ACQUIS MINIMAUX EN FIN DE TERMINALES SCIENTIFIQUES
EN MATHEMATIQUES

L'objectif de ce travail est d'établir un contrat entre les enseignants de second cycle des lycées et les utilisateurs des mathématiques (enseignant ou non de mathématiques), accueillant les élèves des classes scientifiques (C, D, E), après le Bac. :

— équipes pédagogiques : des IUT
: des DEUG A et B
: des classes préparatoires aux Grandes Ecoles Scientifiques.

POURQUOI CE CONTRAT ?

■ Pour que les équipes pédagogiques accueillant ces étudiants après le Bac aient une connaissance des capacités et du niveau de maîtrise auxquels ces élèves ont été préparés, plus précise que celle déduite de la lecture des programmes et commentaires.

■ Pour que les équipes des lycées, préparant ces élèves connaissent les capacités minimales et les niveaux de performance demandés à leurs élèves lorsqu'ils entreprennent tel ou tel type d'études scientifiques supérieures.

■ Et, pour que tout adulte désirant, par le biais de la formation continue, reprendre des études ait le moyen d'évaluer si ses connaissances lui permettent de le faire et à quel niveau.

Ainsi ce contrat pourrait constituer la dernière partie d'un ensemble qui commençant par le référentiel CAPUC (au niveau des C.A.P.) définirait les acquis minimum en fin de premier cycle — travail en cours dans l'Académie et partiellement à l'IREM de Grenoble — (au niveau de la préparation aux baccalauréats en promotion sociale) et les «acquis minimums en fin de second cycle» permettraient d'évaluer les possibilités d'accés à l'université (préparation de l'ESEU par exemple).

QUELLE FORME DE CONTRAT ?

Pour chacune des capacités retenues nous avons donné un niveau de performance (c'est l'objet des commentaires figurant en italique sur la partie droite du document).

Pour présenter les capacités nous avons distingué trois niveaux :

— le niveau d'EXECUTION : les opérations mathématiques spécifiques étant proposées et programmées, l'étudiant doit les exécuter,

— le niveau de TRAITEMENT : le modèle mathématique étant proposé, le but à atteindre étant fixé, l'étudiant doit TRAITER le modèle,

— le niveau de CHOIX : l'étudiant doit trouver le modèle adapté à la situation qui lui est proposée, le traiter et l'exécuter.

COMMENT CE CONTRAT A-T-IL ETE ELABORE ?

Un premier «inventaire» a été proposé à la plupart des enseignants de Mathématiques du second cycle des lycées de l'académie. L'IREM de Grenoble a organisé de nombreux ateliers décentralisés dans l'Académie (Chambéry, Voiron, Valence, Grenoble) afin que les enseignants concernés retouchent et affinent ce contrat. Le résultat en est la première partie du présent document.

Parallèlement nous avons rencontré des enseignants de mathématiques, physique, chimie, mécanique, qui accueillent les bacheliers en DEUG A, en IUT de mesures physiques, de génie mécanique, d'électrotechnique, et en classes préparatoires aux grandes écoles. Vous trouverez en seconde partie de ce document, un bilan de ces prises de contact sous forme de remarques générales qui méritent toute notre attention.

OPPORTUNITE

L'Université de Grenoble et plus précisément des responsables du DEUG A première année ont mis en place cette année un DEUG expérimental et ont mené une importante réflexion pédagogique. C'était donc un moment opportun pour apporter un élément fondamental de cette réflexion : l'étude du milieu initial.

D'autre part les échos, bruits, et autres phrases à l'emporte-pièce du style :

- «les étudiants ne savent plus rien»
- «on prend n'importe qui»
- «mais on ne leur apprend plus à raisonner»
- «ils ne savent même plus ce qu'est une médiane»
- «ne parlons pas de la trigo»
- ...

demandaient à être examinés de plus près par les enseignants de l'amont du Bac et ceux de l'aval.

DIFFICULTES

Nous avons rencontré deux grosses difficultés.

La première est due au BAC. Loin de nous l'idée de négliger la préparation au baccalauréat puisqu'elle conditionne la poursuite des études. Ce contrat ne veut donc absolument pas dire que les enseignants de lycée devraient réduire la formation au descriptif de ce document. Mais les capacités sur lesquelles pourrons compter raisonnablement les enseignants post-bac, ne sont que celles énumérées ici ; et même avec une certaine prudence, car il y aura sur certains sujets une nécessaire remise en route.

La deuxième difficulté est due au fait que nous sommes en cours de réforme des programmes d'enseignement des mathématiques dans les lycées. Pour beaucoup d'enseignants, le fait de n'avoir pas encore vu évoluer une «Terminale nouveau modèle» laissait une certaine inconnue sur la répartition des capacités des élèves en math en fin de second cycle. Donc une remise à jour du document est à prévoir dans un an ou deux ; mais malgré cet inconvénient il ne nous a pas semblé bon d'attendre.

SUITES DANS IR

En formation, les théorèmes usuels sur les limites de suites seront énoncées et utilisées (comme conséquences des théorèmes sur les limites de fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$), mais les capacités qu'il est intéressant d'évaluer sur les suites sont celles qui permettent d'avoir une approche intuitive précise de la notion de limite (c'est-à-dire «trouver N tel que ...»).

EXECUTER

1.1 Etre capable de montrer qu'une suite est :

- croissante

ou - décroissante

ou - stationnaire à partir du rang N.

▪ N *étant au plus égal à* 3.

1.2 Trouver N, entier naturel, tel que, ℓ étant donné :

$$\forall n > N \qquad |u_n - \ell| < 10^{-k}$$

▪ k *étant donné :* $k < 5$.

1.3 Prouver, par exemple par un raisonnement par récurrence, qu'une suite est majorée à partir du rang N, connaissant le majorant.

▪ $N \leqslant 3$.

1.4 Pour la suite : $u_{n+1} = u_n + b$
u_0 donné

- calculer u_n en fonction de u_0 et de n,
- calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$
$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$
- donner $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ suivant les valeurs de b et de u_0

1.5 Pour la suite : $u_{n+1} = au_n$
u_0 donné

- calculer u_n en fonction de u_0 et de n.
- calculer la somme : $S_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$
- donner $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$

et $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ suivant les valeurs de u_0 et de a.

TRAITER

2.1 Etant donnée une suite définie par :

$$u_n = f(n)$$

reconnaître si elle est :

- stationnaire

ou - monotone

ou - périodique

ou prouver qu'elle ne possède aucune de ces propriétés.

