**irem**
**de**
**Grenoble**

# matchinettes 3



*Jean-Claude Oriol*
*Claudine Robert*

## SOMMAIRE



mars 1981

## PREFACE

Nous avons l'impression d'avoir «fait le tour» du travail avec des calculettes dans les classes.

D'autres pourront sans doute partir dans de nouvelles directions, mais l'équipe qui a travaillé à «Matchinettes 1» et «Matchinettes 2» laisse aux autres le soin de continuer.

# THEMES ELEMENTAIRES

## ADDITIONS AU SUPER MARCHE.

De plus en plus nous achetons dans des libre-services. On y voit quelquefois des «consommateurs», une petite machine à la main, faire des additions au fur et à mesure du dépôt des produits dans leur chariot. Un grand constructeur a même vendu une machine «pour vous madame» conçue spécialement pour multiplier les poids, (touche kg) par les prix (touche prix au kilo)...

Si la gymnastique :

1. Tenir une machine dans une main.
2. Un produit dans l'autre main.
3. Pousser le chariot (avec les dents ? )

vous paraît périlleuse, vous pouvez faire fonctionner la «machine interne», et vous habituer à calculer mentalement la somme à débourser «à quelque chose près». Pour cela voici une petit «truc» :

**Exemple** : 5 produits aux prix de 12,47 F, 3,95 F, 5,20 F, 6,80 F, 14,70 F.

| | | |
|---|---|---|
| Additionner mentalement les prix en francs des produits, en laissant tomber les centimes : soit S le nombre trouvé | ........ | on fait mentalement $12 + 3 + 5 + 6 + 14$ ; $12 \to 15 \to 20 \to 26 \to 40$ $\quad S = 40$ F |
| ↓ | | |
| Compter le nombre de produits : N | ........ | $N = 5$ |
| ↓ | | |
| Faire $S + (N \times 0{,}5)$ | ........ | $40 + (5 \times 0{,}5) = 42{,}50$ F (somme réelle 43,12 F). |

$N \times 0{,}5$ compense les centimes que l'on a négligés lors de l'addition mentale. Ce terme compensateur est le reflet de l'hypothèse d'une distribution uniforme des parties décimales des prix, 0,50 F étant la moyenne.

Mais nous avons tous remarqué qu'il existe plus de prix entre $\alpha$,50 F et $\alpha$,99 F, qu'entre $\alpha$,00 F et $\alpha$,49 F ; en conséquence, il faudra remplacer le 0,5 par un coefficient plus proche de la réalité.

Pour s'entraîner voici une telle facture :

$$\begin{array}{r} \text{francs} \searrow \quad \swarrow \text{centimes} \\ 3{,}20 \\ 3{,}20 \\ 12{,}10 \\ 7{,}65 \\ 9{,}90 \\ 10{,}85 \\ 7{,}40 \\ 3{,}90 \\ 3{,}90 \\ 3{,}90 \end{array}$$

En ajoutant les francs mentalement on trouve :

$$S = 60.$$

Il y a 10 articles : $N = 10$
donc $S' = 60 + 10 \times 0{,}5 = 65$ F.
Le résultat de la facture est 66 F. Pour que l'adéquation soit parfaite il faudrait dans ce cas multiplier le nombre d'articles par le coefficient 0,6.

En situation scolaire, la recherche d'un tel coefficient, par l'étude de diverses factures, développera la réflexion des élèves dans de multiples directions. La présence de calculatrices dans les classes permet d'augmenter la taille de l'échantillon des prix étudié, et par conséquent, la validité du coefficient trouvé.

## CALCUL MENTAL.

La plupart des calculs de la vie quotidienne se font «de tête» ou à la machine.

**Petit exemple,** à la station service, lorsqu'on achète de l'essence :

* une machine indique le prix à payer ;
* on calcule généralement de tête la monnaie à rendre.

Ce que donne le dialogue entre le pompiste (P) et le client (C).

P. «Voilà, ça fait soixante huit francs vingt».

C. «Tenez». Il donne un billet de 100 F et calcule mentalement $\{100 - 68{,}20 = 31{,}80\}$.

P. «Soixante huit, vingt et trente cinquante, et cinquante, soixante neuf et un soixante dix et trente, cent».

... etc...

Il faut donc, plus que jamais, développer et entretenir les techniques de calcul mental.

Les classes des écoles primaires et des collèges peuvent être le lieu de courses entre calculs à la machine et calcul mental.

Le type même des calculs envisagés avantagera l'une ou l'autre des techniques.

Ces travaux s'enrichissent mutuellement :

* la machine permet de vérifier à tout moment si le résultat trouvé est correct,

* les techniques employées dans le calcul mental aident le calcul machine.

Donnons un exemple de transplantation des techniques de calcul mental à un calcul machine.

**Calcul mental** : problème $27 \times 41$ {on ne sait pas calculer directement (de tête)}.

Décomposition : $41 = 40 + 1$.

Nouveau problème : $27 \times 41 = 27 \times 40 + 27 \times 1$.

De tête on connaît $\begin{cases} 27 \times 40 = 25 \times 40 + 2 \times 40 = 1\,000 + 80 = 1\,080 \\ 27 \times \ \ 1 = 27. \end{cases}$

On «recolle» les morceaux : $27 \times 41 = 1\,000 + 80 + 27 = 1\,107$.

**Calcul machine** : problème $27\,633 \times 41\,013$ {on ne sait pas faire non plus (à la machine)}.

Décomposition : $41\,013 = 41\,000 + 13$.

Nouveau problème : $27\,633 \times 41\,013 = 27\,633 \times 41\,000 + 27\,633 \times 13$.

A la machine on sait faire $\begin{cases} 27\,633 \times 41 = 1\,132\,953 \\ 27\,633 \times 13 = \ \ \ 359\,229. \end{cases}$

On fait : $27\,633 \times 41\,013 = 27\,633 \times 41 \times 1\,000 + 27\,633 \times 13$

$$\left.\begin{aligned} &= 1\,132\,953\,000 + 359\,229 \\ &= 1\,133\,312\,229 \end{aligned}\right\} \text{avec un crayon ou de tête.}$$

Le calcul mental emploie diverses techniques quand les calculs dépassent les seuils du «par cœur» (par exemple $9 \times 9$ pour la multiplication) ; ces techniques peuvent être transposées aux opérations dépassant le «par cœur» de la calculette (pour la multiplication $9\,999 \times 9\,999$).

Il est très important de mener de front ces deux activités. En effet la compréhension des algorithmes rencontrés passe par leur application dans diverses situations avec des outils différents.

**ORDRE DE GRANDEUR.**

Le dernier exemple montre combien il est important de connaître l'ordre de grandeur du résultat attendu. C'est une habitude essentielle à prendre (et à faire prendre) ; savoir «combien doit faire le résultat à peu près», autrement dit connaître l'ordre de grandeur du résultat évitera un grand nombre d'erreurs. Exemples de monologues en face de résultats innattendus :

(*)

J'ai «vérifié» cette somme à l'aide d'une calculette :

  3,20
+ 3,20
+ 12,10
+ 7,65
+ 9,90
+ 10,85
+ 7,40
+ 3,90
+ 3,90
+ 3,90

et j'ai trouvé 382,10. «A vue, cette note d'une dizaine d'articles, chaque prix aux environs de 10 F chacun, doit être de l'ordre de 100 F». «J'ai dû me tromper dans l'introduction des nombres au clavier. Une virgule est vite oubliée...».

(**)

| touche | affichage |
|---|---|
| $\pi$ | 3.141 592 7 |
| sin | 0.054 803 7 |

— Tiens bizarre.
— Pourtant $\sin \pi = 0$.
— Ah oui, la valeur de $\pi$ donnée par la machine n'est pas exactement $\pi$.
— Comment vérifier que l'erreur est causée par ça ?
— Essayons avec $\pi/2$.

| touche | affichage |
|---|---|
| $\pi$ | 3.141 592 7 |
| ÷ | 3.141 592 7 |
| 2 | 2 |
| = | 1.570 796 3 |
| sin | 0.027 412 1 |

– Alors là c'est encore pire, $\sin(\pi/2)$ c'est pourtant égal à 1.

– Et ici c'est à peu près la moitié de $\sin \pi$.

– Mais, bon sang, c'est bien sûr... on est en DEGRES au lieu d'être en RADIANS.

## LES CALCULETTES QUI POSENT DES QUESTIONS.

Certaines machines ont été construites pour apprendre à calculer aux utilisateurs. De telles machines posent des questions au lieu d'y répondre. Par exemple :

affichage

$$\boxed{52 + [\ ] = 73}$$

On doit remplir le crochet pour que l'opération soit correcte.

* Une réponse fausse, 3 par exemple provoque un message d'erreur.
* Une réponse juste fait passer à un autre problème.

Si l'on veut acheter, ou offir, une telle machine, il convient de la choisir aussi compliquée que possible, l'intérêt des enfants étant maintenu plus longtemps.

Notons que ces machines ne changent pas l'éventuelle situation conflictuelle de l'individu vis-à-vis des mathématiques. Elles sont, néanmoins, des répétiteurs et des partenaires infatigables pour ceux qui veulent mémoriser en jouant.

## POUR SE SERVIR DE LA MEMOIRE.

Toutes les calculettes devraient posséder une mémoire. Un mémoire est un registre où l'on peut mettre et reprendre un nombre. L'image d'une «boîte dans la machine», permet d'expliquer aux jeunes enfants, et aux autres, le fonctionnement de la mémoire.

En préalable, deux exigences :

1. En aucun cas, les différentes fonctions et calculs faits par la ma-

chine ne doivent transformer le contenu de la mémoire.

2. Un signal doit apparaître à l'affichage pour indiquer qu'un nombre (différent de zéro) est en mémoire.

D'autre part il est infiniment souhaitable de pouvoir échanger le contenu de la mémoire et celui de l'affichage. Cela nous amène à répertorier les particularités les plus courantes des calculettes possédant une mémoire.

Pour schématiser ce qui nous intéresse dans la machine, nous représenterons trois colonnes :

— l'une avec les différentes touches utilisées,
— la deuxième décrivant l'affichage,
— la troisième indiquant le contenu de la mémoire.

**1) Remise à zéro.**

En principe quand on allume la calculatrice (ON) il y a 0 dans la mémoire. On peut, sans l'éteindre, vouloir retourner à cet état premier ; certains constructeurs ont prévu une touche $\boxed{\text{MC}}$ (ou $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{\text{C}}$) qui fonctionne ainsi :

| touches | affichage | mémoire |
|---|---|---|
| ⁞ | ⁞ | ⁞ |
| | M 2.3 | 651.7 |
| MC | 2.3 | 0 |

Signal : «il y a quelque chose en mémoire».

Si on appelle M le registre mémoire, on pourra symboliser cette action par

$$M \longleftarrow 0$$

c'est-à-dire mettre 0 dans la mémoire. M et C sont les initiales de Mémory Clear (nettoyer la mémoire).

**2) Mettre un nombre en mémoire.**

* Remplacer le contenu de la mémoire par le nombre affiché $\boxed{\text{STO}}$ de l'anglais store mais on peut mémoriser (!) par stocker.

| touches | affichage | mémoire |
|---|---|---|
| ⁞ | ⁞ | ⁞ |
| | M 2.3 | 651.7 |
| STO | M 2.3 | 2.3 |

$\{M \leftarrow 2.3\}$.

** Ajouter l'affichage au contenu de la mémoire :

$\boxed{\text{M+}}$ ou $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{+}$ ou $\boxed{\text{SUM}}$

| touches | affichage | mémoire |
|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | M 2.3 | 651.7 |
| M + | M 2.3 | 654 |

Notation : M ⟵ M + A.

