Jéomatri

MATHEMATIQUES en $3^{\text{ème}}$

IREM
de GRENOBLE

LE LIVRE DU MAITRE

OPHRYS

J'entends et j'oublie,

je vois et je retiens,

je fais et je comprends.

Proverbe chinois

Les illustrations des pages 27 et 76 sont dues à J.P. Andrevon

ISBN. 2.7080.0482.4

TEXTES OFFICIELS

I – PROGRAMME DE MATHEMATIQUES DE LA CLASSE DE TROISIEME.

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous ; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises ; elles permettent d'obtenir les autres par voie déductive.

1.1 Algèbre.

Racine carrée : notation $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$. [On admettra que l'application $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est bijective]. Usage des tables pour le calcul des carrés et des racines carrées. Racine carrée d'un produit, d'un quotient de réels.

Construction, sur des exemples, de la représentation graphique d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Applications linéaires et applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; leurs représentations graphiques.

Equations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques ; résolution d'une équation, d'une inéquation, d'un système de deux équations ; résolution graphique d'un système d'équations ou inéquations.

Exemples variés de problèmes du premier degré.

1.2 Géométrie.

- Notions et propriétés fondamentales.
  - Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel.
    Coordonnées d'un vecteur dans un repère.
    Equations d'une droite dans un repère.
  - Rapport de projection orthogonale ; symétrie de ce rapport.
  - Propriété de Pythagore et sa réciproque.
  - Orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé.

- Notions pratiques de trigonométrie.

— On admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée.

— Angle de deux demi-droites de même origine : sa mesure. Bissectrice.

— Somme des mesures des angles d'un triangle.

— Cosinus, sinus d'un angle ; tangente. Usage des tables trigonométiques en degrés décimaux et en radians.

— Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

- Applications :

— Expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé.

— Symétries laissant globalement invariant : un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux droites.

— Exercices (distances et angles) sur le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange, le rectangle, le carré, les polygones réguliers...

— Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple : sphère (intersection avec un plan) ; cube (calcul de la diagonale) ; pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).

(Arrêté du 16 novembre 1978 - B.O. n° spécial 1 - 14-12-78).

II — INSTRUCTIONS - CLASSES DE QUATRIEME ET DE TROISIEME.

La circulaire n° 77-157 du 29 avril 1977 (B.O. n° 22 bis du 9 juin 1977, pages 1568 et suivantes) définit les objectifs de l'enseignement des mathématiques dans les collèges. Il y a lieu de la compléter en ce qui concerne les classes de Quatrième et Troisième.

Observons d'abord que figurent, dans les programmes de mathématiques de Sixième et ce Cinquième de 1977, les éléments de calcul numérique et d'algèbre, ainsi que les notions concrètes de géométrie, nécessaires pour l'enseignement des programmes du premier cycle en Sciences Physiques et en Technologie.

L'important travail de réflexion que les programmes du 22 juillet 1971, particulièrement novateurs, ont exigé des professeurs s'est concrétisé dans la circulaire n° 73-087 du 19 février 1973 (B.O.E.N. du 22-02-73), qui a représenté une féconde mise au point. Les «réflexions sur l'enseignement» qu'elle contient gardent toute leur valeur.

Il est souhaitable que durant les deux années les professeurs mènent de front l'étude du calcul et celle de la géométrie ; c'est ainsi que pourront s'éclairer mutuellement les notions d'ordre dans $\mathbb{R}$ et sur la droite, la notion de fraction et celle d'échelle régulière, etc... Il importe qu'il n'y ait pas de cloison étanche entre les deux disciplines ; l'une et l'autre peuvent de façon égale concourir à la formation du raisonnement.

Le programme de 1971 semblait subordonner l'étude de la droite à celle des réels ; on observera qu'avec le programme actuel l'ensemble $\mathbb{R}$ n'intervient en géométrie de Quatrième que par un petit nombre de ses propriétés, qui prolongent les propriétés de $\mathbb{D}$ étudiées en Cinquième ; on pourra donc parler de distance dès le début de la classe de quatrième.

En calcul la nouveauté réside dans l'accent qui est mis sur la notion de fractions, et dans la possibilité qu'elle procure d'aborder, si on le désire, les rationnels avant les réels. On pourra donc, soit - comme dans les programmes précédents - considérer les rationnels comme des réels particuliers (quotients d'entiers), soit présenter la notion de fraction à l'aide d'exemples relevant de la pratique usuelle (découpages, engrenages, échelles,... ; diviseurs d'un entier naturel) et introduire l'équivalence de deux fractions ; on se gardera, à propos des opérations sur les rationnels, d'accumuler les démonstrations ; l'essentiel est que les élèves aient bien compris que tout rationnel non nul a un inverse et qu'on dispose d'une division dans $\mathbb{Q}$.

Pour $\mathbb{R}$ il suffit que les élèves sachent qu'il s'agit, suivant la présentation adoptée, d'un sur-ensemble de $\mathbb{D}$ ou de $\mathbb{Q}$ sur lequel l'addition, la multiplication, la relation d'ordre se prolongent en disposant des mêmes propriétés, et que tout élément positif de $\mathbb{R}$ admet une racine carrée.

On s'attachera, si possible à chaque séance, à exercer les élèves à la pratique des opérations, au calcul mental (éventuellement à l'usage des calculatrices de poche). Toutes les fois qu'on le pourra, on situera cet entraînement dans le cadre de problèmes, dont les résultats feront l'objet de calculs approchés.

L'opération connue sous le nom d'extraction de la racine carrée ne figure pas au programme.

Certaines transformations géométriques (translation, symétrie...) pourront inspirer des remarques intéressantes dans des exercices de représentation graphique d'une application.

En ce qui concerne l'application affine, sa représentation graphique pourra être utilement considérée comme un cas particulier de la représentation d'une relation $ax + by + c = 0$, en liaison avec les équations d'une droite.

Ainsi que le dit l'Académie des Sciences :

«Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans les classes de Quatrième et de Troisième provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en Sixième et Cinquième par l'usage expérimental des instruments de dessin (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et, à partir de cette intuition, amener progressivement l'élève à raisonner et à manipuler consciemment les instruments pour lui faire acquérir peu à peu la notion de plan euclidien (...) Il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie. En revanche, il devra apprendre à faire de courts raisonnements, à partir de faits géométriques considérés comme évidents et donc admis comme vrais. Dans cet apprentissage de la réflexion et de la méthode déductive, il importe que le maître observe strictement quelques règles. Tout d'abord, les faits que l'on admet à un instant donné et qui vont servir de base au raisonnement doivent être clairement énoncés et ne prêter à aucune confusion dans l'esprit de l'élève. Ensuite le raisonnement doit être rigoureux, il ne doit jamais faire appel à des hypothèses non explicitement formulées et a fortiori doit se garder des cercles vicieux. Enfin il faut éviter qu'une propriété simple, qui est presque évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée, car alors l'élève ne pourra pas comprendre quelle est la règle du jeu.

S'il convient d'éviter une présentation axiomatique, il est, en revanche, indispensable que le maître possède, sur les matières enseignées dans ces deux classes, une vue d'ensemble cohérente (...) Faute d'une telle vue d'ensemble, le maître risquerait d'entraîner les élèves dans des développements inutilement compliqués et souvent stériles».

Les nouveaux programmes, et tout spécialement leur partie géométrique, mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie...

De ce point de vue l'analyse de situations et la résolution de problèmes jouent un rôle majeur. En particulier l'enseignement de la géométrie est indissociable de la recherche de constructions géométriques.

(Circulaire n° 78-392 du 16 novembre 1978 - B.O. n° spécial 1 - 14-12-78).

PRESENTATION

I – LE GROUPE «JEOMATRI».

Nous avons présenté le groupe JEOMATRI dans le livre du maître de la classe de 4ème (page 9). Nous nous contenterons donc de rappeler brièvement ce qui caractérise ce groupe et son action.

* Ce groupe a été chargé par l'I.R.E.M. de Grenoble de travailler sur les problèmes que pose l'enseignement des mathématiques en 4ème et 3ème.

* Composé de professeurs de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur, le groupe s'est renouvelé au cours des années mais les maîtres enseignant dans le premier cycle y ont toujours été fortement majoritaires.

* Une partie importante de notre travail a évidemment été l'animation des stages que l'I.R.E.M. de Grenoble organisait pour les enseignants de 3ème et de 4ème.

* C'est sans aucun doute ce travail commun avec de nombreux collègues de notre académie qui nous a conduit, dés le début, à nous placer dans le cadre de la pratique quotidienne de la classe.

* Ainsi, il nous est apparu tout de suite que nous devions prendre en charge le programme officiel des classes de 4ème et 3ème et la TOTALITE de ce programme. C'est probablement pour cela que nous pouvons apporter de véritables propositions en ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre, un apprentissage progressif du calcul numérique et littéral, une réflexion sur les écritures et le langage, et une liaison réelle entre algèbre et géométrie.

* Dans le même ordre d'idée, nous avons toujours tenu à ne faire que des propositions suffisamment précises pour qu'elles puissent être utilisées immédiatement dans une classe. Ainsi, la quasi totalité de ce qui figure dans ce livre de 3ème a déjà été expérimentée.

Nous remercions une nouvelle fois les très nombreux collègues et leurs élèves qui, au cours des années, ont conduit cette expérimentation avec nous.

Nous rappelons à ce propos que les droits d'auteurs de ce livre, résultat d'un véritable travail collectif, seront comme il se doit versés à l'I.R.E.M. et consacrés à des activités de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

A l'occasion du débat qui s'est déroulé en 1978 sur les actuels programmes, nous avions publié quelques réflexions sur l'enseignement des mathématiques en 4ème et 3ème et sur les options pédagogiques possibles.

L'essentiel de ce texte figure dans le livre du maître de 4ème (pages 10 à 16).

II – NOS OBJECTIFS.

Ils sont évidemment les mêmes pour ce livre que pour le précédent. Nous nous contentons donc de recopier ici l'essentiel de ce que nous avions dit pour la classe de 4ème en complétant, d'une part par ce qui est spécifique à la classe de 3ème, d'autre part par quelques observations que nous avons pu faire dans des classes où le livre de 4ème est utilisé.

2.1 Ecrire un livre dans le cadre du programme officiel.

Ce livre contient donc intégralement toutes les rubriques du programme. Bien entendu, nous les avons librement ordonnées.

▪ A ce propos, il faut dire quelques mots de nos choix en ce qui concerne la géométrie.

Le programme donne une liste de notions et de propriétés affines et métriques qu'il répartit entre la classe de 4ème et la classe de 3ème. Il n'y a visiblement pas d'ordre imposé, en particulier aucune axiomatique n'est privilégiée. Le professeur a donc toute latitude pour organiser ces notions et propriétés.

On peut remarquer qu'une partie notable des notions de géométrie métrique est citée à la fois dans le programme de 4ème et dans celui de 3ème (triangle isocèle, losange, rectangle, projection orthogonale,...). Ceci entre autres choses, nous poussait fortement à faire les choix indiqués ci-dessous.

Nous nous sommes donnés comme objectifs d'organiser entre elles les principales propriétés affines et métriques du plan euclidien dans une théorie globale. Parallèlement, pour un certain nombre de questions, nous en sommes restés au niveau de l'observation (ce qui n'empèche évidemment pas de raisonner) dans des sortes d'îlots plus ou moins isolés. C'est de cette façon, par exemple, que nous avons traité les angles, les rotations, la trigonométrie, les quelques notions de géométrie de l'espace.

Nous avons décidé d'élaborer notre théorie du plan euclidien en deux ans. C'est pourquoi, à la fin de la quatrième, certaines questions en étaient encore restées au niveau de l'observation et n'avaient donc pas pris place dans la théorie : essentiellement on été traitées de cette façon toutes les questions relatives à la distance et à l'orthogonalité.

Nous nous sommes expliqués longuement à ce sujet dans le livre du maître de 4ème. Il ne nous semblait pas raisonnable d'introduire la notion de distance dans la théorie avant de connaître l'existence des nombres réels, et si on voulait un apprentissage progressif en algèbre, il n'était pas possible de disposer des nombres réels avant la fin de l'année de 4ème. Pour l'orthogonalité, il était évidemment possible de l'introduire très tôt (dès qu'on savait ce qu'est une direction) mais il nous paraît nuisible pour une bonne compréhension de la géométrie de dissocier fortement distance et orthogonalité. D'ailleurs, une théorie incluant l'orthogonalité sans la distance conduit à des résultats d'une grande pauvreté.

C'est dans ce livre de 3ème que les notions d'orthogonalité et de distance vont prendre place dans la théorie, ensembles, et venir s'organiser avec les propriétés affines du plan euclien.

Dans cette construction, les propriétés de Thalès et de Pythagore apparaissent alors comme des axiomes qui définissent les droites du plan euclidien : elles indiquent comment les droites sont en bijection avec IR (car pour nous, on l'a compris, une droite est aussi graduée par IR lorsqu'elle est plongée dans le plan et pas seulement lorsqu'on s'en sert comme d'un objet isolé... !).

▪ Nous n'avons abordé, dans le livre de 3ème, aucune notion qui ne soit explicitement au programme. Dans le livre de 4ème, nous avions été amenés à parler de groupe bien que le TEXTE du programme ne l'impose pas. Ceci permettait de rapprocher des situations comparables, qui, elles, faisaient bien partie du programme de la classe. Nous avions aussi utilisé cette notion pour une première réflexion sur les équations.

Nous tirons évidemment profit de ce choix dans le livre de 3ème. Cela nous a permis de conduire efficacement la révision sur les propriétés des opérations dans IR, dans l'ensemble des translations et dans l'ensemble des vecteurs. Cela nous a permis surtout de faire une étude cohérente des équations complétant le travail commencé l'an dernier.

▪ Nous savons que «l'activité mathématique demande beaucoup de temps (appréhension, réflexion, maturation, recherche, essai, mise au point) et que, contrairement aux idées reçues, elle demande une pratique expérimentale» (1). Aussi, nous pensons qu'il sera, une nouvelle fois, impossible d'étudier tout le programme proposé d'une façon approfondie, efficace et profitable à tous les élèves. Cependant, nous avons voulu laisser à chaque enseignant la responsabilité de faire ses propres choix, en fonction de sa classe. Ce sera à lui de déterminer les parties du programme qu'il veut traiter de façon détaillée et celles qu'il abordera plus rapidement.

C'est pourquoi avons nous traité tous les chapitres avec le même sérieux.

(1) Pierre Jullien répondant en mars 1976 à une interview de la revue de l'Education, en qualité de président de l'Assemblée des directeurs d'I.R.E.M.

2.2 Favoriser au maximum les différentes étapes de l'activité mathématique.

Pour cela, nous avons donc

* fait appel aussi souvent que possible aux connaissances antérieures des élèves. En particulier, ce livre contient de très nombreuses révisions de ce qui a été fait en 4ème. Mais nous n'avons pas voulu présenter ces révisions comme une sorte de résumé stérile en début d'année. Bien au contraire, nous les avons introduites dans le déroulement des chapitres au fur et à mesure que nous utilisions les notions concernées. Nous avons d'ailleurs rappelé l'essentiel de ces propriétés dans les *faisons le point* qui cloturent chaque chapitre ;

* fourni de très nombreuses occasions d'observations, de dessins, de manipulations et de raisonnement sur ces observations aussi bien en algèbre qu'en géométrie (il est bien évident que cette étape de l'apprentissage mathématique est indispensable bien au-delà de la fin de la 5ème, et même de la fin de la 3ème) ;

* donné aux élèves des occasions nombreuses de réflexion sur les écritures et le langage mathématique ; nous avons en particulier beaucoup insisté sur le maniement des lettres muettes ;

* essayé de familiariser progressivement les élèves avec le raisonnement en fournissant de nombreux exemples et des exercices traités, et en les faisant réfléchir sur ce qu'ils faisaient, en particuler sur la quantification des énoncés (bien entendu sans utiliser les symboles $\forall$ et $\exists$).

A titre indicatif, ce que nous proposons pour l'axiome de Thalès et l'axiome de Pythagore illustrent assez bien ce que nous souhaitons.

• D'abord de très nombreuses observations et manipulations conduisant, nous l'espérons, à des discussions dans la classe sur ce qu'on a vu.

Ces observations mettent en évidence soit un manque dans la théorie (la distance dans le travail préparatoire à l'axiome de Pythagore), soit une situation assez complexe (des histoires d'intervalles emboîtés pour Thalès).

• Les axiomes apparaissent alors comme de nouvelles propriétés de la théorie, indispensables si on veut poursuivre, et en même temps simplificatives de la réalité.

Nous avons refusé par contre de faire des démonstrations lorsque nous pensions que les élèves ne pouvaient en tirer profit. C'est pourquoi

• nous n'avons pas proposé de démonstrations trop longues ou trop compliquées dans lesquelles les élèves risquent de perdre de vue l'objectif poursuivi ;

• nous n'avons pas proposé de démonstration lorsque après de nombreuses manipulations, la propriété à laquelle on veut aboutir risque d'être «évidente» et est déjà implicitement quantifiée par tous les élèves ; on trouvera de très nombreuses situations de ce type en particulier pour les propriétés concernant les coordonnées et les opérations sur les vecteurs [chapitre VR] ;

• en algèbre nous avons préféré, toutes les fois que cela était possible, lier les propriétés des nombres réels à la géométrie de la droite, plutôt que de proposer des démonstrations qui n'apparaissent aux élèves que comme des transformations d'écriture.

Signalons au passage que lorsque nous avons dit aux élèves : «on pourrait démontrer cette propriété» nous en avons le plus souvent proposé une démonstration dans ce livre du maître.

Nous avons également marqué le plus clairement possible les différents niveaux où on se plaçait pour conduire une étude, depuis le niveau de l'observation jusqu'à celui de la théorie, et par conséquent essayé de préciser le statut des objets étudiés.

Pour bien insister sur ces différences, nous avons à nouveau imprimé en bleu ce qui concerne l'observation et en noir ce qui concerne la théorie. Cette façon de faire à l'avantage de visualiser ce que nous voulons distinguer et il semble bien, après quelques mois d'utilisation du livre de 4ème, que les élèves y soient sensibles et comprennent mieux les différentes étapes à parcourir ; elle a l'inconvénient d'être un peu schématique et de gommer les étapes intermédiaires. Par exemple, lorsqu'on parle d'une droite matérielle graduée par IR, on n'est déjà plus au niveau de l'observation, mais on n'étudie pas encore un sous-ensemble du plan mathématique.

Nous avons aussi voulu donner aux élèves des moyens pour faire fonctionner, au fur et à mesure, les nouvelles notions étudiées ; pour cela, nous avons incorporé au déroulement du discours de très nombreux exercices d'applications.

Enfin, nous n'avons pas oublié qu'une des étapes de l'activité mathématique est la répétition ; on trouvera donc de très nombreux exercices répétitifs dans chaque chapitre, et en particulier dans la partie «exercices et problèmes».

2.3 Ecrire un livre lisible par les élèves.

Un des reproches les plus fréquents que les enseignants font à certains livres de classe, c'est que les élèves ne peuvent pas les lire. Au cours des années, nous avons beaucoup travaillé sur cette question et cherché un mode d'écriture qui soit adapté à TOUS les élèves de cet âge. L'usage du livre de 4ème nous donne déjà une première évaluation.

Les élèves lisent effectivement eux-mêmes les textes proposés, apparemment assez facilement, en tous cas sans difficultés globales. Il est assez rare qu'ils soient arrêtés par un mot ou une expression, encore plus exceptionnel qu'ils ne comprennent pas une tournure de phrase.

Cela ne signifie évidemment pas qu'ils sachent répondre à toutes les questions posées, ou qu'ils comprennent seuls le but de la démarche proposée. En particulier, on peut noter que certains sont plus volontiers préoccupés du résultat immédiat à obtenir pour tels ou tels travaux (texte en italique) que par un effort de compréhension réelle des explications données (texte droit), surtout lorsque ce texte est un peu long.

Aussi, si c'est bien l'élève qui lit le livre, à son rythme, le rôle du maître n'en est pas moins important. Nous souhaitons que dans ce domaine aussi l'aide apportée soit la plus individualisée possible.

Nous avons fait un usage modéré du langage ensembliste, ne l'utilisant que lorsqu'il permettait une meilleure compréhension.

De même, nous avons essayé d'éviter les écritures symboliques trop lourdes.

Nous avons proscrit les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Longleftrightarrow$, et nous avons essayé d'utiliser convenablement, c'est-à-dire comme des verbes, les symboles $=$ et $<$.

Enfin, sauf erreur, nous avons évité le «si et seulement si» trop mal compris. Nous avons préféré dire «les propriétés suivantes sont équivalentes» en rappelant plusieurs fois ce que cela voulait dire.

Cependant, nous ne confondons pas du tout formalisme et rigueur : si nous avons évité une formalisation excessive, nous avons essayé d'être aussi rigoureux que possible, aussi bien dans la démarche (distinction claire entre ce qui est démontré et ce qui ne l'est pas — conduite d'un raisonnement — etc...) que dans l'emploi du langage.

Nous avons donc tout à fait refusé de considérer les nouveaux programmes comme un «retour en arrière». On ne pouvait en effet accepter de recréer les difficultés imposées aux élèves par les programmes d'avant 1971 : confusion entre les différents statuts des objets, imprécision du langage, enseignement où les liens entre des situations comparables étaient peu mis en évidence.

Dans ce domaine, nous avons tenté de fixer avec précision le sens des mots employés en expliquant ce sens, en donnant l'origine des mots (isométrie) en rappelant éventuellement leur usage courant (parallèle, triangle,...) et aussi en ne nous permettant aucune entorse par rapport au sens convenu, par exemple pour l'égalité.

Nous sommes en effet persuadés qu'un langage fluctuant, peu précis, est un handicap supplémentaire pour ceux qu'on appelle habituellement «les enfants défavorisés» et que par opposition, l'emploi d'un langage rigoureux est une attitude non sélective. Qu'on nous entende bien : il ne s'agit évidemment pas de réprimer le langage employé par les élèves ; bien au contraire : une des tâches d'un enseignant est d'essayer de comprendre comment fonctionne l'intelligence de ses élèves à travers le langage écrit ou parlé qu'ils emploient. Mais une autre tâche, tout aussi importante, est de leur donner les moyens de comprendre le discours qu'on tient devant eux, d'où la nécessité d'un langage précis (ce qui ne signifie pas précieux).

2.4 Permettre l'utilisation de méthodes pédagogiques variées.

Il est bien clair qu'un texte écrit induit une méthode. Mais nous avons fait en sorte que cette méthode ne soit pas nécessairement la même pour les exercices de manipulations, les exercices de motivation, l'utilisation des propriétés connues, l'établissement de nouveaux concepts, les exercices d'application.

Suivant les passages du livre, voici plusieurs méthodes possibles :

- travail de préparation individuel à la maison,
- travail individuel en classe,
- travail de groupe,
- travail collectif en classe pour organiser une recherche, pour regrouper des observations,
- débat en classe sur ce qu'on vient de faire et les suites qu'on peut en attendre,
- travail collectif guidé par le maître (avec utilisation du tableau) par exemple pour la construction d'un raisonnement,
- explications données par le maître, en particulier avant que les élèves ne lisent un nouveau chapitre,
- etc...

On voit cependant que ce livre n'incite guère à ce qu'on convient d'appeler le cours magistral, et qu'au contraire il privilégie les méthodes qui rendent les élèves actifs, où ils apprennent avec leurs mains autant qu'avec leur tête, où ils participent à l'organisation de leurs connaissances plutôt qu'à apprendre des recettes, et où la restitution «par cœur» d'un texte mathématique n'est pas le critère essentiel du contrôle des connaissances.

Et en effet, dans les classes où on utilise le livre de 4ème, la plupart des élèves ont pris leurs affaires (et le livre) en mains. Chacun avance à son rythme, les points d'achoppement n'étant pas les mêmes d'un élève à l'autre. Cela pose évidemment quelques problèmes de conduite de la classe :

* on est parfois contraint de donner un peu de travail de préparation à la maison si on veut que tous les élèves en soient à peu près au même point ;

* sur les points un peu plus difficiles, ceux où on a eu beaucoup de questions, on n'est jamais tout à fait certain d'avoir vu tous les élèves. Il est donc nécessaire de regrouper les élèves sur ces questions pour une syn-

thèse générale ;

* on n'est jamais tout à fait certain non plus que chaque élève ait bien compris l'enchainement des idées, les raisons de ce qu'on leur fait faire, les propriétés auxquelles on est conduit. Cela peut laisser un certain sentiment d'insatisfaction. Mais le risque n'est-il pas bien plus grand encore lorsque le travail essentiel des élèves consiste à ... nous écouter et à recopier sur un cahier ce que nous écrivons au tableau ?

III – PRESENTATION DU LIVRE.

3.1 Le livre contient 7 chapitres.

TH	l'axiome de Thalès	(4)
R	les nombres réels	(7)
VR	vecteurs et repérage	(5)
DO	distance et orthogonalité	(7)
ED	équations et droites	(6)
NO	norme et orthogonalité	(2)
CA	cercles et angles	(6)

Ces chapitres, plus ou moins longs, sont divisés en 37 sous-chapitres (nombres entre parenthèses).

3.2 Nous avons indiqué au paragraphe 2.2 ci-dessus le sens des textes noirs et des textes bleus.

Les mots nouveaux et les expressions nouvelles sont imprimés en majuscules, et repris dans l'index terminologique en fin de livre. Notons que, pour nous, cet index que nous avons voulu le plus complet possible est un outil indispensable de formation scientifique. Si on les y entraine, les élèves s'en servent effectivement ; ils y recherchent les termes qu'ils ont oubliés, ce qui leur donne de nombreuses occasions de retour en arrière.

Les propriétés importantes sont imprimées en caractères gras sur un fond de couleur et signalées en marge par le signe $\lozenge$.

Les symboles nouveaux sont signalés en marge par ►.

3.3 Puisqu'observations et manipulations sont des moments essentiels de l'activité mathématique, il fallait s'en donner les moyens. C'est pourquoi nous avons proposé des feuilles annexes de manipulations sur lesquelles on peut dessiner, écrire, qu'on peut plier ou découper et qui seront donc consommées en cours d'année.

Il était donc impossible de les lier au livre, qui, lui doit durer plusieurs années.

Les élèves seront donc amenés à les acheter (et nous le regrettons) comme ils achètent leurs autres outils de dessin, règle, équerre, etc... Notre éditeur a d'ailleurs veillé à ce que le prix de ces feuilles de manipulation soit modéré.

3.4 A la fin de chaque chapitre, quelques pages bordées de bleu, sous le titre *faisons le point* regroupent les idées principales du chapitre. Comme nous l'avons dit plus haut, nous y avons mis également une partie importante des propriétés apprises en 4ème.

A la fin de chaque chapitre également, nous avons mis sous le titre *un peu d'histoire* une note historique sur un mathématicien que nous avons cherché à situer dans son époque, en donnant des points de références accessibles aux élèves. Nous avons voulu que ces mathématiciens soient de nationalités et d'époques différentes.