Trouver ℓ, tel que :

$$\forall n > N \quad |u_n - \ell| < 10^{-k}$$

▪ *Les suites étant données par :*

$$u_n = f(n)$$

f, *une fonction énumérée dans le paragraphe «exécuter» du thème «fonctions de* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$»*, ou la composée d'au plus deux de ces fonctions ; par exemple :*

$$u_n = \frac{\ln n + 1}{\ln n + 2}$$

ou $u_n = e^{\frac{1}{n}}$

mais on exclura (par exemple) :

$$u_n = (\mathrm{tg}\,\frac{1}{n})^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}.)$$

▪ *Une approche de* ℓ *pourra se faire à l'aide des machines à calculer.*

2.2 Trouver les limites possibles d'une suite définie par $U_n = f(n)$ en résolvant l'équation

$$\ell = f(\ell)$$

CHOISIR

Etre capable de résoudre un problème faisant intervenir une suite définie par :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

u_0 donné

ou par :

$$u_n = f(n)$$

$$n \geqslant N_0$$

▪ *L'étude consistant à reconnaitre les particularités de la suite, à trouver des majorants, minorants, ... encadrements de* u_n

LES FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$

EXECUTER

1.1 Etudier (variations et courbe représentative) les fonctions polynômes :

$$x \longmapsto P_n(x)$$
$$x \longmapsto ax^4 + bx^2 + c.$$

■ *P_n étant un polynôme de degré 3 au plus.*

1.2 Pour les fonctions homographiques :

$$x \longmapsto y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

trouver a, b, tels que :

$$y = a + \frac{b}{\gamma x + \delta}$$

Interpréter géométriquement cette écriture.
Etudier les variations et tracer la courbe représentative.

(asymptote et position par rapport à l'asymptote).

1.3 Etude complète des fonctions :

$$x \longmapsto \ln x$$
$$x \longmapsto e^x$$

en particulier connaître le **théorème de croissance comparée** de ces fonctions, et des fonctions monomes.

$$x \longmapsto x^n$$

(c'est-à-dire l'**exponentielle** de x «l'emporte» sur toute puissance de x qui «l'emporte» sur $\ln x$.

■ *Les logarithmes décimaux sont seulement introduits en formation pour leur utilisation dans les calculs d'erreur (majoration de suites...).*

1.4 Etude complète des fonctions :

$$x \longmapsto \sin x$$
$$x \longmapsto \cos x$$
$$x \longmapsto \operatorname{tg} x$$

en particulier recherche :

- de la plus petite période,
- des symétries de la courbe.

TRAITER

2.1 Déterminer le domaine de définition d'une fonction :

$$x \longmapsto R(x) \quad \text{où} \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$x \longmapsto \alpha x + \beta + \sqrt{P(x)}$$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}}{R(x)}$$

et composition de fonctions de types précédents et des fonctions énumérées dans le paragraphe «EXECUTER».

■ *P et Q étant deux polyn^omes de degré 3 au plus.*

■ *P, étant un polynôme de degré 2 au plus.*

■ *P, Q, R étant trois polynômes de degré 2 au plus.*

■ *Cette recherche ne faisant intervenir que des capacités d'exécution énumérées dans le chapitre «Equations» et «Inéquations».*

2.2 Déterminer les limites d'une fonction de IR $\longrightarrow$ IR dans les conditions : «$x \longrightarrow a$»

$x \longrightarrow a^+$ (ou par valeurs supérieures)
$x \longrightarrow a^-$ (ou par valeurs inférieures)
$x \longrightarrow +\infty$
$x \longrightarrow -\infty$

en utilisant les théorèmes généraux sur les limites.

■ *Les théorèmes généraux portant sur :*

- *combinaison linéaire,*
- *produit,*
- *quotient,*
- *composition,*
- *encadrement*

de fonctions.

Reconnaître les différents types d'«indétermination» dans l'application des théorèmes généraux.

■ *Ces types étant :*

$\infty - \infty$	type somme
$0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$	type produit
0^0, 1^∞, ∞^0,	type exponentielle

2.4 Etudier les limites lorsqu'elles se présentent sous l'une des formes d'indétermination précédentes.

■ *En utilisant les transformations : factorisation, expression conjuguée, développement limité d'ordre un ou les théorèmes de «croissance comparée».*

2.5 Reconnaître les intervalles sur lesquels la fonction est continue, par application des théorèmes généraux.

■ *Les théorèmes généraux portant sur les :*

- *combinaisons linéaires,*
- *produit,*
- *quotient*
- *composition*

de fonctions.

2.6 Reconnaître les différents types de branches infinies :

- branche parabolique dans :
  - la direction de ox,
  - la direction de oy,
  - la direction de la droite ($y = ax$)
- asymptotes d'équation : $x = k$
  $y = u$.

et donner l'allure de la courbe représentative au voisinage du point.
Etudier en précisant, s'il y a lieu, les positions relatives de la courbe et de l'asymptote.

■ *Chaque fois que possible on cherchera à mettre en évidence l'asymptote en explicitant :*

$u(x)$ *tel que* : $y = ax + b + u(x)$, $u(x) \longrightarrow 0$

au voisinage du point considéré.

ex : $\dfrac{2x^2+1}{x-2} = 2x + 4 + \dfrac{9}{x-2}$

■ *En formation, on pourra mettre en évidence des «courbes asymptotes», ces courbes étant représentatives de fonctions usuelles.*

2.7 Reconnaître les intervalles sur lesquels s'appliquent les théorèmes généraux de dérivation.	■ *Ces théorèmes portant sur les opérations :* — *combinaison linéaire,* — *produit,* — *quotient,* — *composition* *de fonctions.*
2.8 Pour les bornes de ces intervalles, rechercher s'il y a lieu un nombre dérivé éventuel.	■ *En étudiant :* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f'(x)$ *En utilisant la définition du nombre dérivé.*
2.9 Etudier les variations de la fonction sur son domaine de définition et reconnaître les extrémums locaux.	■ *La recherche des zéros et du signe de la dérivée ne devant pas conduire à des problèmes dépassant les capacités énumérées dans le chapitre «Equations» et «Inéquations» «isoler les zéros d'une fonction».*
2.10 Etudier la concavité de la courbe et l'existence éventuelle de points d'inflexion.	■ *L'étude du signe et des zéros de* y'' *satisfaisant aux conditions précédentes.*
2.11 Interpréter graphiquement de façon isolée les études précédentes.	■ *Par exemple : trouver des tracés géométriques satisfaisant à des études locales, à des études de limites, à des tableaux de variation et inversement à partir du tracé géométrique, donner certaines propriétés de la fonction en ce qui concerne sa continuité, sa dérivabilité, certaines limites.*
2.12 Reconnaître sur la fonction que la courbe représentative admet O comme centre de symétrie ou Oy comme axe de symétrie. 2.13 Reconnaître sur la fonction que la courbe est invariante par translation. 2.14 Lorsque l'allure du tableau de variation induit la recherche d'autres éléments de symétrie, (symétrie par rapport à A, symétrie par rapport à la droite d'équation : $y = k$), être capable de prouver l'existence ou la non existence de ces éléments de symétrie.	■ *En formation, chaque fois que le domaine de définition de la fonction ou la forme de celle-ci induira la possibilité d'éléments de symétrie, on pourra en faire une recherche systématique.* *Exemple : si* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ *comparer* $y(x)$ *et* $y(1 - x)$ *ou envisager la translation donnée par* $X = x - 2$.

LES EQUATIONS

EXECUTER

1.1 Les équations algébriques.

— Vérifier qu'un nombre est zéro d'un polynôme, quel que soit le degré de ce polynôme.