3) **Echanger l'affichage et la mémoire** : $\boxed{\text{EXC}}$ ou $\boxed{\text{EX}}$ ou $\boxed{\text{M}}\boxed{\text{EX}}$ ou $\boxed{\text{MEX}}$ ou $\boxed{\text{X} \longleftrightarrow \text{M}}$

| touches | affichage | mémoire |
|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | 2.3 | 651.7 |
| EXC | 651.7 | 2.3 |

Notation : (A, M) ⟵ (M, A).

Cette possibilité est très intéressante car elle permet de consulter le contenu de la mémoire sans perdre le nombre affiché.

4) **Rappel de la mémoire** : (Recall).

* sans la vider $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{\text{R}}$ ou $\boxed{\text{MR}}$ ou $\boxed{\text{RCL}}$

| touches | affichage | mémoire |
|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | 2.3 | 651.7 |
| RCL | 651.7 | 651.7 |

A ⟵ M

** En la vidant $\boxed{\text{MT}}$

| touches | affichage | mémoire |
|---|---|---|
| ⌇ | ⌇ | ⌇ |
| | 2.3 | 651.7 |
| MT | 651.7 | 0 |

$$A \longleftarrow M.$$

La différence entre * et ** n'apparaît pas dans le système symbolique proposé. Pour qu'il n'en soit pas ainsi il faudrait symboliser par le couple (A, M) les contenus de la mémoire et de l'affichage ; dans ce cas là :

$\boxed{\text{RCL}}$ s'écrit $(A, M) \longleftarrow (M, M)$

et $\boxed{\text{MT}}$ $(A, M) \longleftarrow (M, O)$.

Ces notations et ces schémas de fonctionnement doivent se construire au fur et à mesure des besoins ; ils réapparaîtront tout au long de cette brochure sous de multiples formes.

**ECRIRE AVEC UNE CALCULATRICE.**

Il y a toujours quelqu'un pour «faire écrire» des mots à la calculatrice. Les enfants ne sont pas les derniers à exploiter cette activité. Pour écrire un mot à l'affichage il vaut mieux retourner la calculette. En effet dans le sens normal :

| chiffres | $\longrightarrow$ | alphabet |
|---|---|---|
| 0 | $\longmapsto$ | O |
| 1 | $\longmapsto$ | i |
| 2 | $\longmapsto$ | |
| 3 | $\longmapsto$ | |
| 4 | $\longmapsto$ | |
| 5 | $\longmapsto$ | S |
| 6 | $\longmapsto$ | |
| 7 | $\longmapsto$ | |
| 8 | $\longmapsto$ | B |
| 9 | $\longmapsto$ | |

à l'envers

| chiffres | $\longrightarrow$ | alphabet |
|---|---|---|
| 0 | $\longmapsto$ | O |
| 1 | $\longmapsto$ | i |
| 2 | $\longmapsto$ | |
| 3 | $\longmapsto$ | e |
| 4 | $\longmapsto$ | h |
| 5 | $\longmapsto$ | s |
| 6 | $\longmapsto$ | g |
| 7 | $\longmapsto$ | l |
| 8 | $\longmapsto$ | b |
| 9 | $\longmapsto$ | a |

On peut donc essayer de composer tous les mots ayant 3 lettres ou 4 lettres.

Les virtuoses écriront «le soleil» en français, italien et espagnol.

# ORGANISATION DES CALCULS

Il est important de préparer les calculs que l'on veut faire. Cette préparation est fonction des outils dont on dispose. Par exemple, dans le calcul mental, 99 sera mis sous la forme : 100 - 1.

Les calculettes induisent un certain nombre de méthodes et de techniques, aucune n'étant universelle, tant sur le plan des utilisateurs que sur celui des matériels.

A chacun sa pratique-calculette ; voici quelques éléments destinés à enrichir ou à faire naître la vôtre.

## CALCULS AVEC PARENTHESES APPARENTES.

**Exemple.**

Soit à calculer l'expression :

23(14 + 17(24 + 18(17 + 26(19 + 13)))).

Un tel calcul peut s'exécuter «comme il est écrit», de gauche à droite, avec certaines conditions :

— il ne faut pas oublier les signes X implicites dans l'écriture ci-dessus. En effet, si on exécute la séquence de touches suivantes :

| 2 | 3 | ( | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|

certaines machines affichent alors 2314, d'autres ont «perdu» le nombre 23. Jusqu'à présent, aucun modèle n'est conçu pour que la séquence ci-dessus ait même effet que :

| 2 | 3 | X | ( | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|

— Il est nécessaire que la calculette ait un niveau de parenthésage suffisant.

Si la calculette dont on dispose n'a pas de parenthèses, ou insuffisamment de niveaux, le calcul peut se faire de droite à gauche, en exécutant la séquence suivante :

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | + | 1 | 3 | = | X | 2 | 6 | + | 1 | 7 | = | X | 1 | 8 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | 2 | 4 | = | X | 1 | 7 | + | 1 | 4 | = | X | 2 | 3 | = |

**Remarque.**

Sur certaines calculettes 4 opérations, les signes «=» intermédiaires sont superflus ; il n'est pas absurde de conserver cependant les mêmes règles qu'en calcul mental et de laisser ces signes «=».

## CALCULS AVEC PARENTHESES NON APPARENTES.

**Exemple 1.**

$$\underbrace{\frac{\sqrt{1545} + 3762}{89 + 175^2}}_{A} - \underbrace{\frac{3547 + 27}{312 \times 29}}_{B}$$

Une tendance naturelle est de calculer A, de le noter ; puis on calcule -B et on lui ajoute A. Si la calculette a une mémoire, celle-ci remplacera avantageusement la feuille de papier intermédiaire et on aura une séquence du type suivant, diverses possibilités étant mises entre accolades :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 89 | + | 175 | $X^2$ | = | ou {STO / M+} | 1545 | $\sqrt{\ }$ | + | | |
| 3762 | = | ÷ | MR | = | ou {STO / $\boxed{\text{M}}\boxed{\text{EXC}}$} | 3547 | + | | | |
| 27 | = | ÷ | 312 | ÷ | 29 | = | +/- | + | ou {RCL / MR} | = |

Les signes = intermédiaires peuvent être supprimés pour les calculettes sans priorité.

Si la calculette n'a pas de mémoire, ou si celle-ci est utilisée pour stocker d'autres résultats, et si elle a des parenthèses, on peut écrire :

$$A - B = \frac{(\sqrt{1545} + 3762)}{(89 + 175^2)} + \left(\frac{(3547 + 27)}{(312 + 29)}\right)$$

ce qui donne en «calculant comme on écrit»

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( | 1 | 5 | 4 | 5 | $\sqrt{\ }$ | + | 3 | 7 | 6 | 2 | ) | ÷ | ( | 8 | 9 | + | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 5 | $X^2$ | ) | + | ( | ( | 3 | 5 | 4 | 7 | + | 2 | 7 | ) | ÷ | ( | 3 | 1 | 2 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | 2 | 9 | ) | ) | = |

**Exemple 2.**

$$\frac{2769+\sqrt{2769}}{\sqrt{2769+31}-243}$$

Il peut être avantageux, dans un tel cas (rencontré dès qu'on veut calculer les valeurs de certaines fonctions, ou des limites de suites ou de fonctions) d'opérer ainsi (en supposant que la calculette a des parenthèses et une mémoire) :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( | 2 | 7 | 6 | 9 | STO | + | $\sqrt{\ }$ | ) | ÷ |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( | ( | RCL | + | 3 | 1 | ) | $\sqrt{\ }$ | - | 2 | 4 | 3 | ) | = |

Lors des premières utilisations de calculette, il est fréquent d'oublier, soit la dernière parenthèse à fermer, soit le signe = final.

**Exemple 3.**

$$4^{\frac{1}{2^5}}$$

Si il y a une touche $y^x$, on peut faire la séquence suivante :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $y^x$ | ( | 2 | $y^x$ | 5 | ) | 1/x | = |

On pourra constater, à l'usage, que les parenthèses s'emploient surtout lorsqu'elles sont implicites dans un calcul (c'est-à-dire souvent dans des quotients ou des produits) ou lorsque il y a un calcul intermédiaire à faire ($\sqrt{2769+31}$ dans l'exemple 2, $2^5$ dans l'exemple 3).

## CALCUL DES VALEURS D'UNE FONCTION.

Nous envisageons ici le cas d'une calculette ayant au moins une mémoire dans laquelle il est commode de mettre la valeur de la variable.

Dans la plupart des cas il suffit de calculer les valeurs de la fonction en suivant l'écriture donnée pour son expression :

**Exemple.**

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= 3x + 4 \\ f_2(x) &= 3x^2 + 4x + 8 \\ f_3(x) &= \frac{x^2 + 5}{3x - 4} \\ f_4(x) &= \frac{x + 8}{x - 3} + \frac{x - 5}{12x^2} \end{aligned}\right\}$$

Pour calculer f(x), mettre x à l'affichage et exécuter le «programme» qui correspond à f.

| $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|
| × | STO | STO | STO |
| 3 | $X^2$ | $X^2$ | + |
| + | × | + | 8 |
| 4 | 3 | 5 | = |
| = | + | = | ( |
| | 4 | ÷ | RCL |
| | × | ( | - |
| | RCL | 3 | 3 |
| | + | × | ) |
| | 8 | RCL | = |
| | = | - | + |
| | | 4 | ( |
| | | ) | RCL |
| | | = | - |
| | | | 5 |
| | | | ) |
| | | | ÷ |
| | | | 12 |
| | | | ÷ |
| | | | RCL |
| | | | $X^2$ |
| | | | = |

On suppose ici avoir une calculatrice admettant les règles usuelles de priorité des opérations, c'est-à-dire en particulier qui affiche 13 lorsqu'on tape sur la liste des touches suivantes.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | 3 | × | 4 | = |

Pour calculer plusieurs valeurs d'une même fonction, il faudra exécuter plusieurs fois la même liste de touches ou ... «apprendre» un programme à la calculatrice si celle-ci est programmable (l'avantage étant ici évident...).

Dans certains cas, il peut être commode d'adapter l'expression de la fonction aux performances de la calculatrice.

**Exemple.**

$f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 4x + 2$ s'écrit aussi $f(x) = 2 + x\,(4 + x(5 + 8x)))$ et peut s'obtenir à partir de la liste de touches suivante, lorsqu'il n'y a pas de touche $y^x$ :

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| STO | X | 8 | + | 5 | = | X | RCL | + | 4 | = | X | RCL | + | 2 | = |

$$g(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| STO | $x^2$ | + | RCL | + | 1 | = | 1/x |

## MODELES DE FONCTIONNEMENT

Afin d'appréhender le fonctionnement d'une calculette, de comprendre et d'analyser les résultats qu'elle affiche, nous la considérons en tant qu'unité d'enregistrement et de traitement d'informations : les nombres, composant une partie de l'information, sont stockés dans des registres ; les opérations sont exécutées par un «bloc calcul», suivant certaines règles propres à chaque modèle de machine. Une description du fonctionnement électronique aurait un aspect bien différent.

La méthode employée sera expérimentale ; nous exécuterons des calculs, avec des nombres tels que les résultats puissent être facilement vérifiés (par exemple : $6 + 5 \times 4$, $\sin \frac{\pi}{2}$, Log 100, Ln 1). L'utilisation de la calculette s'enrichira peu à peu des connaissances acquises par les tâtonnements expérimentaux (par exemple en sachant ce que font des séquences du type suivant : $\boxed{6}$

$\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$

$\boxed{=}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ ).

### OPERATIONS ELEMENTAIRES

Regardons comment faire calculer $6 + 5 \times 2$ à la machine, et pour cela, ce qui se passe lorsqu'on exécute la séquence suivante :

$\boxed{6}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ .

Il existe essentiellement deux types de calculettes :

affichages

| touche | calculette sans priorité | calculette avec priorité |
|---|---|---|
| ON/C | *0* | *0* |
| 6 | *6* | *6* |
| + | *6* | *6* |
| 5 | *5* | *5* |
| X | *11* | *5* |
| 2 | *2* | *2* |
| = | *22* | *16* |

Remarquons d'abord que les touches de signe, +, –, X, ÷, ) sont des signaux de fin d'entrée de nombres. On pourra tester sur chaque machine quelles sont les autres touches qui servent aussi de signal de fin de nombre.

A ce propos, nous ne connaissons aucune calculette acceptant deux virgules pour un même nombre, ou qui enregistre des chiffres tapés sur le clavier lorsque l'affichage est complet.

**A. Calculette sans priorité.**

L'appui sur la touche X fait effectuer 6 + 5 et affiche 11. Nous dirons que le nombre 6 est stocké dans un registre «réserve» et essayons de savoir ce qui se passe dans ce registre ; nous dinstinguons alors trois cas notés I, II, III.

| | I | | II | | III | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| touche | affichage | réserve | affichage | réserve | affichage | réserve |
| ON | *0* | 0 | *0* | 0 | *0* | 0 |
| 6 | *6* | 0 | *6* | 0 | *6* | 0 |
| + | *6* | 6 | *6* | 6 | *6* | 6 |
| 5 | *5* | 6 | *5* | 6 | *5* | 6 |
| = | *11* | 0 | *11* | 6 | *11* | 5 |
| = | *11* | 0 | *17* | 6 | *16* | 5 |
| | pas de facteur constant | | facteur constant additif | | | |

Certaines de ces calculettes ont une touche permettant d'échanger l'affichage et la réserve ; on peut s'en servir en particulier pour étudier, pas à pas, ce qui se passe dans le registre réserve.

Les calculettes ayant un facteur constant sont plus performantes ; les plus perfectionnées dans cette gamme sont celles qui ont un facteur constant pour chacune des opérations +, X, –, ÷.

**B. Calculettes avec priorité.**

Pour celle-ci, les touches + et – font exécuter toutes les opérations non faites, leur résultat étant immédiatement affiché. Les touches X et ÷ font exécuter l'opération précédente si celle-ci est une multiplication ou une division.

| touche | ON/C | 6 | + | 3 | ÷ | 2 | X | 5 | – | 1 | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| affichage | *0* | *6* | *6* | *3* | *3* | *2* | *1.5* | *5* | *13.5* | *1* | *12.5* |

1 2

La calculette peut stocker plusieurs nombres ; dans le calcul ci-dessus, il s'agit de 6 et 3 au niveau de la flèche 1 , de 6 et 1,5 au niveau de la flèche 2 . De plus, chaque nombre stocké l'est avec un signe. Nous ferons dans ce cas le schéma de fonctionnement suivant.

| touche | A<br>affichage | $R_1$<br>réserve X, ÷ | $R_2$<br>réserve +, – | commentaires |
|---|---|---|---|---|
| ON/C | *0* | 1 X | 0 + | Il s'agit ici de conventions au niveau du modèle choisi. |
| 6 | *6* | 1 X | 0 + | |
| + | *6* | 1 X | 6 + | |
| 3 | *3* | 1 X | 6 + | |
| ÷ | *3* | 3 ÷ | 6 + | |
| 2 | *2* | 3 ÷ | 6 + | |
| X | *1.5* | 1,5 X | 6 + | |
| 5 | *5* | 1,5 X | 6 + | |
| – | *13.5* | 1 X | 13,5 – | |
| 1 | *1* | 1 X | 13,5 – | |
| = | *12.5* | 1 X | 0 + | |

Un calcul élémentaire, sans parenthèses ni mises en mémoire, ne faisant intervenir que les registres notés A, $R_1$, $R_2$, nous symboliserons l'état de la calculette allumée, à un instant donné par :

| | | |
|---|---|---|
| a | b × | c + |

a, b, c étant les contenus respectifs des registres A, $R_1$, $R_2$.

L'effet d'une touche = est de remplacer a par a × b + c, b × par 1 × et c + par 0 +. Soit :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b × | c + | effet de la touche = |
| ↑ | ↑ | ↑ | |
| a × b + c | 1 × | 0 + | |

De même :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b × | c + | effet de la touche + |
| ↑ | ↑ | ↑ | |
| a × b + c | 1 × | a × b + c | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b × | c + | effet de la touche ÷ |
| ↑ | ↑ | ↑ | |
| a × b | a × b ÷ | c + | |

Les informaticiens, dans de tels cas, ont la symbolique suivante :

(a, b ×, c +) ⟵ (a × b + c, 1 ×, 0 +) effet de la touche =
(a, b ×, c +) ⟵ (a × b - c, 1 ×, a × b + c +) effet de la touche +
(a, b ×, c +) ⟵ (a × b, a × b ÷, c +) effet de la touche ÷

La flèche signifiant que les éléments du triplet de droite vont venir remplacer ceux du triplet de gauche dans les registres A, $R_1$, $R_2$.

On verra ainsi, dans des documents informatiques : Z ⟵ Z + 1, pour signifier qu'on a ajouté 1 au contenu Z d'un certain registre(1).

(1) Les mathématiciens auraient plutôt tendance à noter fonctionnellement, c'est-à-dire : Z ⟼ Z + 1.

## FACTEUR CONSTANT.

Certaines calculettes avec priorité ont un **facteur constant**, qui est représenté par une touche spéciale (souvent notée K) fonctionnant comme l'indique le tableau ci-dessous.

| touche | 3 | × | K | 10 | = | = | 5 | + | K | 2 | = | = | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| affichage | *3* | *3* | *3* | *10* | *30* | *90* | *5* | *5* | *5* | *2* | *7* | *13* | *19* |

Les signes ×, + peuvent être remplacés, suivant les modèles, par ÷, –, $y^x$, l'effet de la touche = étant alors respectivement de diviser l'affichage par un nombre, de lui soustraire un nombre, de l'élever à une puissance donnée.

L'effet de la touche notée ici K est détruit dès qu'on appuie sur une touche opératoire (+, ×, ÷, –).

## PARENTHESES.

L'usage de **parenthèses** change les règles de priorité et de fonctionnement des registres de calcul.

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons sur un exemple un schéma de fonctionnement possible.

| touche | affichage | $R_1$ | $R_2$ | commentaires |
|---|---|---|---|---|
| **9** | *9* | 1 × | 0 + | |
| + | *3* | 1 × | 9 + | |
| **5** | *5* | 1 × | 9 + | |
| ÷ | *5* | 5 ÷ | 9 + | |
| ( | *5* | 5 ÷ 1 × | 9 + 0 + | 5 ÷ et 3 + sont stockés en 2ème position dans les registres $R_1$ et $R_2$. |
| **2** | *2* | 5 ÷ 1 × | 9 + 0 + | |
| – | *2* | 5 ÷ 1 × | 9 + 2 – | 2 – est en première position dans le registre $R_2$. |
| **3** | *3* | 5 ÷ 1 × | 9 + 2 – | |
| × | *3* | 5 ÷ 3 × | 9 + 2 – | 3 × est en première position dans le registre $R_1$. |
| **4** | *4* | 5 ÷ 3 × | 9 + 2 – | |
| + | *-10* | 5 ÷ 1 × | 9 + -10 + | |
| **5** | *5* | 5 ÷ 1 × | 9 + -10 + | |
| ) | *-5* | 5 ÷ | 9 9 + | La touche $\boxed{)}$ ramène 5 ÷ et 9 + en première position. |
| + | *8* | 1 × | 9 8 + | |
| **7** | *7* | 1 × | 9 8 + | |
| = | *15* | 1 × | 0 + | |

On peut tester combien de nombres et d'opérations peuvent être enregistrés dans chaque registre avec des calculs du type suivant :

2 + 3 X (4 + 5 X (6 + 7 X (8 + 9 X (10 + 11)))).

2 + (3 + (4 + (5 + (6 + (7))))).

**MEMOIRE.**

La mémoire est un registre indépendant des registres de calcul et auquel on peut avoir accès.

Dans un programme faisant intervenir la mémoire, nous symbolisons l'état de la calculette par un triplet (a, b, d) ou un quadruplet (a, b, c, d), suivant le nombre de registres de calcul ; le dernier élément, ici noté d, est le contenu de la mémoire dans l'état considéré.

Le tableau ci-dessous résume les actions suivantes pour diverses machines, en envisageant l'effet de certaines touches.

Actions.

1. Mise en mémoire lorsque celle-ci n'a pas été utilisée.
2. Mise en mémoire lorsque celle-ci contient déjà un nombre.
3. Rappel de la mémoire.
4. Opération sur le registre mémoire.
5. Echange affichage-mémoire.
6. Effacement de la mémoire.

| action matérielle | calculettes avec mémoire à substitution | calculettes avec mémoire cumulative |
|---|---|---|
| 1. Mise en mémoire (mémoire vide) | $(a, b, 0) \longleftarrow (a, b, a)$<br>effet d'une touche notée STO ou M | $(a, b, 0) \longleftarrow (a, b, 0 + a)$<br>effet d'une touche notée M + ou des touches M et + |
| 2. Mise en mémoire (mémoire non vide) | $(a, b, d) \longleftarrow (a, b, a)$<br>effet d'une touche notée STO ou M | Voir action 5 ou actions 6 et 1 |
| 3. Rappel de la mémoire | $(a, b, d) \longleftarrow (d, b, d)$<br>$(a, b, c, d) \longleftarrow (d, b, c, d)$<br>effet d'une touche notée MR ou RCL | $(a, b, d) \longleftarrow (d, b, d)$<br>effet d'une touche notée MR ou RCL.<br>S'il n'y a pas de touche MR, voir action 5. |
| 4. Opérations en mémoire | $(a, b, d) \longleftarrow (a, b, d + a)$<br>effet d'une touche notée SUM ou M +<br>$(a, b, d) \longleftarrow (a, b, d \times a)$<br>effet d'une touche notée PROD et M $\times$ | $(a, b, d) \longleftarrow (a, b, d + a)$<br>effet de M + ou des touches M et +<br>$(a, b, d) \longleftarrow (a, b, d \times a)$<br>effet de M $\times$ ou des touches M et $\times$<br>De même, il peut y avoir des touches M $\div$ et M $-$ |
| 5. Echange affichage-mémoire | $(a, b, d) \longleftarrow (d, b, a)$<br>effet d'une touche notée EXC ou MEX | $(a, b, d) \longleftarrow (d, b, a)$<br>effet d'une touche notée MEX, ou EXC, ou des touches M et EXC |
| 6. Effacement de la mémoire | Inutile | $(a, b, d) \longleftarrow (a, b, 0)$<br>effet d'une touche notée MC<br>ou<br>$(a, b, d) \longleftarrow (d, b, 0)$<br>effet d'une touche notée MT |

## MATHEMATIQUES FINANCIERES

### EMPRUNTS : CALCUL DES ANNUITES.

Supposons avoir emprunté le 1-1-1980 une somme $A_0$, à un taux annuel i, sur 3 ans. On désire rembourser chaque année la même somme, et verser immédiatement la première annuité. Le tableau ci-dessous décrit une telle situation.

| date | somme due | somme remboursée | annuité |
|---|---|---|---|
| 1-1-1980 | $A_0$ | x | x |
| 1-1-1981 | $A_1 = (A_0 - x)(1 + i)$ | 2x | x |
| 1-1-1982 | $A_2 = (A_1 - x)(1 + i)$ | 3x | x |
| 1-1-1983 | $A_3 = (A_2 - x)(1 + i)$ | 4x | x |

L'emprunt étant de 3 ans, il faut que la somme due en 1983 soit égale à la somme que l'on rembourse à cette date, soit x :

$$x = A_3.$$

En remplaçant successivement $A_3$, $A_2$, $A_1$ par leur valeur dans le tableau ci-dessus, on trouve :

$$x = A_0\alpha^3 - x\alpha^3 - x\alpha^2 - x\alpha \qquad \text{avec } \alpha = 1 + i$$

$$x(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3) = A_0\alpha^3 \qquad 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \frac{1 - \alpha^4}{1 - \alpha}.$$

D'où

$$x = A_0 \frac{\alpha^3(1 - \alpha)}{1 - \alpha^4} = A_0 \frac{i(1 + i)^3}{(1 + i)^4 - 1}.$$

Soit $A = 12\,500$ F et $i = 0{,}14$ (taux de 14%).