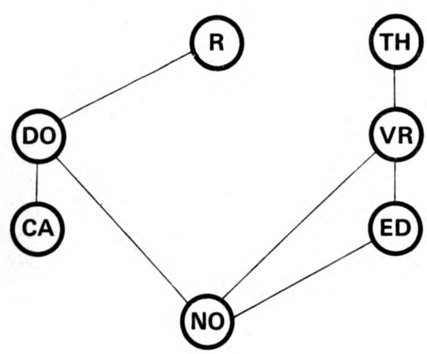
3.5 A la fin de chaque chapitre, nous avons fourni un nombre relativement important d'exercices qui viennent s'ajouter à ceux qui figurent dans le chapitre.

Dans une très large mesure, nous les avons classés approximativement dans l'ordre d'introduction des notions.

Par contre, nous avons refusé tout classement par ordre de difficultés croissantes, un tel classement étant par trop subjectif.

Nous nous sommes également refusés de recopier des énoncés de problèmes d'examen, qui auraient utilisé beaucoup de place pour un intérêt relatif. Ces énoncés peuvent se trouver dans les annales et, de plus, on ne sait pas encore à quoi ressemblera l'épreuve de mathématique du B.E.P.C. dans le cadre des programmes de 1978.

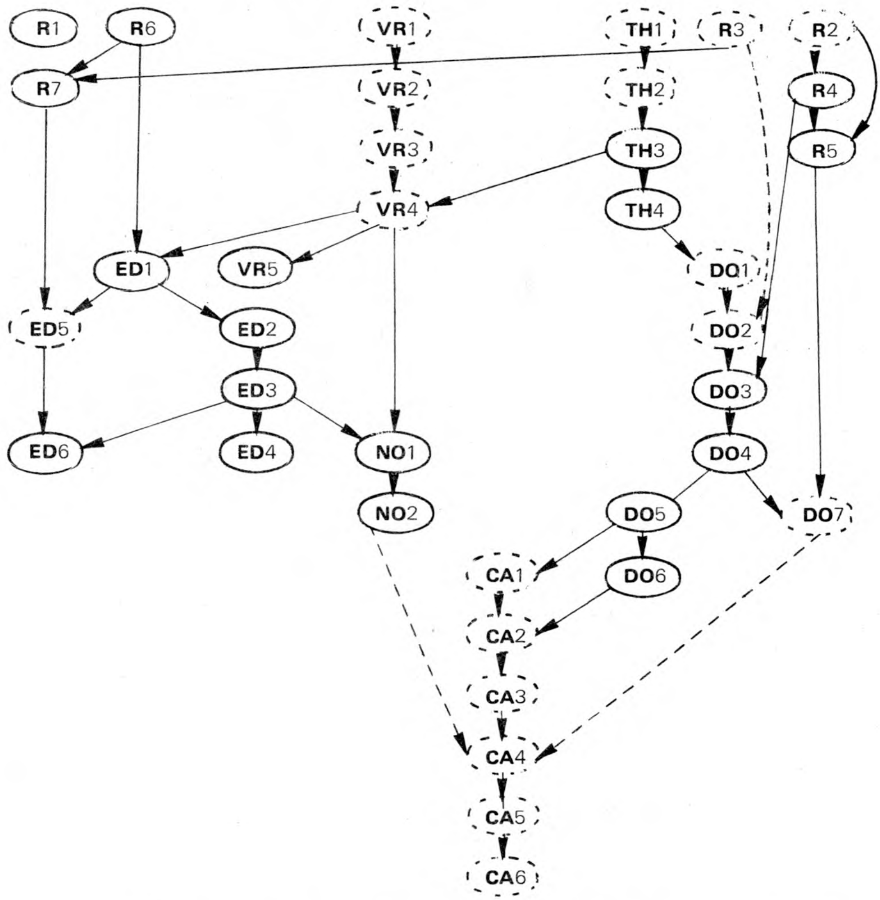
3.6 L'organigramme ci-contre donne une idée de l'ordre d'enchainement des chapitres.



Le chapitre **R** est un peu particulier. En dehors des règles de calcul sur les radicaux et dans une certaine mesure des sous-chapitres sur équations et inéquations, il est essentiellement une révision de ce qui a été fait en classe de 4ème. Il s'intègre ainsi dans cet apprentissage progressif du calcul numérique et littéral que nous avons essayé de mettre au point.

Il peut donc se traiter un peu quand on veut dans l'année et à doses plus ou moins fortes suivant les besoins des élèves. Par exemple on peut traiter le sous-chapitre **R**3 sur les valeurs absolues avant d'aborder le problème de la distance dans le plan. On peut aussi bien ne pas le faire si on estime que les souvenirs des élèves sont suffisants.

Voici un organigramme plus détaillé des 37 sous-chapitres.



Le cadre pointillé indique un sous-chapitre en totalité ou en grande partie manipulatoire. Cela ne signifie pas qu'il n'y a aucune manipulation dans les autres sous-chapitres.

Les flèches pleines indiquent des liaisons obligatoires. Les flèches pointillées indiquent des liaisons éventuellement souhaitables suivant les connaissances antérieures des élèves.

Cet organigramme vous aidera, nous l'espérons, à faire les choix imposés par le manque de temps, en fonction de votre classe.

Dans ce domaine, on peut bien entendu

* ne pas demander aux élèves de faires TOUS les exercices proposés à l'intérieur d'un chapitre ;

* sauter telle ou telle partie d'un sous-chapitre ;

* donner certaines parties mathématiques à préparer à la maison, et se contenter d'en faire une synthèse en classe ;

* traiter sous forme de travail collectif en classe telle partie que nous avons proposée comme travail de recherche individuelle.

3.7 Dans le livre du maître, nous avons voulu indiquer quels sont les choix pédagogiques que nous avons faits ; on les trouvera explicités dans les commentaires généraux et, s'il y a lieu, dans les compléments mathématiques. Les commentaires de détail insistent en particulier sur les problèmes de raisonnement qui peuvent se poser aux élèves et indiquent lorsqu'on passe de quelques observations à une propriété générale.

Vous y trouverez aussi quelques démonstrations que nous n'avons pas voulu proposer aux élèves, et aussi quelques exercices complémentaires.

Lorsqu'une question nous semblait risquer de faire perdre du temps au professeur, nous avons donné une réponse.

IV – CONCLUSION.

Dans le livre du maître de 4ème, nous avions dit avoir cherché à fournir une sorte d'ouvrage de transition, un outil de travail pour le GROUPE CLASSE. Ce qui se passe actuellement dans les classes de 4ème qui emploient ce livre nous conforte dans cette idée.

Pendant de nombreuses années, on a dit que la classe de mathématique était la «bête noire» des élèves, que l'écart entre ce qu'on faisait en 6ème et 5ème et ce qu'on faisait en 4ème était trop grand et constituait un écueil difficile à franchir pour la majorité des élèves, que les élèves s'ennuyaient, etc...

Nous n'observons plus rien de semblable.

Ce qui est peut être le plus surprenant, c'est leur intérêt et leur curiosité sans cesse sollicités, non seulement comme on pouvait s'y attendre par les observations ou les figures qu'ils obtiennent mais aussi par les questions relatives au langage et au raisonnement.

Chacun, à son rythme, utilise le livre comme un véritable outil scientifique qui l'interroge, lui permettant à la fois apprentissage et acquisition de connaissances.

Le professeur peut enfin se consacrer à l'essentiel qui est d'animer la classe, d'accompagner la démarche de chaque élève et de consacrer le plus de temps possible à ceux qui sont en difficulté.

Bien entendu, toutes les remarques, critiques, propositions que vous voudrez bien nous faire seront les bienvenues. Elles s'intégreront dans la recherche de l'I.R.E.M. de Grenoble et seront donc utiles à l'ensemble des collègues. Elle permettront aussi, bien sûr, une amélioration et pourquoi pas, un nouveau pas en avant lors d'une éventuelle réédition.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE TH

L'axiome de Thalès

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 En classe de 4ème, nous avons établi un lien entre le plan mathématique et l'ensemble des nombres réels. (Chapitre SR).

Rappelons qu'il existe des plans qui vérifient les axiomes d'incidence et les axiomes que nous avons choisis pour introduire les translations et qui ne peuvent être liés à $\mathbb{R}$ [livre du maître 4ème - Commentaires du chapitre SR, paragraphe 4.1, page 92].

Lier le plan à $\mathbb{R}$ c'est, dans cette construction associer à chaque droite d du plan une ou plusieurs bijections de d sur $\mathbb{R}$. Le fait que pour chaque droite du plan il existe de telles bijections apparaît donc comme un axiome.

Dans [TH1, paragraphe 1] nous avons proposé une révision de ce qui avait été fait à ce sujet en classe de 4ème. (Abscisse, surligné, milieu, ...).

1.2 En classe de 4ème , nous avons présenté l'axiome du milieu comme une propriété imposée aux graduations des droites. C'est une idée difficile à comprendre. Il sera peut-être plus facile de voir qu'il y a un problème relatif aux graduations avec l'axiome de Thalès : la situation étudiée est plus compliquée.

Les nombreuses manipulations des sous-chapitre TH1 et TH2 ont évidemment pour premier objectif de bien décrire le problème qu'on se propose d'étudier. Nous pensons qu'elles aideront à comprendre aussi l'idée qu'il s'agit bien d'une propriété relative aux bijections des droites sur $\mathbb{R}$.

1.3 Un autre intérêt de ces manipulations est d'éclairer d'une manière particulièrement spectaculaire la différence entre géométrie observable et théorie.

L'observation ne permet pas en général de conclure à l'égalité des rapports $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$. ; simplement, on peut trouver de ces deux réels des encadrements ayant une partie commune, les limites du dessinable ne permettant pas d'ailleurs d'affiner beaucoup cette observation.

Décider que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$, c'est changer de niveau, aller au-delà de l'observation.

On voit que depuis l'école primaire, où on codait quelques points sur un trait rectiligne dessiné sur une feuille de papier, la notion de droite graduée a considérablement évolué parallèlement, bien entendu, à l'évolution de la notion de nombre.

1.4 Un autre objectif non négligeable est de proposer une situation riche pour faire fonctionner la technique des encadrements. C'est évidemment plus motivant que d'encadrer 1,5 à 10^{-n} près ...!!

1.5 On pourrait alors associer à chaque droite d du plan une bijection de d sur IR de façon que l'axiome de Thalès soit vérifié (nous avons appelé graduation une telle bijection) et étudier le problème du changement de graduations.

On trouverait évidemment pour chaque droite la classe affine de la première bijection et on associerait alors à chaque droite l'ensemble de ces graduations.

Rappelons ici que si d est une droite et f et g deux bijections de d sur IR, g appartient à la classe affine de f s'il existe un réel non nul a et un réel b tels que pour tout point M de d, $g(M) = af(M) + b$.

(Voir aussi les compléments mathématiques, page 85).

Dans cette théorie, une droite apparaîtrait donc comme un couple (d, Φ) où d est un ensemble de points du plan qu'on peut lier à IR par des bijections et où Φ est la classe affine de l'une de ces bijections.

C'est ce que souhaitaient les commentaires des programmes de 1971 et qu'on a donc trouvé dans un certain nombre de manuels scolaires de cette époque.

1.6 Nous avons toujours été opposés à la construction d'une théorie aussi compliquée, préférant associer à chaque droite une SEULE graduation.

Ce choix ne présente aucun inconvénient pour l'essentiel de la suite de la théorie construite. En effet l'étude de la multiplication externe des vecteurs ou des propriétés euclidiennes du plan ne nécessite pas de changement de graduations.

Ce n'est que pour le repérage que le problème se pose et encore uniquement pour deux droites (voir paragraphe 1.9 ci-dessous).

A titre d'exemple, voici un énoncé qui, outre qu'il est illisible par des élèves, n'a pas de signification dans la théorie proposée :

Soit δ une direction,

d et d' deux droites n'appartenant pas à δ,

p la projection de direction δ de la droite d sur la droite d',

O, I et M trois points de d tels que $O \neq I$,

O' et I' les images de O et I par p,

M' un point de d'.

Appelons f la graduation de d de repère (O, I) et f' la graduation de d' de repère (O', I') :

si $M' = p(M)$, alors $f'(M') = f(M)$.

En effet, cet énoncé suppose que les droites d et d' sont munies de classes affines Φ et Φ'. Une graduation d'une classe affine est caractérisée par son repère, c'est-à-dire par les points d'abscisses 0 et 1. On s'intéresse ici aux éléments f de Φ et f de Φ' qui ont pour repères (O, I) et (O', I') pour repère.

1.7 Bien entendu, même avec le choix que nous avons fait, l'étude de l'axiome de Thalès reste une chose difficile. Aussi nous avons pris beaucoup de précautions.

Nous avons

— proposé beaucoup de manipulations préparatoires [TH1 et TH2],

— évité des rédactions longues et compliquées de l'axiome de Thalès,

— dessiné beaucoup et proposé plusieurs «cas de figure»,

— fait fonctionner ce qu'on venait d'apprendre, par plusieurs exercices [TH4].

En particulier, nous avons repris des situations que les élèves avaient pu avoir l'occasion de rencontrer comme la machine à calculer.

1.8 Ce qu'en 4ème, nous avons appelé l'axiome du milieu n'est évidemment qu'une conséquence de l'axiome de Thalès.

Par contre, un plan qui vérifie l'axiome du milieu ne vérifie pas nécessairement l'axiome de Thalès [livre du maître, 4ème — Commentaires du chapitre SR, paragraphe 4.2 et 4.3, page 92].

1.9 Il était cependant impossible de faire complètement l'impasse sur la question du changement de graduation, et ceci à cause du repérage. En effet, soit O, I et J trois points non alignés. Nous souhaitons que (O, I, J) soit un repère du plan. Il faut donc associer à la droite OI la graduation de repère (O, I) et à la droite OJ la graduation de repère (O,J).

Notons que, puisque dans notre plan affine chaque droite est munie d'une seule graduation, lorsqu'on change de graduation sur une droite, on change de plan affine. Nous n'abordons évidemment pas ce genre de questions avec les élèves.

Nous avons essayé de faire les choses de la manière la plus économique possible. Il nous paraît amplement suffisant que les élèves comprennent d'une manière plus ou moins intuitive que

— on ne peut pas associer n'importe quelles bijections aux droites si on veut que la propriété de Thalès soit vérifiée ;

— si chaque droite est munie d'une graduation de façon que l'axiome de Thalès soit vérifié, on peut changer de graduation sur une droite, mais pas n'importe comment si l'on veut que l'axiome de Thalès reste vérifiée ;

— que les bijections qui conviennent sont bien illustrées par les échelles régulières graduées que l'on peut dessiner sur une droite matérielle (l'exercice 37 peut aider à le comprendre) ;

— que par conséquent, si on se donne deux points distincts O et I d'une droite, il existe une et une seule graduation convenable de repère (O, I).

On peut d'ailleurs démontrer que si on décide de représenter les droïtes d'un plan affine par des traits rectilignes, la seule représentation possible des graduations d'une droite sont les échelles régulières graduées. Il n'est pas question évidemment de faire ce genre de considération avec les élèves, ni bien entendu de dessiner les droites autrement que ... droites ! (Voir les compléments mathématiques, page 87).

1.10 Le plan mathématique, tel qu'il apparaît à la fin de ce chapitre TH, est donc tout à fait «opérationnel» :

— lorsqu'on dessine une situation de ce plan mathématique, on est maître de l'échelle régulière graduée qu'on peut plecer sur chaque droite (origine, longueur des échelons, sens) ;

— il n'y a pas de problèmes théoriques pour le repérage ;

— parmi les graduations d'une droite, on pourra en choisir qui vérifient une nouvelle contrainte, l'axiome de Pythagore par exemple. Ce sera l'objet du chapitre DO.

II — COMMENTAIRES DE DETAIL

TH1 **I — MAIS D'ABORD UN PEU DE REVISION** ———————— page 3

1.2 - 1.3 - 1.4 Exercices.

Dans ces exercices, nous avons beaucoup fait calculer sur des rapports de surlignés. Ceci a exclusivement un but d'entraînement et n'a évidemment pas pour objet de faire retenir de quelconques propriétés, notamment des propriétés des divisions harmoniques.

1.5 En particulier, le milieu d'un bipoint de d a été défini pour une bijection de d sur IR. Il peut donc changer si on change de bijection et ne coïncide donc pas tout à fait avec la notion de milieu d'un segment matériel. C'est une idée trop audacieuse pour qu'elle puisse être vraiment acceptée par un élève de cet âge.

TH2 **I – SUR UNE ECHELLE** ——————————— page 7

1.1 Pas question de faire des considérations savantes sur les encadrements de différences. On trouvera les encadrements de $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ et $\overline{CD}$ en regardant la figure.

II – SUR DEUX ECHELLES ——————————— page 8

Dans ce paragraphe, nous étudions une situation intermédiaire où l'un des rapports seulement est connu et où on peut donner un encadrement de l'autre.

III – ENCORE SUR DEUX ECHELLES ——————————— page 9

Ici, les deux rapports sont inconnus ; on peut seulement faire une étude sur des encadrements de ces rapports.

3.1 Nous avons préféré utiliser des nombres décimaux plutôt que des rationnels pour encadrer les rapports $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$: c'est certainement plus facile à percevoir.

C'est l'occasion de réfléchir sur les questions de valeurs approchées : il faut ici choisir une valeur approchée par défaut de $\frac{6}{9}$ et une valeur approchée par excès de $\frac{7}{9}$. Il faudra certainement s'y arrêter un petit moment.

3.2 Les possibilités de l'expérimentation s'arrêtent là ; pas question de subdiviser encore les échelons des deux échelles. Il est bon que les élèves comprennent bien que, même avec une figure très grande, on ne peut effectivement réaliser qu'un nombre très limité de subdivisions.

TH3 **I – L'AXIOME DE THALES** ——————————— page 13

1.1 La phrase qui accompagne la deuxième figure du paragraphe : «Dans situation illustrée par la figure, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$» n'est pas très rigoureuse. En fait, si on veut décrire proprement «la situation illustrée par la figure» par un énoncé adapté à tous les cas de figure, il est nécessaire de faire appel aux projections. On aurait alors un texte voisin de :

«Soit δ une direction
d et d' des droites qui n'appartiennent pas à la direction δ,
A et B deux points de d,
C un point de d et C' un point de d' ;

appelons p la projection de direction δ de la droite d sur la droite d',
A' et B' les images de A et B par p».

Un tel texte, dès le départ, aurait été vraisemblablement indéchiffrable par la plupart des élèves et n'aurait pu que les troubler. Nous avons donc préféré un certain flou, plus bref, en nous appuyant sur l'expérience acquise dans TH1 et TH2.

1.2 - 1.3 Nous avons ensuite fait intervenir les projections. Nous avons alors profité de l'examen des différents cas de figures pour rédiger plus proprement les énoncés de la propriété de Thalès.

1.4 Ce paragraphe est au fond une nouvelle réflexion sur l'utilisation des lettres muettes. On pourrait écrire la propriété de Thalès ainsi :

$$\frac{\overline{\square'\bigcirc'}}{\overline{\square'\triangle'}} = \frac{\overline{\square\bigcirc}}{\overline{\square\triangle}}.$$

II – RECIPROQUE ———————— page 17

Ce qui est essentiel dans TH3, c'est de comprendre quel est le sujet de l'étude et comment sont construites la propriété de Thalès et sa réciproque. C'est d'une difficulté certaine. C'est pourquoi nous avons concentré tous les efforts sur ces questions et préféré ne pas proposer, ici, une démonstration de la réciproque. Nous l'avons donc présentée comme un axiome et nous en proposons une démonstration à l'exercice 33 page 38.

III – ET QUE DEVIENT L'AXIOME DU MILIEU ? ———— page 18

Nous avons préféré renvoyer dans «Faisons le point» l'énoncé des différents aspects de l'axiome du milieu et de sa réciproque, pour éviter que TH3 se présente comme une litanie d'énoncés.

IV – CHANGEMENT DE GRADUATIONS ———————— page 19

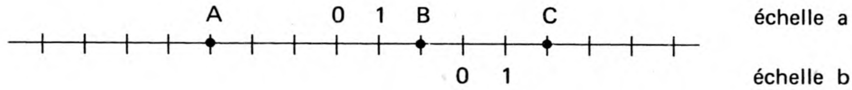
Nous avons dit ailleurs pourquoi il était indispensable d'aborder cette question. On peut voir que nous l'avons fait de la manière la plus brève possible. Si on veut être un peu plus explicite et donner aux élèves une idée un plus précise de ce qui se passe, on peut proposer les exercices suivants.

Dans une première partie, consacrée à l'observation, on peut placer sur une même droite deux échelles régulières graduées. Voici trois situations, de complexité croissante.

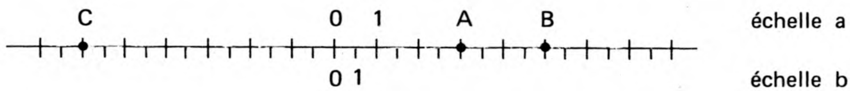
On fera constater successivement que

pour la situation I , abscisse «b» = abscisse «a» - 3 ;
pour la situation II , abscisse «b» = 2 × abscisse «a» ;
pour la situation III, abscisse «b» = 2 × abscisse «a» - 3.

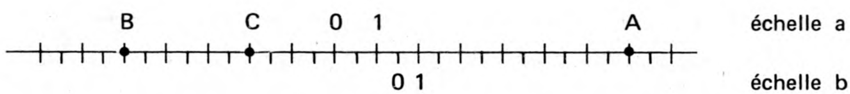
I



II



III



Dans chaque cas, on fait calculer $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, et $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ avec l'échelle a, puis avec l'échelle b. Dans les trois cas, on constatera évidemment qu'on trouve la même valeur pour $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Dans une deuxième partie, théorique, on étudiera des bijections f et g d'une droite d vers $\mathbb{R}$ telles que, pour tout point M de d,

$$g(M) = 2f(M) - 3.$$

On choisira trois nombres réels ; on appellera A, B et C des points de d qui ont pour abscisses par f ces trois nombres. On calculera alors g(A), g(B) et g(C), puis $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ pour f et pour g. Le résultat trouvé tient au fait que

$$g(C) - g(A) = (2f(C) - 3) - (2f(A) - 3 = 2(f(C) - f(A)) \quad \text{et}$$
$$g(B) - g(A) = 2(f(B) - f(A)).$$

On peut alors remarquer que ce sont uniquement des nombres de la forme $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ qui interviennent dans l'axiome de Thalès. Donc si l'axiome de Thalès est est vérifié lorsque d est munie de la bijection f, il l'est encore si l'on remplace f par g sans changer les bijections des autres droites. Naturellement, les nombres 2 et - 3 choisis pour l'exemple proposé ici peuvent être remplacés par n'importe quel réel non nul pour le premier et un réel quelconque pour le second.

TH4 **I — UN PROBLEME** page 20

1.1 Il s'agit de faire fonctionner de la façon la plus élémentaire possible l'axiome de Thalès et sa réciproque.

1.2 Voilà une occasion de réfléchir une nouvelle fois aux trois parties d'une implication.

— l'énoncé d'une situation. (d'où les trois figures de la page 20),

— une hypothèse, c'est-à-dire une propriété éventuelle de la situation décrite,

— une conclusion, obligatoirement vraie si l'hypothèse est vraie.

On pourrait prolonger l'exercice en supposant que les droites AB et A'B' ne sont pas parallèles.

Ce que nous proposons dans l'exercice de la fin du paragraphe est différent : c'est la situation qui a changé. Les élèves ne pourront pas trouver que les droites AC et A'C' sont parallèles. En effet, s'il en était ainsi, A', B' et C' seraient les images de A, B et C dans une translation ou dans une homothétie et les droites AA', BB' et CC' seraient ou parallèles ou concourantes.

Comme il n'est pas question de proposer une telle démonstration, on pourra conduire une discussion intéressante : le fait que personne n'a trouvé des droites AC et A'C' parallèles ne permet pas d'affirmer qu'il en est toujours ainsi. Les élèves seront peut-être plus facilement convaincus si certains ont trouvé des droites AC et A'C' «presque» parallèles.

III — UN PEU D'ALGEBRE page 22

Nous avons préféré placer ici cette étude des proportions :

— placée dans TH4 qui est réservé à des exercices, elle ne perturbe pas le déroulement du chapitre ;

— c'est surtout en géométrie que ces propriétés seront utilisées ;

— il n'est pas mauvais de mélanger un peu algèbre et géométrie.

3.1 Nous avons employé le mot proportion pour désigner deux objets différents :

— un quadruplet de nombres réels non nuls $\{a, b, c, d\}$ tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

— l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

C'est un abus de langage commode, qui à notre avis, ne risque pas d'engendrer d'erreurs.

Nous avons, ici, employé le mot rapport comme synomyme de quotient. Ce mot s'emploie aussi dans un sens un peu différent , rapport de deux vecteurs colinéaires, rapport de deux grandeurs de même nature ; il apparaît alors comme un opérateur d'une multiplication externe. Par exemple, si u et v sont deux vecteurs colinéaires tels que $v \neq \theta$, et si k est le réel tel que $u = k \cdot v$, on dit que k est le rapport des vecteurs u et v et on pourrait écrire que $k = \frac{v}{u}$. Nous avons préféré éviter une telle écriture avec les élèves. Notons qu'on ne dit pas, naturellement, que k est le quotient des vecteurs u et v.

V – OU ON RETROUVE LA MACHINE A MULTIPLIER —— page 25

5.1 - 5.2 Nous avons utilisé des machines à multiplier en 4ème pour illustrer la définition de la multiplication ; ici, nous démontrons un résultat qui à l'air de justifier théoriquement son emploi.

En fait, dans la géométrie utilisée ici, on utilise les propriétés des nombres, et en particulier la multiplication. Ce serait donc un cercle vicieux que d'affirmer qu'ici on a justifié l'utilisation antérieure de la machine à multiplier.

On peut plutôt considérer que nous avons donné axiomatiquement l'existence et les propriétés essentielles des nombres, même si nous avons accompagné ceci de nombreuses illustrations. Il serait donc incohérent, d'un point de vue logique, de vouloir démontrer par la suite l'un ou l'autre de ces axiomes.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux : classement des exercices.

Les numéros 1 à 4 sont des exercices sur les proportions.

Les numéros 5 à 12 sont des exercices sur une droite graduée.

Les numéros 13 à 18 utilisent l'axiome de Thalès et sa réciproque dans le cas du milieu, et auraient donc pu être proposés en 4ème.

Les numéros 20 et 21 demandent des calculs sur des graduations dans des situations ou apparaît l'axiome de Thalès et sa réciproque.

Les numéros 19, 22, 29, 31 et 32 utilisent l'axiome de Thalès.

Le numéro 33 propose une démonstration de la réciproque de l'axiome de Thalès.

Les numéros 23, 24, 25, 26, 27 et 30 utilisent l'axiome de Thalès et sa réciproque.

Les numéros 28 et 34 utilisent l'axiome de Thalès, sa réciproque et le cas particulier du milieu.

Les numéros 35, 36 et 37 sont des observations dans un plan matériel.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

3 Il y a peut-être lieu de s'arrêter un petit moment sur le fait qu'un problème n'a pas toujours une solution, on n'a pas toujours une solution unique : ce n'est pas très habituel pour les élèves.

4 On peut évidemment proposer une démonstration comme celle qui est suggérée ci-dessous. Appelons le rapport $\frac{a}{b}$. On peut écrire que $a = kb$, $c = kd$, puis que $a + c = k\,(b + d)$ et $a - c = k\,(b - d)$, etc.