▪ *En formation, on montrera que la recherche des solutions d'une équation où peuvent figurer :*
— des polynômes ou des fractions rationnelles,
— des sommes, produits ou quotients de polynômes ou fractions rationnelles,
se ramène à la recherche des solutions d'une équation où figure seulement un polynôme.

— Un zéro d'un polynôme étant donné, factoriser ce polynôme.

▪ *(Toute méthode, y compris la division euclidienne, étant acceptée).*

— Ecrire tout trinôme sous la forme : $aX^2 + b$.

— Résoudre toute opération du type : $aX^2 + b = 0$.

— Connaissant une «racine» d'un trinôme, déterminer l'autre en utilisant l'une ou l'autre des «fonctions symétriques élémentaires des racines» du trinôme.

▪ *En formation, on s'attachera à ce que l'élève conduise ses calculs par transformations régulières, mais on acceptera lors des contrôles les calculs par implications successives à condition que l'élève pense à vérifier la validité des solutions possibles.*

— Résoudre une équation du type : $\sqrt{A} = B$.

▪ A *et* B *seront choisis de telle sorte que les calculs ne mettent en œuvre que les capacités précédentes.*

1.2 Les équations trigonométriques.

— Résoudre une équation du type :

$x \in \mathbb{R}$ et $\cos x = \cos a$.
$x \in \mathbb{R}$ et $\sin x = \sin a$.
$x \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$.

▪ *L'utilisation des machines à calculer est autorisée, mais on devra reconnaître les lignes trigonométriques des angles remarquables.*

— Résoudre une équation du type :

$x \in \mathbb{R}$ et $\cos x = A$.
$x \in \mathbb{R}$ et $\sin x = B$.
$x \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{tg} x = C$.

2.3 Systèmes d'équations algébriques.

— Résoudre tout système numérique de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

TRAITER

2.1 Les équations algébriques.

— Résoudre et discuter des équations paramètriques du premier ou du second degré.

▪ *Le paramètre n'apparaitra que par des expressions algébriques dont les transformations correspondent aux capacités d'exécution précédentes.*

— Reconnaître qu'un polynôme n'admet pas de zéro sur un intervalle, la fonction polynôme associée étant monotone sur cet intervalle.

— Reconnaître si un polynôme admet au moins un zéro sur un intervalle donné.

▪ *On se limitera aux polynômes du 3ème degré.*

— Déterminer un intervalle où le polynôme admet un zéro unique (c'est-à-dire isoler les zéros) et donner de ce zéro une valeur approchée avec une approximation donnée.

▪ *L'usage des calculatrices étant indispensable,*

— Résoudre des équations se ramenant à des équations du 1er ou du 2ème degré par un changement d'inconnue du type :

$x^n = u$ avec $n \in \{2, 3, 4\}$.
$e^x = u$
$\ln x = u$
$\cos x = u$
$\sin x = u$
$\mathrm{tg}\, x = u$

▪ *Le changement d'inconnue étant immédiat*

— Résoudre des équations faisant intervenir des polynômes $P(x, \sqrt{u(x)}, \sqrt{v(x)})$.

▪ *Le traitement ne devant pas dépasser les capacités d'exécution précédentes.*

— Résoudre des équations où figurent des valeurs absolues de polynômes du 1e ou du 2nd degré.

2.2 Les équations trigonométriques.

— Résoudre une équation du type :

$x \in I$ et $\cos x = \cos a$ (ou A).
$x \in I$ et $\sin x = \sin a$ (ou B).
$x \in I$ et $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, a$ (ou C).

— Résoudre une équation du type :

$A(f(x)) = B(g(x))$
où $A, B \in \{\cos, \sin, \mathrm{tg}\}$

▪ *Les transformations utilisées dans les calculs devront correspondre aux capacités d'exécution et de traitement énumérés jusqu'ici.*

— Résoudre des équations trigonométriques se ramenant aux équations ci-dessus par application des formules de transformation.

▪ *Idem.*

2.3 Systèmes d'équations.

— Résoudre des systèmes numériques d'au plus 3 équations linéaires à 3 inconnues au plus.

— Des systèmes paramétriques de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

— Des systèmes non linéaires de 2 équations à 2 inconnues dont la résolution fait intervenir une équation du 2ème degré, au plus.

▪ *Le traitement d'une telle question ne pouvant faire intervenir que 2 étapes, au plus, de transformations.*

Exemple :
$xy = 5$
$2x + y = 3$

INEQUATIONS

EXECUTER

1.1 Déterminer le signe d'un trinôme.

1.2 Déterminer le signe d'un polynôme factorisé sur IR et d'une fraction rationnelle dont dénominateur et numérateur ont été factorisés sur IR.

1.3 Résoudre une équation du type :

$$\sqrt{A} < \sqrt{B}$$

■ *A et B étant des polynômes de degré 2 au plus, sous réserve que l'expression obtenue après élévation au carré se factorise sans difficulté.*

1.4 Résoudre une inéquation du type :

$$\sqrt{A} > B$$

$$\sqrt{A} < B$$

■ *On pourra utiliser éventuellement les monotonies*

$$(x \longrightarrow x^2 \quad ; \quad x \longrightarrow \frac{1}{x} \text{ etc...})$$

1.5 Résoudre :

- $\cos x < C$ sur $]\alpha, \alpha + 2\pi[$
  ou
  $\cos x > C$

- $\sin x > C$ sur $]\alpha, \alpha + 2\pi[$
  ou
  $\sin x < C$

- $\text{tg}\, x > C$ sur $]\alpha, \alpha + 2\pi[$
  ou
  $\text{tg}\, x < C$

1.6 Résoudre :

$|ax + b| > \alpha$
ou α réel donné
$|ax+ b| < \alpha$

et $(ax^2 + bx + c) < \alpha$ α réel donné

■ *En formation on pourra insister sur la notion de distance sur IR pour traduire ces inégalités et familiariser les élèves à cette interprétation.*

■ *Sur des exemples, utiliser la réciproque (connaissant le signe du trinôme, en déduire la position d'un nombre donné par rapport aux zéros).*

ATTENTION : le problème suivant :

Trouver l'ensemble des couples de IR^2 vérifiant :

$$\begin{cases} ax + by + c > 0 \\ a'x + b'y + c' > 0 \end{cases}$$

par la méthode graphique.

n'a pas été abordé par le plupart des élèves.

TRAITER

2.1 Résoudre sur $]\theta, \theta + \frac{2\pi}{a}[$

$\cos(ax + b) > \alpha$

ou $< \alpha$

$\sin(ax + b) > \alpha$

ou $< \alpha$

$\operatorname{tg}(ax + b) > \alpha$

ou $< \alpha$

2.2 Résoudre dans IR :

$a \cos x + b \sin x + c > 0$

■ *Les paramètres étant exclus.*

La résolution pouvant être faite algébriquement ou analytiquement.

2.3 Résoudre :

$a\,|u(x)| + b\,|v(x)| \geqslant c$

a, b, c étant trois réels donnés.