Le calcul de l'annuité x se fait avec une calculette 4 opérations, ayant les touches $x^2$ et $1/x$ :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,14 | $x^2$ | $x^2$ | – | 1 | = | 1/x | × | 0,14 | × | 1,14 | × | 1,14 | $x^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| × | 12500 | = |

Le tableau devient alors :

| date | somme due | somme remboursée | annuité |
|---|---|---|---|
| 1-1-1980 | 12 500 | 3 763,21 | 3 763,21 |
| 1-1-1981 | 9 959,94 | 7 526,42 | 3 763,21 |
| 1-1-1982 | 7 064,27 | 11 289,63 | 3 763,21 |
| 1-1-1983 | 3 763,21 | 15 052,84 | 3 763,21 |

somme totale remboursée

**Remarques.**

1) La formule trouvée pour l'annuité se généralise ; si l'emprunt porte sur n années, avec un remboursement immédiat, l'annuité est donnée en fonction de la somme empruntée $A_0$ et du taux i par :

$$x = A_0 \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^{n+1} - 1}.$$

Si on ne dispose pas d'une calculette ayant la touche $y^x$, on pourra, pour $i < 0{,}10$ avoir une approximation correcte de l'annuité par la formule :

$$x = A_0 \frac{1 + n_i}{n + 1} \qquad \text{(on a approximé } (1+i)^k \text{ par } 1 + k_i).$$

2) Si le premier remboursement a lieu un an après l'emprunt, en faisant le même type de calculs que ce qui a été fait, on trouve pour l'annuité x :

sur 3 ans $\quad x = A_0 \dfrac{\alpha^3(1-\alpha)}{1-\alpha^3} = A_0 \dfrac{i}{1 - \dfrac{1}{(1+i)^3}}$

sur n années $\quad x = A_0 \dfrac{i}{1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}}$

avec, comme formule approchée, si on n'a pas de touche $y^x$ :

$$x = A_0 (i + \frac{1}{n}).$$

Pour «tester» cette formule et se rendre compte de l'erreur faite, on peut se référer au tableau ci-dessous et le compléter avec la calculette dont on dispose.

| i | n | annuité | valeur approchée : $A_0 \times (i + \frac{1}{n})$ |
|---|---|---|---|
| 0,8 | 10 | $A_0 \times 0{,}8022$ | $A_0 \times 0{,}9$ |
| 0,8 | 15 | $A_0 \times 0{,}8001$ | $A_0 \times 0{,}8666$ |
| 0,8 | 20 | $A_0 \times 0{,}8000$ | $A_0 \times 0{,}85$ |
| 0,10 | 10 | $A_0 \times 0{,}16274$ | $A_0 \times 0{,}2$ |
| 0,10 | 15 | $A_0 \times 0{,}13147$ | $A_0 \times 0{,}1666$ |
| 0,10 | 20 | $A_0 \times 0{,}11745$ | $A_0 \times 0{,}15$ |

3) Le cas d'annuités non constantes se traite de manière analogue, mais les calculs sont plus complexes. En général, le taux de croissance des annuités est constant. Si j est u taux, et si le 1er remboursement a lieu immédiatement, on trouve comme première annuité, pour un remboursement e.. n années :

$$i \neq j : \ x = A_0 \times \frac{(i - j)}{(1 + i)^{n+1} - (1 + j)^{n+1}} \times (1 + i)^n$$

$$i = j : \ x = \frac{A_0}{n}$$

l'annuité à la k-ième année étant alors :

$$1 \leqslant k \leqslant n : x \times (1 + j)^k.$$

**Conclusion.**

Tous les calculs dont on donne les résultats dans ce chapitre, et tous ceux qu'on peut faire à ce propos, peuvent être faits avec une calculette 4 opérations, munie des touches $x^2$ et $1/x$ et très facilement si on a une touche $y^x$, un facteur constant et des parenthèses : il n'est pas besoin d'un ordinateur couteux pour emprunter de grosses sommes d'argent ! (C'est même le contraire).

## TABLEAU D'AMORTISSEMENT POUR L'ACHAT D'UNE VOITURE.

La voiture nommée «Alfasud T.I» vaut 29 480 F le 1er janvier 1979. Le tableau suivant donne :

— la dévaluation que subira cette voiture au cours des années, calculée en extrapolant les prix donnés par l'argus pour les voitures du même modèle achetées ces dernières années ;

— les frais annuels que cette voiture occasionne dans des conditions normales : 30 000 km de route par an, faits sur routes en bon état, avec une charge raisonnable etc... Ces frais comprennent : assurance, vignette, révisions, réparations.

| année | dévaluation | frais |
|---|---|---|
| 1 | 7 480 | 2 200 |
| 2 | 3 350 | 2 000 |
| 3 | 2 560 | 1 800 |
| 4 | 2 600 | 5 000 |
| 5 | 3 720 | 3 500 |
| 6 | 2 250 | 2 500 |
| 7 | 1 950 | 1 000 |
| 8 | 2 950 | 2 350 |

On peut alors (en s'aidant bien sûr d'une calculette !) faire le tableau d'amortissement :

— la perte annuelle représente la somme de la dévaluation et des frais de l'année ;

— la perte depuis l'achat représente la somme des pertes annuelles depuis l'achat ;

— la perte annuelle moyenne est le quotient de la perte depuis l'achat par le nombre d'années d'utilisation de la voiture. Une perte annuelle moyenne de 6 000 F à la 5ème année signifie que la voiture a coûté 6 000 F par an, en moyenne, pendant 5 ans. On peut donc choisir le critère suivant : revendre la voiture après un nombre d'années d'usage qui minimise la perte annuelle moyenne.

Les calculs sont faits en francs constants : on peut les refaire en tenant compte de l'inflation (mais il ne faut pas oublier alors l'augmentation du prix d'achat d'une voiture neuve, dans les calculs ; en fait les résultats sont semblement les mêmes).

On pourra constater à ce propos qu'il n'est pas si facile de ne jamais se tromper en faisant des additions, même avec une calculette, l'introduction au clavier de nombres étant une cause fréquente d'erreurs.

| nombre d'années d'utilisation | pertes de l'année | pertes totales depuis l'achat | perte annuelle moyenne |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 700 | 7 700 | 7 700 |
| 2 | 5 350 | 13 050 | 6 525 |
| 3 | 4 360 | 17 410 | 5 803 |
| 4 | 7 600 | 25 510 | 6 252 |
| 5 | 7 220 | 32 230 | 6 446 |
| 6 | 4 750 | 36 980 | 6 163 |
| 7 | 3 950 | 40 930 | 5 847 |
| 8 | 5 300 | 46 230 | 5 779 |

D'après ce tableau, on peut vendre la voiture au bout de 3 ans, ou au bout de 8 ans (ou plus si elle marche encore) et si on ne craint pas les pannes graves à des moments inopportuns !

# SUITES ET SERIES

## PREMIERS PAS.

On se propose de calculer :

$$S_{100} = 1 + 0{,}065 + 0{,}065^2 + \dots + 0{,}065^{100}$$

**1ère méthode :**

Sans doute une formule nous rendrait service mais notre mémoire est vide d'un arsenal mathématique nous permettant de trouver facilement le résultat.

– On peut regarder ce que deviennent les termes

$$U_n = 0{,}065^n$$

à mesure que n croît. Une calculette pourvue d'un facteur constant multiplicatif donne facilement :

$$\begin{array}{lll} u_3 = 0{,}0027463 & & \\ u_5 = 0{,}0000116 & \text{ou } 0 & \multirow{3}{*}{} \\ u_8 = 3{,}1864 \times 10^{-10} & \text{ou } 0 & \\ u_{10} = 1{,}3463 \times 10^{-12} & \text{ou } 0 & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}}\right\} \text{selon le type de machine}$$

Il est aisé de faire un programme permettant de calculer $S_{30}$ :

| | | |
|---|---|---|
| 0,065<br>X K | On met 0,065 en facteur constant multiplicatif | $\times K \longleftarrow 0{,}065$ |
| 1<br>STO | On charge 1 en mémoire | $M \longleftarrow 1$ |
| =<br>SUM | On multiplie l'affichage par 0,065 (c'est-à-dire on calcule $U_n$) et on ajoute ce terme au contenu de la mémoire | $a \longleftarrow a \times 0{,}065$<br>$M \longleftarrow M + a$ |
| RCL | Rappel du contenu de la mémoire | $a \longleftarrow M$ |

30 fois

où bien avec d'autres calculettes :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,065 | X | 0,065 | = | M+ | = | MR |

30 fois

En fait les programmes envisagés affichent un résultat S, qui ne fait intervenir que les 5 ou les 10 premiers termes de la somme selon que la précision de la calculette est $10^{-8}$ ou $10^{-11}$.

| n | S | $u_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1.065 | 0.065 |
| 2 | 1.069225 | 0.004225 |
| 3 | 1.0694996 | 0,0002746 |
| 4 | 1.0695175 | 0.0000179 |
| 5 | 1.0695186 | 0.0000012 |
| 6 | 1.0695187 | 7.5419 $10^{-8}$ |
| 7 | 1.0695187 | 4.9022 $10^{-9}$ |
| 8 | " | 3.1864 $10^{-10}$ |
| 9 | " | 2.0712 $10^{-11}$ |
| 10 | " | 1.3463 $10^{-12}$ |
| 11 | " | 8.7508 $10^{-14}$ |

Ce tableau nous amène à nous demander si $S_{10}$ est une «bonne» approximation de $S_{100}$.

* Cas ou la calculette affiche 0 pour $u_5$ :

Soit S la valeur calculée par la machine pour $S_4$

$|S_{100} - S| \leqslant 95 \times 10^{-7} < 100 \times 10^{-7}$

95 termes pour passer
de $S_4$ à $S_{100}$

D'où $S_{100} = 1{,}06952 \pm 10^{-5}$

** Dans l'autre cas : $S = S_9$

$|S_{100} - S| < 90 \times 10^{-11} < 100 \times 10^{11}$

$S_{100} = 1{,}06951872 \pm 10^{-9}$

Cette méthode ne saurait justifier l'approximation $\sum_0^{\infty} 0{,}065$ par $S_9$ ou $S_4$.

**2ème méthode :**

Nous connaissons «la formule»

$$1 + x + .......... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Si $n = 31$ $(0{,}065)^{31} = 1.586 \times 10^{-37}$ {directement donné par $y^x$ sur la machine}.

Pour des valeurs plus élevées de n, 101 par exemple, $u_n$ n'est pas calculable directement, l'exposant dépassant - 99.

On néglige $(0{,}065)^{n+1}$ et l'on trouve

$S = 1{,}0695187$ (avec une précision de $10^{-7}$).

Avec cette formule nous pouvons justifier que :

$\sum_{0}^{\infty} 0{,}065^n = 1{,}0695187$ avec une précision de $10^{-7}$.

**ETUDES DE QUELQUES SUITES.**

1 - Considérons la suite définie par :

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Pour l'étudier selon le temps dont on dispose nous pourrons appliquer diverses stratégies, intermédiaires des deux suivantes :

a) Calcul de $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, ..., $u_{10}$, $u_{20}$, $u_{30}$, $u_{99}$, $u_{100}$, $u_{150}$ ; à ce petit jeu on se fatigue assez vite et peu de gens iront au-delà de $u_{150}$.