Il est certainement plus simple pour les élèves de contrôler que le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens.

5 Un exemple de parallélogramme aplati.

6, 7 Ces exercices ont pour objet de faire calculer des surlignés et des rapports de surlignés. Pas question de faire une quelconque démonstration sur les divisions harmoniques.

13 C'est l'occasion d'utiliser le fameux «on démontrerait de même».

16 La propriété étudiée est en quelque sorte la réciproque de la propriétée étudiée dans l'exercice 13.
3. C'est une démonstration toujours difficile pour les élèves.
Les deux droites IJ et IK sont parallèles à deux droites parallèlles ; elles sont donc parallèles, et comme elles ont un point commun, elles sont confondues ; les points I, J et K sont alignés.

17 Beaucoup d'élèves ne savent peut-être pas ce qu'est une médiane d'un triangle : le programme de 4ème n'en parle pas.

24 C'est un cas particulier de la propriété de Pappus que nous avions donné à observer aux élèves dans le livre de 4ème, chapitre : DROITES ET POINTS.
Dans le cas général proposé alors, les droites AD et CF se coupent en un point M, les droites AE et BF se coupent en un point N, les droites BD et CE se coupent en un point I et les droites M, N et P sont alignés.

27 On peut rapprocher ce problème du problème 13.

28 1. Les élèves ne verront peut-être pas immédiatement comment appliquer Thalès à cette situation.
2. Question difficile, puisqu'il faut reconnaître que ce qu'on a fait sur la droite AC peut se refaire sur la droite AB.

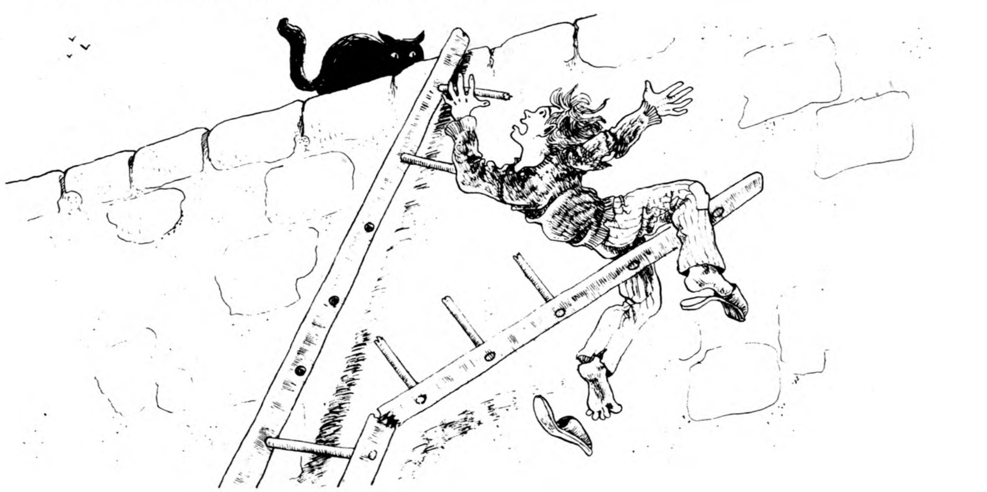
31 Ce travail sur des surlignés à partir de rapports égaux est certainement très difficile.

32 C'est en quelque sorte la réciproque du 31. Mêmes difficultés.

34 Ce qui est difficile ici, c'est la longueur de l'énoncé qui risque de faire perdre de vue aux élèves ce qu'on cherche à faire.
Peut-être avaient-ils déjà fait l'observation correspondante dans un plan matériel ; le leur rappeler éventuellement.

35 Les droites AA', BB' et CC' peuvent être concourantes ou parallèles.

36 Problème à rapprocher du problème 30.



COMMENTAIRES DU CHAPITRE R

Les nombres réels

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Complément naturel du chapitre R du manuel de 4ème, ce chapitre

* fait le point sur les connaissances acquises alors,
* apporte quelques connaissances nouvelles, notamment en ce qui concerne les racines carrées et les équations et inéquations,
* s'intègre dans la progression que nous proposons en ce qui concerne le calcul numérique et littéral.

1.2 En ce qui concerne la connaissance des nombres réels, nous n'avons pas d'autre ambition que de reprendre et de préciser ce qui avait déjà été suggéré ou expliqué en classe de 4ème :

* il n'est pas déraisonnable d'imaginer des nombres qui ne sont pas rationnels. L'étude des racines carrées et, dans le chapitre DO, l'étude de l'axiome de Pythagore, devraient normalement aider les élèves à mieux percevoir la nécessité de ces nouveaux nombres.
* $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné. C'est un surcorps de $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$. (Bien entendu, cette terminologie n'est pas destinée aux élèves). Du point de vue des opérations et de l'ordre, les réels n'apportent donc rien de nouveau à ce niveau d'étude. Cela ne paraîtra peut-être pas si évident aux élèves, dont l'attention est évidemment très portée vers les règles de calcul pratique. Par exemple, le fait qu'il ne soit pas possible de donner une écriture plus simple de $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ alors qu'on peut en donner une de $0{,}7 + 2{,}4$ peut les amener à penser que les propriétés de l'addition ne sont pes les mêmes dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{Q}$.
* l'ensemble $\mathbb{R}$ possède une propriété qui n'a pas l'ensemble $\mathbb{Q}$: tout réel positif ou nul a une racine carrée. C'est la seule propriété nouvelle
* quel que soit n dans $\mathbb{N}$, tout réel admet des valeurs approchées décimales à 10^{-n} près.

La recherche de racines carrées approchées, à l'aide d'une table, que nous proposons en R5 paragraphe III, peut aider à comprendre qu'il existe des nombres dont on ne peut trouver des valeurs approchées décimales en effectuant des divisions. C'est encore une façon de percevoir les nombres irrationnels.

Une calculatrice, évidemment par ailleurs bien plus performante, ne permet pas de percevoir immédiatement cette réalité.

* si d est une droite, il existe des bijections de d sur IR.

Il est possible que, petit à petit, les rélèves réussissent à appréhender cette idée difficile et comprennent qu'on ne peut pas se contenter de droites graduées par ID_1 ou par ID_2. Le travail sur les graduations proposé dans le chapitre TH pour préparer l'introduction de l'axiome de Thalès devrait les y aider.

Rappelons d'ailleurs que les seules bijections de d sur IR qui nous intéressent à présent sont celles qui sont suggérées par des échelles régulières graduées (voir les commentaires et les compléments mathématiques sur le chapitre TH).

Notons une fois de plus comment l'idée de départ, déjà présente à l'école primaire : un trait rectiligne sur lequel on a marqué des points, a évolué peu à peu jusqu'à devenir une «droite mathématique graduée par IR» (c'est-à-dire plongée dans un plan muni des axiomes de Thalès et de Pythagore). C'est ce que nous avons appelé l'évolution du statut des objets mathématiques [livre du maître, 4ème, page 13]. Cette évolution, progressive, continue, n'est évidemment qu'imparfaitement prise en charge par l'utilisation du bleu et du noir dans ce livre.

1.3 Nous avons très largement utilisé cette «vision géométrique» des nombres réels dans R2 et R3 pour parler d'ordre et de valeur absolue (ces deux sous-chapitres se contentent d'ailleurs de reprendre l'essentiel de ce qui avait été fait en 4ème).

Nous n'avons pas jugé utile de donner la définition d'un ordre total sur IR. En particulier, nous pensons qu'un énoncé comme : «soit a et b deux nombres réels, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$» est totalement incompréhensible tant qu'on n'en a pas compris la nécessité, ce qui dépasse largement, à notre avis, le cadre d'une classe de 3ème.

Quant à la propriété «soit a, b et c trois nombres réels, si $0 \leqslant c$ et $a \leqslant b$ alors $ac \leqslant bc$; si $c \leqslant 0$ et $a \leqslant b$, alors $bc \leqslant ac$, il est possible que certains élèves puissent en comprendre, au moins formellement, une démonstration «algébrique». Nous ne voyons cependant pas très bien ce que cette propriété peut signifier pour eux tant qu'il n'ont pas compris que «multiplier par un même nombre», c'est «faire une homothétie sur la droite».

Cela ne nous a pas empéché de proposer quelques démonstrations simples faisant intervenir ordre et opérations comme par exemple en R2 paragraphes 4.1 et 4.2 ou en R4 paragraphe 1.1.

Enfin nous souhaitons fortement que, à ce niveau, tout ce qui concerne la valeur absolue soit traitée essentiellement par le dessin. C'est certaienement la meilleure façon de le faire comprendre et de surccroit, c'est une bonne préparation à l'étude de l'analyse.

Si nous n'avons pas établi que $|x \times y| = |x| \times |y|$, c'est qu'on n'avait pas ensuite l'occasion de faire fonctionner cette propriété. Quant à la relation $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, elle apparaît de façon naturelle, géométriquement, dans le paragraphe II du sous-chapitre DD2 (distance sur une droite).

1.4 Nous n'avons séparé les révisions sur le calcul numérique [R1, paragraphe III] que pour des raisons de commodité.

Bien que les applications polynômes ne soient plus au programme de cette classe, il nous semble utilie qu'un élève sache développer, réduire et même factoriser, dans des cas simples, une expression contenant une lettre.

Toutes ces questions ne font évidemment apparaître aucune connaissance nouvelle par rapport à la classe ce 4ème. Elles sont cependant indispensables, ici, pour une véritable progressivité de l'apprentissage du calcul.

Conformément au programme de la classe nous n'avons pas parlé des fractions rationnelles.

Ce qui est nouveau, en matière de calcul pratique en 3ème, c'est l'utilisation du symbole $\sqrt{\ }$. Nous y avons consacré le sous-chapitre R4.

1.5 En matière de calculs approchés, outre la question des valeurs approchées décimales d'un réel dont nous avons parlé plus haut, nous nous sommes contentés

— d'additionner membre à membre des inégalités de même sens,

— de multiplier membre à membre des inégalités de même sens dans le cas de nombres positifs,

— de faire comprendre que dans les autres cas : soustraction, multiplication avec des nombres négatifs, divisions, on ne peut disposer de règles automatiques aussi simples.

1.6 Le chapitre se termine par une étude assez longue des équations et des inéquations dans IR. Cette étude n'est d'ailleurs longue que parce que nous l'avons voulue progressive, complète et réfléchie, ne nous contentant pas d'inculquer des automatismes. Nous espérons que la réflexion conduite tout au long du livre de 4ème sur les équations, l'attention apportée à la structure de groupe, l'étude en troisième d'équations et d'inéquations comme $|x| = 4$ ou $|x| < 4$, aideront à rendre féconde la démarche suivie dans ces sous-chapitres R6 et R7.

Nous avons reporté au chapitre ED l'étude de la «mise en équation» d'un problème. Cela permettait de traiter en même temps des problèmes dans IR et des problèmes dans IR $\times$ IR.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

R1 **DES CALCULS COMME EN 4ème** ———————— page 41

Beaucoup d'élèves ne voient pas tout de suite que dès qu'on a mis une croix dans une case, on doit obligatoirement en mettre une dans les cases qui se trouvent au-dessous et dans la même colonne. C'est sans aucun doute parce que la relation d'inclusion entre les ensembles de nombres est mal comprise.

I – OU ON UTILISE LES PROPRIETES DE L'ADDITION ET DE LA MULTIPLICATION ———————— page 41

1.1 On sait combien les élèves, dans le feu de l'action, confondent souvent l'inverse et l'opposé d'un nombre, le rôle de 1 et celui de 0. C'est pourquoi, nous avons proposé ces exercices.

Exercice 3.

Plus d'un élève aura du mal à accepter que $\sqrt{5}+2$ soit l'inverse de $\sqrt{5}-2$.

1.2 Exercice 1.

Commutativité et associativité de l'addition.

Exercice 2.

Commutativité et associativité de la multiplication.

Exercice 3.

Distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exercice 4.

Opposé d'une somme.

II – CALCULS SUR LES QUOTIENTS DES REELS ———————— page 42

2.1 Exercice 2.

Réponses : $\frac{9}{4}$; $\frac{-1}{3}$; $\frac{13}{6}$; $\frac{-1}{4}$; $\frac{-3}{2}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{45}{13}$.

2.2 Réponses : $\frac{4}{7}$; $\frac{7}{22}$; -1 ; $\frac{17}{28}$; -30 ; $\frac{15}{2}$; $\frac{175}{6}$; $-\frac{1}{7}$; 625.

2.3 Réponses : $\frac{-3}{20}$; $\frac{-15}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{7}$; 2 ; $-3{,}5$; π.

2.4 Réponses : -1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{19}{15}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{3}$; $-\frac{23}{7}$; $\frac{19}{12}$; $\frac{3\sqrt{3}}{5}$;

$\frac{1}{30}$; $-\frac{9}{10}$; $\frac{203}{360}$; $\frac{-37}{270}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{7}{5}$.

III – OU L'ON CALCULE AVEC DES LETTRES ———— page 44

3.3 Exercices 3.3 4 et 3.4 2.

Nous avons tenu à détailler de nouveau, en utilisant des boîtes comme nous l'avions fait en 4ème : il y a là, en effet, une difficulté très grande d'utilisation des lettres muettes.

R2 **I – COMPARAISON DE NOMBRES REELS** ———— page 46

Beaucoup d'élèves ont des difficultés pour placer des points. Par exemple, ils placent le nombre 0,5 à 5 mm de 0 au lieu de 21 mm, ils ne voient pas comment placer les septièmes, ou les tiers, ou $\sqrt{2}-3$.

II – ORDRE ET ADDITION ———— page 47

2.2 «Additionner un même nombre» c'est donc «faire une translation sur la droite». La conservation de l'ordre est donc évidente.

III – ORDRE ET MULTIPLICATION ———— page 48

3.1 Il y aura peut-être encore des difficultés pour faire les dessins demandés.

Exercice 1.

Bien entendu, si a et b sont des signes contraires, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont rangés dans le même ordre que a et b.

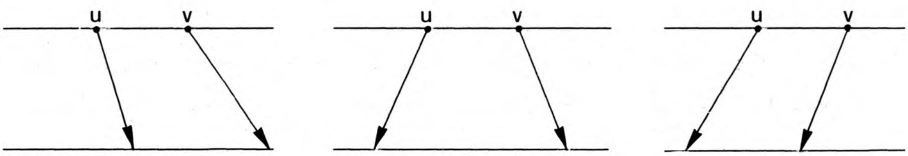
3.2 Nous utilisons une nouvelle fois la «machine à multiplier» comme nous l'avons fait à différentes reprises dans le livre de 4ème.

«Multiplier par un même nombre» c'est donc «faire une homothétie sur la droite». On en déduit de façon évidente :

– la conservation de l'ordre lorsque l'homothétie est positive,
– le renversement de l'ordre lorsque l'homothétie est négative.

IV – D'AUTRES PROPRIETES DES INEGALITES DANS $\mathbb{R}$ — page 50

4.1 Ce que nous proposons là est pratiquement une démonstration. En effet, on ne peut évidemment trouver qu'une des trois situations suivantes :



puisqu'on ajoute à u un nombre plus petit que celui qu'on ajoute à v.

Exercice.

Un contre-exemple suffit pour affirmer la négation d'une propriété universelle.

4.2 Remarques de même nature.

R3

II – VALEUR ABSOLUE D'UN REEL ———————— page 53

2.2 Exercices.

3. Il s'agit donc de trouver l'ensemble des points d'une droite graduée dont la distance à l'origine est égale à 3.

5. Remarque analogue.

R4

I – ORDRE ET CARRES ———————— page 54

Les élèves ne sont certainement pas familiarisés avec une démonstration par disjonction des cas. La démonstration proposée ici n'est donc peut-être pas aussi simple qu'il y paraît.

Exercices.

Les dessins devraient faire apparaître l'analogie entre «ordre et carrés» et «ordre et valeurs absolues».

II – RACINE CARREE D'UN REEL POSITIF OU NUL ——— page 56

Il nous semble que dire que la racine carrée du nombre positif a est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$ est la seule façon raisonnable de procéder. Dire qu'un nombre positif a deux racines carrées, l'une positive et l'autre négative nous paraît extrêmement dangereux. Cela peut conduire, entre autre choses, à écrire des choses aussi admirables que $\sqrt{0{,}16} = \mp 0{,}4$!

IV – ORDRE ET RACINES CARREES ———————— page 58

Encore un exemple d'utilisation de lettres muettes dans un énoncé quantifié. Il nécessitera certainement qu'on s'y arrête un moment.

Exercice 1.

C'est l'occasion de rappeler que pour comparer deux rationnels comme par exemple $\frac{13}{7}$ et $\frac{14}{8}$, il suffit souvent d'en calculer des valeurs approchées.

Exercice 2.

On est conduit à élever au carré un produit de deux nombres. Par exemple $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \times (\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$. Ce ne sera peut-être pas immédiatement évident pour tous les élèves.

V – CALCULS SUR LES RADICAUX ———— page 58

5.1 Exercice 2.

$\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

$\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{98} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 0$.

$\sqrt{54} + \sqrt{294} - \sqrt{486} = 3\sqrt{6} + 7\sqrt{6} - 9\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

5.2 Exercice 1.

$$\sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{75}{100}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5.3 On sait combien d'élèves distribuent aisément la racine carrée sur l'addition. Ce qui est fait ici ne suffira sans doute pas pour qu'ils ne commettent jamais cette erreur.

R6 **I – UN PEU DE REVISION : LES PUISSANCES DE 10** ———— page 62

1.3 La propriété étudiée est évidemment un cas particulier de la «règle de la virgule» dans une multiplication.

II – VALEURS APPROCHEES D'UN RATIONNEL ———— page 64

Nous avons été très bref. Cette question a été largement traitée en 4ème.

III – RACINES CARREES APPROCHEES ———— page 65

Nous avons traité cette question de cette façon pour deux raisons.

D'abord, comme nous l'avons dit dans les commentaires généraux, nous voulions faire comprendre que les valeurs approchées décimales de certains réels ne peuvent pas être trouvées en effectuant une division.

Ensuite, nous ne voulions pas que le livre **impose** l'utilisation d'une machine à calculer.

Il est bien évident que le procédé proposé est bien peu performant, c'est pourquoi nous nous sommes contentés de racines approchées à 10^{-1} près. Nous souhaitons bien entendu que chaque classe puisse disposer de suffisamment de machines pour pouvoir lire des racines carrées avec une approximation plus fine.

Ce peut être l'occasion d'attirer l'attention des élèves sur le fait que certaines machines donnent un résultat approché par défaut alors que d'autres donnent un résultat approché au plus près.

IV – ENCADREMENTS ———————————— page 66

Comme nous l'avons dit plus haut, nous nous sommes contentés d'encadrements de sommes et d'encadrements de produits dans le cas de nombres positifs.

Voici un exercice qu'on peut proposer si on dispose d'un peu de temps et si les élèves sont intéressés par ce genre de question. Il est l'occasion d'une réflexion intéressante sur la quantification d'un énoncé et sur une propriété tantôt vraie, tantôt fausse.

Voici des encadrements de deux nombres inconnus x et y :

$$2{,}8 \leqslant x \leqslant 3{,}1 \quad \text{et} \quad -0{,}6 \leqslant y \leqslant 0{,}5.$$

Est-il vrai que $2{,}8 - (-0{,}6) \leqslant x - y \leqslant 3{,}1 - 0{,}5$?

Tu as certainement remarqué que $2{,}8 - (-0{,}6) > 3{,}1 - 0{,}5$.

Voici maintenant des encadrements de deux autres nombres inconnus z et t :

$$8 < z < 14 \quad \text{et} \quad 4 < t < 7.$$

Est-il vrai que $8 - 4 < z - t < 14 - 7$?

On obtiendra certainement des réponses «oui». Faire alors essayer des valeurs convenables pour x et y. Par exemple 9 et 6, 10 et 5.

4.5 Exercices.

Exercices très difficiles. Les élèves n'accepteront certainement pas très facilement que la partie entière de $-\pi$ soit -4.

R6 **I – EQUATIONS DANS LES GROUPES** $(\mathbb{R}, +)$ **et** $(\mathbb{R}^*, \times)$ —— page 67

Remarque.

On peut résoudre l'équation $4x = 0$ comme les équations dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ parce que tout réel non nul est régulier pour la multiplication dans $\mathbb{R}$ (et pas seulement dans $\mathbb{R}^*$).

1.3 et 1.4 Dans ces deux paragraphes, nous essayons de faire comprendre que les deux transformations régulières utilisées pour passer d'une équation à une équation équivalente découlent des propriétés de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$.

1.3 Exercice.

Réponses : $\frac{9}{2}$; $-\frac{13{,}8}{3{,}9}$ (ou encore $-\frac{46}{13}$).

1.4 Exercice.

Réponses : $-\frac{6{,}3}{2{,}2}$; $\frac{6{,}2}{5{,}5}$.

II – PLUSIEURS ECRITURES D'UN MEME NOMBRE ——— page 70

Là au contraire, aucune propriété nouvelle ; on transforme simplement des écritures.

2.1 Exercice.

Réponses : 5,5 ; $-\frac{12}{13}$; 23.

2.2 Exercice.

Réponses : $\frac{9}{20}$; $-\frac{5}{7}$.

2.3 Nous avons voulu indiquer toutes les étapes possibles de cette résolution. En particulier, si nous avons écrit l'équation

$$\frac{3(x-1)+8-(x-3)}{6}=\frac{12x+6}{2},$$

c'est pour bien faire comprendre le rôle du signe - qui, dans l'énoncé, précède la fraction $\frac{x-3}{6}$. Peut-être aidons-nous ainsi à éviter une erreur de signe très classique. Bien entendu on peut aller beaucoup plus vite dès qu'on a compris ce qu'on fait ; nous le signalons dans la remarque.

Nous nous opposons fortement à toute réponse du type : «la solution est $x=\frac{1}{5}$». La solution d'une telle équation est un nombre et NON une égalité. La phrase $x=\frac{1}{5}$ est encore une équation (c'est-à-dire un problème équivalent au problème posé).

Exercices.

Réponses : $\frac{43}{2}$; $\frac{1}{3}$; 0.

III – ENCORE DES PROBLEMES AVEC ZERO ———————— page 72

3.3 Exercices.

Réponses : ϕ ; IR ; ϕ.

IV – FAISONS LE POINT ———————————————— page 73

Bien entendu, à partir de la seconde, toutes les équations proposées sont équivalentes. Les élèves ne verront peut-être pas qu'on est passé de la première à la seconde en élevant les deux nombres au carré.

Puisque le nombre trouvé n'est pas solution de l'équation proposée, les élèves comprendront peut-être que lorsqu'on transforme une équation par un procédé raisonnable (ici, une élévation au carré) il n'est pas vide de sens de se demander si on obtient une équation équivalente.

Ici, évidemment, toute solution de l'équation proposée est solution des équations suivantes. C'est la réciproque qui est fausse.

La conclusion à tirer est que en dehors des deux transformations régulières étudiées dans ce chapitre, toute méthode de transformation doit être contrôlée.

R7

Nous avons délibérément suivi le même plan et la même méthode que pour les équations.

I – DES INEQUATIONS DANS IR : ORDRE ET OPERATIONS page 73

1.2 Nous avons évité les notations $+\infty$ et $-\infty$ et le mot *infini*, qu'il aurait fallu expliquer.

1.3 Exercice.

Réponses : $(\leftarrow\ ;\ -5]$; $(\leftarrow\ ;\ -1]$.

1.4 et 1.5 Les questions posées et les dessins permettront, nous l'espérons, le rapprochement avec le paragraphe 3.2 de R2.

1.6 Exercices.

Réponses : $(\leftarrow\ ;\ -7]$; $]1{,}8\ ;\ \rightarrow)$; $]\frac{3+\sqrt{2}}{7}\ ;\ \rightarrow)$; $(\leftarrow\ ;\ 0[$.

II – PLUSIEURS ECRITURES D'UN MEME NOMBRE ———— page 77

Exercice.

Réponses : $(\leftarrow\ ;\ \frac{7}{12}]$; $(\leftarrow\ ;\ 9[$; $(\leftarrow\ ;\ 0[$; $(\leftarrow\ ;\ \frac{11}{4}]$; $(\leftarrow\ ;\ \frac{7}{12}]$.

III – IL FALLAIT S'Y ATTENDRE : VOILA DE NOUVEAU ZERO ! page 78

3.2 Remarquons que la résolution de cette inéquation conduit à écrire l'inéquation équivalente $6x - 6x \leqslant -19 - \frac{21}{2}$. Il est évidemment inutile d'écrire $-19 - \frac{21}{2}$ sous la forme $-\frac{59}{2}$: il suffit de savoir que ce nombre est négatif.

3.3 Exercice.

Réponses : ϕ ; IR ; ϕ.

IV – INEQUATIONS SIMULTANES page 79

Exercice.

Réponses : $[-7\ ;\ 3[$; $]-\frac{6}{5}\ ;\ \longrightarrow)$; $\{3\}$; ϕ.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux : classement des exercices.

Les numéros 1, 2 et 3 font intervenir les propriétés de l'addition et de la multiplication dans IR.

Les numéros 4 à 14 sont des exercices de calcul sur les quotients de réels.

Les numéros 15 à 24 concernent les réductions et développements.

Les numéros 25 à 28 concernent des factorisations.

Les numéros 29, 30, 31 et 45 sont l'occasion d'un retour sur les applications.

Les numéros 32 à 38 sont des exercices sur l'ordre dans IR.

Les numéros 39 à 42 sont des exercices sur les encadrements.

Les numéros 43, 44 et 50 sont des calculs de valeurs absolues de réels.

Les numéros 46 et 47 font résoudre, dans IR, des équations où figurent des valeurs absolues de réels.

Les numéros 48 et 49 font résoudre, dans IR, des inéquations où figurent des valeurs absolues de réels.

Les numéros 51, 52 et 53 utilisent la définition de la racine carrée d'un réel.

Les numéros 54 et 55 font comparer des racines carrées de réels.

Les numéros 56 et 57 concernent la racine carrée d'un carré.

Les numéros 58 à 66 sont des exercices sur des produits et quotients de racines carrées.

Les numéros 67 et 68 sont des exercices sur des sommes de racines carrées.

Les numéros 69 , 70 et 71 ont pour but de rendre entier le dénominateur d'un quotient.

Les numéros 72 et 73 sont l'occasion d'un retour sur les puissances de dix.

Les numéros 74, 75 et 76 concernent les écritures décimales d'un réel.

Les numéros 77 et 80 sont liés à l'existence, dans $\mathbb{D}$, de la racine carrée d'un nombre décimal.

Les numéros 78 et 79 font rechercher la racine carrée d'un décimal.

Les numéros 81 et 82 font rechercher des racines carrées approchées de nombres réels.

Les numéros 83 à 89 font résoudre, dans $\mathbb{R}$, des équations.

Les numéros 90 à 93 font résoudre, dans $\mathbb{R}$, des inéquations.

Les numéros 94 à 96 font résoudre, dans $\mathbb{R}$, des systèmes d'inéquations.

3.3 Commentaires particuliers ; réponses.

5 Les réponses, dans l'ordre, sont : $-\frac{3}{5}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{-23}{100}$; 40 et 4.

