irem
institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques
de grenoble

HORS du PRET

« Activithémes » pour la classe de seconde

I. R. E. M.
DE GRENOBLE
BIBLIOTHÈQUE

année
1981 - 82

Ont participé à la réalisation de cette brochure

A. Bicais

P. Boullier

B. Cornu

N. Garcia

J. Guillaud

J. Mermet

B. Soubeyran

J. Vetticoz

M. Vignard

INTRODUCTION

Cette brochure présente quelques thèmes et activités pour la classe de seconde. Ces thèmes recouvrent diverses parties du programme de seconde ; ils ont tous été expérimentés dans des classes.

Il ne s'agit pas ici d'un «manuel de seconde» incomplet. Nous avons voulu en effet privilégier l'aspect **activités** et l'aspect **thèmes**, et non pas donner un déroulement modèle du cours.

Activités.

Parce qu'il ne suffit pas de voir faire des mathématiques, d'en écouter. Il faut en **faire**. Les concepts mathématiques s'acquièrent dans la mesure où ils répondent à des problèmes que l'on s'est posés. Ces activités ont pour but de mettre les élèves en situation de problème, de recherche. C'est tout l'opposé d'un cours magistral... mais çà n'empèche pas, bien au contraire, une synthèse sur certains points. Il est vrai que la situation actuelle (horaires, effectifs, longueur du programme, niveau des élèves) rend difficile le travail sous forme d'activités, car ce travail prend du temps. Mais il nous semble pourtant que c'est une condition indispensable pour l'apprentissage des mathématiques.

Thèmes.

Il nous semble que dans l'esprit du nouveau programme, la notion de thème ne recouvre pas seulement des rubriques ajoutées au programme, comme si le programme comprenait une partie importante et obligatoire, et des compléments facultatifs. Les thèmes ne constituent pas non plus un simple recueil d'exercices et d'applications, ou de prolongements du cours. Le rôle essentiel d'un thème est de préparer l'acquisition d'un concept en posant les problèmes qu'il s'agit de résoudre. Par exemple, le thème «exemples de suites convergeant vers $\sqrt{p}$» fournit un problème précis. En cherchant à le résoudre, d'autres problèmes vont apparaître. Le calcul sur les nombres réels, la valeur absolue, les suites vont apparaître alors de façon naturelle comme des outils, utiles pour résoudre des problèmes. De même, l'étude du cube est un thème qui va permettre la mise en place des principales propriétés d'incidence, de parallélisme, d'orthogonalité, dans l'espace.

Ainsi, le thème, ne vient pas **après** le cours, mais au contraire il constitue une stratégie pédagogique. Le cours est alors l'occasion de mises en place, de synthèses, de généralisation. Mais la référence au thème est constante.

Dans cet esprit, le choix d'un thème doit être fait de façon très attentive : le thème doit être susceptible d'intéresser les élèves, et de les intéresser pendant assez longtemps ; le thème doit être l'occasion de poser des problèmes auxquels les outils et les concepts apportent des réponses, le thème fournira l'essentiel des activités proposées aux élèves. Un thème bien choisi peut permettre d'aborder une grande partie du programme.

C'est dans cet esprit que nous avons essayé de développer les thèmes et activités présentés ici.

Bibliographie, à propos de la notion de thème :

- Introduction aux programmes de seconde.
- Commentaires des programmes de seconde.
- «Sur la notion de thème dans l'enseignement des mathématiques» *(Bulletin Inter IREM «thèmes pour la classe de seconde», page 51).*

CALCULATRICES DE POCHE
ET ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Les calculatrices de poche sont de plus en plus utilisées dans l'enseignement des mathématiques, et tout particulièrement en seconde ; le programme y incite d'ailleurs explicitement. Beaucoup d'élèves en possèdent ; certains savent même s'en servir !

Il y a trois apports essentiels des calculatrices de poche à l'enseignement des mathématiques.

1) Un outil de calcul, qui remplace règle à calcul et tables numériques. Cet outil de calcul est **puissant** et **rapide.** Il permet en particulier de traiter des applications numériques «non truquées» (données réelles... qui ne conduiront pas forcément à des manipulations). Cependant, cet outil de calcul présente quelques **risques,** en particulier sur la **précision** des calculs : l'abondance de décimales est une illusion qu'il faut maîtriser (alors que sur la règle à calcul, on **voit** directement quels sont les chiffres significatifs) ; il faut également maîtriser les **erreurs** (d'arrondi ou de troncature, et de méthode) commises par la calculatrice. L'apprentissage de l'utilisation d'une calculatrice est enfin une bonne occasion de révision des techniques usuelles de calcul, et des problèmes d'écriture algébrique.

2) Un outil qui permet **la mise en œuvre de méthodes numériques.** Grâce à la calculatrice, les méthodes numériques approchées trouvent la place qu'elles méritent dans l'enseignement des mathématiques : en particulier, en classe de seconde, elles sont fort utiles pour l'étude des fonctions et pour la résolution des équations. La machine permet la mise en œuvre, et donc une meilleure compréhension, des méthodes itératives, par exemple pour calculer des racines carrées.

3) Un outil pédagogique qui permet une meilleure appropriation par les élèves de certaines notions mathématiques. La calculatrice permet des manipulations, des expérimentations préparatoires à l'introduction d'une notion. Elle permet également des illustrations et des vérifications. On peut citer par exemple, les notions de suite et de limite, où la machine apporte un «relief» considérable. La notion de fonction, pour laquelle la machine donne une approche complémentaire favorisant l'acquisition du concept (voir par exemple «étude locale d'une fonction»). Enfin la calculatrice permet de développer chez l'élève un certain nombre d'attitudes face aux mathématiques, et en particulier au raisonnement mathématiques : la calculatrice permet de **faire des conjectures**, acte essentiel en mathématiques, trop souvent oblitéré par la démarche habituelle du «cours magistral». La calculatrice permet de **visualiser** certains résultats qui perdent ainsi un peu de leur aspect mystérieux (par exemple : $e^{0,01} = 1,010\,05$ est une visualisation de la formule $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ...$). La calculatrice per enfin de **vérifier** les résultats obtenus en les soumettant à l'expérimentation ou à l'application numérique.

D'autres aspects méritent également d'être cités :

- La calculatrice permet de mettre les élèves en **situation d'activité**, et change donc leur comportement face aux mathématiques : ils en **font** ; ils ne se contentent pas d'en regarder... et d'en avaler !

- La calculatrice permet une attitude différente face au calcul : elle **ne dispense pas du calcul mental**, bien au contraire ! Son emploi nécessite et favorise une grande maîtrise du fonctionnement du calcul. Mais elle permet de **dépasser certains blocages** des élèves face au calcul, et leur permet d'aborder d'autres problèmes en mathématiques, sans ce pralable du calcul : «je ne sais pas calculer... je ne peux donc rien comprendre aux maths...».

- La calculatrice fournit un exemple d'utilisation d'un **langage conventionnel** avec lequel on ne peut pas tricher. Çà marche ou çà ne marche pas... il n'y a pas de «marge d'interprétation».

SUITES ARITHMETIQUES
ACTIVITE D'INTRODUCTION

Un atelier de montages électroniques comporte dix postes de travail individualisés disposés selon le plan ci-joint annexé.

A chaque poste de travail est attribué un chariot, lequel sert,

— le matin, à apporter' au poste en question, depuis le service de préparation, l'ensemble des fournitures nécessaires pour le travail prévu de la journée ;

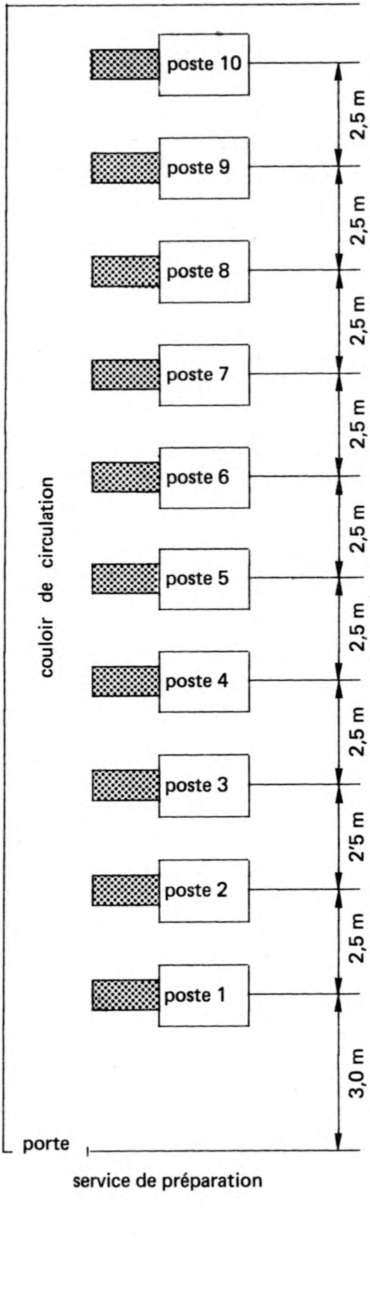
— le soir, à emporter depuis le poste en question, vers le service de contrôle, le travail fini.

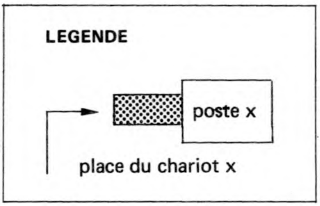
Tous les matins un ouvrier conduit à chaque poste le chariot correspondant, et ce à raison d'un seul chariot à la fois et en suivant l'ordre de numérotation des postes : partant du service de préparation il conduit le chariot numéro 1, revient au service de préparation, conduit le chariot numéro 2, etc...

Pour chaque jour de travail, on désignera par :

d_1 la distance parcourue pour l'approvisionnement du poste 1 ;
d_2 la distance parcourue pour l'approvisionnement du poste 2 ;
etc...
d_k la distance parcourue pour l'approvisionnement du poste k.

PLAN DE L'ATELIER





Première étape.

Calculez successivement d_1, d_2, d_3, *etc...*

d_1	
d_2	
d_3	
d_4	
d_5	
d_6	
d_7	
d_8	
d_9	
d_{10}	

Deuxième étape.

Comment calculez-vous

d_2 à partir de d_1 ? ......

d_3 à partir de d_2 ? ......

....

d_k à partir de d_{k-1} ? ......

Troisième étape.

En écrivant les expressions de d_2 en fonction de d_1, de d_3 en fonction de d_2, etc... les unes en dessous des autres il est possible de déterminer l'expression de d_k en fonction de d_1 et de k.

Comment faites-vous ?

$d_2 =$

$d_3 =$

$d_4 =$

....

$d_{k-1} =$

$d_k =$

$d_k =$

Quatrième étape.

Quelle est la distance parcourue chaque matin par l'ouvrier chargé du travail de distribution ?

D =

Il est possible d'écrire :

$D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8 + d_9 + d_{10}$

soit D = + + + + + + + + +

et $D = d_{10} + d_9 + d_8 + d_7 + d_6 + d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1$

soit D = + + + + + + + + +

Que constatez-vous ?

Donnez l'expression de D *en fonction de* d_1 *et* d_{10}.

Cinquième étape.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

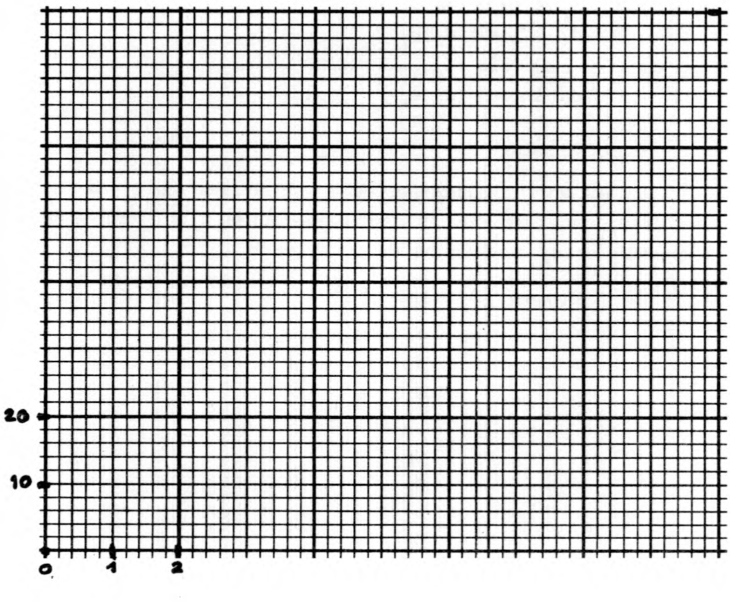
$k \longmapsto d_k$.

1) Donnez son ensemble de définition.

2) Donnez, en extension, son graphe.

$G_f = \{(,), (,), (,), (,),$

3) Sur le papier millimétré ci-dessous dessinez la représentation de son graphe.



SUITES GEOMETRIQUES

ACTIVITES D'INTRODUCTION.

De nombreux composants électroniques, en particulier les résistances, sont marqués à l'aide de couleurs.

L'utilisation du code des couleurs permet de déterminer la valeur de chaque composant ainsi marqué.

Le **«code international des couleurs»** vous est fourni ci-après, vous pourrez l'utiliser en particulier en T.P. de physique.

Exemple.

Une résistance marquée

/rouge/brun/jaune/argent/

a pour **valeur nominale** 210 000 ohms avec une tolérance de 10%, c'est-à-dire que sa **valeur réelle** est comprise entre

$$210\,000 - 210\,000 \times 0{,}1 \quad \text{soit} \quad 189\,000$$
$$\text{et} \quad 210\,000 + 210\,000 \times 0{,}1 \quad \text{soit} \quad 231\,000$$

Les tolérances usuelles sont de 5%, 10%, 20%. Pour une tolérance donnée, les valeurs nominales des résistances appartiennent à des suites de **valeurs dites normales ou normalisées.**

Le tableau faisant suite au «Code International des Couleurs» vous donne les trois suites de valeurs nominales normales.

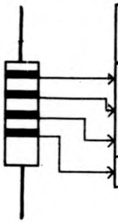
Ainsi pour les résistances de tolérance 5%, la suite des valeurs normales est : $V_1 = 10$, $V_2 = 11$, $V_3 = 12$, etc...

Pour les résistances de tolérance 10%, la suite des valeurs normales est : $V_1 = 10$, $V_2 = 12$, $V_3 = 15$, etc...

Pour les résistances de tolérance 20%, la suite des valeurs normales est : $V_1 = 10$, $V_2 = 15$, $V_3 = 22$, etc...