Il reste à conclure quant à la limite ...

b) On trouve un moyen de calculer $u_\alpha$ pour $\alpha$ très grand, par exemple :

$u_{10^7} = 2{,}7182818$

— Pour conclure, mon cher Watson, la limite c'est vraiment e, par manque d'humour sans doute. (S.H.).

A propos de l'exemple, nous pourrons procéder ainsi :

**1er cas : pas de touche $y^x$ sur la calculette**

Etudions la sous-suite :

$$v_n = (1 + \frac{1}{2^n})^{2^n}$$

Les premiers termes peuvent se calculer de la façon suivante :

* Calcul de $2^n$
  de tête
  ou à la machine avec facteur constant
  ou par des multiplications successives
  ou par récurrence en stockant $2^{n-1}$ en mémoire lors du calcul de $u_{n-1}$

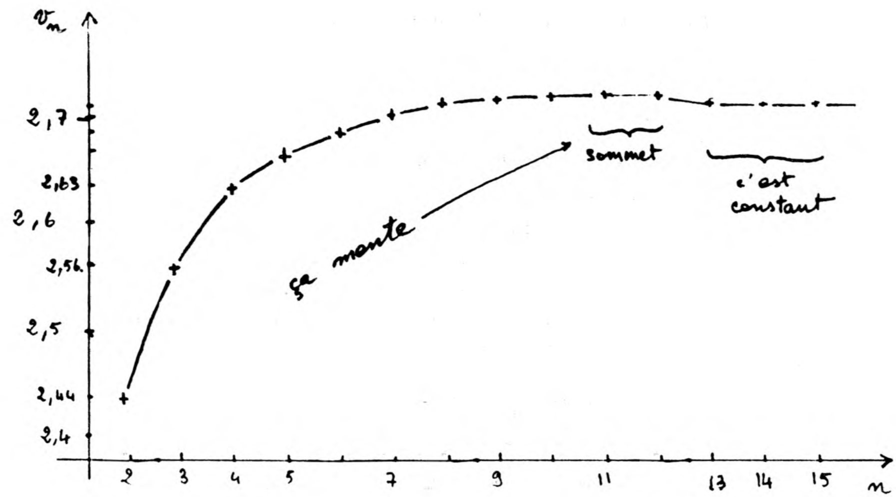
* Calcul de $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2^n}$.

* Calcul de $\alpha_n^{2^n}$ en affichant $\alpha_n$ et en appuyant n fois sur la touche $x^2$ ou en faisant n fois $\boxed{X}\,\boxed{=}$

Nous avons trouvé, avec une calculette tronquant les nombres au 8ème chiffre :

$v_0 \ = 1 \qquad\qquad\qquad = u_0$
$v_1 \ = 2{,}25 \qquad\qquad\quad = u_2$
$v_2 \ = 2{,}4414062 \qquad = u_4$
$v_3 \ = 2{,}5657843 \qquad = u_8$
$v_4 \ = 2{,}6379272 \qquad = u_{16}$
$v_5 \ = 2{,}6769858 \qquad = u_{32}$
$v_6 \ = 2{,}6973375 \qquad = u_{64}$
$v_7 \ = 2{,}7077238 \qquad = u_{128}$
$v_8 \ = 2{,}7129225 \qquad = u_{256}$
$v_9 \ = 2{,}7155295 \qquad = u_{512}$
$v_{10} = 2{,}7166763 \qquad = u_{1024}$
$v_{11} = 2{,}7169548 \qquad = u_{2048}$
$v_{12} = 2{,}7169548 \qquad = u_{4096}$
$v_{13} \quad 2{,}7158232 \qquad = u_{8192}$
$v_{14} \quad 2{,}7158232 \qquad = u_{16384}$
$v_{15} = 2{,}7158232 \qquad = u_{32762}$

$v_j$ croît pour $j$ variant de 1 à 12, puis décroît de 12 à 13 et devient stationnaire :



La précision de la machine et son mode de calcul expliquent la stationnarité de $v_{12}$ à $v_{15}$ ; à ce propos, vous pouvez selon votre personnalité, établir des conjectures à partir des quinze nombres donnés.

**2ème cas : on est riche, on a** $y^x$

Etudions alors la sous-suite :

$$w_n = (1 + \frac{1}{10^n})^{10^n}$$

Le calcul des premiers termes peut s'effectuer ainsi :

$$\underbrace{\boxed{1{,}00\ldots1}}_{k \text{ chiffres}}\ \boxed{y^x}\ \underbrace{\boxed{100\ldots0}}_{k+1 \text{ chiffre}}\ \boxed{=}$$

Ce qui donne :

| k | $w_k$ | $u_i$ correspondant |
|---|---|---|
| 0 | $w_0 = 1$ | $= u_0$ |
| 1 | $w_1 = 2{,}5937425$ | $= u_{10}$ |
| 2 | $w_2 = 2{,}7048138$ | $= u_{100}$ |
| 3 | $w_3 = 2{,}7169236$ | $= u_{1000}$ |
| 4 | $w_4 = 2{,}7181459$ | $= u_{10000}$ |
| 5 | $w_5 =$ | ⋮ |
| 6 | $w_6 = 2{,}7182818$ | etc (ca va vite) |
| 7 | $w_7 = 2{,}7182818$ | : |

On pourra démontrer que la limite cherchée est e, par des développements limités :

$$(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \operatorname{Log}(1 + \frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\epsilon\,(\frac{1}{n}))} = e \times e^{\epsilon(\frac{1}{n})}$$

$$\text{avec } \lim_{n \to \infty} \epsilon(\frac{1}{n}) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

2 - Autres extraites d'autres suites.

Etudions : $v_n = 2^n(t^{\frac{1}{2^n}} - 1)$ avec $t = 12$(1)

Toujours la même séparation : être ou ne pas être capable de faire $y^x$.

- 1er cas - sans $y^x$. On étudiera la suite extraite :

$$v_n = 2^n(t^{\frac{1}{2^n}} - 1)$$

* Touches * ———— * Commentaires * ———— * Une notation possible *

| | Touches | Commentaires | Une notation possible |
|---|---|---|---|
| | 12 | On affiche t | $a \leftarrow 12$ |
| n fois | $\sqrt{\ }$ | On calcule $t^{\frac{1}{2^n}}$ en appuyant n fois qur la touche $\sqrt{\ }$ | $i = 0$<br>**Tant que** $i < n$ **faire**<br>$i \leftarrow i + 1$<br>$a \leftarrow \sqrt{a}$<br>**Fin tant que** |
| | – | | |
| | 1 | On effectue $t^{\frac{1}{2^n}} - 1$ | $a \leftarrow a - 1$ |
| | = | | |
| n fois | × | | |
| | 2 | On multiplie l'affichage par $2^n$ | |
| | = | | |
| | | Lire et noter le résultat | Exercez-vous à décrire cette boucle comme la précédente. |

On obtient les résultats suivants (avec troncature au 8ème chiffre) :

(1) «Pourquoi 12 ?» «Pourquoi pas»

| p | $v_n$ | $= u_{2^n}$ |
|---|---|---|
| 1 | $v_1 = 4{,}9282032$ | $u_2$ |
| 2 | $v_2 = 3{,}4448388$ | $u_4$ |
| ⋮ | | ⋮ |
| 8 | $v_8 = 2{,}4969728$ | $u_{256}$ |
| 10 | $v_{10} = 2{,}487808$ | $u_{1024}$ |
| 12 | $v_{12} = 2{,}4850432$ | $u_{4096}$ |
| 13 | $v_{13} = 2{,}4838144$ | ⋮ |
| 14 | $v_{14} = 2{,}482176$ | etc |
| 15 | $v_{15} = 2{,}4768072$ | ⋮ |
| 20 | $v_{20} = 2{,}2020096$ | ⋮ |
| 23 | $v_{23} = 0{,}838608$ | $u_{8388608}$ |
| 24 | $v_{24} = 0$ | |

Certains auraient prévu qu'à partir d'un certain rang, la calculatrice afficherait 1 pour $t^{\frac{1}{2^n}}$, donc O pour $v_n$. Mais attention de ne pas être trop malin, ce tableau ne permet aucune conclusion.

• 2ème cas - avec $y^x$. Etudions $w_n = 10^n \left(t^{\frac{1}{10^n}} - 1\right)$.

| 12 | $y^x$ | $\underbrace{0{,}0...01}_{\text{n chiffres}}$ | = | − | 1 | = | × | $\underbrace{10...0}_{\text{n + 1 chiffres}}$ | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Si votre machine affiche 8 chiffres et travaille avec 11 chiffres, vous obtiendrez :

| n | $w_n$ |
|---|---|
| 1 | 2,8208885 |
| 2 | 2,5160377 |
| 3 | 2,4879952 |
| 4 | 2,485208 |
| 5 | 2,48491 |
| 6 | 2,4849 |
| 7 | 2,464 |

Avec une machine à affichage scientifique on peut continuer jusqu'à ce qu'elle affiche 0 c'est-à-dire que $t^{\frac{1}{2^n}}$ soit plus petit que $1 + 10^{-11}$ (*). L'optimiste béat peut conclure que, si la limite existe, elle peut valoir 2,4849. Mais il lui faut être plus béat qu'optimiste.

On peut, par contre, essayer de transposer la démarche précédente sur le plan théorique.

Nous avons particularisé certaines valeurs de n sous la forme $2^k$ ou $10^k$.

Généralisons pour chercher la limite, si elle existe, de

$$X(t^{\frac{1}{X}} - 1) \text{ lorsque } X \text{ tend vers } +\infty \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Ce qui revient au même : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{t^h - 1}{h}$

Soit f application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$f : x \longrightarrow a^x$$

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$ (Si vous devinez, vous avez gagné).

On a donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0) = \text{Log } a \qquad [f'(x) = \text{Log } a \times a^x]$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \text{Log } a$

Soit : $\lim\limits_{n \to +\infty} n(12^{\frac{1}{n}} - 1) = 2{,}4849067$

3 - Suites de la forme : $u_n = \dfrac{n!}{10^{kn}}$

Si la calculette a une touche n!, on peut calculer directement un terme $u_n$ pour $n \leqslant 69$ (pour $n \geqslant 70$, n! vaut plus de $10^{99}$ et ne peut être calculé par la touche considérée).

Sinon on peut calculer les termes de la suite les uns après les autres, par la formule de récurrence suivante :

$$u_1 = 10^{-k} \quad \forall n \geqslant 1 \quad u_{n+1} = \frac{n + 1}{10^k} u_n \quad (1)$$

*(*) La machine ne peut pas faire la somme de 2 nombres différents de* $10^{11}$ $\quad 1 + 10^{-11} = 1$

*(1) Il est prudent de mettre successivement en mémoire* $u_5$, ***puis*** $u_{10}$, *puis* $u_{15}$ *etc... afin de ne pas tout avoir à recommencer en cas d'erreur.*

Prenons par exemple k = 1. Le calcul à $10^{-5}$ près donne :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | = 0,1 | $u_{11}$ | = 0,00039 |
| $u_2$ | = 0,02 | $u_{12}$ | = 0,00048 |
| $u_3$ | = 0,006 | $u_{13}$ | = 0,00062 |
| $u_4$ | = 0,024 | $u_{14}$ | = 0,00087 |
| $u_5$ | = 0,012 | $u_{15}$ | = 0,00130 |
| $u_6$ | = 0,00072 | $u_{16}$ | = 0,00209 |
| $u_7$ | = 0,00050 | $u_{17}$ | = 0,00356 |
| $u_8$ | = 0,00040 | $u_{18}$ | = 0,00640 |
| $u_9$ | = 0,00036 | $u_{19}$ | = 0,01216 |
| $u_{10}$ | = 0,00036 | $u_{20}$ | = 0,02433 |

Les termes de la suite décroissent pour n croissant de 1 à 10, puis croissent et calculatrice en main, on se rend compte que la croissance sera illimitée, les termes $\frac{n+1}{10}$ étant de plus en plus grands. Et on montre, de fait, que : $\lim u_n = +\infty$.