■ u *et* v *étant des polynômes de degré 2 au plus.*

CHOISIR

Résoudre des inéquations du type

$f(x) < 0$

– soit en étudiant les variations de la fonction,

– soit en utilisant l'une des précédentes capacités

■ *La dérivée se factorisant de sorte que l'étude de son signe se ramène à un des cas précédents.*

f *étant l'une des fonctions étudiées dans le chapitre «fonctions de* IR *dans* IR*».*

ex : $x \longrightarrow (x + 3) \ln (x - 1)$.

PRIMITIVES - CALCUL INTEGRAL

1.1 f étant donnée, déterminer au moins une primitive de f.

■ $f : x \longrightarrow x^{\alpha}$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$f : x \longrightarrow \cos(ax+b)$

$x \longrightarrow \sin(ax+b)$

$x \longrightarrow \operatorname{tg}(ax+b)$

$x \longrightarrow e^{ax+b}$

$x \longrightarrow [u(x)]^{\alpha}\, u'(x)$

$x \longrightarrow \cos(u(x))\, u'(x)$

$x \longrightarrow \sin(u(x))\, u'(x)$

$x \longrightarrow \operatorname{tg}(u(x))\, u'(x)$

$x \longrightarrow e^{u(x)}\, u'(x)$

u *étant une fonction prise parmi les fonctions classiques suivantes :*

$x \longrightarrow \dfrac{1}{x^{\alpha}}$

$x \longrightarrow \sin x$

$x \longrightarrow \cos x$

$x \longrightarrow \operatorname{tg} x$

$x \longrightarrow e^{x}$

$x \longrightarrow \ln x$

1.2 En utilisant les propriétés de linéarité de l'opérateur «dérivation», déterminer une fonction primitive d'une fonction qui se présente comme combinaison linéaire de fonctions du type précédent.

■ *Pour les fonctions homographiques utiliser la forme canonique*

$x \longrightarrow a + \dfrac{b}{cx+d}$ *chaque fois que ce cas sera rencontré sur des exemples.*

1.3 Une primitive de f continue, étant donnée, trouver la primitive de f prenant en un point donné une valeur donnée.

1.4 Savoir utiliser la méthode d'intégration par partie pour la recherche de

$$\int u\, v'\, dx.$$

1.5 Un domaine D étant délémité par une courbe d'équation $y = f(x)$

(f étant positive ou nulle, continue sur $[a, b]$),
les deux droites d'équation $x = a$
$x = b$
et l'axe des x.,
Donner une valeur approchée de l'aire de ce domaine en utilisant la «méthode des rectangles», les points de subdivision étant donnés.

■ *Dans les cas ou* f *est monotone sur* $[a, b]$ *on pourra obtenir un encadrement.*

■ *Pour ces questions l'usage des calculatrices programmables ou non est vivement conseillé.*

1.6 Connaissant une primitive de f sur l'intervalle [a, b]. Calculer

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

■ *Reconnaître que* $\int_a^x f(t)\,dt$ *est la seule primitive qui s'annule pour* $x = a$.

1.7 Effectuer un changement de variable affine sur une intégrale définie.

1.8 Déterminer le signe de l'intégrale définie sur [a, b] d'une fonction qui garde un signe constant sur [a, b].

■ *En déduire la comparaison d'intégrales définies sur* [a, b] *de deux fonctions* f *et* g.

1.9 Calculer l'aire d'un domaine plan défini comme au 1.5 au moyen d'une intégrale définie.

1.10 Appliquer la méthode d'intégration par parties pour calculer

$$\int_a^b u\,v'\,dx$$

TRAITER

2.1 Déterminer une fonction primitive ou calculer $\int_a^b f(t)\,dt$ lorsque f, par transformations, se ramène à une combinaison de fonctions décrites au 1.1.

■ *On entend par transformation, transformation de produits de* sin *et* cos *en somme, linéarisations de* $\sin^n x$ *et* $\cos^n x$

2.2 Ecrire f sous la forme $u\,v'$ et appliquer la méthode d'intégration par parties pour calculer une primitive de f ou $\int_a^b f(t)\,dt$.

2.3 Etablir ou vérifier des inégalités entre intégrales définies.

■ *En appliquant la formule de Chasles ou les théorèmes de majoration d'intégrales, en particulier, si* f *est pair sur* [- a, + a]

établir $\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$

et si f *est impair sur* [- a, + a]

$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = 0$$

2.4 Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$ (f continue sur [a, b], de signe non constant sur [a, b]), les droites d'équation

$$x = a$$
$$x = b$$

et l'axe Ox.

■ *La recherche des intervalles où* f *garde un signe constant ne devra pas dépasser les conditions précisées au chapitre «inéquations».*

LES COMPLEXES

EXECUTER

LES CALCULS DANS ¢.

1.1 Effectuer sur des nombres complexes une opération isolée.

L'opération étant
- une addition,
- une soustraction,
- une multiplication.

1.2 Déterminer la forme «trigonométrique» (c'est-à-dire module et argument) d'un nombre complexe connu sous sa forme algébrique et réciproquement.

• *On reconnaitra, chaque fois que c'est possible les lignes trigonométriques des angles remarquables.*
(exemple : $1 + i$; $\sqrt{3} + i$; etc...).

1.3 Exprimer l'inverse et le conjugué d'un nombre complexe sous forme algébrique et trigonométrique.

Exprimer le quotient de 2 nombres complexes sous forme algébrique et trigonométrique.

1.4 Ecrire toute puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe donné sous sa forme algébrique ou trigonométrique.

1.5 Déterminer toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe donné par son module et son argument (c'est-à-dire par sa forme trigonométrique) et construire leurs images.

1.6 Connaissant un nombre complexe sous sa forme algébrique ou trigonométrique construire dans le plan

- Son image ponctuelle et vectorielle,
- Celle de son opposé,
- Celle de son conjugué,
- L'image vectorielle d'une somme, d'une différence.

TRAITER

LES CALCULS DANS ¢.

2.1 Donner (le) la conjuguée d'une expression dans ¢ faisant intervenir plusieurs opérations (ces opérations ét nt celles énumé ées dans les capacités d'exécution).

- *Les expressions feront intervenir au plus 3 opérations.*

2.2 Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique (et inversement) d'une expression complexe faisant intervenir plusieurs opérations sur des nombres donnés sous forme algébrique et trigonométrique.

▪ *Exemple : trouver la partie réelle de* $(1+j)(1+i)^n$

2.3 Exprimer les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe sous forme algébrique.

▪ *Pour la détermination de* p *et de* θ. *on devra reconnaitre les lignes trigonométriques* (*angles remarquables.*

2.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ toute équation du second degré.

2.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation se ramenant à une du second degré par changement d'inconnue du type $Z^n = X$

2.6 Résoudre une équation se ramenant à la recherche des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe par changement d'inconnue.

▪ *exemple :* $(Z+1)^n = (Z-1)^n$.