CODE INTERNATIONAL DES COULEURS

MARQUAGE DES RÉSISTANCES



Couleur		Noir	Brun	Rouge	Orange	Jaune	Vert	Bleu	Violet	Gris	Blanc	Or	Argent
Valeur	1er chiffre / 2e chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	Multiplicateur	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000					
Tolérance			1 %	2 %								5 %	10 %

sans marquage 20 %

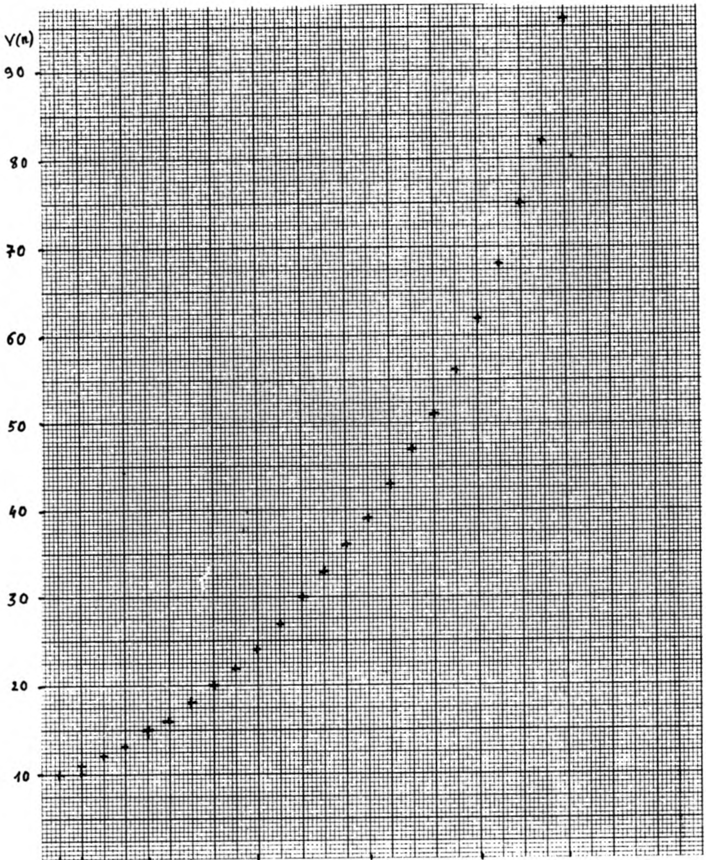
Echelonnement des valeurs		
± 5 %	± 10 %	± 20 %
10	10	10
11		
12	12	
13		
15	15	15
16		
18	18	
20		
22	22	22
24		
27	27	
30		
33	33	33
36		
39	39	
43		
47	47	47
51		
56	56	
62		
68	68	68
75		
82	82	
91		

Première étape.

Représentez graphiquement la suite des valeurs normales des résistances de tolérance 5%, dans un repère orthogonal, en respectant les échelles suivantes :

— axe des abscisses : les rangs ; un écart de rang de 1 étant représenté par 5 mm ;

— axe des ordonnées : les valeurs nominales ; la valeur nominale 10 étant représentée par 20 mm ;



En examinant ce graphique pensez-vous que la suite des valeurs normales des résistances de tolérance 5%, soit une suite arithmétique ?

Réponse (à justifier).

Non, car les points ne sont pas alignés.

Deuxième étape.

Pour chaque suite de valeurs normales, calculez les suites de rapports

$$\frac{\text{valeur normale de rang n}}{\text{valeur normale de rang n - 1}}.$$

Pour faire ces calculs avec votre TI - 30 il vous est conseillé d'utiliser le programme indiqué ci-dessous sur la fiche de simulation que vous complèterez.

M	Y		X	clavier	commentaire
			V_1	V_1	Introduction de V_1 dans le registre d'entrée X
V_1			V_1	$\boxed{\text{STO}}$	V_1 est recopié dans le registre M (mémoire).
V_1			V_2	V_2	Introduction de V_2 dans le registre d'entrée X.
V_1	V_2	:	V_2	$\boxed{\div}$	Ordre de division enregistré dans la partie opérateur de Y ; V_2 est recopié dans la partie opérande de Y
V_2	V_2	:	V_1	$\boxed{\text{EXC}}$	Echange des contenus des registres M et X
V_2			V_2/V_1	$\boxed{=}$	Exécution de la division du contenu de Y par le contenu de X.
V_2			V_3	V_3	
V_2	V_3	:	V_3	$\boxed{\div}$	
V_3	V_3	:	V_2	$\boxed{\text{EXC}}$	
V_3			V_3/V_2	$\boxed{=}$	
V_{k-1}			V_k	V_k	
V_{k-1}	V_k	:	V_k	$\boxed{\div}$	
V_k	V_k	:	V_{k-1}	$\boxed{\text{EXC}}$	
V_k			V_k/V_{k-1}	$\boxed{=}$	

Les résultats obtenus sont alors inscrits dans la grille réponse ci-dessous.

série 5%			série 10%			série 20%		
rg	val.	V_n/V_{n-1}	rg	val.	V_n/V_{n-1}	rg	val.	V_n/V_{n-1}
1	10		1	10		1	10	
2	11	1,1	2	12	1,2	2	15	1,5
3	12	1,090	3	15	1,25	3	22	1,466
4	13	1,083	4	18	1,2	4	33	1,5
5	15	1,153	5	22	1,222	5	47	1,424
6	16	1,066	6	27	1,227	6	68	1,446
7	18	1,125	7	33	1,222			
8	20	1,111	8	39	1,181			
9	22	1,1	9	47	1,205			
10	24	1,090	10	56	1,191			
11	27	1,125	11	68	1,214			
12	30	1,111	12	82	1,205			
13	33	1,1						
14	36	1,090						
15	39	1,083						
16	43	1,102						
17	47	1,093						
18	51	1,085						
19	56	1,098						
20	62	1,107						
21	68	1,096						
22	75	1,102						
23	82	1,093						
24	91	1,109						
remarque $\frac{V_n}{V_{n-1}} \approx 1{,}1$			remarque $\frac{V_n}{V_{n-1}} \approx 1{,}2$			remarque $\frac{V_n}{V_{n-1}} \approx 1{,}5$		

Troisième étape.

Pour découvrir «le pourquoi»... faites un petit effort pour répondre aux questions suivantes...

Question 1.

Une résistance de la «suite 10%» a pour valeur nominale 220 ohms.

A quel intervalle appartient sa valeur réelle ?

Réponse.

$r \in [220 - 220 \times 0{,}1\ ;\ 220 + 220 \times 0{,}1]$

soit $r \in [198, 242]$.

Question 2.

Une résistance de la «suite t%» a pour valeur nominale V_n.

A quel intervalle appartient sa valeur réelle r_n *?*

Réponse.

$r_n \in [V_n - V_n \times \frac{t}{100}\ ;\ V_n + V_n \times \frac{t}{100}]$

soit $r_n \in [(1 - \frac{t}{100})V_n\ ;\ (1 + \frac{t}{100})V_n]$.

Question 3.

Dans la «suite t%» comment faut-il choisir deux valeurs nominales successives V_{n-1} *et* V_n *pour qu'il y ait «recouvrement» de l'ensemble des valeurs «possibles» par l'ensemble des valeurs réelles ?*

Réponse.

$$(1 + \frac{t}{100})V_{n-1} = (1 - \frac{t}{100})V_n$$

d'où $$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{1 + \frac{t}{100}}{1 - \frac{t}{100}} = \frac{100 + t}{100 - t}.$$

Question 4.

Dans chacun des cas suivants, calculez la valeur du rapport V_n/V_{n-1} *pour que la condition de «recouvrement», déterminée dans la question précédente, soit vérifiée.*

t	V_n/V_{n-1}
5	$\frac{105}{95} = 1{,}105... \approx 1{,}1$
10	$\frac{110}{90} = 1{,}222... \approx 1{,}2$
20	$\frac{120}{80} = 1{,}5$

Que constatez-vous ?

On retrouve les valeurs trouvées à l'issue de la deuxième étape.

Vous venez de découvrir l'une des principales applications des suites géométriques : la normalisation.

ETUDE LOCALE D'UNE FONCTION

Cette activité correspond à la partie suivante du programme de seconde.

«III. **c) Comportement local d'une fonction.**

Exemples d'études au voisinage de zéro :

$x \longmapsto (1+x)^2$, $x \longmapsto (1+x)^3$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

Exemples d'approximation locale par une fonction affine, utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs.

On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place d'une majoration.

Par exemple : $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x}(1-x) \leqslant 2x^2$.

sous la condition suffisante $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

$0 \leqslant -\sqrt{1+x} + (1+\dfrac{x}{2}) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$, etc...».

Dans l'introduction au programme, on lit également :

«Une grande facilité du calcul numérique permet d'aborder d'une façon nouvelle les problèmes d'approximation ; c'est l'expérimentation qui associe $(1+h)^a$ et $1+ah$ pour h petit, le raisonnement ensuite justifie le résultat et en indique les limites ; il en va de même ensuite au voisinage d'un point quelconque.

I – ETUDE DE $x \longmapsto (1+x)^2$ AU VOISINAGE DE ZERO.

1) A l'aide d'une calculatrice de poche, calculer $(1+x)^2$ pour les valeurs suivantes de x : 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,000 1 ;... On obtient le tableau :

x	$(1+x)^2$
1	4
0,1	1,21
0,01	1,0201
0,001	1,002 001
0,000 1	1,000 2
0,000 01	1,000 02
0,000 001	1,000 002
0,000 000 1	1,000 000 2

Remarquer à partir de 0,1 la place du 1, du 2, et de l'autre 1 ; montrer qu'ils correspondent respectivement à 1, $2x$, et x^2.

Remarquer qu'à partir d'une certaine valeur de x, pour la machine, $(1+x)^2$ est égal à $1+2x$. Observer qu'en effet, si x est petit, x^2 est «négligeable».

On pose donc : $(1+x)^2 \simeq 1+2x$ pour x voisin de 0.

Cette formule n'est valable que pour x petit (essayer avec de grandes valeurs de x...).

2) On peut évidemment préciser l'erreur, en écrivant :

$$(1+x)^2 - (1+2x) = x^2.$$

Ceci permet de déterminer à partir de quelle valeur de x l'erreur sera inférieure à 10^{-3}, 10^{-4}, ... En particulier, on peut déterminer à partir de quelle valeur de x on a l'égalité $(1+x)^2 = 1+2x$ pour la calculatrice.

3) Exercices de calcul mental : calculer $(1{,}000\,3)^2$; $(1{,}000\,25)^2$; ... calculer $(0{,}999\,2)^2$. Ceci introduit une autre formule :

$$(1-x)^2 \simeq 1-2x \text{ pour } x \text{ voisin de } 0.$$

4) Sur une feuille de papier millimétré, tracer les représentations graphiques de $x \longmapsto (1+x)^2$ et de $x \longmapsto 1+2x$, pour $x \in [-2, 2]$. On constate (et on peut démontrer !) que la droite $x \longmapsto 1+2x$ est tangente à la parabole $x \longmapsto (1+x)^2$, et que, pour x voisin de zéro, les graphes sont très voisins.

Remplacer $(1+x)^2$ par $1+2x$, c'est remplacer la parabole par une droite : sa tangente au point $x=0$.

On peut insister sur le fait que la tangente en $x=0$ est non seulement une droite d'équation $y = ax+b$ telle que $(1+x)^2 - (ax+b)$ soit nul pour $x=0$ ou même soit de plus en plus proche de zéro lorsque x se rapproche de zéro, mais que cette différence a une décroissance de l'ordre de celle de x^2 : il n'y a pas de terme en x.

II – ETUDE DE $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ AU VOISINAGE DE ZERO.

1) On reprend le même plan d'étude : on dresse le tableau :

x	$\dfrac{1}{1+x}$
1	0,5
0,1	0,909 090 9
0,01	0,990 099
0,001	0,999 001
0,000 1	0,999 9
0,000 01	0,999 99
0,000 001	0,999 999
0,000 000 1	0,999 999 9

On voudrait remplacer $\dfrac{1}{1+x}$ par une expression du type $1 + ax$.

Quelle valeur de a *semble convenir ?*

On obtient la formule : $\dfrac{1}{1+x} \simeq 1 - x$ pour x voisin de zéro.

Comme dans I, on a «négligé un terme en x^2» :

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 \simeq 1, \text{ donc } \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x.$$

2) Dans I, on connaissait exactement l'erreur (c'était x^2). Ici, on va **majorer** l'erreur :

Si $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire si $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{1}{2} \leqslant 1 + x$, donc $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 2$.

Par conséquent, $\dfrac{x^2}{1+x} \leqslant 2x^2$, ce qui permet d'écrire :

$$0 \leqslant \frac{1}{1+x} - (1 - x) = \frac{x^2}{1+x} \leqslant 2x^2.$$

Il est important de bien remarquer qu'il s'agit d'une **majoration** de l'erreur, et non de l'erreur.

«Calcul mental» : calculer $\dfrac{1}{1{,}001\,3}$; $\dfrac{1}{0{,}99}$; ...

Quelle est la formule analogue pour $\dfrac{1}{1-x}$ *?*

A partir de quelle valeur de x *est-on certain que* $\frac{1}{1+x}$ *et* $1 - x$ *diffèrent de moins de* 10^{-3}, 10^{-4}, ... ?

En particulier, à partir de quelle valeur de x *peut-on être certain de l'égalité sur la calculatrice ?*

En fait, à partir de quelle valeur de x *a-t-on cette égalité sur la calculatrice ?*

On peut développer quelques activités autour de la propriété :

«Quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif η, tel que si $|x| \leqslant \eta$, alors $\frac{1}{1+x} - (1 - x) \leqslant \varepsilon$», en mettant en valeur l'aspect ludique · «tu me donnes un ε, et je trouve un η».

3) Ici encore, on fait le lien avec la tangente en $x = 0$ à la courbe $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$; on a remplacé, au voisinage d'un point, une hyperbole par une droite, telle que la différence «tende vers zéro comme x^2».

III – ON PEUT FAIRE UNE ETUDE ANALOGUE POUR $x \longmapsto \sqrt{1+x}$; $x \longmapsto (1+x)^3$...

On laissera les élèves découvrir eux-mêmes à partir du tableau de valeurs la formule d'approximation.

On peut remarquer que toutes les formules d'approximation obtenues s'écrivent :

$$(1 + x)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha x \text{ pour } x \text{ voisin de zéro.}$$

IV – UN EXEMPLE D'APPLICATION (d'après «Activités préparatoires à l'analyse», p. 34, IREM de Grenoble, 1977-1978).

Avec 100 F *(ou* 50 F, *ou* 120 F, *...), combien d'essence pourrai-je mettre dans mon réservoir ?*

Le prix du super est actuellement de 3,92 F le litre. Je ne veux pas lâcher mon volant pour poser des opérations, aussi vais-je essayer de faire une évaluation de tête.