6 Les réponses sont $\frac{3}{5}$ et $\frac{21}{35}$.

7 Les réponses sont $\frac{49}{48}$ et $\frac{147}{144}$.

10 Les réponses sont $\frac{-26}{35}$ et $\frac{7}{18}$.

12 Les réponses sont $\frac{7}{12}$; 1 et $\frac{-3}{5}$.

13 Les réponses sont $\frac{55}{6}$; $\frac{-81}{125}$ et $\frac{50}{33}$.

14 Les réponses sont 0 ; 1 ; 1 ; $\frac{5}{3}$ et $\frac{3}{140}$.

30 $h(0) = k(0) = 1$; $h(-0{,}5) = k(-0{,}5) = 2{,}25$ et pourtant $h \neq k$ (par exemple : $h(1) = 36$ et $k(1) = 6$). Encore une occasion de réfléchir sur une quantification et sur l'égalité de deux applications.

31 Il n'est pas certain que tous les élèves voient qu'on peut utiliser indifféremment $(x - \sqrt{2})^2$ ou $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2$ pour calculer les images demandées et que par conséquent on essaie de faire de la manière la plus simple.

Une bonne occasion de discuter de la signification du signe = dans l'écriture $(x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2$.

32 $\frac{-256}{4}$; $\sqrt{2}-5$; $-\frac{3}{5}$; 0,7 ; $\frac{11}{15}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{3}$; $5\sqrt{2}$.

33 $\frac{-76}{20}$; $\frac{-7}{2}$; $-3{,}4$; $\frac{-13}{4}$; $\frac{5}{2}$; 3,5 ; 3,701.

35 1ère question : $-\frac{5}{3}$; -1 ; $-\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}$; 2 ; $\frac{7}{3}$.

2ème question : $-\frac{7}{3}$; -2 ; $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1 ; $\frac{5}{3}$.

3ème question : $-\frac{4}{3}$; -1 ; $\frac{-3}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$.

36 $-10a$; $-9a$; $-\frac{1}{3}a$; a ; $7a$; $13a$; $10^2 a$.

37 $15b$; $3b$; b ; $2 \times 10^{-3} b$; $-\frac{1}{3}b$; $-b$; $-10b$.

38 Si $a \leqslant b$ alors $a + (-c) \leqslant b + (-c)$.
Si $d \leqslant c$ alors $-c \leqslant -d$ et $b + (-c) \leqslant b + (-d)$.
Par transitivité, $a - c \leqslant b - d$.

39 Il est conseillé de faire un dessin pour expliquer pourquoi dans l'encadrement, on prend une valeur approchée par défaut à gauche et une valeur approchée par excès à droite.

Un corps, dans l'eau, flotte si sa densité ou mesure volumique est inférieur à 1 : il faudra peut-être l'indiquer aux élèves. Le résultat numérique ne permet pas de conclure.

40 $-0{,}268 < -2+\sqrt{3} < -0{,}267$; $3{,}464 < 2\sqrt{3} < 3{,}466$; $1{,}534 < 5-2\sqrt{3} < 1{,}536$.
Pour ce dernier cas, il ne sera peut-être pas évident pour tous les élèves de passer par l'encadrement de $-2\sqrt{3}$.

41 $-3{,}142 < -\pi < -3{,}141$; $0{,}858 < 4-\pi < 0{,}859$; $-12{,}568 < -4\pi < -12{,}564$.

42 $4{,}8 < \pi+\sqrt{3} < 5$; $-1{,}8 < -\sqrt{3} < -1{,}7$; $1{,}3 < \pi-\sqrt{3} < 1{,}5$; $5{,}27 < \pi\sqrt{3} < 5{,}76$.

45 $f(\frac{3}{2}) = -3$; $f(\frac{1}{2}) = -1$; $f(-\frac{3}{2}) = 3$ et $f(-\frac{1}{2}) = 1$.

57 On peut éventuellement, en fin d'exercice, faire remarquer que $\sqrt{4x^2} = |2x|$.

68 Les réponses sont $13\sqrt{2}$; $-8\sqrt{5}$; $3\sqrt{13}$; $3\sqrt{7}$; 0.

71 Les réponses sont $38+8\sqrt{12}$; $38-8\sqrt{12}$; -26 et $\frac{-38}{13}$.

76 Il sera sans doute bon de rappeler que l'écriture décimale réduite d'un nombre décimal est une écriture décimale dont le dernier chiffre à droite n'est pas zéro.

77 Certains élèves proposeront sans doute 0,6 comme solution de l'équation $x^2 = 3{,}6$. Il sera sans doute utile de leur faire calculer $(0{,}6)^2$. C'est l'occasion de revenir d'une part sur ce qu'est une solution d'une équation, d'autre part sur le fait que l'écriture décimale réduite du carré décimal a nécessairement un nombre pair de décimales. Remarques analogues pour l'équation $x^2 = 360$.

78 $\sqrt{22\,801} = 151$; $\sqrt{121\,104} = 348$; $\sqrt{248\,004} = 498$; $\sqrt{4\,761} = 69$.

79 $\sqrt{22\,090\,000} = 4\,700$; $\sqrt{453{,}69} = 21{,}3$; $\sqrt{0{,}000\,169} = 0{,}013$.

$\sqrt{0{,}010\,201} = 0{,}101$; $\sqrt{10{,}048\,9} = 3{,}17$; $\sqrt{14{,}976\,8} = 3{,}87$.

80 On n'a pas posé la question pour des nombres comme 23 ou 107 car le raisonnement est trop difficile. En effet, il faut d'abord expliquer pourquoi si ce nombre existait, il serait nécessairement entier. Ensuite, il faut expliquer pourquoi le carré d'un entier ne peut pas se terminer par 3 ou 7.

81 Les réponses sont pour 1 : 6 ; 27 ; 45 ; 369
pour 2 : 2 ; 12 ; 0 ; 2.

82 Les réponses sont pour 1 : 8,5 ; 35,6 ; 49,3
pour 2 : 2,5 ; 3,6 ; 0,3.

83 Les réponses sont 0 ; $-\sqrt{5}$; $\frac{4-\pi}{7}$; $\frac{-11}{2}$; $\frac{-7}{26}$.

84 Les réponses sont -2 ; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{-95}{51}$; 6.

85 Les réponses sont 0 ; 3 ; 27 ; -41 ; $\frac{70}{3}$.

86 Les réponses sont $\frac{-21}{5}$; $\frac{8}{13}$; $-\frac{11}{2}$; $\frac{16}{9}$.

87 Les réponses sont $\mathbb{R}$; $\frac{-12}{13}$; ϕ ; $-\frac{7}{9}$; $2{,}2$.

88 Les réponses sont $\mathbb{R}$; 0 ; ϕ.

89 Les réponses sont ϕ ; ϕ et 0.

90 Les réponses sont $[8\,;\longrightarrow)$; $[-\sqrt{5}\,;\longrightarrow)$; ϕ et ϕ.

91 Les réponses sont $]6\,;\longrightarrow)$; $[\frac{4}{11}\,;\longrightarrow)$; $\mathbb{R}$; $(\longleftarrow;5[$.

92 Les réponses sont $\mathbb{R}_+$; $]-\frac{5}{4}\,;\longrightarrow)$ et $]0\,;\longrightarrow)$.

94 Les réponses sont $[7\,;\,12[$; $]\frac{13}{2}\,;\longrightarrow)$; $\{-3\}$ et ϕ.

95 Les réponses sont $[-8\,;-6]$; $[\frac{-5}{2}\,;\frac{-3}{2}]$; $[\frac{20}{3}\,;\,\frac{22}{3}]$.

96 Les réponses sont $(\longleftarrow;3{,}9]$; $[-11\,;0[$; $\{0{,}5\}$; ϕ.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE VR

Vecteurs et Repérage

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 En classe de 4ème nous avons étudié l'ensemble **T** des translations et l'ensemble **V** des vecteurs dans le plan mathématique. Nous avons cherché à ce que, pour un élève sortant de cette classe,

* se donner un vecteur revienne à se donner une translation ;
* ajouter deux vecteurs revienne à composer deux translations ;
* les propriétés du groupe (**T**, ∘) se transportent sur (**V**, +) même si, évidemment, nous n'avons pas prononcé ce mot.

Le début de ce chapitre reprend donc, dans le plan mathématique, ce que nous avions fait en 4ème dans un plan matériel. Les élèves n'y verront pas grande différence. Le report en classe de 3ème de cette étude théorique a plusieurs raisons :

* cette «répétition» entre les deux classes, conforme à l'esprit et à la lettre du programme, ne peut qu'aider les élèves ;

* en quatrième, nous avions traité le répérage en fin d'année, n'ayant pas beaucoup d'occasions de nous en servir. Ici nous donnons évidemment plus de développements, puisque le domaine d'utilisation est très large notamment grâce à l'introduction de la multiplication externe, au travail sur les droites et applications affines et à tout ce qui touche norme et orthogonalité ;

* notons enfin que, maintenant, nous n'avons plus de problèmes théoriques en ce qui concerne le repérage. Nous avons expliqué dans les commentaires du chapitre TH que si O, I et J sont trois points non alignés, on peut choisir sur la droite OI la graduation de repère (O, I) et sur la droite OJ la graduation de repère (O, J).

1.2 Dans ce chapitre VR, nous poursuivons un triple objectif :

– réviser ce que nous avons étudié en classe de quatrième sur les vecteurs et translations ;
– introduire le repérage dans le plan mathématique ;
– définir le produit d'un vecteur par un nombre réel.

1.3 Dans VR1 nous définissons un repère du plan mathématique comme triplet de points non alignés : nous revoyons, mais en théorie, ce que nous avons fait dans le chapitre SR5 du livre de quatrième.

Dans VR2 et VR3, nous révisons les propriétés de $(\mathbf{T}, \circ)$ et $(\mathbf{V}, +)$ tout en introduisant la notion de coordonnées d'un vecteur dans un repère : les coordonnées d'un vecteur sont les coordonnées de l'un de ses bipoints. Bien sûr, il faut savoir pour cela que des bipoints équipollents sont des bipoints qui ont le même couple de coordonnées.

Un repère étant choisi, il revient au même de se donner un vecteur que de se donner un couple de nombres réels.

1.4 Nous pouvons alors définir le produit d'un vecteur u de coordonnées (x, y) par un réel k comme étant le vecteur de coordonnées (kx, ky) ; nous notons ce vecteur $k \cdot u$. Mais il se pourrait que le vecteur $k \cdot u$ obtenu dépende du repère. Nous avons montré (à l'aide d'un dessin) qu'il n'en est rien en dégageant une propriété de ces deux vecteurs qui est indépendante du repère : soit A un point ; si (A, B) et (A, C) sont des représentant des vecteurs u et $k \cdot u$, A, B et C sont alignés et $\overline{AC} = k\,\overline{AB}$. Ceci est bien indépendant du repère.

1.5 Les nouvelles propriétés des opérations sur les vecteurs se démontrent aisément à partir des coordonnées.

1.6 Nous avons introduit le déterminant de deux vecteurs dans un repère : c'est un outil très performant aussi bien pour reconnaître que deux vecteurs sont colinéaires que pour déterminer une équation de droite (voir le chapitre ED) ; il eût été dommage de ne pas en parler, d'autant plus que les élèves s'en servent avec une extrême facilité.

II – COMMENTAIRES DE DETAILS.

VR1

La plupart des notions et propriétés du plan mathématique étudiées ici correspondent à des observations qui ont été faites en classe de quatrième dans SR5.

I – COORDONNEES D'UN POINT ———————— page 91

1.1 A : (2 ; -1) est une phrase mathématique et c'est toujours ainsi que nous utiliserons une telle écriture.

1.5 Les élèves sont en mesure de prouver que la droite AB est parallèle à la droite OJ. En voici par exemple une démonstration.

La parallèle à la droite OJ qui passe par A coupe d_1 en un point que nous appelons A_1.

La parallèle à la droite OJ qui passe par B coupe d_1 en un point que nous appelons B_1.

Dire que l'abscisse de A est égale à l'abscisse de B revient à dire que l'abscisse de A_1 est égale à l'abscisse de B_1 pour la graduation de repère (O, I).

Donc $A_1 = B_1$.

Les droites AA_1 et BB_1 sont parallèles et elles ont un point commun A_1 : elles sont donc égales. La droite AB qui est aussi la droite AA_1 est donc parallèle à la droite OJ.

On peut faire une démonstration analogue pour les points C et D.

II – COORDONNEES DU MILIEU D'UN BIPOINT ———— page 93

2.1 Nous n'avons pas explicité la démonstration donnant les coordonnées du milieu d'un bipoint : elle avait pratiquement été faite dans le livre de quatrième.

Le dessin de la page 93 suggère fortement la démonstration qui fait appel à l'axiome du milieu. Cette démonstration pourra être faite en classe si on le juge utile.

2.2 Exercices.

L'observation du dessin conduira certainement des élèves à dire que l'abscisse de M est 1. Le calcul montrera que l'abscisse de M est 1,05.

Il nous a semblé intéressant d'introduire des coordonnées non entières de façon que les résultats des observations ne soient pas forcément un accord complet avec les résultats trouvés dans le plan mathématique. Ce pourra être l'occasion d'une discussion intéressante.

III – COORDONNEES D'UN BIPOINT ———— page 94

3.2 Cet exercice a pour objectifs

– d'apprendre aux élèves à lire les coordonnées d'un bipoint sur un dessin : le papier quadrillé facilite grandement ces observations ;

– de faire dessiner des bipoints dont on connaît les coordonnées ;

– d'apprendre à utiliser le dessin pour le contrôle des résultats.

Il faut remarquer que le dessin permet de trouver le point E tel que les coordonnées de (A, E) soient (1 ; 2), qu'il ne permet pas de répondre en ce qui concerne le point F, et qu'il permet de contrôler les résultats pour le point G.

VR2 **I — OBSERVATIONS DANS UN PLAN MATERIEL** ———— page 96

Dans ce paragraphe nous poursuivons deux objectifs :

— réviser ce que nous avons vu en classe de quatrième sur les vecteurs et les translations ;

— introduire la notion de coordonnées d'un vecteur dans un repère.

1.1 Ces manipulations visent à remettre en mémoire les propriétés des translations et des parallélogrammes (milieux et équipollence). Il est bon que les élèves retrouvent ces propriétés sur des dessins qu'ils ont eux-mêmes faits. Nous rappelons ces propriétés dans le paragraphe 2.2.

1.2 Nous faisons observer ici que le fait que des bipoints équipollents aient mêmes couples de coordonnées est indépendant du repère.

II — DE LA PRATIQUE A LA THEORIE ———— page 97

2.2 Voici une démonstration de cette propriété.

Appelons (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C) et (x_D, y_D) les couples de coordonnées des points A, B, C et D.

Les phrases suivantes sont équivalentes.

* (A, B) et (D, C) sont équipollents ;
* (B, D) et (A, C) ont même milieu ;
* $\dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ et $\dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{y_A + y_C}{2}$;
* $x_B + x_D = x_A + x_C$ et $y_B + y_D = y_A + y_C$;
* $x_B - x_A = x_C - x_D$ et $y_B - y_A = y_C - y_D$;
* les bipoints (A, B) et (D, C) ont même couples de coordonnées.

2.4 L'idée qu'il suffit de démontrer une seule égalité de vecteurs pour prouver qu'un ensemble est un parallélogramme n'est pas facile à accepter.

VR3 **I — OBSERVATION DANS UN PLAN MATERIEL** ———— page 101

Ce paragraphe a pour but de remettre en mémoire, par des manipulations, les propriétés $(\mathbf{V}, +)$ et de $(\mathbf{T}, \circ)$.

Nous faisons découvrir les relations qui existent entre les coordonnées de vecteurs et les coordonnées de leurs sommes.

II – DE LA PRATIQUE A LA THEORIE ——————— page 102

2.3 Voici une démonstration de cette propriété dans le cas des vecteurs.

Dans la situation illustrée par le dessin ci-contre,

$x_u = \overline{A_1B_1}$ et $y_u = \overline{A_2B_2}$;

$x_v = \overline{B_1C_1}$ et $y_v = \overline{B_2C_2}$;

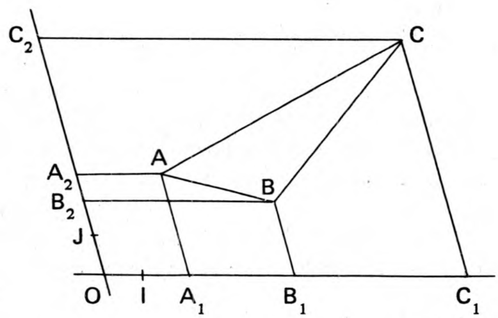
$u + v = \overrightarrow{AC}$, donc

$x_{u+v} = \overline{A_1C_1}$ et $y_{u+v} = \overline{A_2C_2}$;

or $\overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1}$ et

$\overline{A_2C_2} = \overline{A_2B_2} + \overline{B_2C_2}$ donc

$x_{u+v} = x_u + x_v$ et $y_{u+v} = y_u + y_v$.



2.4 De nombreux élèves calculeront les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CA}$ avant de calculer celles de $\overrightarrow{BA} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{CA}$.

Les questions posées ensuite ont pour objectif de leur faire découvrir que le calcul vectoriel leur aurait permis de trouver plus rapidement ces coordonnées.

En effet $\overrightarrow{BA} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA}$;

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA})$;

$= \overrightarrow{BD}$.

VR4

I – VECTEURS NON NULS COLINEAIRES ——————— page 103

1.1 Il nous a semblé naturel d'appeler vecteurs colinéaires des vecteurs qui ont la même direction : c'est la raison pour laquelle nous ne considérons d'abord que des vecteurs non nuls.

II – OBSERVATIONS DANS UN PLAN MATERIEL ——————— page 104

Les paragraphes 2.1 et 2.2 font observer l'équivalence entre le fait que deux vecteurs sont colinéaires et le fait qu'on obtient les coordonnées de l'un en multipliant les coordonnées de l'autre par un même nombre. Cette propriété sera admise dans le paragraphe 3.1.

2.3 Cette manipulation a pour but de faire constater que les observations faites aux paragraphes 2.1 et 2.2 ne sont pas liées au repère.

III – DE LA PRATIQUE A LA THEORIE ——————— page 106

3.2 Nous avons besoin de cette convention par la suite. En effet soit A un point et u un vecteur non nul. Appelons d la droite qui passe par A et qui a pour vecteur directeur u. Soit M un point. Nous serons amenés dans cette situation, à dire que les phrases

«$M \in d$» et «les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires»

sont équivalentes. Pour pouvoir dire cela, il faut bien convenir que u et θ sont colinéaires car

$$A \in d \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AA} = \theta .$$

Bien sûr le cas où $u = v = \theta$ ne présente aucun intérêt : nous n'en avons pas parlé ici.

IV – OBSERVATIONS DANS UN PLAN MATERIEL ——— page 107

Nous faisons observer des dessins pour découvrir que les phrases

* $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$,
* les points A, B et C sont alignés et $\overline{AC} = k\,\overline{AB}$ sont équivalentes. Nous admettrons ensuite cette propriété.

V – DE LA PRATIQUE A LA THEORIE ——————— page 108

5.1 Le dessin proposé suggère fortement la démonstration : c'est une application de l'axiome de Thalès.

Remarquons que si $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ alors $\overline{A_1C_1} = k\,\overline{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{A_2C_2} = k \cdot \overrightarrow{A_2B_2}$: la seule relation $\overline{A_1C_1} = k\,\overline{A_1B_1}$ suffit à démontrer que $\overline{AC} = k\,\overline{AB}$ sauf dans le cas où la droite AB est parallèle à la droite OJ : il faut alors utiliser la relation $\overline{A_2C^2} = k\,\overline{A_2B_2}$.

5.2 Ces exercices ont surtout pour objectif de faire dessiner, sans utiliser le repérage, des représentants de vecteurs tels que $k \cdot u$ quand on a dessiné un représentant du vecteur u.

VI – DETERMINANTS ——————————— page 109

6.3 Remarquons qu'avec la propriété énoncée, θ est colinéaire à θ, ce que nous n'avions pas encore dit.

La démonstration de cette propriété est difficile pour un élève de troisième car il faut étudier de nombreux cas et utiliser de nombreuses lettres : c'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas proposée et que nous avons préféré la faire observer sur des cas numériques dans les paragraphes 6.1 et 6.2.

Voici une démonstration de cette propriété.

Nous ne traiterons ici que le cas où $u \neq \theta$. La démonstration dans le cas où $u = \theta$ et $v \neq \theta$ est analogue ; le cas sans intérêt où $u = v = \theta$ est évident.

* Supposons que u et v sont colinéaires.

Il existe alors un réel k tel que $v = k \cdot u$. (Remarquons que ceci est faux si $u = \theta$ et que la démonstration qui suit ne s'applique pas dans ce cas). Supposons donc que k est un réel tel que $v = k \cdot u$; cela revient à dire que $x' = kx$ et $y' = ky$.

Nous pouvons donc écrire que

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & kx \\ y & ky \end{vmatrix} = k\,xy - k\,xy = 0.$$

* Supposons maintenant que $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$, et donc que $xy' - yx' = 0$.

Dire que $u \neq \theta$ revient à dire que l'un au moins des nombres x et y n'est pas nul. Supposons par exemple que $x \neq 0$, et notons k le réel $\frac{x'}{x}$ (une démonstration tout à fait analogue peut être faite dans le cas où $x = 0$ et $y \neq 0$).

On montre successivement que

$$\begin{aligned} xy' - k\,xy &= 0 && (\text{car } x' = k\,x \text{ et } xy' - yx' = 0), \\ x(y' - k\,y) &= 0, \\ y' - k\,y &= 0 && (\text{car } x \neq 0), \\ y' &= k\,y. \end{aligned}$$

Donc $(x', y') = (k\,x, k\,y)$, et $v = k \cdot u$: les vecteurs u et v sont colinéaires.

6.5 1. Il faut classer ensemble a et f, c et e, b et d.

3. Sur le dessin, les points A, B et C semblent alignés. Or le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est -0,1 ; donc les points A, B et C du plan mathématique ne sont pas alignés. Cette situation peut entraîner des discussions intéressantes dans la classe.

4. Réponse : -3,2.

Nous n'avons pas demandé ici aux élèves de faire un dessin : c'est la première fois que nous faisons ainsi. Cela ne signifie évidemment pas qu'il ne faut pas en faire : c'est bien sûr un moyen indispensable de contrôler les résultats.

VR5

Nous savons déjà que (**V**, +) est un groupe commutatif. Nous dégageons maintenant dans ce chapitre la structure d'espace vectoriel de (**V**, +, .).

I – OPERATION EXTERNE SUR V page 114

1.2 On peut introduire un repère et démontrer les égalités à partir des coordonnées des vecteurs.

Les propriétés des pargraphes II, III et IV sont traitées de façons analogues :

– nous faisons d'abord observer sur un dessin sans utiliser le repérage ;

– nous faisons ensuite démontrer les propriétés correspondantes en utilisant les coordonnées des vecteurs.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux : classement des exercices.

Les numéros 1 à 6 portent sur les coordonnées des points et des bipoints.

Les numéros 8, 9, 11 et 12 portent sur les coordonnées de vecteurs.

Les numéros 7, 10 et 13 portent sur le parallélogramme.

Les numéros 14, 15 et 16 amènent les élèves à dessiner des représentants de sommes de vecteurs.

Les numéros 17 à 20 font fonctionner les propriétés de l'addition dans **V**.

Dans les numéros 21 et 22, les élèves ont à calculer des coordonnées de sommes de vecteurs.

Les numéros 23 et 24 insistent sur l'aspect géométrique de la multiplication d'un vecteur par un réel, et amènent à dessiner des représentants de combinaisons linéaires de vecteurs.

Les numéros 25 à 31 portent sur la propriété suivante : si u a pour coordonnées (x, y), k • u a pour coordonnées (k x, k y).

Dans le numéro 33, on calcule des déterminants.

Les numéros 39 à 44 font fonctionner les propriétés de (**V**, +, •).

Les numéros 45 à 49 portent sur les vecteurs colinéaires sans faire appel au repérage.

Les numéros 50 à 53 sont des problèmes.

3.2 Commentaires particuliers : réponses.

2 I : (-0,5 ; 0,5) ; J : (-1 ; 1) ; K : (2,5 ; -0,5).

3 G : (8 ; 5) ; H : (-7 ; -4).

5 M : (-1 ; 3) ; N : (-2 ; 1).

6 Il faut classer ensemble (A, B), (F, E) et (G, A) ; (C, E) et (D, A) ; (B, F) ; (D, B) et (B, C) ; (G, D) et (F, C) ; (A, F) et (B, E).

7 Les sommets opposés sont A et C ; le centre de symétrie a pour coordonnées (0 ; 1).

9 Ce que les élèves remarquent peut être démontré.

10 Ce résultat ne dépend pas, en fait, des points A, B, C et D.
E : $(-\frac{5}{2} ; -1)$; F : (0 ; -3) ; G : $(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2})$; H : $(-1 ; \frac{5}{2})$.
Le centre de symétrie a pour coordonnées $(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4})$.

11 M : (5 ; 1) ; N : (7 ; -4).

12 D : (9 ; 0).

13 H : (2 ; 1).

20 Si $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ alors,
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$,
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$,
$M = B$.

Si l'équation admet une solution, ce ne peut être que B. Il est facile de vérifier que B est effectivement solution : il y a une solution unique, qui est B.
Si $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ alors,
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$,
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD}$,
$M = D$.

L'équation ne peut avoir d'autre solution que D. On vérifie que D est bien solution.

22 $\overrightarrow{AE}$: (0 ; -2) ; $\overrightarrow{BF}$: (10 ; 2) ; E : (-4 ; -1) ; F : (7 ; 4).

26 $-2 \cdot \overrightarrow{AB}$: (-13 ; -4) ; $\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC}$: (-1,1 ; -0,5) ; $2 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OB} + 3 \cdot \overrightarrow{AD}$: (44,7 ; -0,3).

27 D : (15 ; 0) ; E : (4 ; 9).

28 $k = -4$.

29 $k = -4$.

30 $6 = -2 \times (-3)$.
u et v sont colinéaires si et seulement si $x = 3 \times (-3)$ donc si $x = -9$.

31 $x = \frac{2}{3}$.

32 Les droites OI et AB sont sécantes car A et B n'ont pas la même ordonnée.
E : (1,5 ; 0) ; F : (0 ; -3).

34 r, s et u sont colinéaires.
t, v et w sont colinéaires.

35 $a = -\sqrt{2}$.

36 L'ordonnée de C est 0.

37 L'abscisse de C est 3,5.

38 D : (6,5 ; 0).

41 $-u+2\cdot v+w$; $0{,}3u-2{,}9\cdot v+1{,}9\cdot w$; $-\frac{7}{2}\cdot u-3\cdot v+0{,}5\cdot w$.

44 $u=0{,}5\cdot i-0{,}25\cdot j$.

47 $k=3$.

51 Le but de ce problème est de démontrer, par le calcul, que les médianes du triangle ABC sont concourantes et que leur point commun est situé au tiers de chaque médiane en partant des milieux des côtés

1. Q : (2 ; 4) ; G : (4 ; 3).

3. D'après la définition du point G, la droite QC passe par G.
D'après les réponses à la question 2, les droites BR et AS passent aussi par G.
Les trois droites sont bien concourantes.