2.7 Linéariser toute puissance de cosinus et de sinus.

2.8 Déterminer les transformations géométriques du plan complexe associées à l'addition, la soustraction la multiplication et la conjuguaison d'un ou plusieurs nombres complexes.

2.9 Interpréter géométriquement le rapport de deux nombres complexes.

CHOISIR

Résoudre un problème faisant intervenir

- les calculs dans $\mathbb{C}$

en utilisant la forme algébrique ou la forme trigonométrique.

- La résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$ dans les conditions de T_5 et T_6.
- Les transformations géométriques dans les conditions T_8.

ANGLES

EXECUTER

1.1 Un secteur angulaire, un angle de droites ou de demi-droites, ou un angle de vecteurs étant donnés, analytiquement ou géométriquement, en fournir une mesure (dans l'une quelconque des unités légales).

1.2 Connaissant une mesure d'un angle de droites, de demi-droites, ou de vecteurs, déterminer toutes les mesures de ces angles.

1.3 Une mesure étant donnée dans l'une des unités (radian, degré, grade) l'exprimer au moyen de l'une des deux autres.

1.4 Au moyen d'une égalité d'angle de droites donner une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient cocycliques ou alignés.

1.5 Un vecteur du plan géométrique usuel étant défini par ses coordonnées, déterminer son angle polaire par son cosinus et son sinus.

- Si $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$$\cos(\vec{i}, \vec{v}) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{v}) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.6 Deux vecteurs du plan géométrique usuel étant définis par leurs coordonnées dans une base orthonormée directe, déterminer le cosinus et le sinus de l'angle de ces deux vecteurs.

- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xy' - yx'}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

1.7 Deux vecteurs de l'espace géométrique usuel définis par leurs coordonnées dans une base orthonormée directe, déterminer le cosinus de l'angle de ces deux vecteurs.

- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$
- *Uniquement en* TC *et* TE.

TRAITER

2.1 Caractériser un angle de droites ou de vecteurs par la valeur d'une ou plusieurs lignes trigonométriques.

■ *Par exemple pour un angle de droites :* $tg\varphi$.

Pour un angle de vecteurs (ou pour déterminer un argument de nombres complexes) utiliser nécessairement deux lignes trigonométriques choisies parmi : sinus, cosinus, tangente.

2.2 A partir de propriétés géométriques ou d'égalités d'angles, démontrer d'autres propriétés géométriques ou d'autres égalités d'angles.

■ *En particulier par application de la formule de Chasles, des propriétés angulaires des transformations géométriques usuelles (rotation - similitude), de la définition des bissectrices, des conditions d'alignement ou de cocyclicité, du parallélisme, ou de l'orthogonalité.*

TRIGONOMETRIE

EXECUTER

1.1 Reconnaître ou utiliser l'une des formules suivantes :

— $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

— formules d'addition $\cos(a \pm b)$
$\sin(a \pm b)$

— formules de transformation de produits en sommes

$\sin a \sin b =$
$\sin a \cos b =$
$\cos a \cos b =$

— formules de transformation de sommes en produits

$\cos p \pm \cos q =$
$\cos p \pm \sin q =$
$\sin p \pm \sin q =$

— formules de dédoublement des arcs

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

— formules de linéarisation de

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

▪ *Les formules énumérées dans cette colonne ont été vues en formation mais ne peuvent être considérées comme acquises :*

$\mathrm{tg}(a \pm b)$

$$\cos 2x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

$$\sin 2x = \frac{2\mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

$$\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

▪ *Formules d'Euler pour la linéarisation des puissances de* cos, sin, tg

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

— formule de Moivre

$(\cos x + i \sin x)^n = \cos n x + i \sin n x$

— relations entre les lignes trigonométriques de

α et $\pi/2 - \alpha$

α et $\alpha + \pi$

α et $- \alpha$

α et $\pi - \alpha$

TRAITER

2.1 Transformer des expressions algébriques en sin, cos, tg par utilisation des formules précédentes pour permettre

— la résolution de certaines équations

— la démonstration d'identités

— la simplification d'expressions

— l'intégration de certaines fonctions.

■ *Ces transformations faisant appel à —au plus deux niveaux d'exécution.*

■ *Les équations auxquelles conduisent ces transformations entrant dans les capacités du traitement du chapitre «équation».*

■ *Les fonctions auxquelles conduisent ces transformations entrant dans les capacités de traitement du chapitre «primitives — calcul intégral».*

BARYCENTRES

EXECUTER

1.1 p points Ai

p réels α_i tels que $\Sigma\alpha_i \neq 0$
étant donnés, donner une égalité vectorielle traduisant que le point M est barycentre des p points affectés des coefficients α_i.

1.2 Même problème avec plus de 2 points.

■ *Et au plus 4 points.*

1.3 Dans un repère du plan ou de l'espace écrire les coordonnées du barycentre d'un système de p points affectés de coefficients de somme non nulle.

■ p $\leqslant$ 4

TRAITER

2.1 Trouver deux réels α et β pour qu'un point M situé sur une droite AB soit barycentre des deux points A et B affectés de coefficients α et β, par calcul vectoriel ou analytique.

■ *En formation, on pourra rechercher les «coordonnées barycentriques» des points remarquables d'un triangle afin de retrouver leurs propriétés classiques.*

GEOMETRIE ANALYTIQUE

Doivent être connues les définitions de coordonnées d'un point
composants d'un vecteur
dans un repère affine, orthonormé ou non, du plan ou de l'espace.

EXECUTER

1.1 Deux points A et B distincts étant donnés par leurs coordonnées, écrire - l'équation (dans le plan) - les équations (dans l'espace) de la droite (A, B).	■ *Dans un repère quelconque aussi bien en donnant les équations cartésiennes que les équations paramétriques.*
1.2 Trois points A, B, C non alignés étant donnés par leurs coordonnées, écrire l'équation du plan (A, B, C).	
1.3 Un point A étant donné par ses coordonnées et $\vec{V}$ par ses composantes, écrire l'équation de la droite passant par A, dirigée par $\vec{V}$.	■ *Equations paramétriques* *ou* *Equation(s) cartésienne(s)*
1.4 Etant donnés un point A, et deux vecteurs $(\vec{V}, \vec{W})$ non colinéaires, écrire l'équation du plan passant par A, dirigé par $(\vec{V}, \vec{W})$.	■ *Equations paramétriques* *ou* *Equation cartésienne*
1.5 Traduire l'alignement de trois points sans écrire l'équation de la droite.	■ *En appliquant les propriétés de la fonction affine, ou la colinéarité de deux vecteurs.*
1.6 Deux points A et B étant donnés par leurs coordonnées dans le plan ou l'espace, exprimer la distance entre A et B.	■ *Le repère est orthonormé.*
1.7 Dans le plan, écrire l'équation d'un cercle de centre et de rayon donnés. Dans l'espace équation de la sphère de centre et de rayon donnés.	
1.8 Un vecteur étant donné par ses composantes écrire sa norme.	