Si je remplace le prix de 3,92 F le litre par 4 F le litre, le calcul est simple : pour x litres, je paie $X = 4x$ francs, donc pour X francs, j'obtiens :

$$x = \frac{X}{4} \text{ litres de super.}$$

Mais le super ne coûte pas tout à fait 4 F le litre. J'aurai donc un peu plus de $\frac{X}{4}$ litres de super : $\frac{X}{3{,}92}$ exactement.

Combien en aurai-je en plus ?

3,92 au lieu de 4 représente une économie de $\frac{0{,}08}{4} = 2\ \%$. On peut écrire :

$$3{,}92 = 4(1 - \frac{2}{100}).$$

On a donc :

$$\frac{X}{3{,}92} = \boxed{\frac{X}{4(1 - \frac{2}{100})} \simeq \frac{X}{4}(1 + \frac{2}{100})}$$

Autrement dit, **réduire le prix de 2 % revient à peu près à augmenter la quantité d'essence de 2 %.**

D'où la formule à utiliser pour faire les calculs sans lâcher le volant :

$$\boxed{x \cong \frac{X}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{X}{100}}$$

Je vais obtenir environ :

- pour 100 F

$$25 + \frac{1}{2} = 25{,}5\ \ell\ ;$$

- pour 50 F

$$12{,}5 + 0{,}25 = 12{,}75\ \ell\ ;$$

- pour 120 F

$$30 + 0{,}6 = 30{,}6\ \ell.$$

Quelle est la validité de cette formule ?

On a utilisé la formule :

$$\frac{1}{1 - h} \simeq 1 + h, \text{ avec } h = 0{,}02.$$

On a bien

$$|h| \leqslant \frac{1}{2},$$

donc

$$0 \leqslant \frac{1}{1 - h} - (1 + h) \leqslant 2h^2.$$

L'erreur est inférieur à $2 \times 0{,}02^2 = 0{,}000\,8$.

L'erreur sur $\frac{1}{3{,}92} = \frac{1}{4(1 - 0{,}02)}$ est donc inférieur à $\frac{1}{4} \times 0{,}000\,8 = 0{,}000\,2$.

Pour 100 F, je fais une erreur inférieure à 0,02 litres.

PROBLEMES D'OPTIMISATION

En règle générale on peut dire que les problèmes d'optimisation sont satisfaisants pour l'esprit car ils sont étroitement liés à la plus part de nos comportements de la vie courante.

Nous présentons ici une série d'activités sur ce thème, avec les objectifs suivants :

■ Faire des révisions (calculs dans IR, pourcentages, géométrie, fonctions trigonométriques).

■ Prendre contact avec la notion de fonction (tracés points par points et leurs utilisations pour résoudre (?) un problème).

■ Prendre contact avec la calculette.

A) L'abonnement à une société d'autoroutes.

Une société d'autoroute propose à ses usagers un abonnement au conditions suivantes :

■ achat obligatoire d'une carte annuelle d'une valeur de 230 F ;
■ 30 % de réduction sur le prix du péage aux titulaires d'une telle carte.

Sachant que le prix du péage est de 0,25 F, *le km à partir de quel moment a-t-on intérêt à s'abonner ?*

Soit x le nombre de km parcourus par un usager en une année.

1) Soit f et g les fonctions représentant respectivement le coût du péage pour un non abonné et un abbonné en fonction du nombre x de km parcourus en une année.

Etudier et représenter graphiquement les fonctions f *et* g *dans un même repère du plan.*
Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $g(x) \leqslant f(x)$.
Conclusion ?

2) Soit T le taux réel de réduction pour une année d'abonnement.

Etudier et représenter graphiquement la fonction $x \longrightarrow T$.

A partir de quelle valeur de x *a-t-on effectivement une réduction ?*

Déterminer graphiquement puis par le calcul la valeur de x *telle que* $T = 25\ \%$.

Que devient T *lorsque* x *devient de plus en plus grand ?*

Peut-on avoir $T = 30\ \%$ *?*

Déterminer x *pour que* $28\ \% \leqslant T < 30\ \%$.

Solution.

1) Dépense pour 4 voyages aller retour pendant 35 semaines sans abonnement

$$33 \times 4 \times 35 = 4\,620 \text{ F}.$$

Dépense dans les mêmes conditions pour un abonné

$$4\,620 \times 70\ \% + 230 = 3\,464 \text{ F}.$$

Réduction réelle

$$4\,620 - 3\,464 = 1\,156 \text{ F}$$

soit en pourcentage $\dfrac{1\,156}{4\,620} \cong 25\ \%$.

2) $T(x) = \dfrac{x - (0{,}7x + 230)}{x}$.

On obtient la fonction

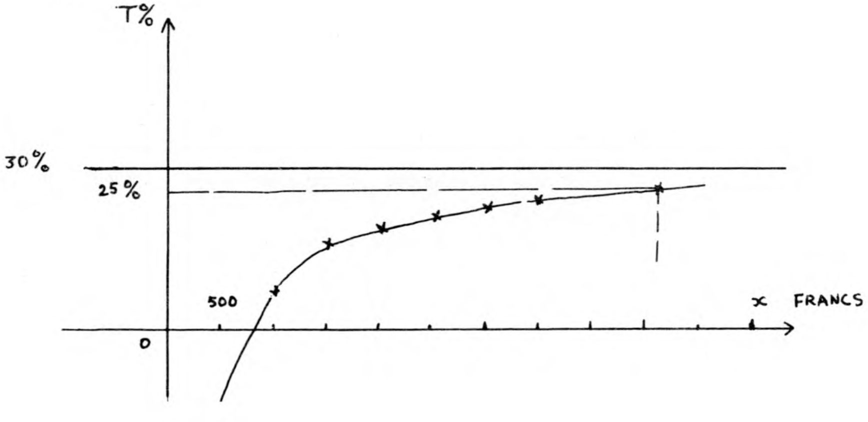
$$x \longrightarrow T(x) = 0{,}3 - \frac{230}{x}.$$

Par un changement de repère on se ramène à une fonction du type

$$x \longrightarrow \frac{a}{x}.$$

T sera positif si et seulement si x est supérieur à 766 F ce qui permet de dire que la formule d'abonnement proposée n'est intéressante qu'à la condition d'acquitter plus de 766 F de péage par an.

Tout en restant strictement inférieur à 30 % le taux de réduction avec l'utilisation.



B) La salle de cinéma.

Le propriétaire d'une salle de cinéma de 700 places constate qu'en moyenne 200 personnes assistent aux représentations lorsque le prix d'entrée est de 20 francs. Pour rentabiliser son entreprise il décide de s'orienter du côté du cinéma de répertoire. Ce genre de spectacle s'adressant à une clientèle plus jeune il estime que chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 2 francs il attire 50 nouveaux spectateurs.

En partant de cette hypothèse déterminer quel devrait être le prix du billet pour obtenir un revenu maximum.

Soit K le nombre de fois ou il diminue le prix du billet. Son revenu est alors égal à $(20 - 2K)(200 + 50K)$.

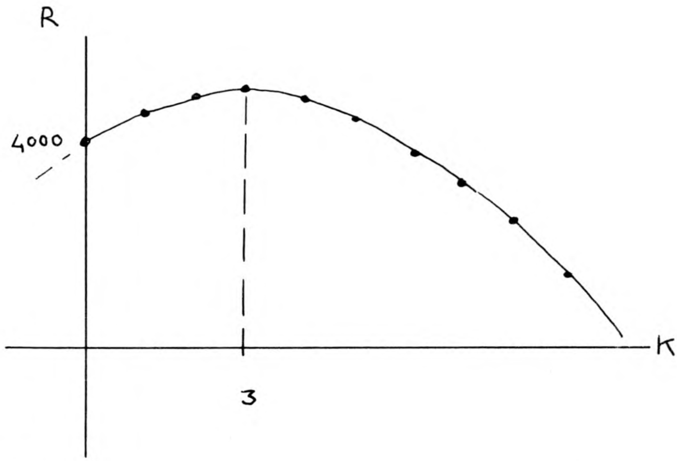
$$R = -100K^2 + 600K + 4\,000.$$

En utilisant la représentation graphique de la fonction $K \longrightarrow R$ le maximum du revenu est obtenu pour $K = 3$.

Prix du billet : 14 francs.

Revenu : 4 900 francs.

Par le calcul $R = -100(K - 3)^2 + 4\,900$, R est maximum pour $K - 3 = 0$ c'est-à-dire $K = 3$.



Remarque.

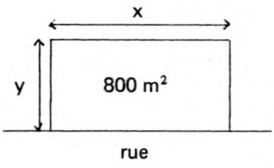
Les nombres k sont des entiers, donc le graphe est «discret».

C) La société HLM.

Une société HLM possède un terrain qu'elle désire subdiviser en lots afin d'y construire des maisons.

Chaque lot devra avoir une superficie de 800 mètres carrés et posséder des dimensions telles que la clôture qui l'entoure sur 3 côtés (il est inutile de clôturer le côté donnant sur la rue) soit de longueur minimale.

Quelles devraient être les dimensions du lot répondant à ces exigences ?



Soit x la longueur du lot et y sa profondeur.

Son aire est $A = xy$.

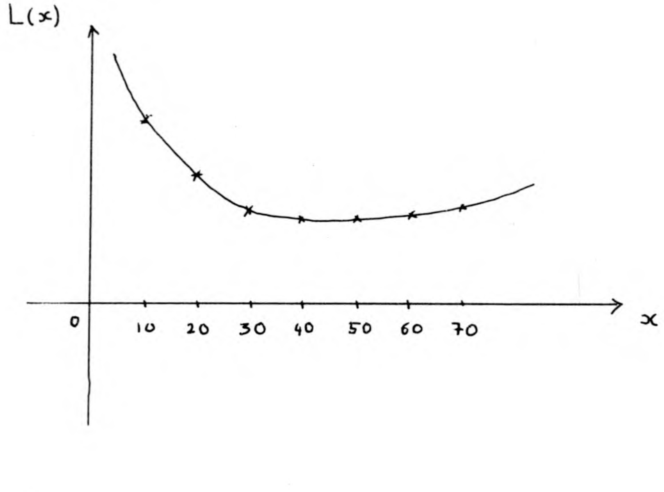
$$y = \frac{800}{x}.$$

La longueur de la clôture est $x + 2y$.

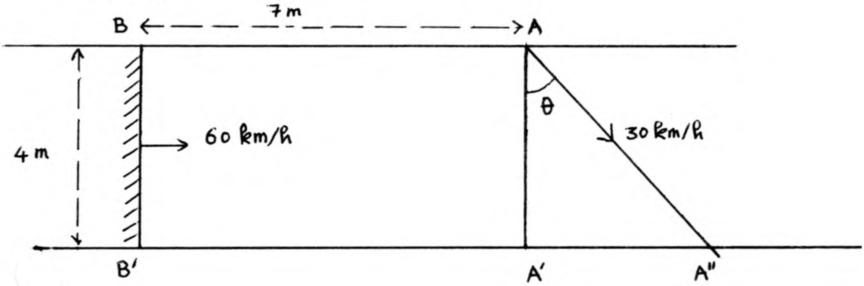
$$L(x) = x + \frac{1\,600}{x}.$$

A l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction $x \longrightarrow A(x)$.

Son minimum est obtenu pour $x = 40$. Les dimensions du lot sont 40 mètres et 20 mètres.



D) La poule.



Enoncé du problème.

Une poule désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion (ou une moissonneuse-batteuse) occupant toute la route arrive à sa rencontre à raison de 60 km/h.

La poule décide au dernier (?) moment de traverser alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres d'elle. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'elle effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités. C'est-à-dire ici à 30 km/h.

Il s'agit de savoir si la poule peut s'en sortir.

Une fiche élève pourrait, grosso modo, suivre la progression suivante.

Etape numéro 1.

Mettre le problème sous forme mathématique.

Pour cela se rapporter à la figure 1. On y voit que (*) l'avant du camion est représenté par le segment BB′ et que (**) la poule part du point A en direction du point A″. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = (AA', AA'')$. On peut se restreindre à un angle de mesure en degrés comprise entre 0 et 90.

Etape numéro 2.

Déterminer les distances AA″ *et* B′A″ *en fonction de* θ.

On trouve : $AA'' = \dfrac{4}{\cos\theta}$ et $B'A'' = 7 + 4\operatorname{tg}\theta$; l'unité étant le mètre.

Etape numéro 3.

Déterminer les temps t_p *et* t_c *mis par la poule et le camion pour parcourir les chemins* AA″ *et* B′A″ *(respectivement).*

On trouve : $t_p = \dfrac{1}{\cos\theta} \times \dfrac{4}{30} \cdot 10^{-3}$; l'unité étant l'heure.

$t_c = \dfrac{7 + 4\operatorname{tg}\theta}{60} \cdot 10^{-3}$; l'unité étant l'heure.

Etape numéro 4.

Donner une condition portant sur t_p *et* t_c *pour que la poule puisse traverser sans se faire écraser.*

On a : $t_p \leqslant t_c$. Il est à remarquer que si la poule atteint le point A'' avant le camion, alors elle a été en avant du camion pendant la traversée.

En effet, dès l'instant où la poule a été rattrapée elle est toujours en arrière de l'avant (!) du camion puisque sa projection orthogonale sur le côté de la route (ou son ombre relative à une position adéquate du soleil) va mo vite que le camion.

Etape numéro 5.

Comparer t_p à t_c revient à comparer $t_c - t_p$ à 0.

On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\text{tg}\,\theta - \frac{4}{\cos\theta} = \frac{1}{30}(t_c - t_p)$.

Donner une condition sur $f(\theta)$ *pour que la poule s'en sorte.*

La condition est que $f(\theta)$ soit positif ou nul.

Etape numéro 6.

Tracer le graphe de f *point par point. Commenter.*

On obtient le tableau suivant.

θ	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$f(\theta)$	-0,5	-0,34	-0,2	-0,10	-0,02	0,019	0,03	0,017	-0,04	-0,15	-0,33	-0,6	-1,03

On en conclut donc que si la poule part dans une direction faisant un angle compris entre 25 et 35 degrés avec la perpendiculaire au bord de la r elle ne se fait pas écraser.

Par contre la pauvrette ne s'en sort pas pour un angle plus petit que 20 degrés ou plus grand que 40 degrés.

On peut préciser les calculs autour de 30 degrés. On obtient :

θ	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$f(\theta)$	0,019	0,025	0,029 7	0,033 1	0,035 2	0,035 8	0,035 1	0,033	0,029

Ce qui montre que le maximum de f est obtenu pour un angle voisin de 30 degrés. Ce qui correspond à la direction qui permet à la poule de s'en sortir avec le maximum de marge.

On peut faire remarquer que ce n'est pas ici le chemin le plus court qui est le meilleur, mais un chemin qui réalise une bonne moyenne entre les deux impératifs : s'écarter du camion et traverser rapidement la route.