52 Le but de ce problème est de démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes ; on utilise ici essentiellement le calcul vectoriel.

3. Puisque $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$, $\{B, G, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés B et C. Le point I est le milieu de la diagonale de (B, C) de ce parallélogramme ; I est donc aussi le milieu de la deuxième diagonale (G, D) et
$$\overrightarrow{GD}=2\cdot\overrightarrow{GI}.$$
Or d'après 2; $\overrightarrow{GA}=-2\cdot\overrightarrow{GI}$; donc $\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GA}$.

5. On démontre que $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}=2\cdot\overrightarrow{GJ}$ comme on démontre que
$$\overrightarrow{GD}=2\cdot\overrightarrow{GI}.$$

53 1. $\overrightarrow{AD}=u+v$; $\overrightarrow{CB}=u-v$; $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\cdot u+\frac{3}{2}\cdot v$; $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\cdot u+\frac{3}{2}\cdot v$;
$\overrightarrow{BM}=u+3\cdot v$; $\overrightarrow{AM}=2\cdot u+3\cdot v$; $\overrightarrow{CM}=2\cdot u+2\cdot v$.
$\overrightarrow{CM}=2\cdot(u+v)=2\cdot\overrightarrow{AD}$; les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et les droites AD et CM sont parallèles.

2. $\{A, Q, M, C\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et M, donc $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{CM}$, et nous savons que $\overrightarrow{CM}=2\cdot(u+v)$.
Nous en déduisons que $\overrightarrow{AQ}=2\cdot\overrightarrow{AD}$ et que D est le milieu de (A, Q). La droite BD est parallèle à la droite QG, et D est le milieu de (A, Q) ; donc B est le milieu de (A, G) et $\overrightarrow{AG}=2\cdot\overrightarrow{AB}$, ou encore $\overrightarrow{AG}=2\cdot u$.
$\overrightarrow{GQ}=2\cdot v$; $\overrightarrow{QM}=v$ donc $\overrightarrow{GM}=3\cdot v$.
$\overrightarrow{AE}=3\cdot v$; $\overrightarrow{AF}=2\cdot u+v$; $\overrightarrow{EF}=2\cdot(u-v)$; $\overrightarrow{EP}=\frac{3}{2}\cdot(u-v)$.
On en déduit entre autre que $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EP}$ sont colinéaires ; donc les droites CB et EF sont parallèles et les points E, F et P sont alignés.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE DO

Distance et Orthogonalité

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Lorsqu'ils arrivent en 3ème, les élèves ont déjà eu l'occasion de manipuler souvent règle graduée, compas et équerre, en particulier en classe de 4ème.

Ils sont donc bien familiarisés avec les notions d'orthogonalité (au sens de l'équerre) et de distance (nombre décimal, avec peu de décimales, qu'on lit sur le bord d'une règle graduée) dans un plan matériel.

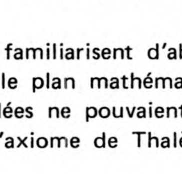
Dans le livre du maître de 4ème, nous avons expliqué pourquoi nous ne sommes pas allés plus loin en 4ème :

* il nous semblait nécessaire que les élèves se familiarisent d'abord avec l'idée de l'existence des nombres réels et l'idée que le plan mathématique est lié à $\mathbb{R}$ par la graduation des droites. Or ces deux idées ne pouvaient être abordées avant la fin de l'année de 4ème, et l'étude de l'axiome de Thalès est au programme de 3ème ;

* nous ne voulions pas introduire la notion d'orthogonalité des directions mathématiques indépendamment de la notion de distance.

Le moins qu'on puisse dire, c'est que le programme officiel n'est guère «directif» en ce qui concerne la notion de distance. On en parle seulement dans l'introduction du titre II du programme de 4ème pour dire que «le professeur a toute latitude pour faire intervenir, dès que cela lui paraît opportun, la notion de distance, qui a été introduite jusque là de façon intuitive».

On peut se demander s'il ne serait pas possible, dans le premier cycle, d'en rester au niveau matériel et de ne pas introduire une distance comme application de l'ensemble des bipoints sur $\mathbb{R}_+$.
Nous ne le croyons pas, car alors l'objet étudié (le plan) reste insuffisamment perfectionné, ce qui limite grandement ce qu'on peut y faire. Par exemple, pour un tel plan, c'est-à-dire un plan où les droites sont en fait graduées par $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$ ou à l'extrême rigueur $\mathbb{D}_3$, la propriété de Pythagore n'est



$$1^2 + 1^2 \neq (1,4)^2$$

pas vraie. (Voir aussi, à ce propos, le commentaire du paragraphe 4.2 de DO2).

1.2 Nous avons présenté l'orthogonalité comme un regroupement des directions deux à deux, c'est-à-dire une partition de l'ensemble des directions en classes à deux éléments.

Il y a une infinité de telles partitions ; nous avons donc décidé d'en choisir une et de l'appeler orthogonalité.

Cela conduit naturellement à considérer que l'orthogonalité est une relation binaire sur l'ensemble des directions ; cette relation est symétrique, mais elle n'est ni réflexive ni transitive.

La nécessité de faire un tel choix n'apparaîtra évidemment pas aux élèves : en effet, l'expérience qu'ils ont de l'orthogonalité dans un plan matériel ne peut pas les conduire à penser qu'il puisse y avoir plusieurs choix possibles. C'est pourquoi, nous n'avons pas voulu faire de développement sur ce sujet : il n'était pas question de suggérer qu'il puisse y avoir plusieurs relations d'orthogonalité [on pourra se reporter aux compléments mathématiques, paragraphe 3.5, page 96].

Nous avons choisi de présenter successivement l'orthogonalité, puis la distance, craignant qu'une présentation simultatnée de ces deux propriétés paraisse trop embrouillée aux élèves ; mais bien évidemment, l'orthogonalité et la distance sont étroitement liées dans un plan euclidien [compléments mathématiques, paragraphe 3.4, page 95].

1.3 Nous avons essayé de poser le problème de la distance de manière matérielle en franchissant les étapes suivantes :

* on sait ce que c'est que mesurer dans un plan matériel, et cette distance vérifie l'inégalité triangulaire ($d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$) ;

* on sait mesurer sur une droite mathématique ; c'est quasiment la même chose que de mesurer avec une règle graduée mais on trouve un nombre réel. Cette distance vérifie aussi l'inégalité triangulaire ;

* on a envie de définir une distance dans le plan mathématique de la façon suivante :

- quel que soit le point A, $d(A, A) = 0$;
- si A et B sont deux points distincts, ils définissent une droite et $d(A, B) = |\overline{AB}|$ (ce qui a un sens puisque nous avons muni chaque droite d'une seule graduation).

* malheureusement, avec un tel choix, l'inégalité triangulaire n'est pas nécessairement vérifiée pour trois points non alignés. C'est ce que montre l'exercice 3.2 de DO2. Cet exercice et l'exercice 2.3 de DO1 sur la symétrie du rapport de projection orthogonale de deux droites devraient faire comprendre que la contrainte imposée aux bijections des droites sur $\mathbb{R}$ par l'énoncé de Thalès n'est pas suffisante et qu'il va falloir donner une contrainte supplémentaire : c'est ainsi

que devrait apparaître l'axiome de Phytagore ;

* cet axiome nous permet de démontrer que l'application choisie vérifie l'inégalité triangulaire et est donc une distance.

Arrivé à ce point, le plan euclidien est complètement construit. Faisons ici une récapitulation.

I. Le plan est un couple (P, **D**), où **D** est un ensemble de parties de P. Ce couple vérifie les axiomes d'incidence donnés en 4ème (deux éléments distincts de P appartiennent à un et un seul élément de **D**, etc...).

II. Pour toute droite d, il existe au moins une bijection de d vers IR. Appelons lien du plan avec IR une relation qui associe à chaque droite d du plan une bijection de d vers IR.

III. Il existe au moins une partition de **D** dont chaque classe a exactement deux éléments ; appelons orthogonalité du plan une telle partition.

IV. Il existe au moins un lien $\mathcal{L}$ et une orthogonalité Ω du plan tels que

— l'axiome de Thalès,
— l'axiome de Pythagore

soient vérifiés.

Nous avons décidé de choisir un couple $(\mathcal{L}, \Omega)$ qui vérifie ces axiomes.

Dans ce cadre, on démontre que $(M, N) \longmapsto |\overrightarrow{MN}|$ est une distance.

Tout cela entre nous, bien sûr !...

Une fois que l'on a décidé de représenter les droites du plan (P, **D**) par des traits rectilignes, nous sommes contraints de représenter les graduations des droites mathématiques par des échelles régulières ; nous avons expliqué pourquoi dans le commentaire du chapitre TH [voir aussi compléments mathématiques, paragraphe III, page 92].

Il est évident que les droites parallèles devront être représentées par des traits rectilignes parallèles.

Par contre, il n'est pas théoriquement nécessaire de représenter des droites mathématiques orthogonales par des traits rectilignes perpendiculaires et les graduations mathématiques par des échelles de même pas sur toutes les droites. En gros, cela tient au fait qu'il existe des produits scalaires différents sur un même espace vectoriel réel. On trouvera une explication détaillée de ceci dans l'annexe mathématique.

Mais :

— si l'on décide de représenter l'orthogonalité de la façon habituelle, on est contraint de munir les droites matérielles d'échelles ayant toutes le même pas,

— si l'on veut que la distance mathématique soit illustrée par les mesures faites avec un double décimètre, l'orthogonalité doit être dessinée de la façon habituelle.

Bien entendu, il nous paraîtrait très dangereux de représenter l'orthogonalité, en classe, autrement qu'avec une équerre.

1.4 Le programme de 4ème insiste sur les transformations du plan : symétrie orthogonale, symétrie centrale, translations. Or, cet aspect dynamique de la géométrie n'apparaît plus dans le libellé du programme de 3ème. Cela nous paraît fâcheux et pour tout dire un peu ... incohérent.

Aussi, nous avons choisi d'aborder les questions relatives aux parallélogrammes (losanges, rectangles, carrés) et aux triangles (rectangles, isocèles, équilatéraux) sous l'angle de leurs symétries plutôt que comme une énumération statique de propriétés, caractéristiques ou non. Cela nous a permis

* de rester dans l'esprit de ce que nous avions fait en classe de 4ème, en particulier de proposer de nouvelles manipulations et observations,

* de prendre en compte, dans la théorie mathématique, de nombreuses observations faites en 4ème, d'en rapprocher plusieurs, et donc, nous l'espérons de faire réviser et de clarifier.

C'est exclusivement dans ce cadre que nous avons parlé d'isométrie. Le mot ne figure pas dans le texte du programme mais il nous semblait curieux de parler de distance, de symétries et de translations sans parler de conservation de la distance...

Cette façon de faire ne nous a évidemment pas empêché de traiter les questions de calcul de distances dans les triangles ou les quadrilatères comme application de l'axiome de Pythagore.

1.5 On ne sait pas quelles étaient les intentions des auteurs du programme en introduisant un paragraphe sur la géométrie de l'espace. Quoiqu'il en soit, nous n'avons pas voulu

* faire la moindre théorie, en particulier énumérer des propriétés sur les droites ou plans perpendiculaires,

* nous appuyer sur d'éventuelles connaissances antérieures précises (programme de 5ème),

* conduire un discours exclusivement à partir de dessins en perspective pour éviter la discrimination entre ceux qui «voient» déjà dans l'espace et ceux qui «ne voient pas» encore,

* nous contenter de calculs utilisant l'axiome de Pythagore.

Aussi, nous proposons aux élèves de fabriquer effectivement des figures de l'espace, de les observer et de les manipuler et une fois de plus nous attirons leur attention surtout sur des propriétés dynamiques : plans et droites de symétrie, droite de répétition.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

DO1

I – DIRECTIONS ORTHOGONALES ——— page 129

1.3 Comme nous l'avons dit plus haut, il n'est pas question, avec les élèves, d'envisager une autre convention de dessin.

1.4 Exercice.

Il est nécessaire de faire différents dessins.

Nous avons ici un théorème du type $p \Rightarrow q$. Si p est faux, on ne peut rien affirmer pour q : les droites d' et d'' peuvent être parallèles ou non.

II – PROJECTION ORTHOGONALE ——— page 131

2.1 Comme en classe de 4ème, nous avons privilégié la projection droite $\longrightarrow$ droite qui est une bijection, et nous ne parlons qu'ensuite de la projection plan $\longrightarrow$ droite. Ceci est d'autant plus naturel qu'un des sujets d'étude est le rapport de projection orthogonale de deux droites.

DO2

II – DISTANCE SUR UNE DROITE. VALEUR ABSOLUE D'UN REEL ——— page 134

2.1 Nous avons introduit les notions de distance sur une droite et de valeur absolue en classe de 4ème et nous avons repris cette étude dans le chapitre R [R3, page 52]. Il sera peut-être bon d'en faire une révision avant d'aborder ce sous-chapitre DO2. Notons qu'il n'y a plus de distinction sensible entre droite matérielle et droite mathématique ; il est clair en effet que c'est au moment où on a décidé qu'une droite matérielle était liée à IR par des bijections qu'on a changé de niveau et qu'on est sorti du domaine de ce qui est directement observable.

2.2 Nous n'avons pas défini la relation «... est entre ... et ...» sur une droite mathématique pour ne pas alourdir le texte.

IV – ORTHOGONALITE ET DISTANCE DANS UN PLAN MATERIEL ——— page 137

4.2 1. Il est sans doute intéressant d'enregistrer au tableau, en deux colonnes, les résultats trouvés par les élèves.

Il est évidemment peu probable que beaucoup d'élèves trouvent que $a^2 = b^2 + c^2$. Avec la convention adoptée pour mesurer, la différence entre les deux nombres trouvés risque même d'apparaître comme importante (deux derniers chiffres différents par exemple).

Comme pour l'axiome de Thalès, la théorie va donc apparaître une nouvelle fois comme simplificatrice de la réalité.

DO3 **I – DISTANCE DANS UN PLAN MATHEMATIQUE** ———— page 138

1.4 Remarques sur les graduations.

Nous répétons que nous n'avons abordé ces questions de changement de graduations sur une droite qu'à cause du repérage dans le plan. Si O, I et J sont trois points distincts tels que les droites OI et OJ sont orthogonales et $d(O, I) = d(O, J) = 1$, il faut bien que (O, I, J) soit un repère (orthonormé) du plan.

Il faut donc bien qu'on puisse choisir sur la droite OI la graduation de repère (O, I) et sur la droite OJ la graduation de repère (O, J) et que les axiomes de Thalès et de Pythagore soient vérifiés.

Bien entendu, une fois qu'on a fait ce choix pour les droites OI et OJ, chaque droite du plan est munie d'une seule graduation.

Soit d une droite et f une bijection de d sur $\mathbb{R}$ telle que les axiomes de Thalès et de Pythagore soient vérifiés.

Soit g une bijection de d sur $\mathbb{R}$ qui appartient à la classe affine de $\mathbb{R}$. Si on remplace f par g, on sait que l'axiome de Thalès est encore vérifié. Si on veut de plus que l'axiome de Pythagore soit vérifié, il est nécessaire et suffisant de choisir g de façon que pour tout point M de d

$$g(M) = \epsilon\, f(M) + b \quad \text{où} \quad \epsilon = 1 \quad \text{ou} \quad \epsilon = -1 \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}.$$

Si alors on décide de représenter les droites par des traits rectilignes, f et g seront illustrées par des échelles régulières graduées dessinées avec la même unité de longueur.

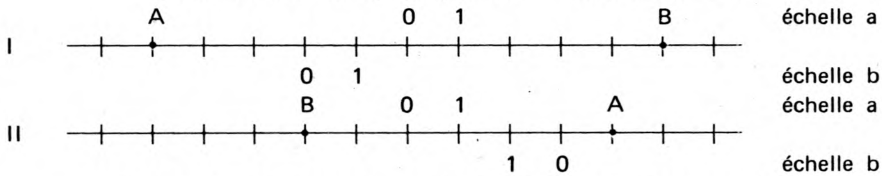
Comme nous l'avons expliqué plus haut [1.3], cela n'implique pas qu'on doive choisir la même unité de longueur sur toutes les droites, sauf si on décide de représenter des droites orthogonales par deux traits rectilignes orthogonaux au sens de l'équerre ; mais comme c'est la seule convention de dessin qu'il soit raisonnable d'adopter avec les élèves, nous pouvons bien affirmer en conclusion que nous prendrons la même unité de longueur sur les droites matérielles d'un dessin.

On peut lire, sur toutes ces questions «du plan affine au plan euclidien» dans la petite bibliothèque du premier cycle édité par l'I.R.E.M. de Grenoble.

Nous avons choisi d'être extrêmement brefs sur cette question et de ne donner qu'une indication très rapide. Si on veut être plus explicite et donner aux élèves une idée plus précise de ce qui se passe, on peut proposer les exercices ci-dessous. Cela suppose qu'on ait fait un travail analogue dans le chapitre TH (voir les commentaires de ce chapitre).

Dans une première partie, consacrée à l'observation, on peut placer sur une même droite deux échelles régulières graduées, de même pas ; par exemple, pour les deux situations suivantes, on fera observer successivement que

pour la situation I, abscisse «b» = abscisse «a» + 2 ;
pour la situation II, abscisse «b» = - abscisse «a» + 3.



Dans chaque cas on fera calculer $|\overline{AB}|$ pour les deux échelles ; on trouvera naturellement la même valeur pour les deux échelles.

On pourra alors étudier des bijections f, g et h d'une droite d vers IR telles que, pour tout point M de d,

$$g(M) = f(M) + 2 \quad \text{et} \quad h(M) = -f(M) + 3.$$

On choisira deux point A et B de d ; un calcul simple permettra d'écrire que

$$g(B) - g(A) = f(B) - f(A) \quad \text{et} \quad h(B) - h(A) = -(f(B) - f(A)),$$

et donc que

$$|g(B) - g(A)| = |f(B) - f(A)| \quad \text{et} \quad |h(B) - h(A)| = |f(B) - f(A)|.$$

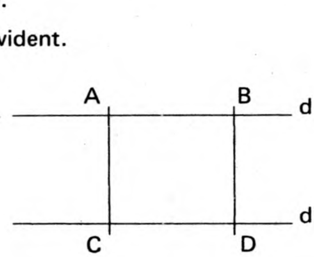
On pourra alors supposer que f est la graduation associée à d en accord avec les énoncés de Thalès et Pythagore. Ce qui aura été fait à l'occasion de l'énoncé de Thalès (voir page 23) permettra d'affirmer que si on remplace f par g ou h, l'axiome de Thalès est encore vérifié ; il en est de même pour l'axiome de Pythagore d'après l'étude ci-dessus. Naturellement les nombres 2 et 3 des exemples donnés peuvent être remplacés par n'importe quels réels.

II – RAPPORT DE PROJECTION ORTHOGONALE ———— page 141

2.1 Voici une démonstration de ce théorème.

1er cas. Droites orthogonales. **Résultat évident.**

2ème cas. Droites parallèles.



Soit d et d' deux droites parallèles, A et B deux points de d ; notons C et D les images de A et B par la projection orthogonale de d sur d'.

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$, $\quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$,

$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$, $\quad \overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, donc $\overline{AD}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2$; donc $\overline{AD}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2$.

On peut donc écrire que

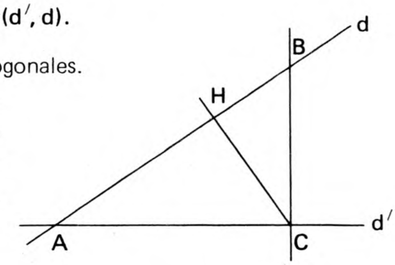
$$\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2,$$
$$2\,\overline{AB}^2 = 2\,\overline{CD}^2,$$
$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}|.$$

Nous savons que $r(d, d') = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ et $r(d', d) = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, donc

$$|r(d, d')| = 1 \quad \text{et} \quad |r(d', d)| = 1.$$

Mais $r(d, d') \times r(d', d) = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \times \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 1$ donc $r(d, d')$ et $r(d', d)$ sont de même signe. Par conséquent $r(d, d') = r(d', d)$.

3ème cas. Droites sécantes non orthogonales.



Soit d et d' deux droites sécantes en un point A et non orthogonales, B un point de d ; notons C le projeté orthogonal de B sur d' et H le projeté orthogonal de C sur d.

$$\overline{AB} - \overline{AH} = \overline{HB},$$

donc $\overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AH} = \overline{HB}^2$.

Mais $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, $\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2$ et $\overline{HB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{HC}^2$.

Donc $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AH} = \overline{BC}^2 - \overline{HC}^2$,

et $2\,\overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AH} = 0$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AH}.$$

Notons k et k' les réels $r(d, d')$ et $r(d', d)$:

$$\overline{AC} = k\,\overline{AB} \quad \text{et} \quad \overline{AH} = k'\,\overline{AC} \;;$$

donc
$$\overline{AH} = k'k\,\overline{AB}.$$

L'égalité $\overline{AC}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AH}$ permet d'écrire que $k^2\,\overline{AB}^2 = k'k\,\overline{AB}^2$ donc (le point B ayant été choisi distinct de A),

$$k^2 = k'k, \quad k^2 - k'k = 0, \quad k(k - k') = 0.$$

Puisque les droites d et d' ne sont pas orthogonales, $k \neq 0$ et on peut donc conclure que $k = k'$.

On comprendra pourquoi nous n'avons pas proposé une telle démonstration aux élèves.

2.4 On trouve évidemment des rapports qui ont même valeur absolue mais pas nécessairement même signe.

III – RECIPROQUE DE L'ENONCE DE PYTHAGORE ——— page 143

C'est une démonstration difficile qu'on pourra éventuellement omettre.

DO3

II – ISOMETRIES ——— page 149

2.1 Nous avons préféré procéder de cette façon plutôt que d'écrire une démonstration de façon exhaustive en énumérant tous les cas possibles (suivant les positions des points M et N). Les élèves risquaient de se perdre, sans grand profit, dans une telle énumération.

Pour nous, une longueur est une classe : avoir la même longueur pour deux segments est donc appartenir à une même classe, c'est-à-dire que l'un des segments est l'image de l'autre par une isométrie. Les dessins qui représentent ces segments sont donc superposables.

Remarque.

Dire que deux segments AB et $A'B'$ sont égaux, c'est dire que AB et $A'B'$ sont deux noms différents du MEME segment, ce qui n'est pas le cas, en général, ici.

2.2 On a bien établi que pour tout point M, par exemple $s_a \circ s_b(M) = s_I(M)$.

C'est l'occasion de s'arrêter un instant sur l'égalité de deux applications.

2.3 Par mesure d'économie, nous avons dit qu'une isométrie est une BIJECTION qui conserve les distances.

Ce n'est pas nécessaire. En effet soit f une APPLICATION qui conserve les distances

• L'application f est évidemment injective : deux points distincts ont pour images deux points distincts puisque leur distance n'est pas nulle.

• On peut montrer que l'image d'une droite par l'application f est une droite.

Soit A et B deux points distincts ; notons A' et B' leurs images par f.

Soit M un point ; notons M' son image par f.

Le point M appartient au segment AB si et seulement si $d(A, B) = d(A, M) + d(M, B)$.

Puisque f conserve les distances, on peut affirmer que $d(A', B') = d(A', M') + d(M', B')$ c'est-à-dire que M' appartient au segment $A'B'$.

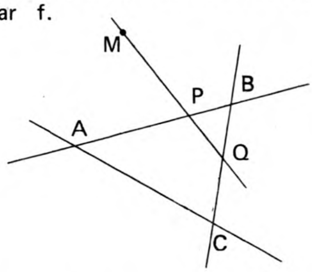
On démontre de même que tout point du segment $A'B'$ est l'image d'un point du segment AB.

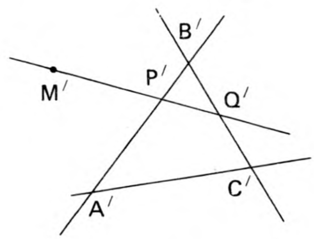
On montre ainsi que l'image d'un segment est un segment.

On peut montrer de même que l'image de la demi-droite d'origine A qui ne contient pas B est la demi-droite d'origine A' qui ne contient pas B'. En effet, un point M de cette demi-droite est caractérisé par $d(B, M) = d(B, A) + d(A, M)$.

On procède de même pour la demi-droite d'origine B qui ne contient pas A.

• Soit alors A, B et C trois points non alignés ; notons A', B' et C' leurs images par f.





Si M' est un point qui appartient à l'une des trois droites $A'B'$, $A'C'$ ou $B'C'$, par exemple à la droite $A'B'$, il est l'image d'un point de la droite AB.

Supposons que M' n'appartienne pas à l'une de ces trois droites. Il existe une droite qui passe par M' et qui coupe par exemple la droite $A'B'$ en un point P' et la droite $B'C'$ en un point Q' ($P' \neq Q'$).

Le point P' est l'image d'un point P de la droite AB et le point Q' est l'image d'un point Q de la droite BC.

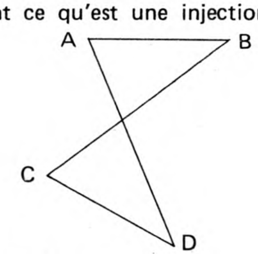
Le point M' est l'image d'un point M de la droite PQ.

Tout point M' est l'image d'un point M : l'application f est surjective.

Il serait inutile et même nuisible d'aborder une telle question avec les élèves qui ne savent d'ailleurs pas précisément ce qu'est une injection ou une surjection.

2.5 Exercice.

La réponse est évidemment non puisqu'on n'a pas précisé si on veut un quadrilatère convexe ou croisé.



III – RETROUVONS LES RECTANGLES ——————— page 152

3.5 *«Que SUFFIT-il de démontrer pour...»* Il s'agit ici de trouver un nombre minimum de propriétés à démontrer pour pouvoir affirmer que $\{A, B, C, D\}$ est un carré.

Par exemple, si on sait que $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme, il suffit de démontrer une des propriétés du rectangle et une des propriété du losange.

Voici encore un exercice manipulatoire qui utilise les propriétés de symétrie du carré et fait intervenir des rotations matérielles.

Dessine un carré $\{A, B, C, D\}$ *de sommets opposés* A *et* C, *appelle* a *la médiatrice de* (A, C), b *la médiatrice de* (B, C), p *la diagonale* BD, q *la diagonale* AC *et* O *le centre du carré. Choisis un point* M *sur un des segments matériels* AB, BC, CD *ou* DA. *Dessine le point* M_1 *transformé de* M *par le pliage autour de la droite* a, *puis le point* M' *transformé de* M_1 *par le pliage autour de la droite* q. *Qu'observes-tu ?*

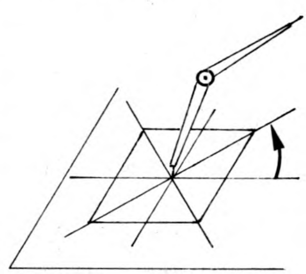
Tu peux affirmer que $d(O, M') = d(O, M)$. *Pourquoi ?*

Vérifie que les droites OM *et* OM$'$ *sont orthogonales. Choisis un point* N *qui ne soit pas sur un des segments matériels* AB, BC, CD *ou* DA. *Recommence le même travail qu'avec* M.