Si nous avions pris k = 2, les termes de la suite décroissent jusqu'à n = 100 ; notre patience ne nous aurait pas permis de prévoir que la limite de la suite était $+\infty$.

4 - Suites en vrac.

Nous donnons ci-dessous quelques suites, des exemples de programme permettant d'en calculer des termes, et des résultats numériques obtenus.

a) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

Programme :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | STO | + | $\sqrt{\ }$ | = | $\sqrt{\ }$ | − | RCL | $\sqrt{\ }$ | = |

$u_{12345} = 0{,}49888$

$u_{3456789} = 0{,}499933$

b) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n + 1$

Programme :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | STO | + | $x^2$ | = | $\sqrt{\ }$ | − | RCL | + 1 | = |

$u_{123456} = 1{,}4999$

$u_{3456789} = 1{,}496$

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1}$

Programme

| n | 1/x | + | 1 | = | STO | $\sqrt{\ }$ | − | 1 | = | ÷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| ( | ( | RCL | $y^x$ | 3 | 1/x | ) | − | 1 | ) | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$u_{2468} = 1{,}5000522$

$u_{8976543} = 1{,}4864865$

d) $u_n = n^2(\text{tg}\,\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})$ angles en radian

Programme : mettre la calculette en mode radian

| n | STO | $x^2$ | X | ( | RCL | 1/x | tg | − | RCL | 1/x | SIN | ) | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$u_{3579} = 0{,}03898$

$u_{125} = 0{,}00400$

Ces limites de suites peuvent être envisagées comme des limites de fonctions :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x + 1$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\text{tg}\,x - \sin x}{x^2}$ x en radian

Si on a l'habitude des limites de ce genre, on sait que dans les cas a), b) et c) elles ne peuvent être que $+\infty$, $-\infty$ ou un rationnel, on peut dès lors être presque sûr que :

a) $\lim u_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim u_n = 1{,}5 = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim u_n = 1{,}5 = \dfrac{3}{2}$

ce qui se démontre ensuite avec les moyens dont on dispose («quantités conjuguées» ou développement limité de $(1+u)^{\alpha}$ lorsque u est petit).

Signalons que pour les cas envisagés, si on prend des valeurs très grandes pour n, par exemple $10^{20}$ on trouve :

. dans l'exemple a) $u_{10^{20}} = 0$ car la calculette ne pouvant additionner $10^{20}$ et $10^{10}$, elle néglige $10^{10}$ devant $10^{20}$.

dans l'exemple b) $u_{10^{20}} = 1$ : la calculette néglige $10^{20}$ devant $10^{40}$.

dans l'exemple c) $u_{10^{20}}$ = message d'erreur, la calculette néglige $10^{-20}$ devant 1 et «trouve» pour $u_{10^{20}}$ : $\frac{0}{0}$

L'affichage scientifique nous emmène dans des mauvaises voies. Ici, le mieux est l'ennemi du bien.

Pour le cas d), si x est petit : $\sin x < \operatorname{tg} x$ ; donc la limite existe et est nécessairement positive.

Les résultats trouvés sembleraient indiquer que la limite vaut 0 : il est plus prudent de le vérifier !

Signalons que dans ce cas, aussi, si l'on prend des valeurs trop grandes pour n, $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ et $\sin\frac{1}{n}$ auront même valeur arrondie à $10^{-8}$ près. On trouvera alors $u_n = 0$ et si on en déduit que la limite est 0, le hasard seul voudra que cela soit vrai.

En effet si on étudie d'une façon analogue les suites de terme général

* $n \times u_n$
* $n^2 \times u_n$

on trouve également $u_n = 0$, or ces suites ont pour limites respectives $\frac{1}{2}$ et $+\infty$. On peut parodier les anciens adages : «Méfies-toi et la calculette t'aidera».

## EXEMPLES DE SUITES RECURRENTES.

Il s'agit de suites dont le n-ième terme est donné par une fonction des termes précédents, le cas le plus simple étant :

$\forall n \geqslant 0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ u_0 = a$

Exemple 1 : $u_{n+1} = \sqrt{5 \times u_n} \quad u_0 = 1$

Avec une calculette munie du facteur constant, le calcul des termes est particulièrement facile :

| n° de ligne | Touche | Commentaires |
|---|---|---|
| 1 | 5 | On met 5 en facteur constant **multiplicatif** |
| 2 | × | |
| 3 | K | |
| 4 | 1 | On initialise avec $u_0$. La flèche signifie : (après avoir terminé la ligne 6, revenir à la ligne 5, ceci n fois). |
| n fois → 5 | = | |
| 6 | $\sqrt{\phantom{x}}$ | LIRE $u_1$ puis $u_2$, ..., puis $u_n$ |
| 7 | OFF | fin du programme |

On trouve les résultats suivants, notés avec quatre chiffres exacts : (les calculs étant faits à $10^{-10}$ près) :

| n | $u_n$ | n | $u_n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2,236 | 11 | 4,996 |
| 2 | 3,343 | 12 | 4,998 |
| 3 | 4,088 | 13 | 4,999 |
| 4 | 4,521 | ⋮ | |
| 5 | 4,754 | ⋮ | |
| 6 | 4,875 | 28 | 5 |
| 7 | 4,937 | 29 | 5 |
| 8 | 4,968 | 30 | 5 |
| 9 | 4,984 | | |
| 10 | 4,992 | | |

La calculette donne non seulement le résultat, mais une méthode de démonstration ; il faudra* :

a) – montrer que : $\forall n \geqslant 1 \quad 2 \leqslant u_n \leqslant 5$

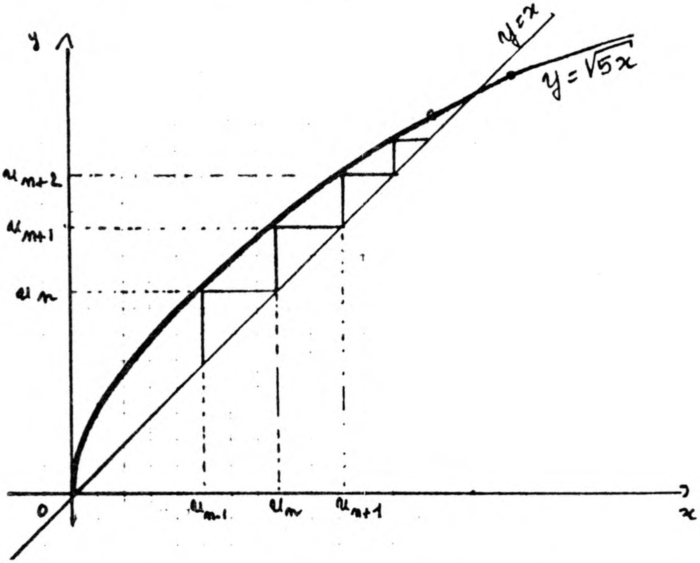
b) – montrer que la suite $u_n$ est croissante

c) – montrer que la limite, si elle existe, vaut 0 ou 5.

Les points a) et b) assurent l'existence d'une limite entre 2 et 5. Avec c) on conclue alors facilement.

*Rappeler le contenu de mémoire «Suite bornée croissante».*

Le graphique ci-dessous illustre le mode de convergence de cette suite (on dit qu'il y a convergence en escalier).




Convergence de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \longrightarrow \sqrt{5x}$

Exemple 2 : $u_{n+1} = 2 - (u_n - 2)^3$ $\qquad u_0 = 1{,}25$

Suivant la calculette dont on dispose, le calcul de $(u_n - 2)^3$ se fera différemment après l'affichage de $u_n - 2$ :

| X | X | − | 2 | = | +/− |
|---|---|---|---|---|---|

: calculette avec facteur constant multiplicatif

ou

| X | K | = | = | = | +/− | + | 2 | = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

: calculette avec touche de facteur constant

ou

| $Y^x$ | 3 | = | +/− | + | 2 | = |
|---|---|---|---|---|---|---|

: calculette avec touche $y^x$, «acceptant» de calculer le cube d'un nombre négatif

Nous donnons ci-dessous des valeurs de $u_n$ avec une calculette qui tronque les résultats au 8ème chiffre

| n | $u_n$ |
|---|---|
| 1 | 2,421875 |
| 2 | 1,9249154 |
| 3 | 2,0004232 |
| 4 | 2 |

Lorsqu'on obtient 2, le calcul des termes suivants donnera toujours 2 puisque : $2 = 2 - (2 - 2)^3$.

Ici, la précision de la calculette «fait converger» la suite beaucoup plus vite que la réalité. Avec une calculette ayant une précision de $10^{-11}$, on obtient aussi 2, mais après avoir oscillé plus longtemps.

En fait, dans ce cas, la démonstration est simple en utilisant la suite de terme général $v_n$, avec

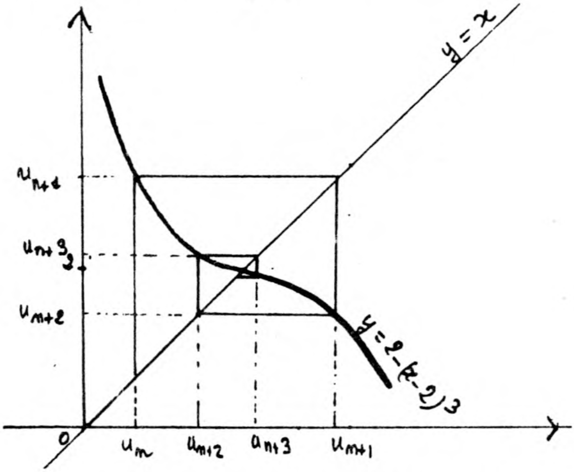
$$v_n = u_{n-2} \qquad \text{d'où} \qquad v_{n+1} = v_n^3 \qquad v_0 = -0{,}75$$

$$v_{n+1} = v_{n-1}^{3\times 3} = v_{n-4}^{3^3} \dots = v_0^{3^{n+1}}$$

soit, comme $|v_0|$ est plus petit que 1 :

$$\lim v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim u_n = 2.$$

La convergence de $u_n$ est illustrée sur le graphique ci-dessous (on dit qu'il y a convergence en «colimaçon»).




Convergence de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \longrightarrow 2 - (x - 2)^3$.

Toutes les suites récurrentes ne convergent pas, bien sûr ! On pourra le constater en traitant les exemples ci-dessous :

Exemple 3 : $u_{n+1} = 5_n^2$ $\qquad u_0 = 0.6$

(divergence «en escalier»)

Exemple 4 : $u_{n+1} = 2 - (u_n - 2)^3$ $\qquad u_0 = 6$

(divergence «en colimaçon)

On peut aussi étudier des cas plus compliqués :

Exemple 5 : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}$ $\qquad u_0 = u_1 = 1$

Le programme permettant de calculer les termes d'une telle suite varie suivant les modèles de calculettes et chercher un tel programme n'est pas intéressant...

Lorsque la calculette dispose d'une touche permettant d'additionner l'affichage à la mémoire (M+ ou SUM) et d'une autre permettant l'échange de la mémoire et de l'affichage, on peut trouver des programmes simples :

| n° de ligne | Touche | Commentaires | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | On initialise | |
| 2 | STO | | |
| → 3 | SUM | | faire n fois la boucle. |
| 4 | EXC | Lire $u_k$ | |
| 5 | $\sqrt{\ }$ | | |
| 6 | OFF | fin du programme | |

Le calcul des termes de la suite indique la valeur de la limite et la démonstration que l'on peut faire :

– démontrer que : $\forall n \geqslant 2 \qquad 2 \leqslant u_n \leqslant 4$

– démontrer que la suite $u_n$ est croissante

– démontrer que la limite, si elle existe, vaut 0 ou 2.