Nous allons donner maintenant un problème qui se ramène au précédent.

L'énoncé est le suivant.

Etant donné un triangle isocèle ABC, *(cf. figure 2) déterminer la position du point* M *sur la hauteur* CH, *tel que la distance* MC + MA + MB *soit minimum.*

Cf. collection Inter-IREM - numéro 1 - p. 86-87.

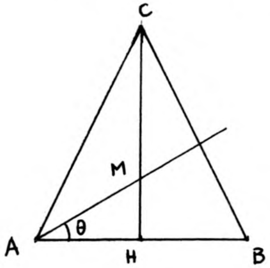


FIG 2

On pose : CH = b et AB = a.

On a :

$$MH = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta \quad ; \quad CM = b - \frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta \quad \text{et} \quad AM = \frac{a}{2\cos\theta}.$$

Ainsi

$$f(M) = MC + MA + MB = b + \frac{a}{\cos\theta} - \frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta.$$

On remarque alors que modulo le coefficient b, on tombe sur l'opposée de la fonction étudiée dans le problème précédent.

La recherche d'un maximum se transforme en celle d'un minimum qui est donc atteint pour θ voisin de 30 degrés (en fait c'est la valeur exacte).

Le lien etre les deux problèmes précédents peut se faire comme il suit : Puisque la poule va deux fois moins vite que le camion, on peut considérer qu'elle va à la même vitesse que le camion mais qu'elle a deux fois plus de chemin à parcourir. Ainsi, si l'on garde les notations du premier problème (cf. figure 1), et si l'on note A''' le symétrique de A par rapport à A' et B'' le symétrique de B' par rapport à A' (cf. figure 3), on peut supposer que la poule parcourt le chemin $AA''A'''$ et que le camion parcourt le chemin $B''A'A''$.

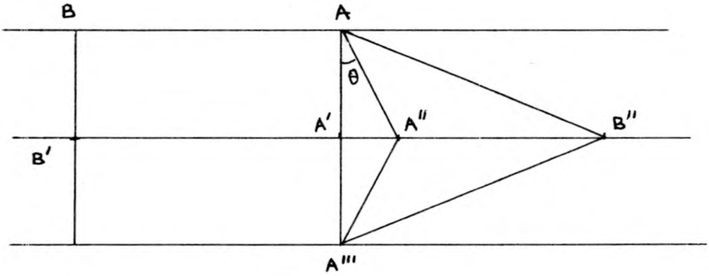


FIG 3

Dans ces conditions la poule «gagne» (on ne peut plus dire «s'en sort», car l'interprétation physique a évidemment changé).

Si l'on a

$$AA'' + A''A''' \leqslant A'B'' + A'A'' = A'B'' + A'B'' - A''B''$$

c'est-à-dire si

$$AA'' + A''A''' + A'A'' \leqslant 2A'B''$$

on voit donc que la poule «gagne» avec le maximum de marge quand la distance $AA'' + A''A''' + A''B''$ est minimum et l'on retrouve ainsi le problème du triangle isocèle.

E) La cible.

On tire d'un point M, astreint à se déplacer «horizontalement», sur une cible AB placée «verticalement», comme l'indique la figure 1.

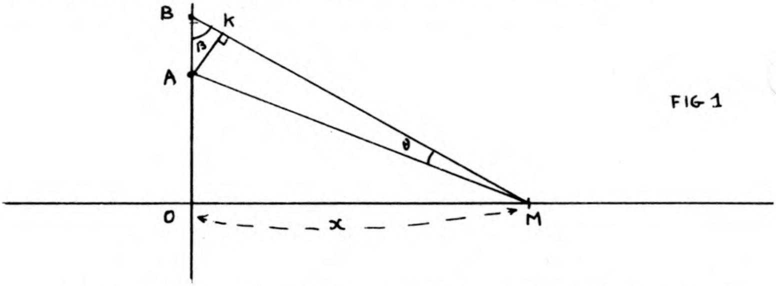


FIG 1

On demande de déterminer la position du point M tel que l'angle de vue θ soit maximum. Pour avoir des calculs plus simples on suppose que les distances AB et AO sont les mêmes et égales à 1 (une unité étant choisie).

On peut alors suivre la progression suivante.

Etape numéro 1.

«Vérifier» que θ et $\operatorname{tg}\theta$ varient dans le même sens. En déduire que θ sera maximum quand $\operatorname{tg}\theta$ le sera.

Avant d'aller plus loin, on va noter x la distance OM, K la projection de A sur BM et β l'angle $\widehat{ABM}$.

Etape numéro 2.

Vérifier que l'on a $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{AK}{MK}$.

Etape numéro 3.

Calculer AK. *Pour cela exprimer* $\sin\beta$ *de deux manières.*

$$\sin\beta = \frac{AK}{1} = \frac{OM}{BM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Etape numéro 4.

Calculer MK. *Pour cela écrire que* $MK = BM - BK$ *et calculer* BM *et* BK.

On a $$BK^2 + AK^2 = 1$$

d'où $$BK = \sqrt{1 - AK^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+4}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$$

On a aussi $$BM^2 = OB^2 + OM^2 = 4 + x^2$$

d'où $$BM = \sqrt{4 + x^2}$$

donc $$MK = \sqrt{x^2+4} - \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Etape numéro 5.

Exprimer $\operatorname{tg}\theta$ *en fonction de* x.

On a $$\operatorname{tg}\theta = \frac{AK}{MK} = \frac{x}{x^2+2} =$$

Etape numéro 6.

Construire point par point le graphe de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$. *Localiser son maximum.*

On obtient les résultats suivants.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
f(x)	0	0,22	0,33	0,35	0,33	0,30	0,27	0,24

Par un découpage plus précis on voit que le maximum est atteint pour x compris entre 1,41 et 1,42 ; c'est-à-dire pour x voisin de $\sqrt{2}$.

Ainsi le meilleur angle de tir dans les conditions de l'énoncé est obtenu quand OA est voisin de OM (cf. figure 2).

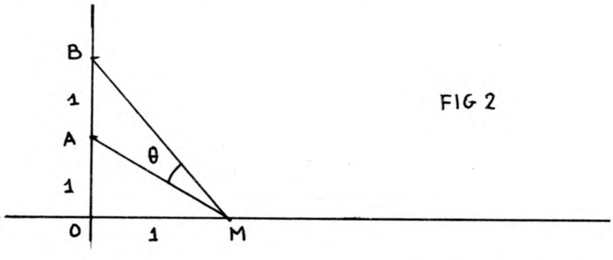


FIG 2

Nous allons maintenant donner une solution géométrique de ce problème (solution qui est plutôt du niveau de 1ère).

Nous nous placerons dans un cadre plus général et suivrons les notations de la figure 3 (OA = a ; AB = b ; OM = x).

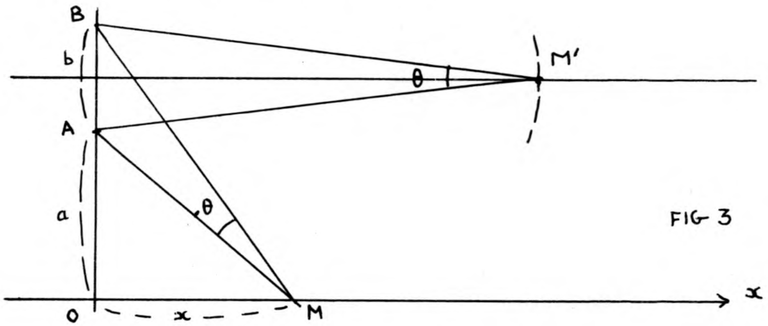


FIG 3

Appelons M′ le point de la médiatrice de AB, qui se trouve sur le cercle passant par B, A et M.

L'angle AM′B est égal à l'angle θ. Mais il est clair que cet angle AM′B croît à mesure que M′ se rapproche du pied de la médiatrice de AB. Or la construction précédente est possible tant que le cercle ABM′ coupe l'axe Ox. Et ainsi le maximum de l'angle AM′B = θ sera atteint quand le cercle AM′B sera tangent en M à Ox (cf. figure 4).

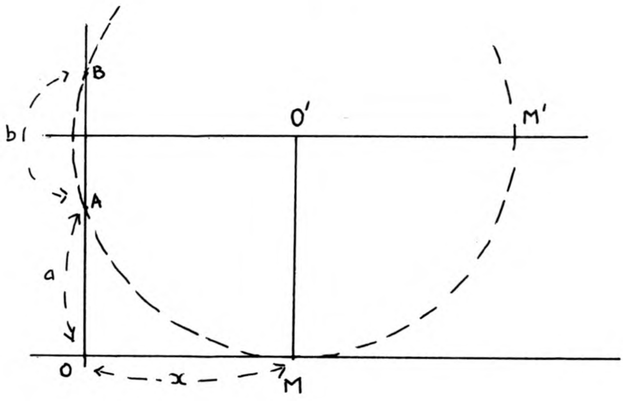


FIG 4

Mais alors on a : $AO' = MO'$

c'est-à-dire $$\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}} = a + \frac{b}{2}.$$

ou encore $$x = \sqrt{a(a+b)}.$$

(On retrouve le fait que pour $a = b = 1$ on a $x = \sqrt{2}$).

Remarque.

Lorsque b est pratiquement nul, le «meilleur» angle de vue est obtenu pour une position du point M correspondant à x très voisin de a.

ANGLES – ARCS

I – PRESENTATION.

En s'appuyant sur la notion de secteur angulaire et l'usage du rapporteur, ce document, par des activités simples de tracés et de constructions, essaye de montrer que l'outil : «angle géométrique» est parfois insuffisant et qu'un outil plus élaboré est nécessaire.

La notion d'angle d'un couple de demi-droites ne nous a pas paru être perçue naturellement et aisément.

Pour dégager ce concept on a utilisé la notion «matérielle» de balayage du plan par une demi-droite, et par des activités de construction on montre que le saillant ou le rentrant suffisent à connaître la position de la deuxième demi-droite si on connaît la position de la première demi-droite, d'où la notion de couple.

L'orientation du plan n'intervient qu'à propos de la mesure algébrique d'un angle. Pour enrichir les résultats des activités proposées, il est souhaitable que dans la classe, l'orientation du plan ne soit pas choisie de façon uniforme.

Par des activités de construction, on essaye de faire apparaître l'isomorphisme naturel qui existe entre l'ensemble des angles muni de l'addition et $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ ou $\mathbb{R}/_{360\mathbb{Z}}$ muni de l'addition.

Les notions d'arc orienté, d'angle d'un couple de vecteurs non nuls, sont définies par référence à la notion d'angle d'un couple de demi-droites, et très peu développées dans ce document.

II – RAPPELS.

1) Secteur angulaire saillant, rentrant, de deux demi-droites de même origine.

2) Deux secteurs angulaires superposables définissent le même angle.

3) Arc de cercle associé à un angle.

4) **Mesure des angles.**

a) Unité : degré - grade.

b) Si θ est la mesure en degrés de l'angle saillant α, alors $\theta \in [0,180]$.

c) A tout angle saillant est associé un angle rentrant de mesure $\theta' = 360 - \theta$; $\theta' \in]180, 360]$.

d) **Mesure des arcs.**

Celle de la mesure de l'angle associé.

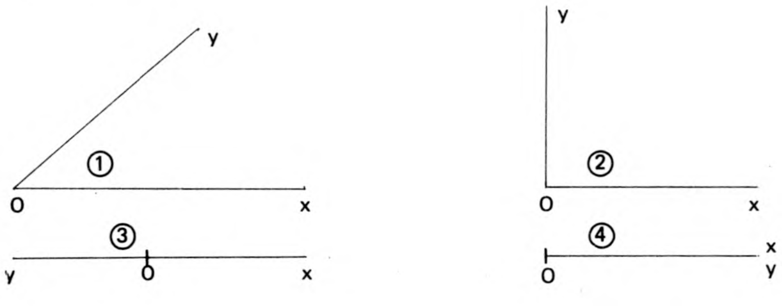
5) **Balayage du plan par une demi-droite.**

Dans ce document nous admettons que l'élève à la notion intuitive de balayage du plan par une demi-droite, qu'il y a deux sens de balayage possibles et que l'élève sait les comparer.

Cette notion n'est pas à confondre avec celle d'orientation du plan, qui elle, consiste à choisir un sens de balayage et à le consacrer : sens positif.

III – EXERCICES DE MESURE D'ANGLES GEOMETRIQUES.

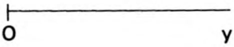
a) Pour chaque angle représenté par chacun des secteurs angulaires dessinés, donne la mesure de l'angle saillant, et de l'angle rentrant associés, en degrés et grades.



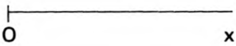
angle / saillant	①	②	③	④	angle / rentrant	①	②	③	④
degré					degré				
grade					grade				

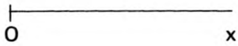
b) **Construire la ou les demi-droites** Oy **de façon que l'angle** (Ox, Oy) **ait pour mesure en degrés** θ

$\theta = 135$ $\theta = 225$



$\theta = 45$ $\theta = 70$ $\theta = 310$





Conclusion.

En connaissant θ et la demi-droite [Ox), la demi-droite [Oy) est-elle parfaitement connue ?

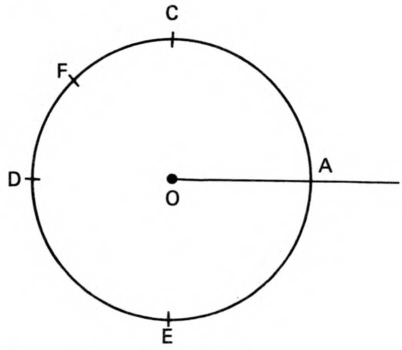
Justifie ta réponse et donne ton avis à ce sujet.

IV – LE RADIAN.

Soit le cercle de rayon R, de centre O, A un point du cercle.

1) En utilisant une bande de papier, place sur le cercle le point B *de façon que la longueur de l'arc* $\overset{\frown}{AB}$ *soit égale au rayon* R *du cercle.*

On dit que cet arc a pour mesure 1 radian.



F milieu de l'arc $\overset{\frown}{CD}$

2) Quel est en radian la mesure des arcs suivants :
(pour chaque cas deux réponses sont possibles).

$\overset{\frown}{AA}$	$\overset{\frown}{AC}$	$\overset{\frown}{AD}$	$\overset{\frown}{AE}$	$\overset{\frown}{CD}$	$\overset{\frown}{CE}$	$\overset{\frown}{DE}$	$\overset{\frown}{AD}$	$\overset{\frown}{BC}$	$\overset{\frown}{AF}$	$\overset{\frown}{CF}$	$\overset{\frown}{FE}$	$\overset{\frown}{FD}$

3) Soit le cercle de centre O et de rayon 2R. On appelle A′ l'intersection de [OA) et de ce cercle, et ainsi pour [OC) ; [OD),... etc...