Tu peux affirmer que $d(O, N') = d(O, N)$. *Pourquoi ?*

Vérifie que les droites ON *et* ON$'$ *sont orthogonales.*

Prends une feuille de calque et reproduis sur cette feuille le carré ABCD *et les points* O *et* N *que tu as déjà dessinés. Fixe ton calque au point* O, *à l'aide de la pointe de ton compas par exemple, et fais-le tourner d'un quart de tour vers la gauche. Qu'observes-tu ?*



Recommence le même travail en utilisant, au lieu des droites a *et* q, *les droites* q *et* a, *mais cette fois tu feras tourner le calque vers la droite.*

On pourrait faire un travail analogue avec les droites **a** et **p**, ou **b** et **p**, ou encore **b** et **q**.

DO6 **I – IMAGE D'UNE DROITE** ———————— page 155

1.1 Pour dessiner le point A$'$, les élèves peuvent :
— utiliser l'équerre et la règle graduée,
— utiliser le compas et deux points de la droite d considérée comme la médiatrice de (A, A$'$).

1.2 Exercice.

C'est l'occasion de montrer l'application identique sur une droite.

II – DROITES DE SYMETRIE DE LA REUNION DE DEUX DROITES ———————— page 156

2.1 Nous aurions dû normalement dire : «soit m et m$'$ deux parallèles», puis définir la droite d. Nous avons préféré partir de la situation étudiée au paragraphe précédent. L'exposé est sans doute un peu moins rigoureux mais il est plus rapide et utilise ce que les élèves viennent de faire.

Soit d une droite, f une figure ; notons f' l'image de f par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d : il est clair que d est une droite de symétrie pour $f \cup f'$. C'est le cas ici, où m a pour image m' et où d est donc une droite de symétrie pour $m \cup m'$.

«Soit a une droite orthogonale aux droites m et m'». On peut profiter de cet exemple pour expliquer une fois de plus le sens de «Soit ...» et faire comprendre que ce qu'on a fait permet bien la quantification.

2.2 La dernière question : «montre que les droites d et d' sont orthogonales» est difficile. Nous n'avons cependant pas donné d'indications pour ne pas privilégier une démarche plutôt qu'une autre. Voici, par exemple, deux façons de faire :

— on peut démontrer que les droites AC et d sont parallèles et puisque d' est orthogonale à la droite AC, ...

— on peut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A et puisque d est orthogonale à la droite AB et d' orthogonale à la droite AC, ...

Le programme parle aussi de droite de symétrie de la réunion de deux demi-droites de même origine. Nous abordons cette question dans le chapitre CA (paragraphe III, page 247).

DO7 **I — DES CALCULS DE LONGUEUR** ——— page 157

1.3 Avec la règle graduée que nous avons donnée, on doit pouvoir trouver aisément des encadrements à 10^{-1} près de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... On pourra comparer ces résultats aux valeurs approchées obtenues avec une table de carrés ou une calculette.

Cet exercice est encore une bonne occasion de voir la différence entre observation et théorie.

II — DANS L'ESPACE ——— page 158

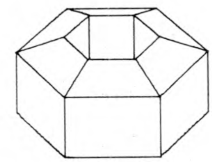
2.1 On peut faire observer que le calcul de la mesure du segment AH est aisé alors, qu'une mesure physique acceptable est difficile.

Remarquons que, comme dans ce qui précède, nous avons appelé hauteur le segment AH et non pas sa mesure qui est un nombre qui dépend de l'unité de longueur choisie.

2.2 Cette définition est un lapsus : il aurait fallu indiquer que l'union des arêtes qui arrivent à un sommet est superposable à la figure homologue de chacun des autres sommets.

2.5 C'est une occasion de mieux observer ces figures de l'espace. On trouvera chaque fois que $S - A + F = 2$.

Ce résultat est général pour les polyèdres convexes, et ceux qu'une



transformation continue transforme en polyèdre convexe (l'exercice 32 donne une autre illustration de cette propriété). Pour étudier une situation différente, on pourra imaginer et dessiner par exemple un écrou dont le trou, au lieu d'être un cylindre fileté, serait un prisme droit : c'est le nombre de «trous» du polyèdre qui détermine S - A + F (sur l'objet représenté ici, S = 24, A = 48 et F = 24 : la partie cachée est semblable à la partie vue). Attention : les faces des polyèdres, elles, ne doivent pas avoir de «trou».

III – EXERCICE ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux : classement des exercices.

Le numéro 1 est un exercice sur les directions orthogonales.

Les numéros 2, 3 et 4 font intervenir l'axiome de Thalès et la distance.

Les numéros 5 à 12 ont pour objet de faire fonctionner l'axiome de Pythagore. Ils peuvent utiliser aussi les propriétés de la médiatrice (7), du triangle isocèle (6, 8) du triangle équilatéral (8), de la médiane du triangle rectangle (8, 11), du rectangle (7) et du segment qui joint les milieux des côtés du triangle (11).

Les numéros 13 à 17 portent sur les propriétés des quadrilatères et des triangles particuliers.

Le numéro 18 porte sur les propriétés de la médiatrice.

Le numéro 19 fait étudier la composée de deux symétries par rapport à des droites parallèles.

Les numéros 20 à 23 et 25 sont des exercices sur le rapport de projection orthogonale.

Les numéros 24 et 26 à 30 sont des exercices plus complets qui font intervenir plusieurs propriétés affines et métriques.

Le numéro 31 propose une bijection du plan qui n'est pas une isométrie.

Les numéros 32 et 33 proposent des constructions de polyèdres et des observations dans l'espace.

3.2 Commentaires particuliers : réponses.

2 Deux points de la droite d' répondent évidemment à la définition du point A'.

3 Nous avons demandé la figure avant de terminer l'énoncé pour éviter que les élèves essaient de respecter les mesures proposées.

6 Pour trouver la valeur approchée demandée de d(A, H), il est plus commode d'utiliser $\sqrt{40}$ que $2\sqrt{10}$.

8 Il y a évidemment deux figures possibles suivant que A et D sont d'un même côté ou de part et d'autre de la droite BC.

Il est sans doute bon de donner cet exercice avant d'avoir appris à calculer la diagonale du carré et la hauteur du triangle équilatéral. [DO7, paragraphe 1.1 et 1.2].

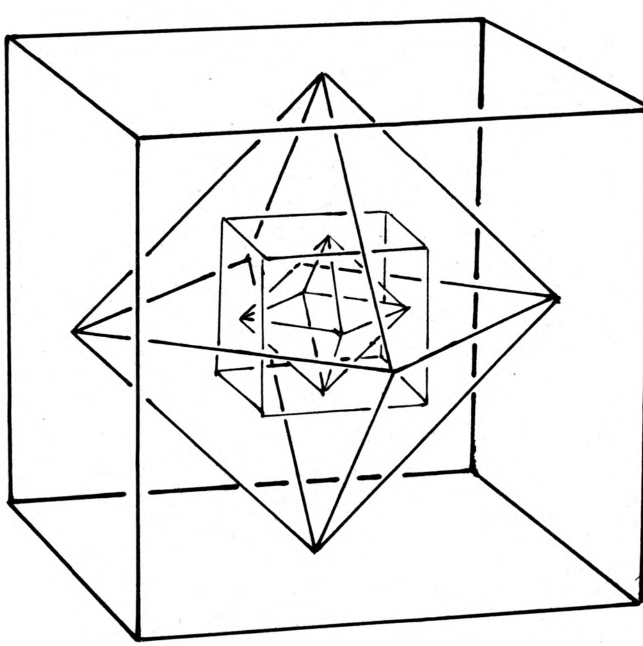
12 La démarche choisie est la suivante :
— on démontre que $d(M, M')$ ne dépend pas de M,
— on démontre que $d(M, M') \leqslant d(R, R')$.
On en fait donc un peu trop, mais c'est sans doute plus clair.

27 C'est une sorte de réciproque du problème 28.

32 Les élèves qui auront fait cet exercice (qui demande de la patience) connaîtront donc 4 des 5 polyèdres réguliers ; le cinquième est l'icosaèdre, dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux. Une explication assez simple (après l'étude des angles) peut faire comprendre pourquoi il n'y en a pas d'autre : à chaque sommet doivent arriver le même nombres de faces, qui sont des polygones réguliers ; pour un sommet donné la somme S des mesures en degrés des secteurs angulaires ne doit pas excéder 360. Il ne peut donc pas y avoir d'autres possibilités que les suivantes, en un sommet.

- 3 triangles équilatéraux : $S = 3 \times 60 = 180$ (tétraèdre).
- 4 triangles équilatéraux : $S = 4 \times 60 = 240$ (octaèdre).
- 5 triangles équilatéraux : $S = 5 \times 60 = 300$ (icosaèdre).
- 3 carrés : $S = 3 \times 90 = 270$ (cube).
- 3 pentagones réguliers : $S = 3 \times 108 = 324$ (dodécaèdre).

33 Pour que le patron permette de construire un polyèdre, il faut que le segment PR soit plus long que PR'.



COMMENTAIRES DU CHAPITRE ED

Equations et Droites

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

Ce chapitre traite en même temps

* d'algèbre, puisqu'on apprend à résoudre des équations et des systèmes d'équations, et qu'on étudie des applications affines ;

* de géométrie, puisqu'on apprend à chercher des équations de droites, à trouver l'intersection de deux droites et que l'on étudie des représentations graphiques.

La notion d'équation d'un ensemble de points est une idée nouvelle et difficile. C'est pourquoi nous avons préféré d'abord étudier une équation en (x, y) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $ax + by = c$. Il est ensuite naturel de considérer les couples solutions comme couples de coordonnées de points dans un repère. Par une manipulation dans un plan matériel, nous faisons observer que les points correspondants sont alignés. Il est alors facile de démontrer que l'ensemble des solutions d'une telle équation est en bijection avec l'ensemble des points d'une droite en s'appuyant sur la condition d'alignement de trois points.

Nous avons insisté sur le fait que résoudre un système linéaire et chercher l'intersection de deux droites sont deux façons d'aborder le même problème. Nous faisons calculer systématiquement le déterminant du système ; lorsque ce déterminant n'est pas nul, on est assuré que le système étudié a une solution et une seule. On procède ensuite par implication à partir du système initial jusqu'à un système du type $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ qui a visiblement $(2\,; -4)$ pour seule solution. Cette façon de faire permet d'éviter une réciproque qui est souvent comprise à tort comme un simple contrôle des calculs.

Dans un premier temps nous n'avons étudié que la méthode dite «des combinaisons linéaires». La méthode de substitution nous paraît intéressante surtout dans le cas où l'un des coefficients est égal à 1 ; ce cas se présente en particulier lorsque les équations sont sous la forme $y = mx + p$. Cette forme d'équation apparaît naturellement après l'étude des applications affines.

Nous avons proprosé de nombreux exercices de résolution graphique d'une équation ou d'un système d'équations, et nous avons voulu faire comprendre qu'une telle résolution permet d'obtenir seulement une valeur approchée d'une solution, (même si les nombres lus sur le dessin sont entiers !). Par conséquent, si l'on veut affirmer que le couple de nombres lu sur un dessin est une solution il faut vérifier par un calcul.

Nous avons donné un exemple de représentation graphique d'une application non affine, et nous en proposons d'autres dans le chapitre CA. Nous avons essayé de faire comprendre comment un tel dessin permet de voir si une application est bijective.

Nous n'avons pas voulu faire une théorie sur le régionnement du plan, car cela aurait conduit à des développements longs, difficiles et inutiles. C'est pourquoi ce qui concerne les inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et les demi-plans est traité dans le domaine des observations.

Pour les problèmes dont les données sont prises dans la vie pratique et qui conduisent à résoudre une équation ou une inéquation dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la difficulté est de faire en sorte que de tels problèmes n'aient pas l'air d'être «fabriqués» pour le plaisir de les résoudre. Mais il est pourtant formateur d'apprendre à traduire par des équations ou inéquations des conditions rédigées sous une forme littéraire et de comprendre que les équations ou inéquations que l'on résout peuvent avoir des solutions qui ne conviennent peut être pas au problème posé. Nous avons essayé de donner à certains d'entre eux un ton humoristique.

II – COMMENTAIRES DE DETAILS.

ED1 **I – EQUATION DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$** ———————— page 175

1.1 Une équation telle que $3x - 2y = 6$ n'est pas une équation à deux inconnues x et y mais à une inconnue : le couple (x, y).

Pour le tableau, les élèves comprennent assez vite ce qu'ils doivent faire mais les échecs sont nombreux à cause des erreurs de calculs.

1.2 Cet exercice a pour but de montrer que les équations de la forme $ax + by = c$ ne sont pas les seules équations en (x, y) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

II – RESOLUTION GRAPHIQUE ———————— page 176

2.1 Pour démontrer que les points A, B, C, D, E et F sont alignés les élèves auront à utiliser la condition d'alignement de trois points vue dans VR4.

2.3 Nous avons dit de deux façons différentes ce que signifie
L'EQUATION $3x - 2y = 6$ EST UNE EQUATION DE d
car cette idée n'est pas simple.

2.4 Dire que des équations telles que celles que nous étudions sont équivalentes ou dire que ce sont des équations de la même droite revient au même.

2.6 Savoir trouver un vecteur directeur pour une droite d'équation donnée est très utile pour la suite : dessin, systèmes d'équations.

III – DESSINONS ——— page 180

3.1 - 3.2 Nous avons donné deux méthodes pour dessiner une droite
1. en cherchant un vecteur directeur et un point d'une droite,
2. en cherchant deux points. Suivant les équations il sera préférable de choisir l'une ou l'autre de ces méthodes.

ED2

I – DEUX DROITES QUI SE COUPENT ——— page 183

1.2 Là encore les élèves auront à utiliser des résultats étudiés dans VR4. Nous avons introduit la notion de déterminant d'un système, car c'est un moyen commode de reconnaître si un système a ou non une solution unique.

II – SYSTEMES DONT LE DETERMINANT EST NUL ——— page 187

Pour de tels systèmes il reste à démontrer que les deux équations sont des équations de la même droite ou que ce sont des équations de deux droites disjointes.

ED3

I – TABLEAU ET DESSIN ——— page 188

Nous avons commencé par un exercice simple d'application représentée graphiquement, pour rappeler aux élèves des exercices faits dans les années antérieures ou dans d'autres matières. C'est aussi l'occasion de rappeler le vocabulaire concernant les applications.

II – AUTRES RELATIONS – AUTRES DESSINS ——— page 189

Les exercices 2.1 et 2.2 ont pour but d'introduire les notions d'application affine et de représentation graphique, et de faire observer expérimentalement l'alignement des points marqués ; cette propriété sera démontrée au paragraphe 3.2.

III – APPLICATIONS AFFINES ——— page 190

3.3 Exercices.

Nous n'avons pas voulu démontrer que l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}x - 1 \end{array}$ est bijective. Nous avons préféré le faire comprendre sur un dessin.

IV – EXERCICES ——— page 192

4.1 - 4.2 - 4.3 Nous donnons des exemples d'applications qui ne sont pas affines, et la représentation graphique de l'application $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto x^2\end{array}$. Une discussion pourra s'instaurer dans la classe sur la signification des segments tracés le plus souvent entre deux points et une représentation graphique comme celle des températures du paragraphe I.

ED4 **I – ENCORE DES SYSTEMES** ——— page 195

Nous étudions ici la méthode algébrique dite «de substitution».

D'autre part nous préparons les élèves à répondre à une question souvent posée dans les examens, à savoir, «calculer les coordonnées du point d'intersection de deux représentations graphiques».

ED5 ——— page 198

Nous faisons ici observer la propriété concernant les inéquations et demi-plans que nous admettrons dans le paragraphe 1.5. Nous proposons en fin de chapitre un exercice destiné à mieux faire comprendre cette propriété.

Nous avons préféré laisser en blanc la partie qui convient pour résoudre graphiquement une inéquation car cela rend plus lisibles les dessins qui interviennent dans la résolution graphique des systèmes d'inéquations.

ED6 **I – AVEC UNE SEULE EQUATION** ——— page 203

1.1 Ce problème conduit à une équation qui a une solution, mais cette solution négative ne convient pas au problème. Le problème posé a néanmoins un sens pratique, car l'abscence de solution positive peut signifier que le père répond non à la demande du prétendant de sa fille.

1.2 Ce problème est analogue au précédent mais il a une solution.

1.4 Il existe trois nombres pairs consécutifs dont la somme est 72. Ce sont 22 ; 24 ; 26. Si on remplace 72 par 55 le problème n'a pas de solution car il conduit à une équation dont la solution n'est pas un nombre entier. Si on remplace 72 par 45 le problème n'a pas de solution car il conduit à une équation dont la solution est un nombre impair.

1.5 La réponse est oui ; c'est 1.

1.6 - 1.7 Deux problèmes sur une droite graduée. Le premier a une solution ; l'abscisse de M est $\frac{7}{4}$; le deuxième n'en a pas.

II – OU L'ON RETROUVE LES SYSTEMES ET LES APPLICATIONS AFFINES ——— page 205

2.1 La solution est (20 ; 8).

2.2 La solution est (15 ; 9).

2.3 Le problème posé conduit à un système dont la solution est $(\frac{52}{3} ; \frac{28}{3})$. Cela signifie que Barnabé a donné des informations fausses. Cela entrainera certainement une discussion dans la classe.

2.4 Ce problème fait intervenir des lois horaires de mouvements uniformes (c'est volontairement que nous n'avons pas prononcé ces mots) donc des applications affines et des représentations graphiques.

Nous avons voulu faire comprendre que les droites obliques ne représentent pas la route entre Fephroy et Fepacho, c'est pourquoi nous avons dessiné les droites horizontales qui, elles, représentent la route à divers instants t.

III – OU L'ON RETROUVE LES INEQUATIONS ——— page 207

3.1 L'inéquation en x dans IR : $80 + 0{,}6x < 90 + 0{,}55x$ est équivalente à $x < 200$.

Le choix que fera Anastase dépend de la distance qu'il prévoit de parcourir.

3.2

2. Ce problème conduit à résoudre l'inéquation en (x, y) dans IR × IR $-3x + 5y > 15$.

Pour répondre à la question 3, les élèves pouront
soit résoudre l'inéquation en x dans IR $2x > 15$,
soit trouver la réponse sur le dessin en traçant la droite d'équation $y = x$.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux : classement des exercices.

Le numéro 1 porte sur la recherche de couples solutions d'une équation en (x, y) dans IR × IR.

Les numéros 2, 3 et 5 conduisent à dessiner une droite d'équation donnée.

Les numéros 4, 6 et 7 font chercher une équation de droite dont on connaît un point et un vecteur directeur (4), ou deux points (6), ou un point et une équation d'une parallèle (7).

Le numéro 8 est un exercice d'utilisation du dessin pour trouver une valeur approchée de l'un des deux termes d'un couple solution.

Les numéros 9 et 10 portent sur la recherche d'une équation d'une droite symétrique d'une droite donnée par son équation.

Les numéros 12 et 13 font examiner si des droites sont sécantes, et calculer les coordonnées de leur point d'intersection (12 et 13).

Le numéro 14 porte sur les médianes d'un triangle.

Les numéros 15, 16, 17, 18 et 19 sont des exercices de résolution de systèmes d'équations.

Le numéro 20 propose la résolution à l'aide d'une calculette d'un système non linéaire.

Les numéros 21, 22 et 23 sont des exercices de calcul d'images par des applications affines et de résolution d'équations ou d'inéquations.

Les numéros 24 et 25 sont des exercices de détermination d'une application affine (24) et d'une application polynome de degré 2 (25).

Les numéros 26 et 27 font dessiner des représentations graphiques d'applications affines.

Le numéro 28 conduit à utiliser le dessin pour résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir des applications affines.

Les numéros 31 et 32 font utiliser la notion de coefficient directeur.

Les numéros 33, 34, 35 et 36 sont des exercices de résolution d'inéquations et de systèmes d'inéquations en (x, y) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Les numéros 39 et 40 font intervenir des applications non affines.

Les numéros 41, 42, 43, 44 et 45 sont des problèmes qui conduisent à des équations en (x, y) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3.2 Commentaires particuliers : réponses.

1 1. $(\frac{4}{3} ; \frac{8}{9})$ et $(-1 ; -3)$ sont solutions.

2. $(1 ; \frac{1}{3})$; $(\frac{1}{5} ; -1)$; $(0 ; -\frac{4}{3})$.

4 1. $3x - 2y = -1$. 3. $y = 0$.

2. $2x - y = -8$. 4. $x = 1$.

6 1. $x + y = 3$. 3. $y = \sqrt{2}$.

2. $x - y = 1$. 4. $x = -3$.

7 1. $3x + 7y = 0$. 3. $x = -7$.

2. $-3x + 2y = -3$. 4. $y = -3$.

10 Une équation de d_2 est $y = -\frac{1}{2}x - 7$.

12 1. $(7 ; -\frac{11}{3})$; 2. $(-\frac{12}{7} ; -1)$; 3. $(0 ; 0)$.

14 A' : (-1 ; 2) ; B' : (0 ; -2) ; C' : (-2 ; -1).
Une équation de la droite AA' : $x = -1$;
une équation de la droite BB' : $5x + 3y = -6$;
une équation de la droite CC' : $2x - 3y = -1$.
Les coordonnées du point d'intersection des droites AA', BB' et CC' sont : $(-1 ; -\frac{1}{3})$.

15 $(\frac{16}{5} ; \frac{2}{5})$; $(\frac{5}{2} ; -1)$; $(1 ; 1)$; $(1 ; 1)$.

16 $(-\frac{66}{5} ; \frac{3}{5})$; $(\frac{\sqrt{2}+1}{2} ; \frac{\sqrt{2}-1}{2})$; pas de solution.

17 $(-\frac{1}{5} ; \frac{25}{16})$; pas de solution ; $(0 ; 0)$.

18 Les deux équations du 1er système sont équivalentes. Même chose pour le 3ème. Le 2ème système n'a pas de solution.

19 $(\frac{32}{5} ; \frac{48}{5})$.

20 Il faut que $x^2 = 625\sqrt{2}$ et $y^2 = \frac{625}{\sqrt{2}}$. Une calculatrice affichant 8 chiffres donne pour x : 29,730 177 (ou pour d'autres modèles, 29,730 178) et pour y : 21,022 410.
29,7 et 21 sont donc des valeurs approchées à 10^{-1} près de y et de x.
Cet exercice n'est pas simple.

24 $a = \frac{5}{3}$; $b = \frac{17}{3}$.

25 $a = 6$; $b = 15$.

32 1. $y = -2x - 10$. 2. $y = \frac{7}{2}x + 2$.

33 Cet exercice a pour but de faire mieux comprendre la propriété que nous avons admise en cours concernant la résolution graphique des inéquations en (x, y) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

34 Les élèves constaterons que les inéquations $x - 3y \geqslant 2$ et $-x + 3y \leqslant -2$ sont représentées par le même demi-plan.
Il pourront l'expliquer en s'appuyant sur la propriété qui concerne l'ordre et la multiplication par un nombre négatif.

40 Les sommets des rectangles sont alignés, car les couples (x, y) de leurs coordonnées vérifient l'égalité $x + y = 20$.

42 108 F ; 189 F ; 162 F.

43 $x = -8$.

44 Narcisse recevra 4 000 F et Violette 5 000 F.

45 L'équation à résoudre est $\frac{50 + d}{60} + \frac{1}{2} = \frac{50 - d}{15}$.
La solution est 24.
Il est également intéressant de résoudre ce problème par une méthode graphique.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE NO

Norme et Orthogonalité

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Ce chapitre complète naturellement les chapitres DO : «distance et orthogonalité» et VR : «vecteurs et repérage».

C'est pourquoi dans NO1, nous avons choisi d'introduire

* la notion de norme d'un vecteur comme une autre façon de parler de la distance de deux points,
* la notion de vecteurs orthogonaux comme une autre façon de parler de directions orthogonales.
* et, par conséquent, la condition d'orthogonalité de deux vecteurs ($\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$) comme une autre façon d'énoncer l'axiome de Pythagore.

Il était sans doute possible de s'y prendre autrement. Par exemple, on aurait pu définir un produit scalaire puisqu'on avait déjà parlé de rapport de projection orthogonale. On aurait alors dit que deux vecteurs sont orthogonaux, s'ils ont un produit sacalaire nul ; puis on aurait défini la norme d'un vecteur comme la racine carrée de son carré scalaire. [Compléments, paragraphe 3.3, page 94].

Cette façon de faire, plus algèbrique, risquait de dérouter grandement les élèves, car il est probablement plus difficile de la faire coîncider avec une démonstration. C'est pourquoi elle nous a paru peu conforme aux choix qui sont les nôtres depuis le début de la classe de 4ème. En outre, il ne nous paraît pas urgent que les élèves abordent la géométrie par son aspect essentiellement algèbrique.

Dans NO2, les propriétés «$\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}$» et «les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $aa' + bb' = 0$» apparaissent donc comme des théorèmes d'application et non comme des définitions.

1.2 Ce que nous avons expliqué à propos des graduations dans les chapitres TH et DO permet de comprendre qu'on peut choisir un repère orthonormé sans difficultés.

En effet soit O, I et J trois points non alignés.

Il existe une graduation et une seule de la droite OI, de repère (O, I).

Appelons-la f. De même appelons g l'unique graduation de la droite OJ, de repère (O, J). Dans notre théorie, chaque droite est munie d'une graduation de façon que l'axiome de Thalès soit vérifié. Les graduations f et g conviennent parfaitement pour les droites OI et OJ. C'est ce que nous avons expliqué dans le chapitre TH, [TH3, paragraphe IV, page 19], et pratiqué dans le chapitre VR, [VR1, paragraphe 1.2, page 91]. Dans le chapitre DO, nous avons imposé que pour des points M et N, $d(M, N) = \overline{MN}$ [DO3, paragraphe 1.1, page 138].

Alors évidemment $d(O, J) = d(O, I) = 1$. Si bien que tous les repères du plan mathématique muni d'une distance sont normés.

Si on a choisi les points O, I et J de façon que les droites OI et OJ sontorthogonales, on dit que le repère est orthonormé.

Comme nous l'expliquons dans l'annexe [paragraphe 3.5, page 95]. il n'y a pas de raison théorique qui oblige à illustrer cette situation par un dessin où les droites OI et OJ soient perpendiculaires au sens de l'équerre. Si on dessine effectivement deux droites OI et OJ non perpendiculaires, alors il n'est pas nécessaire que les segments matériels OI et OJ aient la même longueur. Il n'est évidemment pas question de rentrer dans ces considérations avec les élèves.

1.3 Il était évidemment indispensable de compléter ce chapitre par un retour sur les équations de droites lorsqu'il s'agit de droites orthogonales dans un repère orthonormé. C'est ce que nous faisons dans les paragraphes V et VI de NO2 qui sont donc un complément du chapitre ED.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

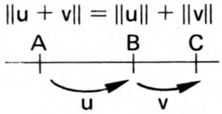
NO1 **I – NORME D'UN VECTEUR** ———————————— page 221

1.1 Une nouvelle fois, nous essayons d'illustrer la notion de vecteur par des dessins.

1.2 Ce qui est intéressant dans cet exercice, c'est que $\|u + v\| = \|u - v\|$. C'est certainement quelque chose de très surprenant pour les élèves.