On pourra de plus, en faisant varier $u_0$ et $u_1$ constater qu'il y a toujours une limite, qui vaut 0 ou 2 la suite étant toujours monotone.

**Suites, calculettes et mathématiques**

En conclusion de ces petits travaux sur les suites, on peut remarquer la dualité qui existe entre les calculs de termes $u_n$ à la machine et les démonstrations mathématiques. C'est, à notre avis, un élément devant permettre de renouveler l'enseignement de cette partie du «cours de maths».

**EN SERIE.**

**Une série classique**

1) Nous nous sommes penchés sur la série de terme général $u_n$, où :

$$u_n = \frac{1}{n^3} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cherchons d'abord expérimentalement ce qui se passe, en calculant simultanément les termes $u_n$ et leur somme, avec des programmes du type suivant :

| 3 | +/– | $y^x$ | K | … | k | = | SUM | RCL | … | OFF |

Calculette avec facteur constant exponentiel

lire $u_k$     lire $S_k$

ou

| 1 | … | k | $\times$ | $X^2$ | = | 1/X | SUM | RCL | … | OFF |

Calculette sans facteur constant exponentiel

initialisation     boucles des programmes     fin

Nous avons obtenu la feuille de résultats ci-dessous :

| k | $u_k$ | $S_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0.125 | 1.125 |
| 3 | 0.037037 | 1.162037 |
| 4 | 0.015625 | 1.177662 |
| 5 | 0.008 | 1.185662 |
| 6 | 0.0046296 | 1.1902916 |
| 7 | 0.0029154 | 1.1932070 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

2) Mais si on s'intéresse à :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Comment évaluer les différentes erreurs que nous avons commises en calculant $S_n$ à la place de S.

Nous avons fait des erreurs :

- de troncature
- de sommation
- d'arrondi.

**a) Erreur de troncature.**

Cette erreur provient des termes «oubliés» de la somme infinie.

$$S = S_n + R_n$$

avec

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Classiquement, $R_n$ est borné par les intégrales :

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

et : $$\int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2} \qquad \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2(n+1)^3}$$

donc : $$\frac{1}{2(n+1)^3} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^3}$$

**b) Erreur de sommation.**

Il s'agit de la somme des erreurs faites sur chacun des termes de la série. Dans un premier temps l'erreur sur chaque terme est majorée par $10^{-7}$. Sur n termes nous avons une erreur $\varepsilon_S$ :

$$\varepsilon_S \leqslant n \cdot 10^{-7}$$

On remarque que cette majoration est très forte (certains termes sont connus exactement, $\frac{1}{5^3}$ par exemple).

**c) Erreur d'arrondi.**

C'est l'erreur faite en arrondissant le résultat final ; on peut la fixer dans des limites correspondantes à la précision cherchée. Pour simplifier notre étude suposons que cette dernière erreur est nulle.

L'erreur totale est majorée par :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2n^2} + n \cdot 10^{-7}$$

Ou encore $\mathcal{E}_M = f(n)$

avec $f(n) = \dfrac{1}{2n^2} + n \cdot 10^{-7}$

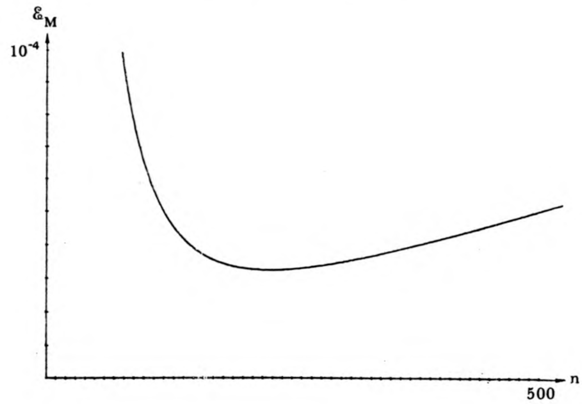
On peut étudier cette fonction :

$$f'(n) = \frac{-1}{n^3} + 10^{-7}$$

$f'(n) < 0$ si $n \leqslant 215$

$f'(n) > 0$ si $n \geqslant 216$

Nous obtenons une courbe de majoration de l'erreur.




On ne peut descendre en dessous du seuil :

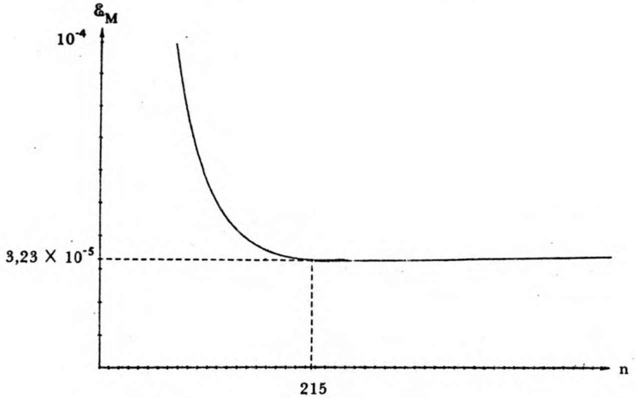
$$\mathcal{E} = f(215) \simeq 3{,}23 \times 10^{-5}$$

Il faut remarquer qu'à partir de 216 les $u_k$ sont inférieurs à $10^{-7}$ c'est-à-dire qu'ils sont remplacés par 0 sur la machine. L'erreur est donc majorée par :

l'erreur de troncature : $\dfrac{1}{2 \times 216^2} = 107 \times 10^{-7}$

augmentée de l'erreur de sommation sur les termes déjà calculés : $216 \times 10^{-7}$.

Nous remplaçons alors la courbe précédente par :




3) Série «améliorée».

Nous avons vu que : $\dfrac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$

En ajoutant une partie de $R_n$ à $S_n$, on améliore le procédé de calcul de S. Pour cela, posons :

$$T_n = S_n + \frac{1}{2(n+1)^2}$$

On a : $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$

$R'_n = S - T_n \qquad\qquad 0 \leqslant R'_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2(n+1)^2}$

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \leqslant \frac{2(n+1)}{2n^2(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^3}$$

Les erreurs dues au calcul des termes $1/n^3$ étant négligeables, pour avoir S à $10^{-4}$ près :

– si on calcule $S_n$ : $\dfrac{1}{2n^2} \leqslant 10^{-4}$ prendre $n \geqslant 71$

– si on calcule $T_n$ : $\dfrac{1}{n^3} \leqslant 10^{-4}$ prendre $n \geqslant 22$

De même, pour calculer S à $10^{-6}$ près avec une calculette travaillant avec 13 chiffres, il faudrait calculer $S_{708}$ ou $T_{100}$.

**Séries de Riemann**

Ce sont des séries dont le terme général vaut $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha$ étant un entier positif.

Pour $\alpha = 1$, cette série diverge, mais cela se voit avec une calculette, jusqu'à partir d'un certain rang, tous les termes seront négligés par la machine.

Pour $\alpha > 1$, ces éries convergent ; pour améliorer le calcul de la somme, on a toujours intérêt à calculer :

$$T_n = \sum_1^n \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(\alpha - 1)\,(n + 1)^{\alpha - 1}}$$

La convergence est d'autant plus rapide que $\alpha$ est grand. Mais si la calculette n'a pas de touche $y^x$, cela devient vite fastidieux et malsain de calculer les sommes $S_n$ out $T_n$.

**Calcul de** e.

Nous savons que : $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

1) Varions nos préoccupations et essayons de calculer les 15 premiers chiffres significatifs de cette constante :

Sans dissimuler les problèmes relatifs aux erreurs : erreur de troncature (on arrête la série à un certain rang) et erreur d'arrondi (chaque terme calculé est arrondi) nous n'abordons ici que la technique de calcul.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | 1 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| 4 | | | 4 | 1 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| 5 | | | | 8 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | | | | 1 | 3 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| 7 | | | | | 1 | 9 | 8 | 4 | 1 | 2 | 6 | 9 | 8 | 4 | 1 | 2 | 7 | 0 |
| 8 | | | | | | 2 | 4 | 8 | 0 | 1 | 5 | 8 | 7 | 3 | 0 | 1 | 5 | 9 |
| 9 | | | | | | | 2 | 7 | 5 | 5 | 7 | 3 | 1 | 9 | 2 | 2 | 3 | 5 |
| 10 | | | | | | | | 2 | 7 | 5 | 5 | 7 | 3 | 1 | 9 | 2 | 2 | 4 |
| 11 | | | | | | | | | 2 | 5 | 0 | 5 | 2 | 1 | 0 | 8 | 3 | 4 |
| 12 | | | | | | | | | | 2 | 0 | 8 | 7 | 6 | 7 | 5 | 7 | 0 |
| 13 | | | | | | | | | | | 1 | 6 | 0 | 5 | 9 | 0 | 4 | 4 |
| 14 | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 4 | 7 | 0 | 7 | 5 |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | 7 | 6 | 4 | 7 | 2 |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | 4 | 7 | 7 | 9 |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | 2 | 8 | 1 |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 6 |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 2 , | 7 | 1 | 8 | 2 | 8 | 1 | 8 | 2 | 8 | 4 | 5 | 9 | 0 | 4 | 5 | 1 | 6 |

**L'arrondi est fait de façon classiqu à $5.10^{-18}$ près.**

**Chaque ligne est obtenue en divisa la précédente par n.**

**L'addition est fai par tranches de 7 chiffres.**

**2) Majoration du reste.**

Posons : $R_n = \sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k\,!}$.

On a :

$$\frac{1}{(n+1)\,!} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(n+1)\,!} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}.$$

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}.$$

$$\frac{n+1}{n(n+1)\,!} = \frac{1}{n\,n\,!}.$$

$$\frac{1}{(n+1)\,!} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n\,n\,!}.$$

Le tableau suivant permettra de se situer si on désire calculer e par ce procédé :

| n | $\frac{1}{(n+1)\,!}$ | $\frac{1}{n \times n\,!}$ |
|---|---|---|
| 5 | $1{,}3 \times 10^{-2}$ | $1{,}7 \times 10^{-3}$ |
| 6 | $1{,}2 \times 10^{-4}$ | $2{,}3 \times 10^{-4}$ |
| 7 | $2{,}4 \times 10^{-5}$ | $2{,}8 \times 10^{-5}$ |
| 8 | $2{,}8 \times 10^{-6}$ | $3{,}1 \times 10^{-6}$ |
| 9 | $2{,}76 \times 10^{-7}$ | $3{,}01 \times 10^{-7}$ |
| 10 | $2{,}50 \times 10^{-8}$ | $2{,}75 \times 10^{-8}$ |
| 15 | $4{,}7 \times 10^{-14}$ | $5{,}1 \times 10^{-14}$ |
| 20 | $1{,}96 \times 10^{-20}$ | $2{,}05 \times 10^{-20}$ |

Avec une calculette ayant une touche x !, en effectuant 10 fois la séquence suivante, on aura e à $10^{-8}$ près en mémoire :

| k | x ! | 1/X | SUM |
|---|---|---|---|

On introduira successivement k = 1, 2, ..., 10.