Complète.

$\overset{\frown}{A'A'}$	$\overset{\frown}{A'C}$	$\overset{\frown}{A'D}$	$\overset{\frown}{A'E}$	$\overset{\frown}{C'D'}$	$\overset{\frown}{C'E'}$	$\overset{\frown}{D'E'}$	$\overset{\frown}{A'D'}$	$\overset{\frown}{B'C'}$	$\overset{\frown}{A'F'}$	$\overset{\frown}{C'F'}$	$\overset{\frown}{F'E'}$	$\overset{\frown}{F'D'}$

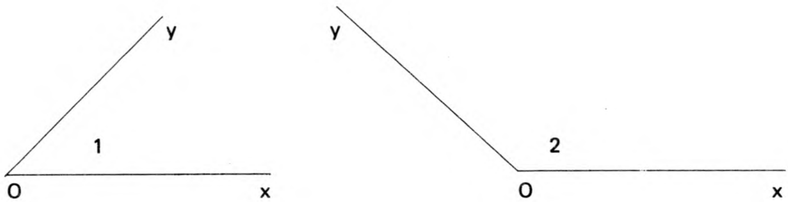
conclusion.

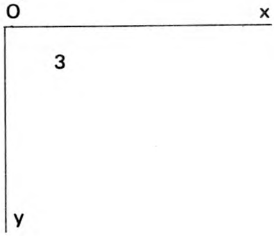
4) Complète le tableau:

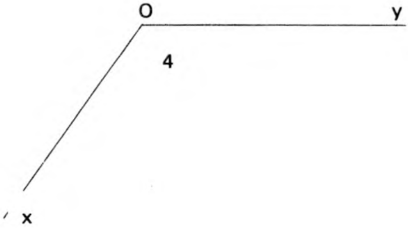
radian (rd)		$\frac{\pi}{2}$			$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		y	
degré	360			120		150			x		
grade			250								z

V – ANGLE D'UN COUPLE DE DEMI-DROITES.

1) Activité.

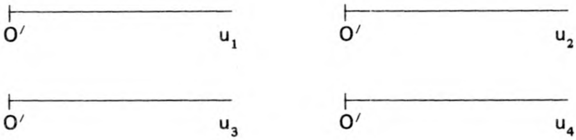






Chaque couple de demi-droites ([Ox), [Oy)) définit simultanément un secteur angulaire saillant et un rentrant.

Pour chaque cas représenté ci-dessus, à partir de la première demi-droite [O′u), ***construire*** *la ou les demi-droites* [O′v) *représentant le même secteur saillant et le même secteur rentrant balayés dans le même sens de* [O′u) *à* [O′v) *que de* [Ox) *à* [Oy).



Conclusion.

Dans chaque cas combien obtient-on de demi-droites [O′u) ?

Explique ce résultat.
Que suffit-il de connaître pour construire la demi-droite [O′v) ?

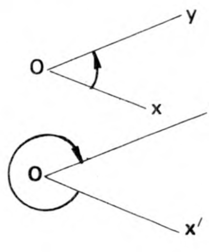
2) Définitions.

a) L'activité précédente ayant montré qu'il suffit de connaître le secteur saillant ou bien le rentrant associés au couple ([Ox), [Oy)). On donnera les définitions :

a_1 **Secteur angulaire d'un couple de deux demi-droites de même origine.**

Soient les demi-droites [Ox) et [Oy) non opposées du plan.

On appelle secteur angulaire du couple de demi-droites ([Ox), [Oy)) l'un ou l'autre des secteur angulaires saillant et rentrant balayés respectivement de [Ox) à [Oy).



a_2 Angle d'un couple de demi-droites.

On dit que deux couples de demi-droites ayant respectivement la même origine définissent le même angle d'un couple de demi-droites, si par glissement et en respectant le même sens de balayage, les secteurs angulaires saillants, respectivement rentrants, sont superposables.

Notation.

Un tel angle φ sera représenté par l'un de ces couples et noté :

$$\varphi = \text{angle}([Ox), [Oy)).$$

Dans la suite on utilisera la notation abrégée : $\varphi = (Ox, Oy)$.

b) Angle nul. Angle plat. Angles opposés.

– Si $[Ox) = [Oy)$ alors (Ox, Ox) représente l'angle nul.

– Si $[Ox)$ et $[Oy)$ sont opposées alors (Ox, Oy) représente l'angle plat

– (Ox, Oy) et (Oy, Ox) sont deux angles opposés.

3) Théorème.

Soit a l'angle d'un couple de deux demi-droites. Pour toute demi-droite $[Ou)$, il existe une demi-droite unique $[Ov)$ telle que

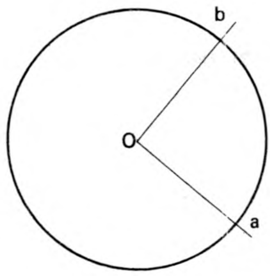
$$a = (Ou, Ov).$$

VI – ARCS ORIENTES. (Attention au sens du mot : orienté).

1) Soient a et b deux points non diamétralement opposés du cercle de centre O.

$[Oa)$ et $[Ob)$ les deux demi-droites de sommet O.

On appelle arc orienté $\overset{\frown}{ab}$ l'un des arcs d'origine a, d'extrémité b, balayé de a vers b.



2) Connaître un arc revient à connaître l'autre.

3) Deux secteurs circulaires orientés de cercles différents ou non, de même rayon, superposables par glissement et parcourus dans le même sens définissent un arc orienté.

4) Arc orienté nul, plat. Arcs orientés opposés.

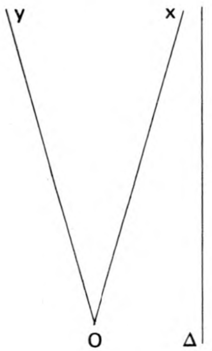
a) si $a = b$: $ab = aa$ arc orienté nul.

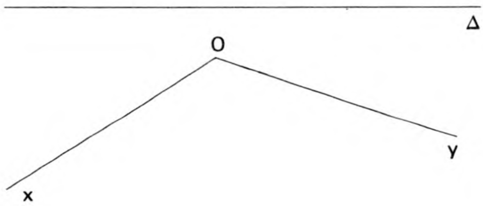
b) si a et b diamétralement opposés, ab arc orienté plat.

c) ab et ba arcs orientés opposés.

VII – ANGLES ET TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES.

1) Symétrie axiale orthogonale.





Construire l'image de (Ox, Oy) par la symétrie axiale orthogonale d'axe Δ, noté S_{Δ}.

Conclusion.

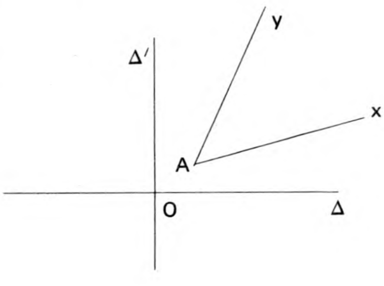
Obtient-on le même angle ? Les comparer ?

2) Symétrie centrale.

Construire l'image de (Ax, Ay) par $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$;

par $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$;

par S_O.

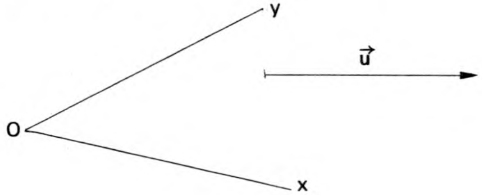


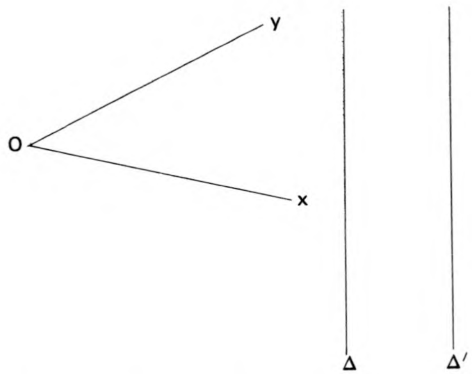
Conclusion.

On vient de «montrer graphiquement» que la composée de deux symétries axiales orthogonales d'axes orthogonaux sécants en O, est égale à une symétrie centrale de centre O.

Le 1) et ce résultat montrent que l'image d'un angle par une symétrie centrale est un angle qui lui est égal.

3) Translation.





1) Construire l'image de (Ox, Oy) par la translation de vecteur $\vec{U}$.

2) Construire l'image de (Ox, Oy) par $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

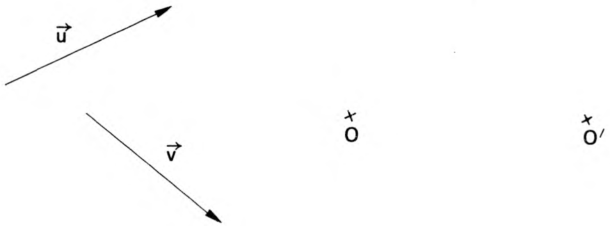
3) A l'aide d'un calque, comparer les angles ainsi obtenus et celui de départ.

4) Quelle est la translation T telle que $T(\Delta) = \Delta'$?

Conclure.

VIII – ANGLE D'UN COUPLE DE VECTEURS NON NULS.

Soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et les points O et O′ quelconques du plan.



A partir de chacun des points O et O′ construire un représentant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soient : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{O'A'} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; $\overrightarrow{O'B'} = \vec{v}$.

Soient Ox ; Oy ; O′x′ ; O′y′ les demi-droites qui contiennent respectivement A, B, A′, C′.

Par quelle transformation passe-t-on de (Ox, Oy) *à* (O′x′, O′y′) *?*

Réponse.

Par une translation, d'où la définition :

Définition.

On appelle angle du couple de vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle du couple des demi-droites Ox et Oy, O étant un point quelconque du plan.

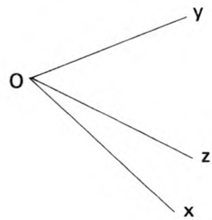
$$(\vec{u}, \vec{v}) = (Ox, Oy).$$

IX – SOMME D'ANGLES DE COUPLES DE DEMI-DROITES, OU DE VECTEURS.

1) Définition.

Si A_1 est l'angle représenté par (Ox, Oy) et A_2 l'angle représenté par (Oy, Oz) on appelle somme de A_1 et A_2 que l'on note $A_1 + A_2$ l'angle représenté par (Ox, Oz).

(Ox, Oy) + (Oy, Oz) = (Ox, Oz).



2) Compléter.

(Ox, Oy) + (Oy, Oy) = ?
(Ox, Oy) + (Oy, Ox) = ?
[(Ox, Oy) + (Oy, Oz)] + (Oz, Ot) = ?
(Ox, Oy) + [(Oy, Oz) + (Oz, Ot)] = ?

On admettra que l'addition des angles est commutative.

Conclusion.

Quelles propriétés de l'addition des angles vient-on de démontrer ?

3) Soustraction.

a) On pose $A_1 - A_2 = A_1 + (\text{opp. } A_2)$.

b) Compléter.

(Ox, Oy) - (Oz, Oy) = (Ox, Oy) + Oy, Oz) =
(Ox, Oy) = (Ou, Oy) - (..., ...)

c) Démontrer que si (Ox, Oy) = (Oy, Oz) =

alors (Ox, Oz) = (Oy, Ot)
alors (Ot, Oy) = (Oz, Ox).

X – MESURE AVEC SIGNE DE L'ANGLE D'UN COUPLE DE DEUX DEMI-DROITES.

1) Orientation du plan.

Orienter le plan c'est choisir, parmi les deux sens possibles de balayage du plan par une demi-droite [Ox), l'un de ces sens.

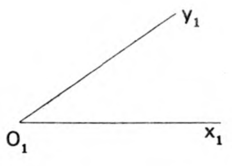
Le sens choisi est appelé positif.

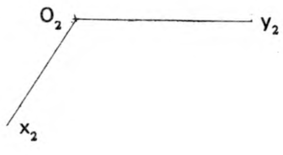
Remarque.

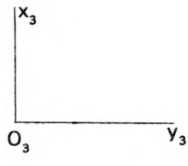
Si le sens de balayage du secteur saillant est positif, celui du rentrant est négatif et réciproquement.

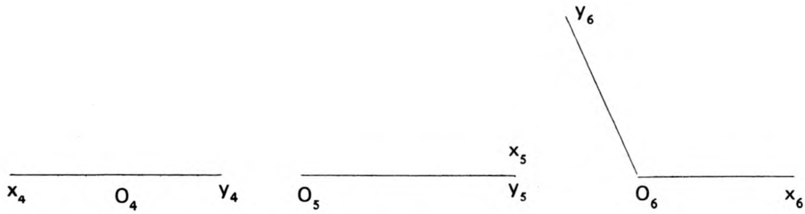
2) Exercice.

Le plan est orienté. (Il est souhaitable qu'il ne le soit pas de la même façon par tous les élèves).









Remplir le tableau ci-dessous.

	arithmétique			avec signe		
angle	mesure du saillant	mesure du rentrant	sens	mesure du saillant : a	mesure du rentrant : b	a – b
(O_1x_1, O_1y_1)						
(O_2x_2, O_2y_2)						
(O_3x_3, O_3y_3)						
(O_4x_4, O_4y_4)						
(O_5x_5, O_5y_5)						
(O_6x_6, O_6y_6)						
(O_1y_1, O_1x_1)						
(O_2y_2, O_1x_2)						
(O_4y_4, O_4x_4)						
(O_6y_6, O_6x_6)						

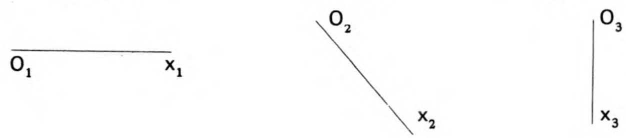
Conclusion.

Si on connaît a, on connaît b, donc on est amené à confondre le saillant et le rentrant.

3) Dans chaque cas tracer [Oy), **pour que** (Ox, Oy) **ait pour mesure avec signe** θ **(le plan est orienté).**

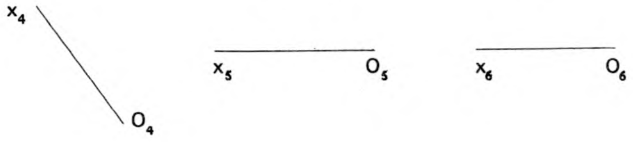
a) En degrés.

$\theta_1 = 150$ $\qquad\theta_2 = 340$ $\qquad\theta_3 = -265$



b) En radians.

