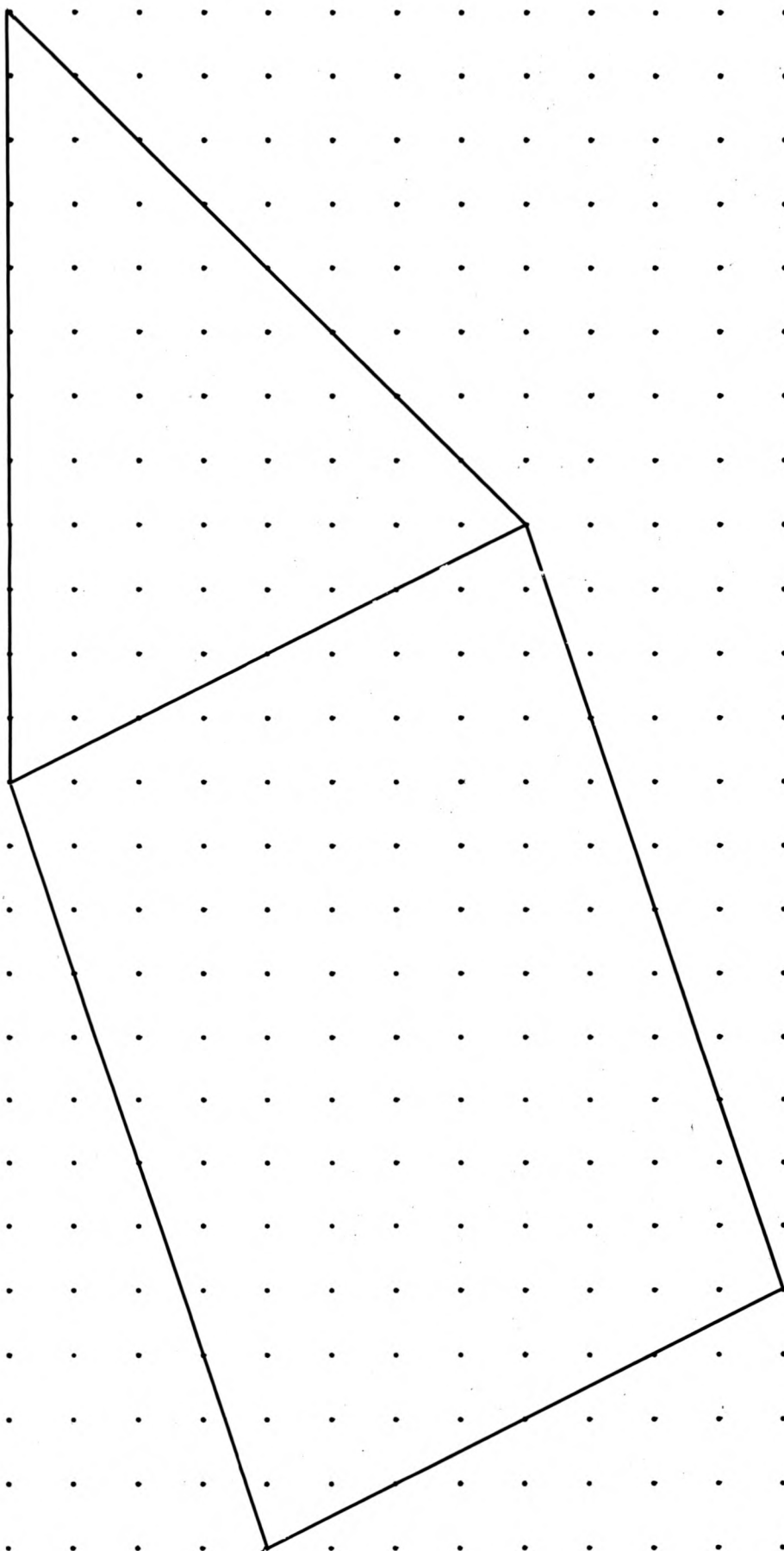
Classe :

Fiche 2

PRISME à base triangulaire

Ce dessin représente le prisme jaune dans une perspective conservant le parallélisme :

- indique en pointillés jaunes les arêtes cachées ;
- complète le dessin pour qu'il représente le pavé par les prismes bleu, jaune et rouge (dans la même perspective).



Nom :

Classe :

Fiche 3