1.9 Dans le plan, un point A et une droite D étant donnés calculer la distance de A à D.

1.10 Dans l'espace un point A et un plan π étant donnés calculer la distance de A à π.

1.11 Dans le plan ou l'espace, un point A étant donné, déterminer l'équation (ou les équations)

d'une droite

ou

d'un plan

passant par A et respectivement parallèle à une droite ou un plan donnés.

1.12 Dans le plan ou l'espace, un point A étant donné, déterminer la (ou les) équation(s)

— d'une droite passant par A et perpendiculaire à une droite donnée ou à un plan donné

— d'un plan passant par A, et perpendiculaire à une droite donnée.

■ *Le repère étant orthonormé.*

1.13 Dans le plan, déterminer l'ensemble des points d'intersection d'une droite avec une courbe donnée par son équation cartésienne

$$f(x, y) = 0$$

■ *La résolution de l'équation aux «x» ou aux «y» ou aux paramètres des points d'intersection ne dépassant pas les capacités énoncées au chapitre «équation».*

1.14 Dans l'espace, déterminer les points d'intersection d'une droite avec une surface définie par son équation cartésienne

$$f(x, y, z) = 0$$

■ *La surface étant principalement une sphère ou un plan, et en insistant sur l'avantage qu'il y a à utiliser les équations paramétriques de la droite.*

TRAITER

2.1 Utiliser l'une ou plusieurs des capacités précédentes pour déterminer les coordonnées de l'image d'un point donné par une transformation géométrique du plan ou de l'espace.

■ *Cette transformation étant la composée de 2 - au plus - transformations étudiées au chapitre «applications affines».*

LES APPLICATIONS AFFINES

EXECUTER

1.1 Une droite D étant donnée, construire son image par les transformations suivantes :

- translation de vecteur donné
- rotation plane

■ *Centre situé ou non sur* D *et en particulier symétrie point.*

- symétrie orthogonale par rapport à une droite (dans le plan) et par rapport à un plan (dans l'espace).

■ *La droite étant parallèle ou non à* D.

- homothétie

■ *Le centre de l'homothétie n'étant pas nécessairement sur* D.

■ *L'axe et la direction de l'affinité n'étant pas nécessairement orthogonaux.*

- projection plane
- similitude directe plane

■ *Aucune restriction quant aux positions relatives de* D *et du centre de similitude.*

1.2 Mêmes capacités pour un cercle (*C*) donné.

1.3 Construire l'image d'un point donné par la composée de plusieurs transformations énumérées au 1.1.

■ *On se limitera à deux transformations dont, au plus une similitude.*

1.4 Deux droites, D et D' étant données parallèles trouver

- une translation

■ *On pourra donner des précisions sur les transformations cherchées (pour restreindre l'ensemble des solutions).*

- une homothétie connaissant son centre ou un couple de points homologues.

transformant D en D'.

1.5 Deux droites D et D' non parallèles, données, coplanaires, trouver

■ *Mêmes commentaires.*

- une symétrie - droite
- une rotation

transformant D en D'.

1.6 Deux cercles *C* et *C'* étant donnés dans le plan trouver

- une homothétie
- une translation

transformant *C* en *C'*.

TRAITER

2.1 Une transformation plane étant définie par les coordonnées (x', y') de l'image d'un point m donné par ses coordonnées (x, y).

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' = ax + by + c \end{cases}$$

déterminer la nature de cette transformation et les éléments remarquables.

■ *On peut envisager des transformations paramétriques où la recherche des éléments invariants conduit à une discussion sur le paramètre.*

2.2 Une similitude étant donnée (analytiquement ou géométriquement) déterminer l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée.

■ *Uniquement en* TC *et* TE *mais pas en* TD.

2.3 Déterminer les éléments caractéristiques de la transformation du plan complexe qui à Z associe $Z = az + b$, $(a, b) \in \mathbb{C}$.

2.4 Donner les **éléments géométriques** définissant la composée de

- deux isométries données
- deux homothéties données

■ *Pour cela on pourra utiliser les expressions analytiques de ces transformations.*

CHOISIR

Savoir déterminer si une transformation définie analytiquement est ou non du type affine.

TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES QUELCONQUES

TRAITER

2.1 Une transformation géométrique étant définie par $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$

ou par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée : $Z = h(z)$ trouver

- l'ensemble des points invariants
- l'image d'une partie du plan

par exemple :

- droite
- demi-plan
- cercle
- disque
- ensemble des points d'une courbe ($\{x, y) / y = \varphi(x)\}$
- ensemble des points tels que $\{h(x, y) < 0\}$.

■ f *et* g *n'étant pas affines, la résolution des équations mises en jeux entrent dans les limites fixées dans le chapitre «équations» «inéquations».*

LES CONIQUES

EXECUTER

1.1 Réduire tout polynôme

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$$

à l'une des trois formes suivantes

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \epsilon \frac{y^2}{\beta^2} = \epsilon' \qquad \begin{array}{l} \epsilon^2 = 1 \\ \epsilon'^2 = 1 \end{array}$$

ou $x^2 = 2py$

ou $y^2 = 2px$

1.2 Reconnaître la nature de la courbe dont l'équation a été réduite.

1.3 Déterminer les éléments remarquables da la conique permettant de la **définir**.

C'est-à-dire : axe(s)
centre (s'il y en a)
sommets (signification de a et b).

STRUCTURES

EXECUTER

1.1 Un ensemble E étant donné, f une application définie sur E X E, reconnaître si f est une loi de composition interne ou non.

■ *L'ensemble* E *pourra être*
- *une partie de* IR *ou de* C
- *une partie de l'ensemble des fonctions de* IR $\longrightarrow$ IR
- *l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace*
- $\mathcal{P}$(E), E *quelconque et l'application* f

faisant intervenir au plus trois opérations classiques définies sur ces ensembles.
- M_2(IR) *ou* M_2(ℂ)

1.2 E donné muni d'une loi interne, reconnaître si cette loi est

- commutative
- associative
- si un élément donné de E est élément neutre
- x et y étant donnés dans (E, $*$) d'élément neutre e, reconnaître s'ils sont symétriques.

1.3 E donné, muni de deux lois de composition interne $*$ et T, reconnaître si $*$ est distributive par rapport à T ou non.

1.4 E donné, Ω donné (IR ou C) et f une application définie sur E X Ω. Reconnaître si f est —ou non— une loi de composition externe.

■ *Mêmes remarques qu'au* 1.1.

1.5 E muni de 2 lois l'une externe notée X
l'autre interne notée +

n + 1 vecteurs donnés dans E : W, V_1, V_2, ..., V_n
n scalaires α_i donnés dans IR : α_1, α_2, ..., α_n

reconnaître si $W = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$ ou non.

TRAITER

2.1 (E, $*$) donné
f application définie sur E X E ; reconnaître si f munit E d'une structure de groupe — de groupe commutatif —

2.2 E donné.
f application de E X E dans E
f(x, y) noté $x + y$
h application de IR X E dans E
h(λ, x) noté $\lambda \cdot x$
reconnaître si (E, +, ·) est ou non un espace vectoriel.