$\theta_4 = \frac{5\pi}{4}$ $\qquad\qquad$ $\theta_5 = -\frac{11\pi}{6}$ $\qquad\qquad$ $\theta_6 = \frac{7\pi}{4}$

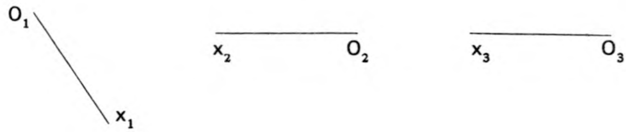


Combien de demi-droites [Oy), détermine-t-on dans chaque cas ?
L'orientation du plan intervient-elle dans le résultat ? Comment ?

4) Mesure avec signe de la somme de deux angles de couples de deux demi-droites (le plan est orienté).

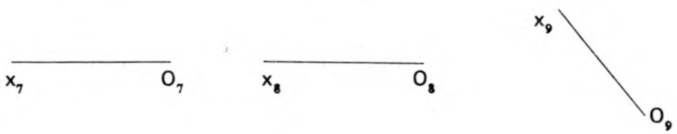
L'unité choisie est le degré.
Si mes(Ox, Oy) = a et mes(Oy, Oz) = b construire [Oy) et [Oz).

a = 65	a = 250	a = -160
b = 45	b = 190	b = 140



a = 330	a = -300	a = -160
b = 120	b = -120	b = 120

a = 360	a = -180	a = -360
b = -80	b = -180	b = 50



cas	a	b	a + b	c = mes(Ox, Oz)	(a + b) - c	cas	a	b	a + b	c = mes(Ox, Oz)	(a + b) - c
1						6					
2						7					
3						8					
4						9					
5											

c est la mesure en degrés avec signe de l'angle (Ox, Oz).

5) Soit : mes(Ox, Oy) = a ; mes(Oy, Oz) = b ; mes(Oz, Ot) = c (en degrés). Construire Oy, Oz et Ot dans chaque cas.

a = 250	a = -200
b = 110	b = -180
c = 280	c = -120

Comparer a + b + c et la mesure avec signe de (Ox, Ot) dans chaque cas.

Remarque.

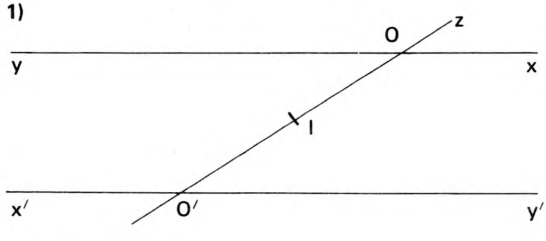
La différence entre a + b + c et la mesure de (Ox, Ot) est un multiple de 360.

Plusieurs réels peuvent-ils être la mesure d'un même angle ?
Comparer ces réels. Peut-on interpréter intuitivement ce résultat ?

On peut alors, si on le souhaite définir la mesure algébrique d'un angle orienté, comme l'ensemble des réels de la forme : $\theta = \alpha + k\,360$ $(k \in \mathbb{Z})$ α étant une mesure en degrés avec signe. (Définition analogue avec les radians).

XI – UTILISATIONS DES ISOMETRIES DU PLAN.

1)



Les droites (xy) et (x'y') sont parallèles. T est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. S_O, S_I, $S_{I'}$ sont les symétries centrales de centres respectifs O, I, I'.

Compléter le tableau suivant.

angle	$\xrightarrow{S_O}$	image par S_O	$\xrightarrow{S_I}$	image par $S_I \circ S_O$	$\xrightarrow{S_{O'}}$	image par $S_{O'} \circ S_I \circ S_O$	image par T
(Ox, Oz)							
(Oz, Oy)							
(Oy, Oz')							
(Oz', Ox)							

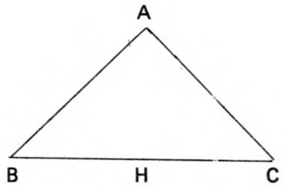
T

Conclusion.

La composée de deux symétries centrales est-elle une translation ?
Retrouver les «cas d'égalité» entre angles alternes-internes, alternes-externes....

2) Soit le triangle isocèle ABC de sommet A.

En utilisant une isométrie comparer $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

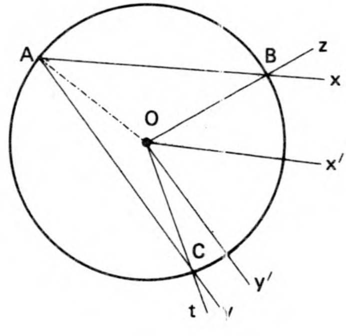


3) Angle au centre et angle inscrit associé.

a) Soit la translation T de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

Construire T[Ax) = [Ox')
T[Ay) = [Oy').

b) Que dire des triangles AOC et AOB ?



c) Soient I et J les milieux de [OB] et [OC].

En utilisant les propriétés des symétries centrales, axiales orthogonales et des translations comparer les angles :

(Ax, Ay) et (Ox', Oy')

(Oz, Ox') et $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$

(Oy', Ot) et $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})$.

Conclusion.

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

LE PRODUIT SCALAIRE

Une façon de traiter le titre V (document pour le maître) du nouveau programme de 2ème.

I – DEMARCHE POUR UNE INTRODUCTION DU PRODUIT SCALAIRE.

1) Prérequis.

1) Le théorème de Pythagore.

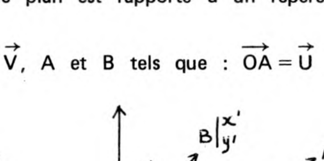
2) L'expression de la distance de 2 points dans un repère orthonormé du plan : $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

3) L'expression de la norme d'un vecteur du plan $\|\vec{V}\| = d(AB)$ avec $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$.

4) Dans le plan euclidien, la distance de deux points ne dépend que du choix de la métrique, et non du repère choisi. Il en est donc de même pour la norme d'un vecteur du plan.

5) $\overline{OH} = OB \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.

[Application du rapport de projection orthogonale d'un axe normé sur un autre].

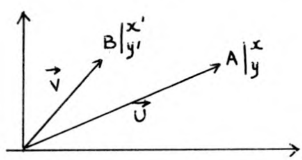


2) Introduction de l'expression analytique (le plan est rapporté à un repère orthonormé).

Soient deux vecteurs du plan $\vec{U}$ et $\vec{V}$, A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$.

Calculons $d(A, B)^2$:

$AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{V} - \vec{U}\|^2$ (prérequis 3).



On a aussi :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \quad \text{(prérequis 2)} \\ &= x'^2 + y'^2 + x^2 + y^2 - 2(xx' + yy') \\ &= OA^2 + OB^2 - 2(xx' + yy') = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - 2(xx' + yy'). \end{aligned}$$

D'où $\quad xx' + yy' = \frac{1}{2} [\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V} - \vec{U}\|^2]$.

Ce réel $xx' + yy'$ ne dépend pas du repère choisi, puisque la norme d'un vecteur ne dépend pas elle-même du repère (prérequis 4).

Par définition, on appelle ce réel le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, qu'on note $\vec{U} \cdot \vec{V}$.

$\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy'$ (dans un repère orthonormé).

3) Produit scalaire nul.

Si $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$, $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ (vérification sur l'expression de $xx' + yy'$).

La réciproque n'est pas nécessairement vraie.

En effet, **soient** $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls du plan, $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$, $\vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2} [OA^2 + OB^2 - AB^2]$ (expression de $xx' + yy'$).

Or : $OA^2 + OB^2 = AB^2$ si et seulement si tr(AOB) rectangle en O. (Théorème de Pythagore).

Donc, ($\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ avec $\vec{U} \neq \vec{0}$ et $\vec{V} \neq \vec{0}$) si et seulement si $\vec{U} \perp \vec{V}$.

Conclusion.

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{soit } \vec{U} = \vec{0} \text{ ou } \vec{V} = \vec{0} \\ \text{soit } \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ orthogonaux} \end{array}$$

Et si on suppose que 0 est orthogonal à tout vecteur :

$$\vec{U} \perp \vec{V} \Longleftrightarrow xx' + yy' = 0.$$

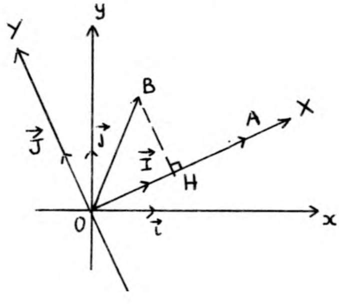
Condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

4) Les deux interprétations géométriques du produit scalaire (on suppose que $\vec{U} \neq \vec{0}$).

1) Le produit scalaire est invariant dans tout repère orthonormé.

Effectuons un changement de repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ tel que $\vec{I}$ et $\vec{U}$ soient colinéaires.

$\vec{U}\binom{X}{0}$ $\vec{V}\binom{X'}{Y'}$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = XX'$



Soit H la projection orthogonale de B sur la droite (OA).

Sur l'axe $(O, \vec{I})$ on a $\overline{OH} = X'$ et $\overline{OA} = X$.

Donc $\quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{OA} \times \overline{OH}$.

2) $\overline{OA} \times \overline{OH}$ ne dépend pas de l'orientation de l'axe qui porte (O, A).

Orientons cet axe de façon que $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{I}$ avec $\lambda > 0$.

Alors $\overline{OA} = OA = \|\vec{U}\|$.

Or $\overline{OH} = OA \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (prérequis 5).

Donc $$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$$

5) Propriétés du produit scalaire.

Soit : $\vec{U}\binom{x}{y}, \vec{V}\binom{x'}{y'}, \vec{W}\binom{x''}{y''}$.

1) Symétrie.

$\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{V} \cdot \vec{U}$.

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}.$$

2) Propriétés de bilinéarité.

a) $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = x(x' + x'') + y(y' + y'')$
$= (xx' + yy') + (xx'' + yy'') = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$.

b) $(\lambda \vec{U}) \cdot \vec{V} = (\lambda x)x' + (\lambda y)y' = \lambda(xx' + yy') = \lambda(\vec{U} \cdot \vec{V})$.

6) Carré scalaire d'un vecteur.

Par définition le carré scalaire de $\vec{U}$ est le réel $\vec{U} \cdot \vec{U}$ noté $\vec{U}^2$

$$\vec{U}^2 = x^2 + y^2.$$

Interprétation géométrique.

$\vec{U}^2 = \|\vec{U}\| \times \|\vec{U}\| \times \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{U}})$: $\vec{U}^2 = \|\vec{U}\|^2$ et

$(\vec{U} \pm \vec{V})^2 = \vec{U} \pm 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{V}^2$

$= \|\vec{U}\|^2 \pm 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \|\vec{V}\|^2$.

Donc $$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et on retrouve la formule du prérequis 2 : $d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
car $d(AB) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Propriétés de $\|\vec{U}\|$ (ou de d(AB)).

$\|\vec{U}\| = V \Longleftrightarrow \vec{U} = \vec{0}$

$\|\lambda \vec{U}\| = |\lambda| \times \|\vec{U}\|$ (avec $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

7) Cosinus de l'angle de 2 demi-droites.

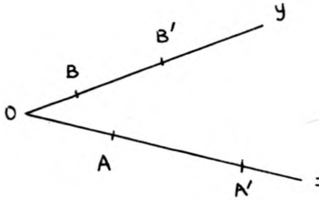
Soient les demi-droites $[Ox)$ $[Oy)$

et $A \in [Ox)$ $\quad A' \in [Ox)$

$B \in [Oy)$ $\quad B' \in [Oy)$.

$\overrightarrow{OA'} = \lambda\, \overrightarrow{OA}$ avec $\lambda > 0$: $\|\overrightarrow{OA'}\| = \lambda\, \|\overrightarrow{OA}\|$

$\overrightarrow{OB'} = \mu\, \overrightarrow{OB}$ avec $\mu > 0$: $\|\overrightarrow{OB'}\| = \mu\, \|\overrightarrow{OB}\|$



$$\cos\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|} \;;$$

$$\cos\widehat{(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})} = \frac{\lambda\mu(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{\lambda\mu\, \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|}$$

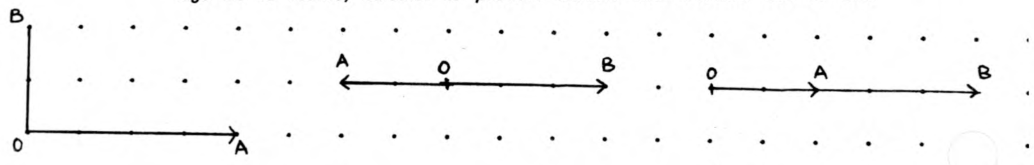
donc $$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}).$$

Soit $\alpha = (Ox, Oy)$.

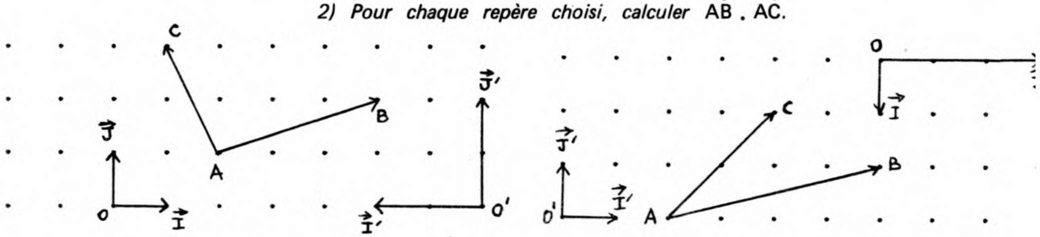
Par définition, on appelle **cos** α le cosinus de l'angle de deux vecteurs non nuls portés respectivement par chacune des demi-droites.

II – ACTIVITES AYANT POUR OBJET D'ILLUSTRER LES PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE.

1) En utilisant un repère orthonormé, défini à l'aide du quadrillage de la feuille, calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$.



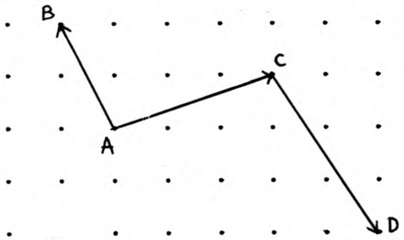
2) Pour chaque repère choisi, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ $\qquad$ Dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

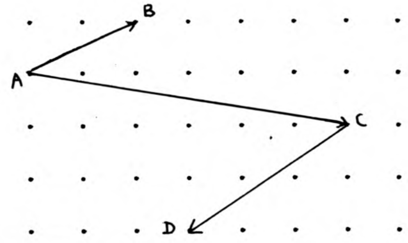
Dans $(O', \vec{I'}, \vec{J'})$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ $\qquad$ Dans $(O', \vec{I'}, \vec{J'})$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

3) Calculer les produits scalaires suivants, où l'unité de longueur est "deux carreaux."