Cet exercice prépare aussi l'étude de l'inégalité, $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

1.4 Les élèves ne trouveront peut-être pas facilement dans quel cas $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ les inciter à faire des dessins pour retrouver la situation



étudiée dans DO.

II – VECTEURS ORTHOGONAUX ———————————— page 223

2.1 Encore des vecteurs «dessinés».

2.2 Ces propriétés découlent immédiatement de la définition. En rédiger une «démonstration» ou à plus forte raison la demander aux élèves, ne peut que les dérouter.

NO2

III – UNE RELATION ENTRE LES COORDONNEES DE DEUX VECTEURS ORTHOGONAUX ——— page 227

3.3 Après les manipulations proposées en 3.1 et 3.2, les élèves seront peut-être convaincus de la généralité de la propriété observée. Dans ce cas, on peut sans doute omettre sans grand dommage la démonstration proposée ici.

V – RECONNAITRE SI DEUX DROITES SONT ORTHOGONALES page 229

Nous n'avons pas donné de généralisation, préférant que les élèves aient recours explicitement, chaque fois, à des vecteurs directeurs des droites considérées. On pourra proposer ces généralisations en exercice.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux : classement des exercices.

Les numéros 1 à 7 sont des exercices sur la norme et l'orthogonalité qui ne font pas intervenir de repère.

Les numéros 8, 9, 11, 12, 16 et 17 sont des exercices dans un repère orthonormé où on demande de calculer une norme ou de contrôler que deux vecteurs sont ou non orthogonaux.

Les numéros 10 et 15 sont des exercices où on demande de calculer la distance de deux points dont on connaît les coordonnées.

Il en est de même dans les exercices 13 et 14 mais de plus on y fait intervenir l'orthogonalité et des triangles rectangles ou isocèles.

Dans les exercices du numéro 18, on demande de reconnaître si deux droites d'équation donnée sont ou non orthogonales.

Dans les exercices 19 et 20, on demande de trouver une équation d'une droite passant par un point donné et orthogonale soit à une direction donnée, soit à une droite donnée.

Les numéros 15 et 21 à 24 concernent la recherche d'une équation de la médiatrice d'un bipoint.

Les numéros 25 et 26 conduisent à calculer la distance d'un point à une droite.

Dans les exercices 27 à 31 il est question de parallélogrammes et de parallélogrammes particuliers : rectangles, losanges, carrés.

L'exercice 32 conduit à confronter l'observation et les résultats d'un calcul.

Dans l'exercice 33 on recherche un ensemble de points donnés par une relation faisant intervenir la distance. Cet ensemble est une parabole.

3.2 Commentaires particuliers : réponses.

2 Les élèves ne verront sans doute pas facilement que le point C est extérieur au segment AB et que le point D est placé de telle façon que le point B appartienne au segment AD.

6 Le triangle équilatéral ADE peut avoir deux positions différentes symétriques par rapport à la droite DE. Cela n'a pas d'incidence sur les questions posées.

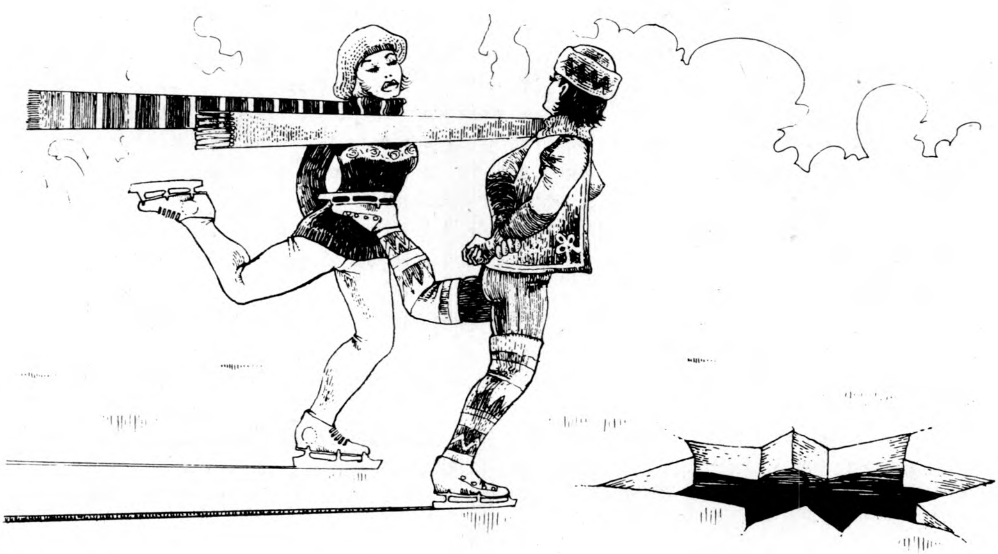
32 3. On remarquera que la médiatrice de (D, C) passe par H.

4. On trouve que $d(D, E) = d(C, E) = \sqrt{19{,}45}$, alors que $d(D, C) = \sqrt{20}$. Le point E appartient à la médiatrice de (D, C) mais le triangle EDC n'est pas équilatéral. La différence entre $\sqrt{20}$ et $\sqrt{19{,}45}$ étant inférieure à 0,07 les longueurs des segments DC et DE différent de moins de 0,7 millimètres ce qui est indiscernable sur le dessin que peuvent faire les élèves, si soigné soit-il.
Il y a là l'occasion d'une nouvelle discussion intéressante sur la dialectique observation - théorie.

33 — Si on choisit une feuille $21 \times 29{,}5$ et qu'on place les droites de coordonnées à peu près comme sur le dessin, quel que soit le point H choisi sur la directrice de la parabole, le point M correspondant se trouve sur la feuille de papier.

— Il est nécessaire de choisir quelques points H assez proches de la droite des ordonnées si on veut vraiment avoir une bonne idée de la forme de la parabole.

$\|\overrightarrow{MF}\|^2 = x^2 + (y-2)^2$ et $\|\overrightarrow{MH}\|^2 = (y+2)^2$.



COMMENTAIRES DU CHAPITRE CA

Cercles et Angles

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Dans ce chapitre, nous prenons en charge toute la partie du programme concernant «les notions pratiques de trigonométrie».

Ces notions font largement appel à celles de cercle et d'arc de cercle dont nous avons peu parlé jusqu'ici, aussi bien en classe de 4ème qu'en classe de 3ème. Nous en profitons pour dégager quelques propriétés du cercle (centre et droites de symétrie, cercle circonscrit à un triangle, à un triangle rectangle). Ce sont les seules propriétés de ce chapitre que nous traiterons dans la théorie.

Il nous a semblé souhaitable d'aborder ici la sphère : nous ne proposons bien entendu que des manipulations visant à observer certaines particularités de la sphère ; ce que nous avons déjà dit au sujet de la géométrie dans l'espace s'applique encore ici : on pourra se reporter à ce sujet à la page 55.

1.2 Nous ne parlons d'arcs de cercles, de secteurs angulaires, d'angles et de leurs mesures que dans des plans matériels ; il serait d'ailleurs bien difficile de faire autrement en classe de 3ème.

Un secteur angulaire est une partie d'un plan matériel limité par deux demi-droites de même origine ; un angle est une classe de secteurs superposables : cette superposition s'observe à l'aide du papier calque. Il nous a semblé intéressant de mettre de nouveau en œuvre les isométries matérielles connues des élèves : cela nous permet d'affirmer que des secteurs qui se déduisent l'un de l'autre par une isométrie matérielle sont des représentants d'un même angle.

Le fait de considérer un angle comme une classe ne devrait pas créer de difficultés. C'est une occasion de rencontrer une situation assez générale où certaines propriétés apparaissent comme liées aux classes plutôt qu'aux objets : ici par exemple la mesure ou le cosinus.

1.3 On mesure des arcs ou des secteurs en degrés à l'aide d'un rapporteur comme on mesure un segment en centimètres à l'aide d'une règle graduée ; bien sûr des secteurs superposables sont des secteurs qui ont la même mesure en degrés. Nous pouvons alors parler de la mesure en degrés d'un angle : c'est le mesure de l'un de ses représentants. L'expérience conduit à convenir qu'il existe une bijection de l'ensemble des angles sur l'intervalle [0 ; 360[qui rend compte de cette mesure.

Nous avons privilégié la mesure en degrés par rapport aux autres mesures : c'est celle que les élèves de 3ème, ou sortant de 3ème, seront amenés à utiliser le plus. Nous n'avons parlé de mesure en radians que pour respecter la lettre du programme : cette notion est plus difficile puisque la mesure en radians d'un cercle n'est pas un nombre entier, ni même un rationnel.

Nous n'avons pas jugé utile dans ces conditions, d'étudier le problème de changement de mesures dont de toute façon, l'intérêt nous paraît assez limité dans le cadre de ce qui est fait ici.

Le point de vue que nous avons adopté pour les angles (classe de secteurs) nous permet de donner un sens à une écriture telle que 35° : c'est l'angle dont la mesure en degrés est 35. Un secteur de 35° est un représentant de l'angle 35°

1.4 Nous avons introduit le cosinus d'un angle comme rapport de projection orthogonale qui est une notion bien connue et étudiée dans le chapitre DO.

Le document CA4 peut paraître un peu long mais cela nous a paru nécessaire pour plusieurs raisons :

* il nous paraisait nécessaire que les élèves manipulent pour comprendre que le rapport de projection orthogonale est le même pour tous les secteurs d'un même angle et que par conséquent on peut bien définir le cosinus d'un angle,

* nous avons introduit le demi-cercle trigonométrique car c'est un outil efficace qui aide à voir les choses et qui nous permettra d'aller plus vite par la suite,

* de plus, il est bon qu'il s'écoule un certain temps entre l'introduction du cosinus et celle du sinus, pour diminuer les risques de confusions possibles entre ces deux notions.

1.5 Lorsque les élèves ont bien assimilé que le cosinus d'un angle α est l'abscisse du point associé à α sur le demi-cercle trigonométrique, on définit le sinus de cet angle comme l'ordonnée du point M dans le même repère.

L'observation d'un dessin permet de comprendre que si α et β sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre. De cette propriété découle le calcul du sinus d'un angle dans un triangle rectangle.

La tangente d'un angle différent de 90° est définie comme le quotient du sinus par le cosinus.

1.6 Les élèves ont déjà appris à utiliser des tables, celles des carrés par exemple. Dans les tables trigonométriques, les nombres proposés sont en général des valeurs approchées. C'est une difficulté qui n'existait pas dans les tables des carrés. Bien entendu, nous nous sommes contentés de proposer de lire sur la table des valeurs approchées, sans chercher à évaluer l'erreur commise et, a fortiori, sans utiliser de méthodes d'interpolation.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

CA1 **II – CERCLES ET SYMETRIES** ——— page 239

2.3 Nous n'avons pas démontré dans ces exercices quels étaient *les* centres de symétries et *les* droites de symétrie : il serait difficile à ce niveau de justifier le fait qu'il n'y en a pas d'autres que ceux qui ont été trouvés.

III – CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE ——— page 240

3.2 Le centre d'un cercle qui passerait par U, V et W appartiendrait à la médiatrice de (U, V) et à la médiatrice de (V, W). Or ces médiatrices sont perpendiculaires à la droite UV ; elle sont donc parallèles et n'ont aucun point commun : il n'y a donc pas de cercle passant par U, V et W.

IV – CERCLE ET DROITE ——— page 241

Nous n'avons pas voulu ici démontrer des propriétés qui sont intuitivement évidentes ; nous les avons donc admises.

V – DANS L'ESPACE ——— page 242

5.1 Les découpages et une partie de l'assemblage (C_1, C_2, C_3 et C_4) peuvent être fait à la maison. Certains élèves préféreront peut-être refaire un patron de cette sphère avec des cercles plus grands.

Nous avons cherché à avoir un assemblage rigide qui permette de faire pivoter des disques autour d'une droite : les bords de ces disques engendrent une sphère par rotation autour de la droite AB.

5.2 - 5.3 Par le jeu des disques mobiles, les problèmes posés dans l'espace deviennent des problèmes dans le plan matérialisé par les disques C_3 ou C_4. Les propriétés du plan permettent de répondre aux questions posées.

La manipulation proposée à la fin du paragraphe 5.3 a pour objet de ne pas privilégier la droite AB comme diamètre : en effet tous les plans considérés jusqu'ici contenaient cette droite AB ; après pliage le quart de disque grisé matérialise un plan qui ne contient plus cette droite.

5.4 Après découpage du cercle dans la feuille de carton, les élèves pourront se mettre à deux pour terminer la manipulation, l'un tenant la sphère, l'autre la feuille de carton.

CA2 I — SECTEUR ANGULAIRE ——— page 245

Nous n'avons pas voulu parler ici de secteurs nuls : il ne leur correspond en effet aucune réalité matérielle.

II — ANGLES ——— page 245

2.3 Exercices.

2. Les secteurs xOy et x′Oy′ se correspondent dans la symétrie matérielle de centre O : ils sont donc isométriques et

$$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}.$$

L'égalité $\widehat{x'Oy} = \widehat{xOy'}$ se justifie de façon analogue.

3. Dans un triangle ABC isocèle en A, les secteurs ABC et ACB se correspondent dans la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de (B, C) ; ils sont donc isométriques, et $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

4. On considérera ici la symétrie par rapport au centre du parallélogramme.

III — BISSECTRICE D'UN SECTEUR ANGULAIRE ——— page 247

3.1 Avec le sens que nous avons donné au mot «angle», parler de la bissectrice d'un angle est dépourvu de sens : nous ne parlons que de bissectrice d'un secteur.

3.3 On observe que les bissectrices des secteurs angulaires du triangle ABC sont concourantes : leur point commun est le centre du cercle demandé. L'observation faite dans la question 1 du paragraphe 3.2 pourra aider les élèves à comprendre pourquoi.

CA3 I — UTILISATION DU RAPPORTEUR ——— page 248

1.1 Nous avons déjà dit pourquoi nous avions privilégié les mesures en degrés des arcs et des secteurs.

Il faut savoir cependant que le GON est l'unité d'angle normalisée. (Norme française, 174).

1.3 Ces exercices ont pour objectif de montrer qu'il ne faut pas confondre la mesure en degrés d'un arc de cercle et la mesure de sa longueur.

II – MESURE D'UN ANGLE ———————————— page 250

2 .1 Etant donné la façon dont nous avons introduit les secteurs superposables il est évident que des secteurs superposables ont même mesure en degrés.

2.3 Nous n'avons pas encore introduit les secteurs nuls qui n'ont aucune réalité matérielle : c'est la raison pour laquelle nous obtenons une bijection de l'ensemble des angles sur l'intervalle ouvert]0 ; 360[.

2.6 Nous avons traité des angles complémentaires dont nous aurons besoin pour les secteurs d'un triangle rectangle. Nous n'avons pas, par contre, traité des angles supplémentaires dont nous ne nous servirons pas par la suite.

III – LES ANGLES D'UN TRIANGLE ———————————— page 252

Nous demandons ici aux élèves d'admettre que les observations faites sur leur dessin ne sont pas liées à ce dessin. Ce sont alors des propriétés du plan matériel que l'on pourra utiliser dans d'autres situations analogue.

CA4

I – DEFINITIONS ———————————— page 254

1.1 Il n'est sûrement pas superflu de rappeler ici les résultats concernant le rapport de projection orthogonales qui ont été étudiés dans le chapitre DO (paragraphe II).

1.2 Il est possible que certains élèves, après avoir mesuré les secteurs et constaté qu'ils se répartissent en 4 classes, soient tentés de ne pas calculer le rapport de projection orthogonale pour chaque secteur mais seulement pour un secteur par classe. Cela est légitime et il faut leur laisser ce choix. L'important est qu'ils aient compris que pour des secteurs de même angle on trouve le même rapport de projection orthogonale, les droites étant graduées de façon que les bords des secteurs aient des abscisses positives.

1.4 Cette manipulation a pour but de faire sentir la bijection naturelle qui existe entre les angles saillants et le demi-cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé.

1.5 Le demi-cercle trigonométrique permet de lire des cosinus d'angles particuliers. Les élèves en calculeront d'autres par la suite.

II – CAS DES ANGLES AIGUS - COSINUS D'ANGLES PARTICULIERS ———————————— page 257

Exercices : (réponses).

1. $\cos \widehat{XOY} = 0{,}4$; $d(B, C) = \sqrt{21}$; $d(B, C) \simeq 4{,}58$;

$\cos \widehat{CBO} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$; $\cos \widehat{CBO} \simeq 0{,}916.$

2. $d(O, C) = 2$; $d(B, C) = \sqrt{12}$; $d(B, C) \simeq 3{,}46$;
$\cos \widehat{CBO} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \widehat{CBO} \simeq 0{,}866.$

CA5 **I – APPLICATION SINUS** ——— page 258

1.1 Exercice.

L'illustration par un dessin du cas où l'angle α est obtus permettra de faire comprendre que l'application sinus n'est pas une bijection. On pourra en effet mettre en évidence sur le dessin deux points du demi-cercle trigonométrique qui ont la même ordonnée et par conséquent deux angles l'un aigu, l'autre obtus, qui ont le même sinus.

1.2 Savoir que si α et β sont deux angles complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre facilite le calcul du sinus dans le cas des angles aigus d'un triangle rectangle. La manipulation proposée nous a paru être un bon moyen de comprendre cette propriété.

Exercices.

1. $\sin \widehat{ABC} = 0{,}6$; $d(A, B) = 4$; $\sin \widehat{ACB} = 0{,}8.$

2. $d(A, B) = 5{,}95$; $d(A, C) \simeq 3{,}68.$

II – APPLICATION TANGENTE ——— page 260

2.1 Exercice.

2. Le dessin permettra sans doute de lire que :

$\sin 125° \simeq 0{,}8$ et que $\cos 125° \simeq -0{,}5$ ou $\cos 125° \simeq -0{,}6$ par suite $\text{tg}\, 125° \simeq -1{,}6$ ou $\text{tg}\, 125° \simeq -1{,}3$.

Ce procédé n'est évidemment pas très précis ; le but de l'exercice était seulement de faire utiliser la définition et de donner un exemple de tangente négative.

2.3 Exercices.

1. $d(A, B) = 6$; $d(B, C) = \sqrt{45}$; $d(B, C) \cong 6{,}70$;
$\sin \widehat{ACB} = \dfrac{6}{\sqrt{45}}$; $\sin \widehat{ACB} \simeq 0{,}89$; $\cos \widehat{ACB} \simeq 0{,}44.$

2. $d(B, C) = 10$; $d(A, B) = 8$; $\text{tg}\, \widehat{ABC} = 0{,}75$;
$\cos \widehat{ABC} = 0{,}8.$

CA6

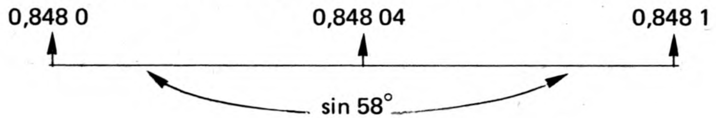
I – TABLES TRIGONOMETRIQUES —————— page 261

C'est volontairement que nous avons donné des tables dont la lecture est plus facile que les tables trigonométriques habituelles.

1.2 La table permet aussi de trouver des mesures approchées d'angles dont on connaît le cosinus ou le sinus ou encore la tangente. Nous n'avons pas cherché à préciser si ce sont des valeurs approchées par défaut ou par excès. La table ne permet d'ailleurs pas toujours de le faire ; par exemple, supposons que

$$\sin \alpha = 0{,}848\,04.$$

On lit sur la table que $0{,}848\,0 < \sin 58^\circ < 0{,}848\,1$.



II – CALCULONS LA HAUTEUR D'UNE TOUR —————— page 263

Si on se place à 100 mètres de la tour l'angle $\widehat{ABS}$ est 45° ; si on fait une erreur de 1° on trouve que $h \simeq 103{,}5$.

Si on se place à 8,75 mètres de la tour l'angle $\widehat{ABS}$ est voisin de 85°. Si on fait une erreur de 1° on trouve que $h \simeq 125$.

Si on se place à 1 143 mètres de la tour l'angle $\widehat{ABS}$ est voisin de 5°. Si on fait une erreur de 1° on trouve que $h \simeq 120$.

III – REPRESENTATIONS GRAPHIQUES —————— page 263

3.1 Nous faisons dessiner ici quelques points de la représentation graphique de l'application sinus et nous donnons sur des feuilles de manipulation les représentations graphiques des applications sinus, cosinus et tangente. Ces courbes pourront être utilisées pour trouver des valeurs trigonométriques approchées d'angles saillants ou pour traiter le problème inverse.

IV – RADIANS —————— page 264

Nous avons seulement donné les mesures en radians de certains angles particuliers. Cela nous semble bien suffisant compte tenu du peu d'intérêt que cela présente pour un élève de troisième et aussi du temps très réduit qu'il est possible de consacrer à la trigonométrie.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux : classement des exercices.

Les numéros 1 à 16 concerne le cercle.

Les numéros 7 à 12 concernent les secteurs angulaires et les angles.

Les numéros 13 à 16 font intervenir seulement la notion de cosinus dans un triangle rectangle.

Les numéros 17 et 18 portent sur la notion de sinus dans un triangle rectangle.

Le numéro 19 fait démontrer la relation $(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$.

Les numéros 20 et 21 sont des exercices très courts utilisant la notion de tangente.

Le numéro 22 est un exercice sur l'aire d'un parallélogramme articulé. C'est aussi l'occasion de faire utiliser les sinus d'angles particuliers.

Le numéro 23 est un exercice sur les tangentes d'angles complémentaires.

Les numéros 24 à 27 sont des exercices sur l'usage de tables trigonométriques.

Le numéro 28 fait utiliser la courbe de l'application tangente.

Les numéros 29 à 32 sont des exercices d'utilisation des relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

Les numéros 33 et 34 sont des applications pratiques de la tangente pour calculer la hauteur d'une tour ou la largeur d'une rivière.

Le numéro 35 est un problème de synthèse sur les cercles.

3.2 Commentaires particuliers : réponses.

10 Ce problème conduit à résoudre l'équation en a dans IR : $a = 180 - (\frac{a}{2} + a)$, dont la solution est 72.

13 $\cos \widehat{ABC} = \frac{9}{15} = 0{,}6$.

14 $\widehat{ABC} = 30^\circ$; $\cos \widehat{ABC} \simeq 0{,}866$.

16 $d(B, C) = 10$; $\cos \widehat{ABC} = 0{,}6$.

17 $\sin \widehat{ABC} = 0{,}48$.

18 $d(B, C) = 50$; $\sin \widehat{ABC} = 0{,}6$.

20 $\widehat{ABC} = 30^\circ$; $\text{tg}\, \widehat{ABC} \simeq 0{,}577\,3$.

21 $\text{tg}\, \widehat{ABC} = 4$.

22

α	30	45	60	90
A	7,5	10,6	12,9	15

29 $d(a, B) \simeq 9{,}6$; $d(A, C) \simeq 11{,}4$; $\widehat{ACB} = 40^\circ$.

30 $d(B, C) \simeq 22{,}6$; $d(A, B) \simeq 19{,}2$; $\widehat{ACB} = 58^\circ$.

31 $d(A, B) = 5$; $\widehat{ABC} \simeq 67^\circ$ $\widehat{ACB} \simeq 23^\circ$.

32 $\widehat{ABC} \simeq 19^\circ$; $\widehat{ACB} \simeq 71^0$ $d(B, C) = 37$.

33 $0{,}487\,7 < \text{tg}\, TAH < 0{,}509\,6$; $4{,}704\,6 < \text{tg}\, TBH < 5{,}144\,6$; $48{,}77 < d(T, H) < 50{,}96$; $47{,}04 < d(T, H) < 51{,}45$.

34 $d(T, D) \simeq 43$; $d(T, C) \simeq 148$. La largeur du fleuve est peu différente de 105 mètres.

COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

I – BIJECTIONS D'UNE DROITE VERS $\mathbb{R}$.

1.1 Ensemble des bijections d'un ensemble **d** vers $\mathbb{R}$.

Soit d un ensemble.

Supposons qu'il existe au moins une bijection de d vers $\mathbb{R}$: soit f une telle bijection.

Si p est une permutation de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$), l'application composée $p \circ f$ est aussi une bijection de d vers $\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "p \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Inversement, soit g une bijection de d vers $\mathbb{R}$; notons f^{-1} l'application réciproque de f ; l'application composée $g \circ f^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; notons q cette permutation :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dl, "f^{-1}"'] \arrow[dd, bend left, "g \circ f^{-1}"] \\ d \arrow[dr, "g"'] & \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$q \circ f = g \circ f^{-1} \circ f = g.$$

Donc l'ensemble des bijections de d vers $\mathbb{R}$ est l'ensemble des applications de la forme $p \circ f$, où p est une permutation de $\mathbb{R}$.

1.2 Groupe affine de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Soit a un réel non nul et b un réel. L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto at + b \end{array}$ est une permutation de $\mathbb{R}$; on dit que c'est une *permutation affine de* $(\mathbb{R}, +, \times)$. Notons **A** l'ensemble des permutations affines de $(\mathbb{R}, +, \times)$ (remarquons que si $b \in \mathbb{R}$, l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto b \end{array}$ est une application affine, mais que cette application n'est pas un élément de **A**).

On voit facilement que **A** est un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathbb{R}$, en effet :

$*$ soit p et p' des éléments de **A** ; notons a et a' les éléments de $\mathbb{R}^*$ et b et b' ceux de $\mathbb{R}$ tels que

$$p : t \longmapsto at + b \qquad \text{et} \qquad p' : t \longmapsto a't + b' \ ;$$

alors $$p' \circ p : t \longmapsto (a'a)t + (a'b + b') \ ;$$

on remarque que $a'a \in \mathbb{R}^*$ et $a'b + b' \in \mathbb{R}$; donc $p' \circ p \in \mathbf{A}$: la composée de deux éléments de **A** est un élément de **A** ;

$*$ notons $id_{\mathbb{R}}$ l'application identique sur $\mathbb{R}$; puisque $id_{\mathbb{R}} : t \longmapsto 1 \cdot t + 0$ et que $1 \in \mathbb{R}^*$ et $0 \in \mathbb{R}$,

$$id_{\mathbb{R}} \in \mathbf{A} \ ;$$

$*$ enfin, soit p un élément de **A** ; notons a et b les réels tels que $p : t \longmapsto at + b$; notons q l'application $t \longmapsto \frac{1}{a} t + (-\frac{b}{a})$; on remarque que $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$ et $-\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$; donc $q \in \mathbf{A}$; d'autre part $q \circ p = p \circ q = id_{\mathbb{R}}$: tout élément de **A** a son inverse dans **A**.

Remarque.

On sait que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe ; soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$. Si l'on considère l'ensemble des applications de la forme $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto at + b \end{array}$ où $a \in H$, on obtient également un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathbb{R}$. Les sous-groupes de $(\mathbb{R}^*, \times)$ les plus intéressants sont $\{-1 ; 1\}$ (qui donne le groupe euclidien de $(\mathbb{R}, +, \times)$), $\{1\}$ (groupe des translations) et $\mathbb{R}_+^*$.

1.3 Classes affines de bijections.

Soit d un ensemble. Supposons qu'il existe au moins une bijection de d vers $\mathbb{R}$.

Soit **G** un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathbb{R}$.