2.3 E et F deux IR-espaces vectoriels
f : E ⟶ F reconnaître si elle est ou non linéaire.

2.4 E un IR-espace vectoriel. $\{V_1, V_2 \ldots V_n\}$ une famille de vecteurs de E, pour tout vecteur donné W, trouver des combinaisons linéaires si elles existent réalisant l'égalité

$$W = \sum_{i=i}^{n} \alpha_i V_i$$

2.5 Une famille de n vecteurs étant donnée dans un IR-espace vectoriel, reconnaître si c'est une base de l'espace.

2.6 E un IR-espace vectoriel

$$F \subset E$$

reconnaître si F est un sous espace vectoriel.

2.7 E, F deux IR-espaces vectoriels

$$f \in \mathcal{L}(E, F)$$

connaissant un système générateur de E, donner un système générateur de f(E).

2.8 E, F deux IR-espaces vectoriels de dimensions finies n et p rapportés à deux bases,

$$f \in \mathcal{L}(E, F)$$

écrire la matrice de f relativement à ces bases.

2.9 E et F étant deux IR-espaces vectoriels de dimensions finies n et p rapportés à des bases données, chercher les antécédants d'un vecteur donné de F, pour une application de $\mathcal{L}$(E, F) donnée.

■ **En formation, les espaces vectoriels étudiés seront essentiellement**
IR, IR^2 ou IR^3

■ *Exemple : application «dérivation» sur l'espace des polynômes.*

■ *Pour la recherche des combinaisons linéaires nulles de* n *vecteurs on pourra utiliser la «méthode du pivot».*

■ *Dans le cas ou la combinaison linéaire existe pour tout vecteur* W *en déduire le caractère «générateur» de la famille* $\{V_i\}$ *et dans le cas où elle est unique, en déduire le caractère «libre» de la famille.*

■ *En démontrant l'existence et l'unicité de la décomposition.*

■ *Par le critère de stabilité par combinaison linéaire ou en reconnaissant* F *comme ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs.*

■ L'écriture matricielle n'étant qu'un moyen commode pour trouver l'expression analytique de f.

CHOISIR

3.1 Trouver la dimension d'un IR-espace vectoriel.

■ *On se bornera au cas où la dimension trouvée est inférieure ou égale à 3.*

Le choix étant entre les méthodes suivantes :

— *il existe un isomorphisme entre* E *et* $\mathbb{R}^n$

ou bien

— *il existe une famille de vecteurs* $V_1 V_2 \dots V_n$ *de* E *pour lesquels*

$$W = \sum_{i=i}^{n} \alpha_i V_i$$ *admet une solution unique* ($\alpha_1 \in \mathbb{R}$) *pour tout vecteur* W *de* E.

3.2 E et F deux IR-espaces vectoriels donnés de dimension finie respective n et p, f élément de $\mathcal{L}$ (E, F) donnée, étudier les propriétés d'injectivité, surjectivité, bijectivité de f.

■ f *définie par sa matrice relativement aux bases choisies ou par la donnée de* f(V) *pour tout* V, *élément de* E.

DEMONTRER — PROUVER — REFUTER

Les élèves seront très sensibilisés sur les capacités énumérées ici ; mais à l'expérience il subsistera certainement de nombreuses confusions dans l'esprit des élèves.

Les capacités énumérées ici ne devront pas être testées sur des exercices de logique formelle mais à l'occasion d'exemples concrets —rencontrés— en cours de formation.

EXECUTER

1.1 Enoncer sous différentes formes une implication entre deux propositions.

■ *«Tout élément de A vérifiant P, vérifie Q» les traduire au moyen d'une implication*

$$«P(x) \underset{x \in A}{\Rightarrow} Q(x)»$$

énoncer la propriété en utilisant les locutions

«si ... alors»
«...» est nécessaire pour «...»
«...» est suffisante pour «...»
ou toute autre locution en usage...

1.2 Enoncer la réciproque d'une implication.

1.3 Enoncer la négation d'une proposition ne comportant pas d'implication.

■ *Le nombre de quantificateurs intervenant n'excédant pas 3.*

1.4 Enoncer la négation d'une implication.

1.5 Enoncer la négation d'une équivalence.

1.6 Deux propositions étant données, reconnaître qu'elles sont contradictoires.

■ *Pour les capacités 1-6 à 1-10 mettre en place en formation une recherche de contre-contre exemples.*

1.7 Utiliser la spécification d'une proposition.

Sachant $\begin{cases} \forall x \in A & \mathcal{P}(x) \\ \text{et } x_0 \in A \end{cases}$

on déduit $\mathcal{P}(x_0)$

1.8 Démontrer qu'une proposition «$\forall x \in A$, $P(x)$» est fausse.

1.9 Démontrer qu'une implication est fausse.

1.10 Démontrer qu'une équivalence logique entre deux propositions est fausse.

1.11 Démontrer qu'une implication est vraie en utilisant un «raisonnement par contraposée».

■ *La capacité consiste à traduire en contraposée*

non Q ⇒ non P

(dont par ailleurs la démonstration ne pose pas de problème).

1.12 Démontrer qu'une implication est vraie en utilisant «un raisonnement par l'absurde».

■ *La capacité consiste à étudier «non Q» (non Q et P étant alors triavialement contradic-*

1.13 Savoir utiliser la transitivité des implications et des équivalences.

1.14 Une relation récurrente de type $f(a_n, a_{n+1}, n)$ étant donnée (pour $n \geqslant n_0$) l'itérer pour des valeurs différentes de n.

■ *Passer de* n *à* $n+k$ *par changement d'indice.*

1.15 Une relation récurrente étant donnée l'itérer de n_0 à n pour exprimer u_n en fonction de u_{n_0} (pour $n \geqslant n_0$).

■ *Lorsque la relation est du type* $u_{n+1} = \alpha(n)\, u_n$

1.16 Démontrer par récurrence sur l'entier n qu'une proposition est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

TRAITER

2.1 La relation «$I_n = a(n)\, I_{n-1} + b(n)$ étant vérifiée pour tout $n \geqslant n_0$ itérer cette relation et en déduire l'espression de I_n en fonction de I_{n_0}.

■ $a(n)$ *et* $b(n)$ *étant des polynômes de degré 1 au plus ou de fractions rationnelles de numérateur et dénominateur de degré 1 au plus.*
Si l'itération conduit à des coefficients compliqués, contrôler la formule trouvée par la capacité 2.2

2.2 Etablir une relation faisant intervenir l'entier n, par un raisonnement par récurrence.

2.3 Reconnaître qu'une situation est une situation de recherche, d'une implication ou d'une équivalence entre deux propositions.