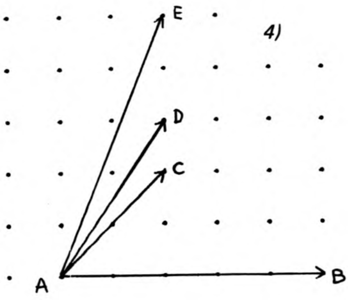
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$



4)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} =$

Si $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot \vec{W}$, *peut-on dire que* $\vec{V} = \vec{W}$ *?*

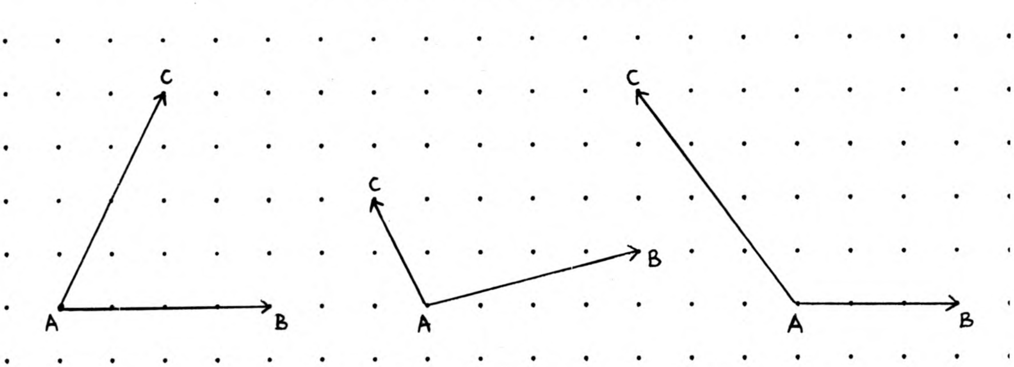
Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ *en utilisant le produit scalaire, et en utilisant la machine à calculer donner la mesure de l'angle en degrés.*

Pour chaque calcul, utiliser :

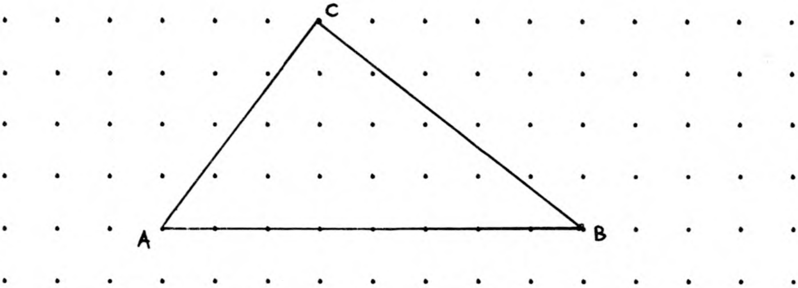
a) un repère orthonormé d'unité de longueur : 1 carreau ;

b) un repère orthonormé d'unité de longueur : 2 carreaux.

Qui change ? Qui ne change pas ?

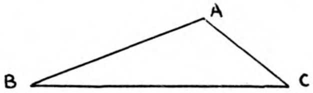


6) Calculer les angles du triangle ABC.



III – APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE.

1) Relation dans un triangle quelconque.



Calculer BC^2

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \ldots$

d'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

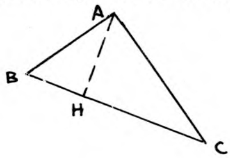
Relations caractéristiques d'un triangle rectangle en A.

- Triangle rectangle en A si et seulement si $\widehat{A} = 90°$; $\cos\widehat{A} = 0$.

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

- Triangle rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 0.$$



$$AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC} = BH \times BC.$$

- Triangle rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = 0.$$

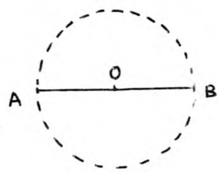
$$AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}.$$

2) Cercle de diamètre [AB].

M quelconque.

Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$



Donc $M \in (C)$ si et seulement si $OM = OA$

$$OM^2 = OA^2.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = O \text{ ou } (MA) \perp (MB).$$

Et $M \in$ (disque ouvert) : $OM < OA$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} < O.$$

3) Lignes de niveaux de l'application $M \longmapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

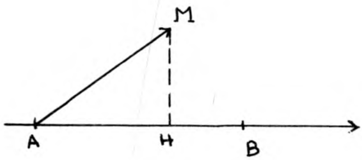
On donne $\overrightarrow{AB}$ et k.

Déterminer l'ensemble des points M *tels que :* $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overline{AH} \times \overline{AB}$.

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) en H tel que : $AH = \dfrac{k}{\overline{AB}}$.

C'est la ligne de niveau k.



On suppose AB = 4 cm.

Construire les lignes des niveaux : 4, 8, -4 *et* -12.

A la fin de l'application 3 le noyau de la partie V du programme est traité.

Pour donner une signification concrète au produit scalaire, on peut proposer l'activité suivante :

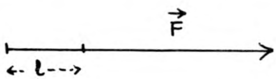
LE TRAVAIL D'UNE FORCE

Prérequis (vu en 3ème).

Le travail d'une force F qui déplace son point d'application d'une distance ℓ le long de sa ligne d'action est : $W = F \times \ell$.

Ce travail est mesuré en Joules.

1J = 1N X m.



(Le newton est la force qui communique à une masse de 1 kg une accélération de 1 m/s).

Exercice 1.

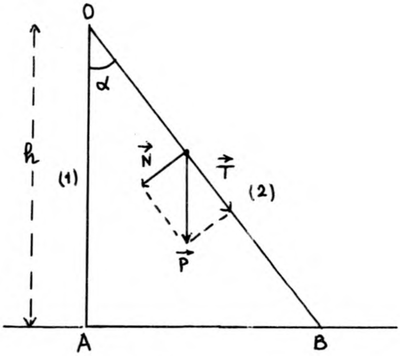
Soit un plan incliné OAB d'angle α, et de hauteur h = 1,5 m (On peut prendre une valeur particulière pour α).

On lâche en O une bille en acier de masse 125 g. (Les frottements et la résistance de l'air sont supposés négligeables).

La bille est alors soumise à une seule force : la force d'attraction de la terre sur la masse, qu'on appelle le poids de la bille, qui est dirigée verticalement vers le bas, et est égale à : $P = mg$; $P = 0{,}125 \times 9{,}8$ N.

1) Calculer le travail de la pesanteur (du poids de la bille) suivant le trajet vertical (1).

[$W_{(1)} = P \times h = 0{,}125 \times 9{,}8 \times 1{,}5 = 1{,}839\ 5$ J].



2) On se place sur le trajet (2). On projette $\vec{P}$ en $\vec{T}$ sur (OB)

Calculer le travail de $\vec{T}$ *suivant le trajet oblique (2).*

[$W_{(2)} = P \cos\alpha \times \dfrac{h}{\cos\alpha} = W_{(1)}$.

Le travail de la pesanteur ne dépend que de h, et non du plan incliné. Exploitation pour la physique de ce résultat...

... On peut conjecturer que le travail d'une force constante et oblique par rapport au déplacement est égal au travail de sa composante suivant ce déplacement. La composante normale ne fournit aucun travail mécanique].

3) Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{P}$ *et* $\overrightarrow{OB}$.

[$\vec{P} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{OB} \times \overline{T} = \overline{OB} \times \overline{T} = W$ ou $\vec{P} \cdot \overrightarrow{OB} = P \times OB \times \cos\alpha = P \times \dfrac{h}{\cos\alpha} \times \cos\alpha = W$]

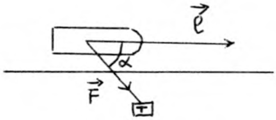
d'où la définition du travail d'une force (utilisée en physique), d'une force constante, et oblique par rapport au déplacement ou non.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}\,.$$

Exercice 2.

Considérons une péniche tirée par un tracteur sur rails avec un cable faisant un angle α avec la rive. Supposons que la force exercée par le tracteur est constante et égale à 100 da N.

1) Calculer le travail du tracteur au cours d'un déplacement représenté par un vecteur $\vec{\ell}$. *(On peut donner une valeur particulière à* ℓ*).*



$[W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = F \times \ell \times \cos \alpha]$.

2) Que peut-on dire de W *si* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

[$W > 0$. C'est un travail moteur. Le mouvement est accéléré].

Que peut-on dire de W *si* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. ?

[$W < 0$. C'est un travail résistant. Le mouvement est retardé].

3) Compléter le tableau suivant, et tracer une représentation graphique des variations de W *en fonction des valeurs de* α.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
W									

(Le $\cos \alpha$ apparaît comme un coefficient d'efficacité du travail de la force).

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

" Une expérience d'initiation à la géométrie dans l'espace : propriétés d'incidence, parallélisme, en classe de $2T_4$ (préparation au secrétariat médico-social)."

OBJECTIFS.

Nous nous sommes proposés à partir de l'observation d'un cube, d'établir un inventaire éventuellement surabondant des propriétés des plans, points, droites de l'espace. Un deuxième objectif était d'entraîner les élèves à des constructions simples, à partir des propriétés admises. Ce travail a demandé environ 6 heures.

Première heure.

Cette première heure a été consacrée à l'observation du cube, à l'acquisition du vocabulaire fondamental que certains élèves ne possédaient pas (arêtes, sommets, faces). Très vite, nous avons été obligés de nous imposer des conventions de représentation, des droites parallèles seront représentées par des droites parallèles, et les éléments «cachés» par des tracés en pointillés.

Une série de questions et d'observations conduit la classe à admettre dans cet ordre les propriétés suivantes.

Propriété 1.

2 points distincts de l'espace déterminent une droite et une seule.

Propriété 2.

3 points de l'espace non alignés et distincts deux à deux déterminent un plan et un seul.

Propriété 3.

Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite déterminent un plan et un seul.

Propriété 4.

Si deux points distincts appartiennent à un même plan, alors la droite qui les contient est toute entière dans ce plan.

Propriété 5.

Un plan partage l'espace en deux demi-espaces ouverts disjoints et si l'on prend un point dans chacun de ces demi-espaces, le segment déterminé par ces points «coupe» le plan.

Certains élèves font observer que P_2 et P_3 se déduisent l'un de l'autre.

Deuxième heure.

Cette deuxième séance de travail avait pour objectif de compléter la liste des propriétés ci-dessus et de les réinvestir dans des démonstrations simples.

Propriété 6.

Si deux plans distincts ont deux points communs, alors ils ont une droite commune : la droite déterminée par ces deux points (à propos de cette propriété s'ébauche un raisonnement utilisant P_5).

Propriété 7.

Certains élèves affirmant que deux plans distincts peuvent n'avoir qu'un seul point commun (un sommet du cube par exemple) il s'est avéré indispensable de démontrer que : si deux plans distincts ont un point commun alors ils ont une droite commune.

Propriété 8.

Si deux plans distincts ont une droite commune, alors ils n'ont pas d'autre point en commun que ceux de la droite (d'après P_2). Observons que P_8 aurai pu être démontré immédiatement après P_6

Position relative de deux droites.

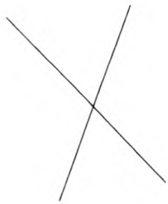
Après un rappel sur les positions relatives de deux droites dans le plan, les élèves essayent de classer dans les catégories connues, (confondues, parallèles, concourantes), les couples d'arêtes du cube.

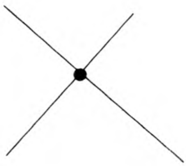
Très vite ils se rendent compte qu'il existe des arêtes qui ne sont ni parallèles ni concourantes, d'où la nécessité de donner une nouvelle définition aux mots «droites parallèles».

Propriété 9.

Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles appartiennent à un même plan et n'ont aucun point commun.

A ce propos, les élèves remarquent que le tracé ci-contre ne permet pas de savoir si le point représenté est un «vrai» point d'intersection, c'est-à-dire si les droites sont coplanaires ou non. On convient donc de figurer les «vrais» points d'intersection par la représentation ci-dessous.

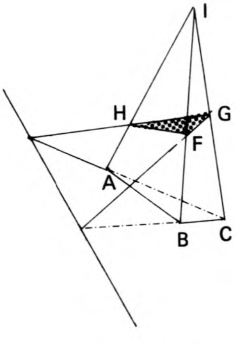




Troisième heure.

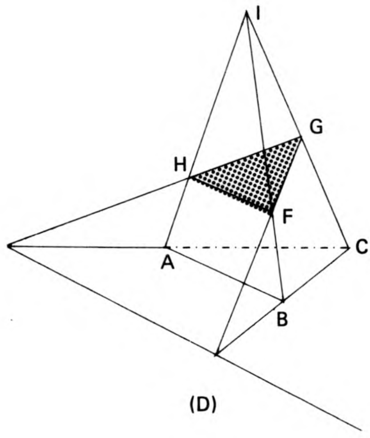
Au cours de la séance de travaux dirigés suivante, deux situations sont proposées aux élèves.

(A, B, C, I) est un tétraèdre.
G est un point de IC.
(D) est une droite du plan (A, B, C).



(D)

Mêmes hypothèses que dans la situation précédente, mais de plus (D) est parallèle à AB.



(D)

Il s'agit de représenter l'intersection du tétraèdre et du plan défini par la droite (D) et le point G.

Après chaque tracé de droite, les élèves doivent s'assurer que les points d'intersection obtenus sont de «vrais» points d'intersection, donc que les deux droites sont dans un même plan.

La deuxième situation n'apporte rien sur le plan de la construction, mais les élèves qui n'avaient pas réalisé seuls le premier tracé peuvent se rattraper sur le second (quatre d'entre eux seulement ne réalisent seuls aucun des deux tracés).

D'autre part, elle met en évidence une nouvelle propriété qui sera e démontrée (la droite HF est parallèle à la droite (D)).

Le travail de recherche est suivi d'un exercice de rédaction obligeant les élèves à justifier et à classer les constructions qui les ont conduits à la solution.

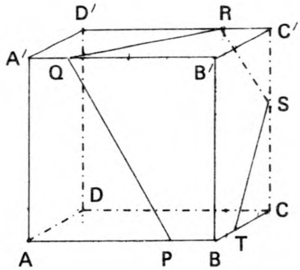
Quatrième heure.

L'activité proposée ici est extraite d'un fascicule publié par les IREM : «Thème en seconde numéro 1. Collection Inter-IREM par C. PEROL».

Les élèves avaient à préparer pour ce travail le développement d'un cube de 10 cm d'arête dont les faces sont coloriées différemment.

La représentation plane du cube est faite au tableau.

L'exercice consiste à découper l'intersection du cube et d'un plan défini par trois points P, Q, R. Il faut donc pour cela déterminer les points S et T.



P est situé sur AB à 2 cm de B.
Q est situé sur A'B' à 2 cm de A'.
R est situé sur D'C' à 2 cm de C'.

Un élève remarque très vite que le parallélisme des plans ABA' et DCD' va entraîner celui des droites QP et RS. D'où la nécessité de définir le parallélisme de deux plans et de démontrer la propriété P_{10}.

Propriété 10.

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les deux droites d'intersection sont parallèles.