# CALCULS D'ERREURS

*Un calcul d'erreurs n'est jamais un calcul de l'erreur exacte, mais une recherche de la majoration des erreurs commises : si on connaissait l'erreur exactement commise, on connaitrait le résultat exact sans erreurs.*

*Enver Pacha*

## UN PHENOMENE D'ACCUMULATION D'ERREURS.

Considérons la suite définie par :

$x_1 = \frac{1}{3} : \forall n \geqslant 1 \quad x_{n+1} = 1000x_n - 333.$

Calculons les termes de cette suite avec une calculette travaillant sur 11 chiffres, affichant 8 chiffres :

| n | $x_n$ |
|---|---|
| 1 | .33333333 |
| 2 | 0.3333333 |
| 3 | 0.3333 |
| 4 | 0.3 |
| 5 | - 33 |
| 6 | -.33333 |
| 7 | - 33333333 |

Cette suite semble diminuer très vite et on pourrait s'engager à parier que la limite vaut $-\infty$. Si l'enjeu du pari est gros, il vaut mieux ne pas le faire car :

$$x_2 = \frac{1000 - 999}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1000 - 999}{3} = \frac{1}{3}$$

etc... $x_n = \frac{1}{3}$.

La suite est stationnaire et vaut toujours 1/3 !

Devant cet exemple consternant, on peut revendre sa calculette ou faire un calcul d'erreur qui expliquerait cette défaillance ; pour les lecteurs choisissant la seconde solution :

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| erreur sur le calcul de $x_n$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-12}$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-8}$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-5}$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-2}$ | $3{,}33\ldots\ 10$ | $3{,}33\ldots\ 10^{4}$ |
| erreur sur l'affichage de $x_n$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-9}$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-9}$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-5}$ | $3{,}33\ldots\ 10^{-2}$ | $3{,}33\ldots\ 10$ | $3{,}33\ldots\ 10^{4}$ |

On voit donc que l'erreur sur le calcul de $x_n$ est, pour $n \geqslant 6$ : $3{,}33\ldots\ 10^{4+3(n-6)}$.

Cet exemple est caricatural, mais néanmoins, pour les calculs en chaine, il faut se méfier.

## ERREUR SUR LE CALCUL D'UN PRODUIT ; LA MULTIPLICATION EST-ELLE ASSOCIATIVE ?

Nous voulons calculer le produit abc, où :

$a = 30{,}004\ 567$ ; $b = 45\ 678{,}999$ ; $c = 30{,}045\ 678$.

Une calculette travaillant et affichant 8 chiffres (sans arrondi, donc par défaut) donne les résultats suivants :

$b \times a = 1\ 370\ 578{,}5$ $\qquad$ $(ba)c = 411\ 799\ 60$

$a \times c = 901{,}507\ 55$ $\qquad$ $b(ac) = 411\ 799\ 62$.

Est-il normal de ne pas trouver les mêmes résultats ? Deux explications sont possibles :

1. la multiplication n'est pas associative ;
2. les «erreurs» de calculs sont la cause de tout.

Examinons des (majorations d')erreurs :

* erreur sur ba : $10^{-1}$

  erreur sur (ba)c : $c \times 10^{-1} + 1 \simeq 4$

on calcule en fait $(ab + \epsilon)$, avec une erreur majorée par 1 sur ce calcul. Donc l'erreur est majorée par $c \times 10^{-1} + 1$, puisque $\epsilon$ est majorée par $10^{-1}$.

* erreur sur ac : $10^{-5}$

  erreur sur b × (ac) : $b \times 10^{-5} + 1 \simeq 1{,}45$

on calcule $(ac + \epsilon') \times b$, avec une erreur majorée par 1 sur ce calcul. Donc l'erreur total est majorée par $b \times 10^{-5} + 1$.

Si on veut calculer $a'$, $b'$, $c'$, avec :

$$a' = \frac{a}{10} \quad ; \quad b' = \frac{b}{10^4} \quad ; \quad c' = \frac{c}{10}$$

on trouvera de même $(ba)c = 41{,}179\,96$

$b(ac) = 41{,}179\,963$

et les erreurs seront sur $(ba)c : 4 \times 10^{-6}$

$(ac)b : 1{,}4 \times 10^{-6}$.

Il n'est donc pas anormal de trouver des résultats différents (il ne s'agit pas ici d'une infidélité de votre calculette ou de théories mathématiques à reprendre à la base !).

Nous pouvons nous poser la question suivante : existe-t-il un ordre privilégié qui minimise l'erreur ?

Le lecteur pourra démontrer, où se convaincre sur les exemples ci-dessus, qu'il suffit d'envisager le cas où la partie entière des nombres est comprise entre 1 et 9.

De l'exemple précédent, on pourrait déduire qu'il faut multiplier les nombres par ordre croissant, afin d'avoir une précision optimale. Il n'en est rien, comme le montre le calcul ci-dessous :

$a = 1{,}000\,99 \quad ; \quad b = 1{,}888\,88 \quad ; \quad c = 3{,}998\,88.$

| produit de 2 termes : $P_1$ | erreur sur $P_1$ | produit de 3 termes : $P_2$ | erreur sur $P_2$ |
|---|---|---|---|
| $ab = 1{,}890\,749\,9$ | $10^{-7}$ | $abc = 7{,}560\,881\,9$ | $c \times 10^{-7} + 10^{-7} \simeq 4 \times 10^{-7}$ |
| $ac = 4{,}002\,838\,8$ | $10^{-7}$ | $acb = 7{,}560\,882\,1$ | $b \times 10^{-7} + 10^{-7} \simeq 3 \times 10^{-7}$ |
| $bc = 7{,}553\,404\,4$ | $10^{-7}$ | $cba = 7{,}560\,882\,2$ | $a \times 10^{-7} + 10^{-7} \simeq 2 \times 10^{-7}$ |

Nous laissons au lecteur le soin de trouver des règles par généralisation de ces cas particuliers : elles sont complexes et par la-même ne nous paraissent pas indispensables. La seule règle simple est de faire d'abord, les calculs qui se font exactement avec une calculette. Ainsi, dans le produit suivant, on calculera : 12,7 × 3,49 × 5,46, puis on terminera le calcul :

11,289 543 × 12,7 × 6,879 542 1 × 3,49 × 5,46.

## RESTE D'UNE DIVISION.

Nous savons calculer le reste de la division d'un entier a par un entier b*.

On pourrait être tenté, sur certaines calculettes, de faire un programme qui évite d'avoir à introduire deux fois le nombre b dans la machine, ce qui donne une séquence analogue à celle-ci, que nous écrivons pour : a = 4847587, b = 124297.

| touche | affichage | commentaires |
|---|---|---|
| 4847587 | 4847587 | on introduit a |
| ÷ | 4848587 | |
| 124297 | 124297 | on introduit b |
| STO | 124297 | on met b en mémoire |
| = | 39.000032 | on lit la partie entière de l'affichage : q = 39 |
| – | 39.000032 | |
| 39 | 39 | on introduit q |
| = | .00003218 | la valeur de l'affichage est : $\frac{a}{b} - q$ |
| × | .00003218 | |
| RCL | 124297 | |
| = | 3.9998775 | la valeur de l'affichage est $(\frac{a}{b} - q) \times b$ |

Pour ceux qui sont très persuadés que le reste de la division de a par b est, par définition, un entier et que : $(\frac{a}{b} - q) \times b = a - bq = r$, il n'y a aucun problème à conclure : r = 4.

Une fois de plus, tentons de donner à la calculette des circonstances atténuantes pour cette légère aberration quant au reste trouvé.

* Voir Matchinettes 1.

Le nombre $\frac{a}{b} - q$ est, dans cet exemple, calculé à $10^{-8}$ près. Donc l'erreur sur le résultat final est majorée par :

$$\epsilon = b \times 10^{-8} + \underbrace{5 \times 10^{-8}}_{\substack{\text{erreur d'arrondi} \\ \text{du dernier chiffre} \\ \text{affiché}}}$$

$$\epsilon \simeq 1{,}2 \times 10^{-3}$$

Tout s'explique...

## ET LA DISTRIBUTIVITE ?

Voici un autre cas du même phénomène de «non-distributivité de la multiplication par rapport à l'addition» pour les calculs-machines.

Soit à calculer : (a(b - c), avec

$a = 1789$ ; $b = \sqrt{1{,}00015}$ ; $c = \sqrt{1{,}0027}$.

On trouve $a \times (b - c) = -2{,}2793649$

$ab - ac = -2{,}2794000$

avec une machine affichant 8 chiffres.

Un calcul d'erreur donne la même majoration d'erreur dans les deux cas, soit :

$$2a \times 10^{-7} + 10^{-7} \simeq 5 \times 10^{-7}.$$

Pour pouvoir décider lequel des deux résultats ci-dessus est le meilleur, il faudrait connaître des majorations plus fines des erreurs commises dans chaque cas ; mais les calculs que cela occasionne sont trop compliqués pour l'intérêt que cela présente.

## FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES.

Les calculettes utilisent, pour calculer les valeurs des fonctions trigonométriques, des polynômes $P_1$, $P_2$, $P_3$ tels que :

— $P_1$ tel que : $\forall x \in [0{,}360] \quad |P_1(x) - \sin x| \leqslant 10^{-13}$

— $P_2$ tel que : $\forall x \in [0{,}360] \quad |P_2(x) - \cos x| \leqslant 10^{-13}$

— $P_3$ tel que : $\forall x \in [0{,}360] \quad |P_3(x) - \operatorname{tg} x| \leqslant 10^{-13}$

les angles étant exprimés en degrés.

De plus ces polynômes vérifient :

$P_1(x) = \sin x$ pour $x \in [0,360]$,

$P_2(x) = \cos x$ pour $x \equiv 0, \mod 30$ (ou 45, 60, 90),

de même

$P_3(x) = \operatorname{tg} x$ pour $x \in [0,360]$, $x \neq 90$ et $x \equiv 0, \mod 30$ (ou, 45, 60, 90).

$P_3(90)$ donne à l'affichage un message d'erreur pour un angle x qui n'appartient pas à cet intervalle, la précision peut-être moins bonne si la calculette n'utilise pas le reste r de la division de x par 360 (on a alors : $\sin x \simeq P_1(r)$, $\cos x \simeq P_2(r)$, $\operatorname{tg} x \simeq P_3(2)$. Comme les polynômes ne sont jamais des fonctions périodiques, on peut avoir quelques surprises, par exemple :

$\sin 36\,000\,000 = 0{,}000\,002$

$\cos 36 \times 10^{20} = 0{,}936\,304\,37$.

Les calculs en mode radian, sur $[0,2\pi]$, seront moins précis, la valeur de $\pi$ utilisée pour transformer les angles en degrés étant nécessairement approchée. Le tableau suivant est un exemple de ce qui peut se trouver avec une calculette.

| | | |
|---|---|---|
| $\sin 0 = 0$ | $\cos 0 = 1$ | $\operatorname{tg} 0 = 0$ |
| $(\sin \frac{\pi}{4})^2 = 0.5$ | $(\cos \frac{\pi}{4})^2 = 0.5$ | $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ |
| $\sin \frac{\pi}{6} = 0.5$ | $(\cos \frac{\pi}{6})^2 = 0.75$ | $(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6})^{-2} = 3$ |
| $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ | $\cos \frac{\pi}{2} = 5.4 \times 10^{-10}$ | $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = 1.8 \times 10^9$ |
| $(\sin \frac{2\pi}{3})^2 = .75000001$ | $\cos \frac{2\pi}{3} = -0.5$ | $(\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3})^2 = 3$ |
| $(\sin \frac{5\pi}{6})^2 = .50000001$ | $(\cos \frac{5\pi}{6})^2 = 0.75$ | $(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6})^{-2} = 2.9999999$ |
| $\sin \pi = 4.7 \times 10^{-9}$ | $\cos \pi = -1$ | $\operatorname{tg} \pi = 5.1 \times 10^{-9}$ |

CALCULS FAITS EN MODE RADIAN

Errare calculatum est !

# POST FACE

*Il est difficile de finir un travail, mais, si les élèves ne terminent pas toujours leurs calculs, on termine bien les Matchinettes.*