2.4 Faire la distinction entre les notions de variables, paramètres donnés.

DENOMBREMENTS

EXECUTER

1.1 A et B étant deux ensembles finis, connaissant leurs nombres d'éléments, écrire le nombre d'éléments - de $A \times B$ - de $A \cup B$	■ *Dans le cas où on connaît le nombre d'éléments de* $A \cap B$.
1.2 Connaissant le nombre d'éléments d'un ensemble A et sachant qu'il existe une application de A dans B telle que chaque élément de B admet exactement p antécédants, trouver le nombre d'éléments de B.	■ *Principe des Bergers, ou nombre d'éléments d'un ensemble admettant une partition en* k *parties de* p *- éléments.*
1.3 A étant un ensemble fini, trouver le nombre de tirages ordonnés sans remise de p - éléments que l'on peut effectuer avec les élnments de A.	■ *On pourra parler ainsi de nombre d'arrangements de* n *- éléments* p *- à -* p *au au nombre d'injections d'un ensemble de* p *éléments dans un ensemble de* n *- éléments au nombre de* p *- uplets d'éléments distincts de* A. *Définition de la notation :* A_n^p
1.4 A étant un ensemble fini, trouver le nombre de tirages non ordonnés sans remise de p - éléments que l'on peut effectuer avec les éléments de A.	■ *On pourra parler ainsi de nombre de combinaisons de* n *éléments* p *- à -* p *au nombre de parties à* p *- éléments d'un ensemble de* n *- éléments.* *Définition des notations :* C_n^p et $\binom{n}{p}$.
1.5 A étant un ensemble fini, trouver le nombre de tirages ordonnés aves remise de p éléments que l'on peut effectuer avec les éléments de A.	■ *On pourra parler ainsi de nombre d'applications d'un ensemble de* p *- éléments dans un ensemble de* n *- éléments au nombre de* p *- uplets d'éléments (pas nécessairement distincts) de* A.
1.6 Dénombrer un ensemble à l'aide d'un arbre de choix.	■ *Lorsque le problème posé le permet.*
1.6 Connaissant n et p $(p \leqslant n)$ entiers naturels calculer C_n^p et A_n^p.	
1.7 Ecrire le développement de $(a + b)^n$ n étant un entier naturel, a et b étant deux réels au complexes.	■ *Utilisation de la formule générale et du triangle de Pascal,* $(C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p)$.

TRAITER

2.1 Une situation de dénombrement étant donnée reconnaître de quel type il s'agit parmi les quatre types suivants :

- «tirage ordonné sans remise»
- «tirage non ordonné sans remise»
- «tirage ordonné avec remise»
- «tirage non ordonné avec remise»

■ Pour ces derniers, c'est-à-dire les «combinaisons» à répétition» aucune autre capacité n'est à vérifier.

RESULTAT DES RENCONTRES AVEC LES ENSEIGNANTS ACCUEILLANT LES BACHELIERS

Parmi les enseignants de DEUG et d'IUT que nous avons rencontré ce sont surtout les «utilisateurs» des mathématiques (physiciens, chimistes, mécaniciens) qui ont été intéressés par ce travail.

Les enseignants de mathématiques en IUT (mesures physiques, génie mécanique) jouent un double rôle ; ils fournissent l'outil nécessaire à l'enseignement des matières spécifiques à chaque IUT d'une part, et étendent la culture mathématique des étudiants pour leur rendre possible la poursuite d'études dans les écoles d'ingénieurs, d'autre part.

De ce fait ils sont, nous a--t-il semblé, tout à fait prêts à définir leur enseignement à partir des capacités énumérées dans ce document.

Par contre, en ce qui concerne les enseignants utilisant les mathématiques comme un outil nécessaire à la maîtrise de leur discipline, leurs demandes sont plus nettes et méritent à notre sens, d'être largement prises en compte.

Citons-les dans le désordre et analysons-les :

– **En chimie :**
  - les problèmes de PH (entre autres) gènent les étudiants ; il n'y a pourtant que la proportionnalité à mettre en œuvre.

– **En physique et mécanique :**
  - de grosses difficultés avec les vecteurs qui viennent de la confusion entre les normes et les vecteurs eux-mêmes, (les flèches disparaissent progressivement au cours des calculs).
  - le produit scalaire interprété comme $||u||\ ||v|| \cos(u, v)$ est très mal maîtrisé au profit de la notion de forme bilinéaire ... etc ... d'un usage très rare en physique et en mécanique.
  - par contre la mécanique quantique ne pose pas de problèmes majeurs aux étudiants.
  - la signification concrète des intégrales est très mal connue par contre les techniques de recherche de primitives sont relativement bien utilisées.
  - mal connue aussi l'approche pratique des dérivées d'où des difficultés pour leur utilisation dans les calculs approchés.
  - la trigonométrie «pratique» (de 3ème !) est mal maîtrisée.
  - de grosses difficultés avec les interpolations (encore la proportionnalité !)

Globalement : ce ne sont pas les techniques mathématiques proprement dites qui sont mal maîtrisées mais plutôt les concepts.

C'est typique pour la proportionnalité ; les étudiants savent bien sûr résoudre une équation du type : $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ mais ont du mal à savoir si une situation relève de la proportionnalité ou non.

C'est typique aussi pour les intégrales ; la difficulté majeure réside souvent dans l'incapacité à reconnaître une situation mettant en jeu le concept d'intégrale (c'est-à-dire l'approximation d'un nombre par une somme de Riemann).

Il en est de même pour $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, «approché» par y'_0.

Cette conclusion est confirmée par le fait suivant : les parties des programmes utilisant directement des outils mathématiques même très élaborés (mécanique quantique par exemple) ne posent pas trop de problèmes aux étudiants, dans la mesure où ils n'ont pas à faire la modélisation mathématique eux-mêmes.

En conséquence nos collègues des IUT et du Deug proposent que l'enseignant de mathématiques en Lycée, aide au décloisonnement des disciplines en faisant travailler les élèves sur des problèmes concrets (donc non modélisés au départ) en prenant des exemples en physique, chimie, mécanique ... Les élèves seraient amenés à reconnaître les concepts en jeu, ces derniers prenant alors nettement le pas sur les techniques de résolution (sans pour autant négliger leur maîtrise).

D'autre part en ce qui concerne le refus assez général de la part des étudiants de s'aider de «dessins», il est déploré par tous les enseignants, autant en mathématiques que dans les autres disciplines.

Le recours à l'image traduisant rapidement la propriété à établir, est une concrétisation qu'ils n'osent pas utiliser.

De plus l'image permet de «fabriquer» des contre-exemples frappant. Leur usage fréquent permettrait aux élèves de se familiariser avec leur construction et de ne plus les percevoir comme des «démonstrations insuffisantes et quelque peu magiques» parce qu'obtenues à partir d'exemples ou de dessins.

Pour finir il semble que les étudiants n'aient pas l'habitude de chercher à «contrôler» les résultats obtenus : que ce soit par les ordres de grandeur, ou en respectant une homogénéité, ou en examinant des cas particuliers simples.

Pour conclure : Nous sommes intimement persuadés que tout ce qui précède doit être très largement pris en compte par les enseignants de mathématiques en lycée, que c'est une condition nécessaire pour améliorer les résultats des élèves. Mais elle ne sera suffisante que si les enseignants qui les accueillent ont une bonne connaissance des capacités de leurs étudiants (peut-être en lisant le «contrat»).

Mme Gisèle CRISTOFINI-THOREL M. Claude GACHET