Le tracé de la parallèle RS présente pour certains des difficultés.

Un élève éprouve le besoin de calculer la distance C'S, ce qui nous donne l'occasion d'appliquer la propriété de Thalés, et de constater que S est situé au tiers de C′C à partir de C′.

Cette manipulation semble offrir un double intérêt :

— elle impose à l'élève de passer en permanence de la vision du cube dans l'espace à sa représentation plane et réciproquement ;

— elle oblige l'élève à constater que si l'on décide de découper le cube suivant la droite RP comme certains voulaient le faire, on est dans le vide, et non pas sur une face du cube : d'où la nécessité pour affirmer qu'une droite appartient à un plan, de vérifier que les deux points qui la définissent sont dans ce plan.

Cette situation est ensuite exploitée pour analyser la position relative d'une droite et d'un plan (QP parallèle au plan (DCC′) par exemple), et pour démontrer la propriété:

Propriété 11.

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Cette démonstration fait l'objet d'un travail personnel des élèves en dehors du cours.

Cinquième heure.

L'objectif de cette séance était de faire résoudre par la classe un problème du type : «Etant donné un cube posé sur un plan horizontal, une droite (D) de ce plan, un point P du plan frontal (voir dessin I ci-joint), représenter l'intersection du cube et du plan défini par le point P et la droite (D)».

La fiche est donc proposée aux élèves qui doivent rechercher une solution pendant $\frac{1}{4}$ d'heure.

Aucun d'entre eux ne réalise pendant ce temps la totalité de la construction. Certains découvrent un côté du triangle.

Une série de diapositives, proposant une solution leur est alors projetée, sans qu'ils puissent prendre de notes. (Voir fiche II). A l'issue de cette projection, la majorité des élèves est capable de reproduire la construction proposée, et une dizaine d'entre eux, parvient à découvrir une autre solution au problème.

La «magie» de l'audiovisuel fait que tous les élèves sont passionnés par cette séance de travail.

Pour les obliger à un travail de recherche plus personnel, une deuxième situation, de même type leur est proposée pour la séance suivante (voir fiche III), le polygone d'intersection étant cette fois un hexagone.

Sixième heure.

Une vingtaine d'élèves arrivent avec la construction correctement réalisée sur la fiche III. A ceux qui ne sont pas arrivés au bout de leur recherche, est proposée une bande dessinée de la construction dans le désordre (voir fiche IV). Ils doivent en reconstituer l'ordre, ce qui ne pose pas de gros problèmes, puis, s'effectue ensuite un travail de rédaction en commun. Le travail a pour but d'obliger chaque élève à justifier l'appartenance de toute droite tracée à un plan, et à s'assurer que deux droites qui «ont l'air» de se couper sur le dessin, sont effectivement coplanaires.

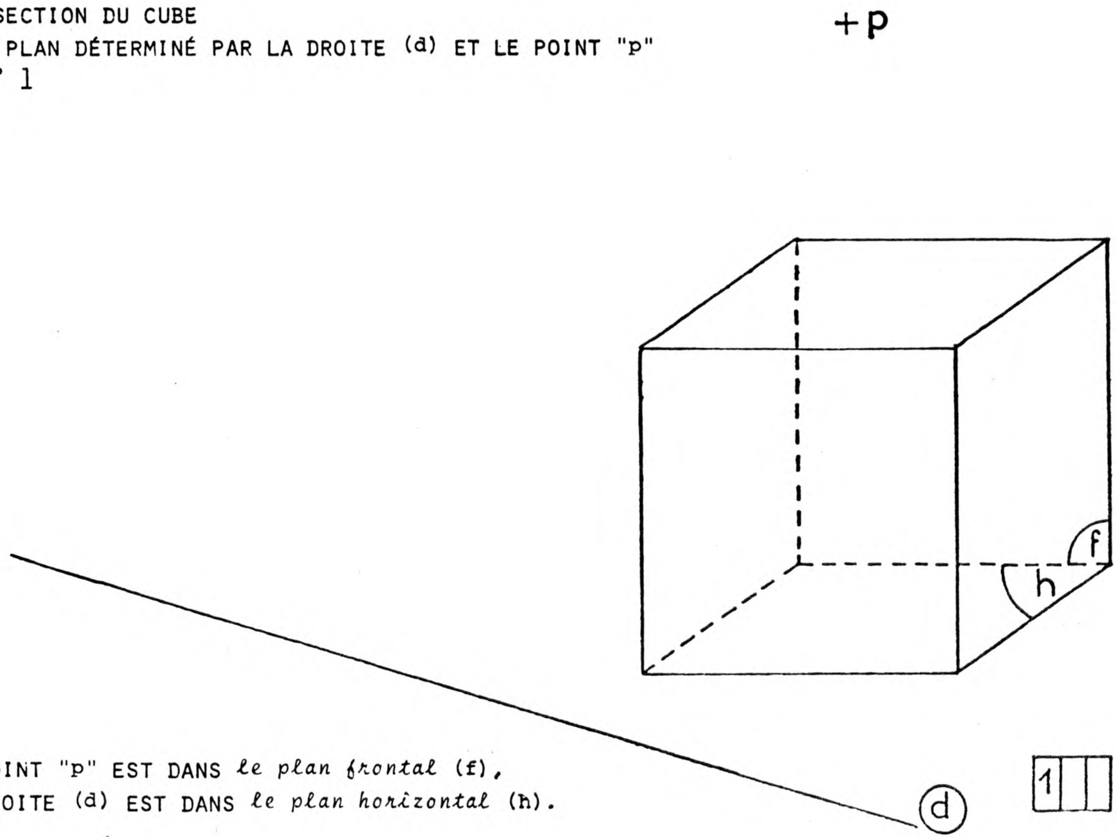
CONCLUSION.

Le travail qui ne couvre pas la totalité du programme de géométrie dans l'espace, de seconde, a nécessité 6 heures de recherche en classe entière. Il a permis à des élèves qui jusque là semblaient assez hermétiques au raisonnement mathématique de se révéler. En effet, tous étaient au départ particulièrement incultes sur ce sujet, et certains de ceux qui souffrent depuis plusieurs années d'un complexe à l'égard des calculs et des nombres, ont fait preuve d'une vision de l'espace assez surprenante.

Il a d'autre part fourni l'occasion de révisions du programme de géométrie plane des années antérieures, et celle d'effectuer quelques calculs à partir des connaissances acquises en 3ème.

Il nous a semblé, que certains élèves ont découvert à ce propos le monde à trois dimensions qui les entoure, et ceci justifie largement les six heures que nous lui avons consacré.

INTERSECTION DU CUBE
ET DU PLAN DÉTERMINÉ PAR LA DROITE (d) ET LE POINT "p"
CAS N° 1

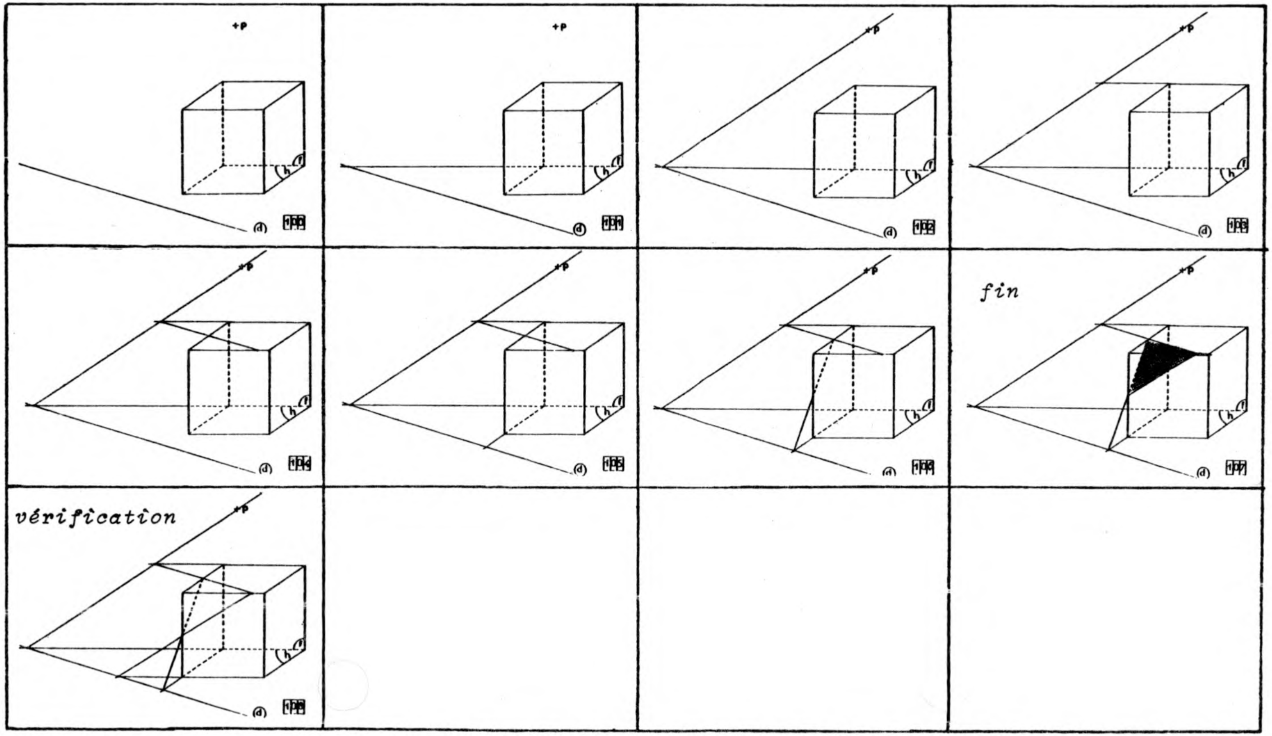


LE POINT "p" EST DANS *le plan frontal* (f),
LA DROITE (d) EST DANS *le plan horizontal* (h).

Fiche II

INTERSECTION DU CUBE
ET DU PLAN DÉTERMINÉ PAR LA DROITE (d) ET LE POINT "p"
CAS N° 1

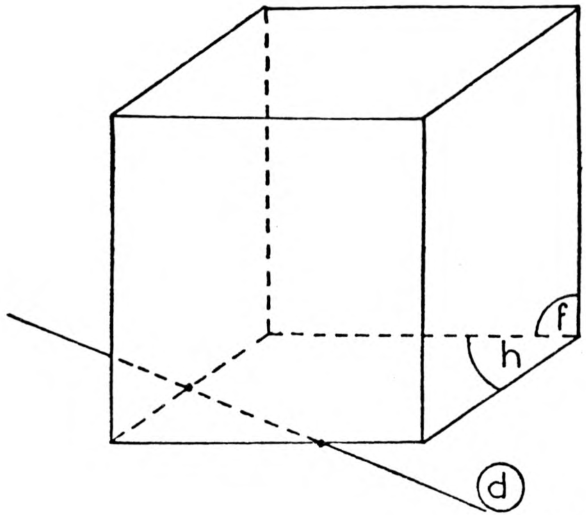
"LA BANDE DESSINÉE" DE LA CONSTRUCTION



Fiche III

INTERSECTION DU CUBE
ET DU PLAN DÉTERMINÉ PAR LA DROITE (d) ET LE POINT "p"
CAS N° 2

+ p



2

LE POINT "p" EST DANS *le plan frontal* (f),
LA DROITE (d) EST DANS *le plan horizontal* (h).

Fiche IV

INTERSECTION DU CUBE
ET DU PLAN DÉTERMINÉ PAR LA DROITE (d) ET LE POINT "p"
CAS N° 2

"LA BANDE DESSINÉE" À RECONSTITUER ...

Les cartons de la bande dessinée de la construction ont été mélangés... Après les avoir découpés, il faut reconstituer la bande dessinée...

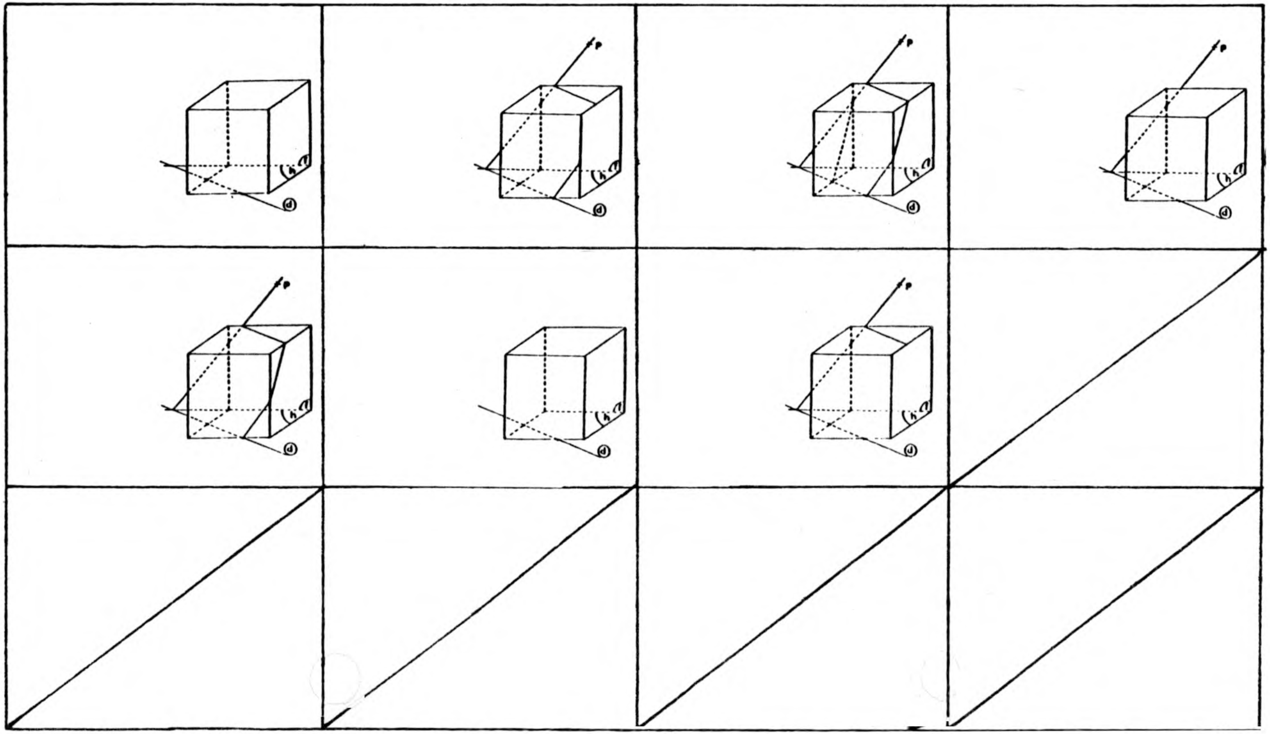


TABLE DES MATIERES