

J E U *

TICTACTOE.

L'astuce consiste à voir que la stratégie du jeu du "quinze" est mathématiquement équivalente à celle du tictactoe. Curieusement, on établit cette équivalence par l'intermédiaire du Lo-shu, le fameux carré magique 3×3 découvert en Chine ancienne.

Afin de mieux apprécier l'élégance de ce carré magique, dressons la liste de toutes les combinaisons de trois chiffres distincts (compris entre 1 et 9) dont la somme est 15. Il en existe huit :

$$1 + 5 + 9 = 15$$

$$1 + 6 + 8 = 15$$

$$2 + 4 + 9 = 15$$

$$2 + 5 + 8 = 15$$

$$2 + 6 + 7 = 15$$

$$3 + 4 + 8 = 15$$

$$3 + 5 + 7 = 15$$

$$4 + 5 + 6 = 15$$

Examinons à présent l'unique carré magique 3 fois 3 :

$$\begin{array}{ccc} 2 & 9 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 7 & 5 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 8 \end{array}$$

* – "TICTACTOE" - "HAHA" OU L'ECLAIR DE LA COMPREHENSION MATHEMATIQUE. Bibliothèque scientifique POUR LA SCIENCE. Copyright SCIENTIFIC AMERICAN et POUR LA SCIENCE. Août 1979. Tous droits réservés.

Ce carré comprend huit ensembles de trois cases alignées : les trois rangées, les trois colonnes et les deux diagonales principales. Nous remarquons que ces huit ensembles de trois chiffres correspondent aux huit triades dont la somme est 15. Il en résulte que chaque triade gagnante du jeu est représentée, dans le carré magique, soit par une rangée, soit par une colonne, soit par une diagonale.

Par conséquent, chaque partie du jeu est équivalente à une partie de tictactoe jouée sur le carré magique (le tictactoe se joue sur un rectangle 3×3 ; le premier qui aligne trois de ses symboles a gagné). Le forain a dessiné le Lo-shu sur une carte (placée de telle manière que lui seul peut y jeter un coup d'œil). Certes il ne dispose que d'un seul modèle de Lo-shu, mais il peut par rotation l'amener dans quatre positions distinctes, dont les symétriques constituent encore quatre autres formes. Ces huit formes du Lo-shu sont les clés secrètes de son jeu. Au fur et à mesure que le jeu du quinze progresse, le présentateur joue mentalement, sur la carte cochée, la partie correspondante de tictactoe. S'il joue correctement, il ne peut pas perdre.

Evidemment, si les deux protagonistes jouaient parfaitement au tictactoe, la partie serait indécise. Mais les clients du forain partent avec un énorme handicap, puisqu'ils ne se rendent pas compte qu'ils jouent au tictactoe. Le forain tend des pièges qui lui permettent d'arriver à des positions gagnantes.

Pour bien comprendre, figurons la partie jouée avec la dame. Quoique le forain ne jouât qu'en second, il pouvait dès le sixième coup poser un piège rendant sa victoire certaine au 8e coup, indépendamment du jeu de la dame au 7e coup. Quand on sait jouer au tictactoe, on peut, avec le carré magique, être imbattable au 15.

<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>				x						<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>o</td></tr></table>				x					o
x																			
x																			
		o																	
<table><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>o</td></tr></table>	x			x					o	<table><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>o</td><td></td><td>o</td></tr></table>	x			x			o		o
x																			
x																			
		o																	
x																			
x																			
o		o																	
<table><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>o</td><td>x</td><td>o</td></tr></table>	x			x			o	x	o	<table><tr><td>x</td><td></td><td>o</td></tr><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>o</td><td>x</td><td>o</td></tr></table>	x		o	x			o	x	o
x																			
x																			
o	x	o																	
x		o																	
x																			
o	x	o																	

x		o
x	x	
o	x	o

x		o
x	x	o
o	x	o

L'isomorphisme (équivalence mathématique) est une des notions fondamentales des mathématiques. Très souvent, on peut résoudre un problème en le transformant en un autre qui lui est isomorphe et qui a déjà été résolu.

Plus les mathématiques deviennent complexes, plus elles tendent à s'unifier (et à se simplifier) par l'introduction de nouveaux isomorphismes.. Ainsi par exemple, en 1976, la démonstration du fameux théorème des quatre couleurs prouva simultanément des douzaines d'autres conjectures mathématiques isomorphes à ce théorème.

Le jeu suivant nous aidera à approfondir davantage la notion d'isomorphisme. Soient les neuf mots :

HONTE
TANTE
TIGE
OR
ARCHE
IRIS
OUEST
SALE
HISTOIRE

Deux joueurs barrent à tour de rôle un mot. Le but est de rayer trois mots ayant une lettre en commun. Il faut généralement une longue pratique de ce jeu pour s'apercevoir qu'on joue simplement à tictactoe. L'isomorphisme est mis en évidence lorsqu'on inscrit les mots dans les cases d'un tableau de tictactoe, comme indiqué sur la figure 2. Un examen minutieux révèle que chaque triade de mots ayant une lettre commune est disposée en ligne droite — horizontalement, verticalement ou diagonalement. Ce principe du jeu est donc le même que celui du tictactoe ou du "quinze".

HONTE	OR	OUEST
TANTE	ARCHE	SALE
TIGE	IRIS	HISTOIRE

Imaginez d'autres ensembles de neuf mots pouvant être utilisés pour ce jeu. Les mots ne sont pas nécessairement français, bien sûr. Et même, pourquoi ne pas utiliser des ensembles de symboles comme celui-ci ?

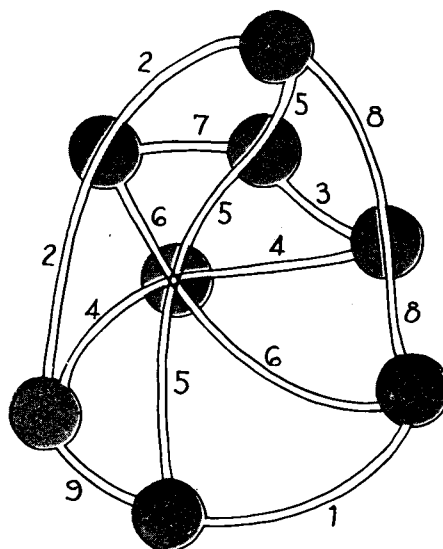
$\square$	+	∇
$\star$ +	$\star$	$\star$ $\triangle$
$\zeta\zeta$ $\square$	+ $\triangle$ $\zeta\zeta$ $\circ$	$\zeta\zeta$ ∇
$\triangle$	$\div$	∇
$\div$ $\square$	+	$\div$ +

La meilleure façon de jouer à tous ces jeux est d'inscrire les chiffres, mots ou symboles sur neuf cartes blanches. Les cartes sont étalées, faces en dessus, sur une table ; deux joueurs tirent à tour de rôle une carte jusqu'à la victoire d'un des deux.

Si vous avez bien compris l'isomorphisme de tous ces jeux, vous n'aurez pas de problème avec le jeu suivant.

Soit la carte routière de la figure 4. Huit villes sont reliées entre elles par des routes. Chacun des deux joueurs dispose d'un crayon de couleur différente. Ils colorient à tour de rôle la longueur totale d'une route.

Le premier à colorier trois routes entrant dans une même ville a gagné. A première vue ce jeu ne semble pas avoir de rapport avec les jeux précédents. En fait, une analyse minutieuse montre qu'il est isomorphe à un jeu de tictactoe joué sur le carré magique 3×3 . En effet, numérotions les routes de la manière indiquée sur la figure 4. Chaque tracé correspond à une case numérotée du carré magique de Lo-shu ; chaque ville correspond à trois cases alignées dans ce carré magique. Toute personne sachant jouer à trictactoe jouera parfaitement au coloriage d'une carte.



La figure 5 représente un des 880 carrés magiques 4×4 possibles (sans compter les rotations et les symétries). La somme magique est 34. Un tel carré peut-il fournir une clé pour jouer parfaitement à un jeu du 34 (les joueurs choisissent alternativement un nombre entre 1 et 16 jusqu'à ce qu'un joueur gagne en ayant rassemblé quatre nombres différents dont la somme est 34) ? Ce jeu est-il isomorphe à un jeu de tictactoe joué sur ce carré magique 4×4 ? La réponse est non. Voyez-vous pourquoi ? Peut-on établir un isomorphisme entre les deux jeux si l'on modifie les règles du tictactoe en admettant des configurations gagnantes de quatre cases autres que quatre cases en ligne droite ?

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4