Nous allons montrer que la relation suivante en f et g sur l'ensemble des bijections de d vers $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence :

f et g sont des bijections de d vers $\mathbb{R}$, et $f \circ g^{-1} \in \mathbf{G}$.

En effet, cette relation est

$*$ **réflexive** : si f est une bijection de d vers $\mathbb{R}$, son application réciproque f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ vers d, et $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$. Bien entendu $id_{\mathbb{R}} \in \mathbf{G}$;

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{R} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[loop right, "f \circ f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$*$ **symétrique** : soit f et g des bijections de d vers $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g^{-1} \in \mathbf{G}$. Puisque $(\mathbf{G}, \circ)$ est un groupe, $(f \circ g^{-1})^{-1} \in \mathbf{G}$; or $(f \circ g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = g \circ f^{-1}$; donc $g \circ f^{-1} \in \mathbf{G}$;

$*$ **transitive** : soit f, g et h des bijections de d vers $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g^{-1} \in \mathbf{G}$ et $g \circ h^{-1} \in \mathbf{G}$. Puisque $(\mathbf{G}, \circ)$ est un groupe, $(f \circ g^{-1}) \circ (g \circ h^{-1}) \in \mathbf{G}$; donc $f \circ h^{-1} \in \mathbf{G}$.

Lorsque $\mathbf{G} = \mathbf{A}$, les classes pour cette relation d'équivalence sont appelées les *classes affines des bijections de* d *vers* $\mathbb{R}$.

Soit f une bijection de d vers $\mathbb{R}$. Soit g une bijection de d vers $\mathbb{R}$ qui appartienne à la classe affine de f. Alors $g \circ f^{-1} \in \mathbf{A}$. Notons p la permutation affine telle que $g \circ f^{-1} = p$. Alors

$$g = g \circ f^{-1} \circ f = p \circ f.$$

Notons a l'élément de $\mathbb{R}^*$ et b le réel tel que $p : t \longmapsto at + b$: quel que soit le point M de d,

$$g(M) = p(f(M)) = af(M) + b.$$

Inversement, soit f une bijection de d vers IR. Soit a un réel non nul et b un réel ; notons g l'application $\begin{array}{l} d \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \longmapsto af(M) + b \end{array}$. Notons p la permutation affine $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto at + b \end{array}$: quel que soit M sur d,

$$g(M) = af(M) + b = p(f(M)) ;$$

donc $g = p \circ f$, et $g \circ f^{-1} = p$: l'application g appartient à la classe affine de f, car $p \in \mathbf{A}$.

Concluons : la classe affine d'une bijection f de d vers IR est l'ensemble des applications de la forme $\begin{array}{l} d \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \longmapsto af(M) + b \end{array}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

II – L'AXIOME DE THALES.

2.1 Utilité de l'axiome de Thalès.

Les exemples donnés dans le livre du maître de 4ème suffisent à montrer que :

* il existe des plans dont les droites ne peuvent pas être mises en bijection avec IR ;

* il existe des plans dont les droites peuvent être mises en bijection avec IR mais qui, quelle que soit la façon dont on associe une bijection vers IR à chaque droite, ne peuvent pas vérifier l'axiome du milieu et, a fortiori, l'axiome de Thalès ;

* l'axiome du milieu ne suffit pas pour assurer que l'énoncé de Thalès est vrai ;

* il existe des plans qui vérifient l'axiome de Thalès.

[Livre du maître de 4ème, SR4, pages 91 et suivantes].

Ces faits rendent raisonnable l'introduction de l'axiome de Thalès.

Ici, nous examinerons seulement quelles sont les bijections des droites d'un plan vers IR qui sont compatibles avec l'énoncé de Thalès, en supposant que les droites du plan peuvent être munies d'au moins une façon de bijections vers IR de façon que l'énoncé de Thalès soit vrai.

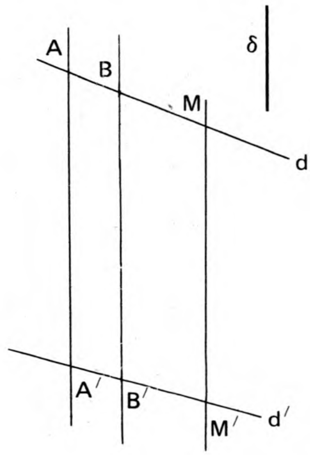
Dans tout ce paragraphe II, (P, **D**) désigne un plan dont l'ensemble des points est P et l'ensemble des droites est **D** ; on suppose que ce plan vérifie les axiomes d'incidence ; chaque droite d est munie d'une bijection f_d vers IR de façon que l'axiome de Thalès soit vérifié.

2.2 Un changement de graduations compatibles avec l'axiome de Thalès.

Associons à chaque droite d une bijection g_d de d vers IR appartenant à la classe affine de f_d ; notons a_d et b_d les réels tels que, quels que soient le point M de d,

$$g_d(M) = a_d \cdot f_d(M) + b_d \qquad (a_d \neq 0).$$

Les droites étant munies de ces nouvelles graduations, le plan vérifie toujours l'axiome de Thalèse. En effet,



soit d et d′ des droites,

δ une direction qui ne contient ni d ni d′,

A, B et M des points de d, tels que $A \neq B$;

notons A′, B′ et M′ les images de A, B et M par la projection de d sur d′ de direction δ.

Puisque le plan, les droites étant munies des bijections notées f_d, vérifie l'axiome de Thalès,

$$\frac{f_d(M) - f_d(A)}{f_d(B) - f_d(A)} = \frac{f_{d'}(M') - f_{d'}(A')}{f_{d'}(B') - f_{d'}(A')}$$

(ceci se note habituellement ainsi : $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$).

Il en résulte, par simple substitution, que

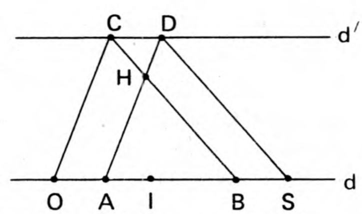
$$\frac{g_d(M) - g_d(A)}{g_d(B) - g_d(A)} = \frac{g_{d'}(M') - g_{d'}(A')}{g_{d'}(B') - g_{d'}(A')}.$$

On va voir que ces changements de graduations sont les seuls qui sont compatibles avec l'axiome de Thalès.

2.3 Axiome de Thalès et opérations.

Soit d une droite. Soit g et h deux familles de bijections des droites vers IR telles que

* pour chacune de ces familles, l'axiome de Thalès soit vérifié,
* les graduations g_d et h_d de d tels que $g_d(O) = h_d(O) = 0$ et $g_d(I) = h_d(I) = 1$.



Soit x et y des réels non nuls.

Notons A et B les points de d d'abscisses x et y pour h_d :

$$A = h_d^{-1}(x) \qquad \text{et} \qquad B = h_d^{-1}(y).$$

Soit d′ une parallèle à d, distincte de d ; soit C un point de d′. La parallèle à la droite OC qui passe par A coupe d′, en un point noté D. Les droites BC et AD sont sécantes : notons H leur point commun. Enfin, notons S le point commun à d et à la droite parallèle à la droite CB qui passe par D. Supposons d'abord que $x \neq y$, et donc que $A \neq B$.

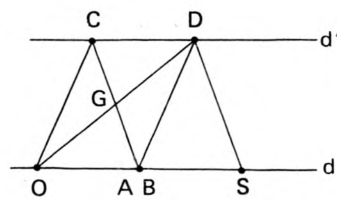
En utilisant la notation $\overline{MN}$ pour la famille de bijections h, d'après Thalès,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}}$$

(on constate que, d'après les hypothèses faites, aucun dénominateur n'est nul). Il en résulte que

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{SA} - \overline{SB}}{\overline{OB} - \overline{OA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AB}} = -1 \quad \text{(remarquons que } \overline{AB} \neq 0\text{)}.$$

Donc $\overline{SB} = -\overline{OA}$ et $\overline{BS} = \overline{OA}$; finalement, $\overline{OS} = \overline{OB} + \overline{BS} = \overline{OB} + \overline{BA} = x + y$



Supposons maintenant que $x = y$, et donc que $A = B$. Notons G le centre du parallélogramme $\{O, A, D, C\}$. L'axiome du milieu (cas particulier de l'énoncé de Thalès) permet d'affirmer que A est le milieu de (O, S), car les droites AG et SD sont parallèles. Dans ce cas particulier encore, $\overline{BS} = \overline{OA}$ et $\overline{OS} = x + y$. Donc, de toute manière, $h_d(S) = x + y$.

Notons x', y' et s' les abscisses de A, B et S pour g_d :

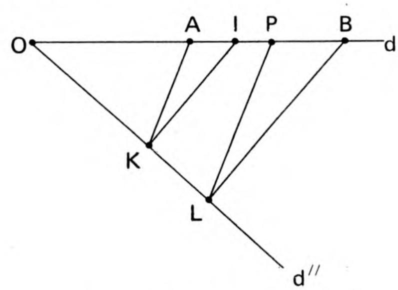
$$A = g_d^{-1}(x') \qquad \text{et} \qquad B = g_d^{-1}(y').$$

Le raisonnement fait plus haut pour h_d s'applique encore à g_d : il s'appuyait uniquement sur le fait que l'axiome de Thalès est vérifié pour la famille h et que (O, I) est un repère de h_d. Donc $\overline{OS} = x' + y'$. Il en résulte que

$$g_d \circ h_d^{-1}(x + y) = g_d(S) = x' + y' = g_d(A) + g_d(B) = g_d \circ h_d^{-1}(x) + g_d \circ h_d^{-1}(y).$$

Pour la commodité du raisonnement géométrique, nous avons supposé que $xy \neq 0$. On voit sans peine que si $xy = 0$, il est encore vrai que

$$g_d \circ h_d^{-1}(x + y) = g_d \circ h_d^{-1}(x) + g_d \circ h_d^{-1}(y).$$



Soit maintenant d'' une droite coupant d en O. Soit K un point de d'' distinct de O. Notons L le point où la parallèle à la droite IK qui passe par B coupe d''. Notons P le point où la parallèle à la droite KA qui passe par L coupe d. Pour chacune des familles de bijections g et h, d'après Thalès,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OL}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OI}}, \quad \text{et donc} \quad \overline{OP} = \overline{OA} \,.\, \overline{OB}.$$

Il en résulte que $P = g_d^{-1}(x'y') = h_d^{-1}(xy)$.

Un raisonnement semblable à celui qui a été fait ci-dessus permet de conclure que

$$g_d \circ h_d^{-1}(xy) = g_d \circ h_d^{-1}(x) \cdot g_d \circ h_d^{-1}(y).$$

(le cas où $xy = 0$ se règle aisément).

Donc, quels que soient les réels x et y,

$g_d \circ h_d^{-1}(x+y) = g_d \circ h_d^{-1}(x) + g_d \circ h_d^{-1}(y)$ et $g_d \circ h_d^{-1}(xy) = g_d \circ h_d^{-1}(x) \cdot g_d \circ h_d^{-1}(y)$; en outre $g_d \circ h_d^{-1}$, composée de deux bijections, est une permutation de $\mathbb{R}$: on dit que $g_d \circ h_d^{-1}$ est un *automorphisme de* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

2.4 Que peut-on dire d'un automorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$?

Soit φ un automorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$: c'est une permutation de $\mathbb{R}$, et quels que soient les réels x et y,

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

* $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$, donc $\varphi(0) = 0$;

* $\varphi(1) = \varphi(1 \times 1) = \varphi(1) \times \varphi(1)$, donc $\varphi(1) = 0$ ou $\varphi(1) = 1$; puisque φ est bijective, $\varphi(1) \neq \varphi(0)$ et donc $\varphi(1) = 1$;

* soit n un naturel : $\varphi(n+1) = \varphi(n) + \varphi(1) = \varphi(n) + 1$; ceci, joint au fait que $\varphi(0) = 0$, permet de montrer par récurrence que si $n \in \mathbb{N}$, alors $\varphi(n) = n$.

* Soit n un naturel : $\varphi(-n+n) = \varphi(-n) + \varphi(n)$,

$$= \varphi(0) = 0 ;$$

donc si $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(-n) = -\varphi(n) = -n$; il en résulte que si $p \in \mathbb{Z}$, alors $\varphi(p) = p$.

* Soit q un naturel non nul : $\varphi(\frac{q}{q}) = \varphi(q \times \frac{1}{q}) = \varphi(q) \cdot \varphi(\frac{1}{q}) = q\,\varphi(\frac{1}{q})$,

$$= \varphi(1) = 1 ;$$

donc $\varphi(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$. Soit u un rationnel ; soit p un entier et q un naturel non nul tel que $u = \frac{p}{q}$:

$$\varphi(u) = \varphi(\frac{p}{q}) = \varphi(p \times \frac{1}{q}) = \varphi(p) \times \varphi(\frac{1}{q}) = p \times \frac{1}{q} = u.$$

Donc, pour tout rationnel u, il est vrai que $\varphi(u) = u$.

* Soit x et y des réels tels que $x \leqslant y$; alors $y - x \geqslant 0$ et $y - x$ a une racine carrée : $y - x = (\sqrt{y-x})^2$;

$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y-x) = \varphi(\sqrt{y-x}\ \sqrt{y-x}) = \varphi(\sqrt{y-x})\ \varphi(\sqrt{y-x}) = (\varphi(\sqrt{y-x}))^2 \geqslant 0$;

donc $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$: l'application φ est croissante.

* Soit x un réel ; nous allons montrer par l'absurde que $\varphi(x) = x$; supposons par exemple que $\varphi(x) > x$; soit alors u un rationnel tel que $x < u < \varphi(x)$; puisque φ est croissante, $\varphi(x) < \varphi(u)$; mais $\varphi(u) = u$, et de l'hypothèse faite, il résulte que

$$u < \varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) < u,$$

ce qui est condradictoire. Un résultat analogue serait obtenu en supposant que $\varphi(x) < x$. Donc $\varphi(x) = x$.

Concluons : il n'existe pas d'autre automorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$ que l'application identique sur $\mathbb{R}$. Bien entendu, $id_{\mathbb{R}}$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Remarque.

Cette propriété n'est pas vraie pour tous les corps ; nous l'avons pratiquement démontrée pour $(\mathbb{Q}, +, \times)$, et elle est également vraie pour les corps de la forme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ où p est un nombre premier ; mais elle est fausse, par exemple, pour le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes, ou encore pour le corps des nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des rationnels.

2.5 Changements de graduations compatibles avec l'énoncé de Thalès.

Supposons que g soit une famille de bijections des droites vers $\mathbb{R}$ compatible avec l'énoncé de Thalès.

Soit d une droite. Notons O et I les points de d tels que $g_d(O) = 0$ et $g_d(I) = 1$. Puisque f_d est bijective, $f_d(O) \neq f_d(I)$, et le système en x et y dans $\mathbb{R}^2$

$$f_d(O) \times x + y = 0$$
$$f_d(I) \times x + y = 1$$

a une solution unique ; notons-la (a_d, b_d) ; remarquons que $a_d \neq 0$.

Définissons ainsi la famille h de bijections des droites vers $\mathbb{R}$:

* si $d' \neq d$, alors $h_{d'} = f_{d'}$;
* si $M \in d$, alors $h_d(M) = a_d f_d(M) + b_d$.

D'après le paragraphe 2.2, h est une famille de bijections compatible avec l'énoncé de Thalès. Par hypothèse, il en est de même pour g. En outre $h_d(O) = a_d f_d(O) + b_d = 0$ et $h_d(I) = a_d f_d(I) + b_d = 1$; donc h_d et g_d ont le même repère.

Donc d'après le paragraphe 2.3, $g_d \circ h_d^{-1}$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$, et d'après le paragraphe 2.4, $g_d \circ h_d^{-1} = id_{\mathbb{R}}$; finalement, $g_d = h_d$: c'est-à-dire que, quel que soit le point M de d,

$$g_d(M) = a_d f_d(M) + b_d.$$

La bijection g_d appartient à la classe affine de f_d.

Concluons : pour que g soit une famille de bijections des droites vers $\mathbb{R}$ compatible avec l'énoncé de Thalès il faut et il suffit que pour toute droites d les bijections f_d et g_d appartiennent à la même classe affine.

2.6 Représentations des graduations compatibles avec l'énoncé de Thalès.

Les manipulations proposées aux élèves en TH1 et TH2 nous conduisent à admettre que si nous représentons les droites mathématiques par des droites matérielles et les graduations mathématiques par des échelles matérielles régulières, les observations que nous pouvons faire concordent bien avec l'énoncé de Thalès.

Remplacer une échelle régulière par une autre correspond à un changement affine de graduations (remplacer $M \longmapsto f_d(M)$ par $M \longmapsto a_d f_d(M) + b_d$) ; comme la théorie le laisse prévoir (paragraphe 2.2), après un tel changement les observations concordent toujours avec l'énoncé de Thalès.

Mais si pour d'autres échelles que des échelles régulières les observations concordaient avec l'énoncé de Thalès alors, dans la mesure où observation et théorie sont en bon accord, cela signifierait qu'il existe des graduations mathématiques compatibles avec l'énoncé de Thalès qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par une transformation affine.

Ceci est impossible ; il y a donc une seule façon de représenter des graduations mathématiques compatibles avec l'axiome de Thalès (si les droites mathématiques sont représentées par des droites matérielles) : c'est de dessiner des échelles régulières.

III – LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN.

3.1 Plusieurs manières d'aborder la géométrie plane.

La voie que nous avons suivie pour présenter la géométrie plane peut être considérée comme mixte, avec toutefois une place prépondérante pour la géométrie synthétique. Les parties théoriques des chapitres DP et TR du livre de 4ème sont purement synthétiques : ils prennent pour objet d'étude des objets géométriques (points, droites, translations, ...) sans avoir recours à l'algèbre pour l'introduire. Mais dès le chapitre SR du livre de 4ème, nous recourons fortement à l'algèbre : pour graduer les droites, nous utilisons le corps des réels, supposé connu par ailleurs.

Et dans le livre de 3ème, nous continuons à mélanger les aspects géométriques et algèbriques : pour prendre deux exemples, l'axiome de Pythagore mèle l'orthogonalité, propriété des directions donnée géométriquement, et la distance issue des graduations ; les vecteurs sont définis à partir des translations, qui avaient été introduites de façon purement géométrique, mais nous utilisons beaucoup les graduations pour les étudier.

Il est possible de construire la géométrie plane de façon purement géométrique (ou synthétique), c'est-à-dire en n'utilisant aucun objet algèbrique donné a priori. Par exemple, en utilisant les chapitres DP et TR comme points de départ, on peut définir les homothéties (transformations du plan ayant un point double qui transforment chaque droite en une droite parallèle) et imposer des axiomes convenables aux translations et homothéties ; il est alors possible de définir, *à partir des objets géométriques,* un corps et un espace vectoriel ; de nouveaux axiomes géométriques permettent ensuite de prendre en compte les problèmes de distance et d'orthogonalité.

Nous suggérons aux lecteurs intéressés par cet aspect de la géométrie de lire par exemple *les fondements de la géométrie* de D. Hilbert (première édition : 1899 - traduction en français de P. Rossier - Dunod, Paris 1971) et *algèbre géométrique* de E. Artin (première édition : 1957 - traduction en français de M. Lazard - Gauthier-Villars, Paris 1962).

Nous nous proposons ici d'indiquer de façon un peu plus détaillée comment on peut construire, de façon purement synthétique (ou algébrique), la totalité de la géométrie plane.

3.2 Espace vectoriel et plan affine.

Le corps ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est supposé connu.

A partir de lui, on construit aisément un espace vectoriel de dimension 2 : l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels, muni des lois suivantes :

* une loi interne, notée $+$, qui aux couples de réels (x, y) et (x', y') fait correspondre

$$(x + x', y + y') \ ;$$

* une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ notée $\cdot$, qui au couple de réels (x, y) et au réel k fait correspondre

$$(kx, ky).$$

Il est facile de vérifier que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ a bien les propriétés algébriques de $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ que nous avons données dans le chapitre VR. Par exemple, pour montrer que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe, on est amené à montrer, entre autres, que l'addition $+$ sur $\mathbb{R}^2$ est associative ; faisons-le : soit (x, y), (x', y') et (x'', y'') des éléments de $\mathbb{R}^2$;

$(x, y) + (x\ , y') = (x + x', y + y')$ par définition de l'addition sur $\mathbb{R}^2$;

$((x, y) + (x', y')) + (x'', y'') = (x + x', y + y') + (x'', y'')$

$= ((x + x') + x'', (y + y') + y'')$; et de

même $(x, y) + ((x', y') + (x'', y'')) = (x + (x' + x''), y + (y' + y''))$;

Or $(x + x') + x'' = x + (x' + x'')$ car l'addition sur $\mathbb{R}$ est associative, et de même $(y + y') + y'' = y + (y' + y'')$. L'égalité souhaitée

$$((x + y) + (x', y')) + (x'', y'') = (x, y) + ((x', y') + (x'', y''))$$

est ainsi établie. Les autres vérifications ne demandent pas plus de peine.

On peut également munir $\mathbb{R}^2$ d'une structure de plan, comme nous l'avons indiqué dans le commentaire du livre de 4ème [DP, 4.3, page 35 et TR, 4.5, page 69] : les points seront évidemment les éléments de $\mathbb{R}^2$; les droites seront les parties de $\mathbb{R}^2$ qui admettent une équation en (x, y) de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels tels que l'un au moins des réels a et b ne soit pas nul. Le calcul permet de montrer que les axiomes d'incidence sont bien vérifiés.

Enfin, à chaque vecteur (p, q) on associe la transformation du plan $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (x + p, y + q).$$

Ces transformations sont les translations du plan $\mathbb{R}^2$.

Il reste à mettre une distance et une orthogonalité sur le plan : c'est l'objet des prochains paragraphes.

3.3 Produit scalaire et norme.

Notons i et j les vecteurs $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$; soit u et v des vecteurs non colinéaires ; notons α, β, γ et δ les réels tels que

$$u = \alpha \cdot i + \beta \cdot j,$$
$$v = \gamma \cdot i + \delta \cdot j\ ;$$

(autrement dit, $u = (\alpha, \beta)$ et $v = (\gamma, \delta)$) ; puisque u et v ne sont pas colinéaires, $\alpha\beta - \beta\gamma \neq 0$. Alors

$$i = \alpha' \cdot u + \beta' \cdot v,$$
$$j = \gamma' \cdot u + \delta' \cdot v$$

[où $\alpha' = \delta/(\alpha\delta - \beta\gamma)$, $\beta' = -\beta/(\alpha\delta - \beta\gamma)$, $\gamma' = \gamma/(\alpha\delta - \beta\gamma)$ et $\delta' = \alpha/(\alpha\delta - \beta\gamma)$].

Soit alors p un vecteur ; soit λ et μ les réels tels que $p = (\lambda, \mu) = \lambda \cdot i + \mu \cdot j$;

$p = \lambda \cdot (\alpha' \cdot u + \beta' \cdot v) + \mu(\gamma' \cdot u + \delta' \cdot v) = (\lambda\alpha' + \mu\gamma') \cdot u + (\lambda\beta' + \mu\delta') \cdot v$: p peut s'exprimer en fonction de u et v (comme combinaison linéaire de u et v). Il est aisé de voir que cette écriture est unique : si $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda' \cdot u + \mu' \cdot v$, alors $(\lambda - \lambda') \cdot u = (\mu' - \mu) \cdot v$, et comme u et v ne sont pas colinéaires, nécessairement $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'$. On dit que (u, v) est une base de l'espace vectoriel $(\mathrm{IR}, +, \cdot)$.

Soit (u, v) une base de $(\mathrm{IR}^2, +, \cdot)$.

Soit p et p' des vecteurs ; notons λ, μ, λ' et μ' les uniques réels tels que $p = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ et $p' = \lambda' \cdot u + \mu' \cdot v$.

Notons $\langle p, p' \rangle$ le réel $\lambda\lambda' + \mu\mu'$. On vérifie facilement que si p, p' et q sont des vecteurs et si α est un scalaire,

$\langle p, p' \rangle = \langle p', p \rangle$
$\langle p + q, p' \rangle = \langle p, p' \rangle + \langle q, p' \rangle$;
$\langle \alpha \cdot p, p' \rangle = \alpha \langle p, p' \rangle$;
$\langle p, p \rangle \geqslant 0$;
$\langle p, p \rangle = 0$ si et seulement si p est le vecteur nul. C'est pourquoi l'on dit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{IR}^2 \times \mathrm{IR}^2 & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ (p, p') & \longmapsto & \langle p, p' \rangle \end{array}$ est un *produit scalaire* sur $(\mathrm{IR}, +, \cdot)$.

Puisque pour tout vecteur p le réel $\langle p, p \rangle$ est positif ou nul, on peut parler de $\sqrt{\langle p, p \rangle}$; notons $\|p\|$ ce nombre ; il est facile de voir que si p est un vecteur et si α est un réel,

$\|p\| = 0$ si et seulement si p est le vecteur nul,
$\|\alpha \cdot p\| = |\alpha| \times \|p\|$.

Soit p et q des vecteurs ; on peut démontrer que

$\|p + q\| \leqslant \|p\| + \|q\|$.

Ces trois propriétés font qu'on dit que $\begin{array}{ccc} \mathrm{IR}^2 & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ p & \longmapsto & \|p\| \end{array}$ est une *norme* sur $(\mathrm{IR}^2, +, \cdot)$.

On dira que les vecteurs p et q sont *orthogonaux* **si** $<p,q> = 0$; on remarque que si p et q sont des vecteurs orthogonaux, si p' est un vecteur colinéaire à p et q' un vecteur colinéaire à q, alors p' et q' sont orthogonaux. Cela permet de définir l'orthogonalité sur les directions de vecteurs.

Remarquons bien qu'on peut associer de cette manière un produit scalaire et une norme à chaque base de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

3.4 Orthogonalité et distance dans le plan.

Choisissons trois points non alignés notés O, I et J. Notons u et v les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ (plus précisément, u est le vecteur associé à la translation qui transforme O en I : si $O = (\alpha, \beta)$ et $I = (\gamma, \delta)$, alors $u = \overrightarrow{OI} = (\gamma - \alpha, \delta - \beta)$; de même pour v).

Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires ; donc à (u, v) qui est une base de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, sont associés un produit scalaire et une norme, que nous noterons $<-,->$ et $\|-\|$.

Soit d et d' deux directions ; nous dirons que d et d' sont orthogonales s'il existe des points distincts A et B sur d et des points distincts A' et B' sur d' tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $<\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}> = 0$. Cette définition est indépendante des points A, B, A' et B', car l'orthogonalité sur les vecteurs est une propriété des directions. On dit alors que deux directions (du plan) sont orthogonales si elles contiennent des droites orthogonales ; on constate encore, sans peine, que cette définition est cohérente.

On vérifie que chaque direction est orthogonale à une direction unique : si une direction contient une droite dirigée par le vecteur $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$, la direction qui lui est orthogonale contient les droites dirigées par $-\beta \cdot u + \alpha \cdot v$; comme $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et les deux directions orthogonales sont bien distinctes.

Nous appellerons distance de deux points M et N le réel $\|\overrightarrow{MN}\|$; les propriétés de la norme permettent d'affirmer que nous avons bien affaire à une distance.

Des calculs voisins de ceux que nous avons menés dans le chapitre NO permettent de démontrer que l'énoncé de Pythagore est vrai.

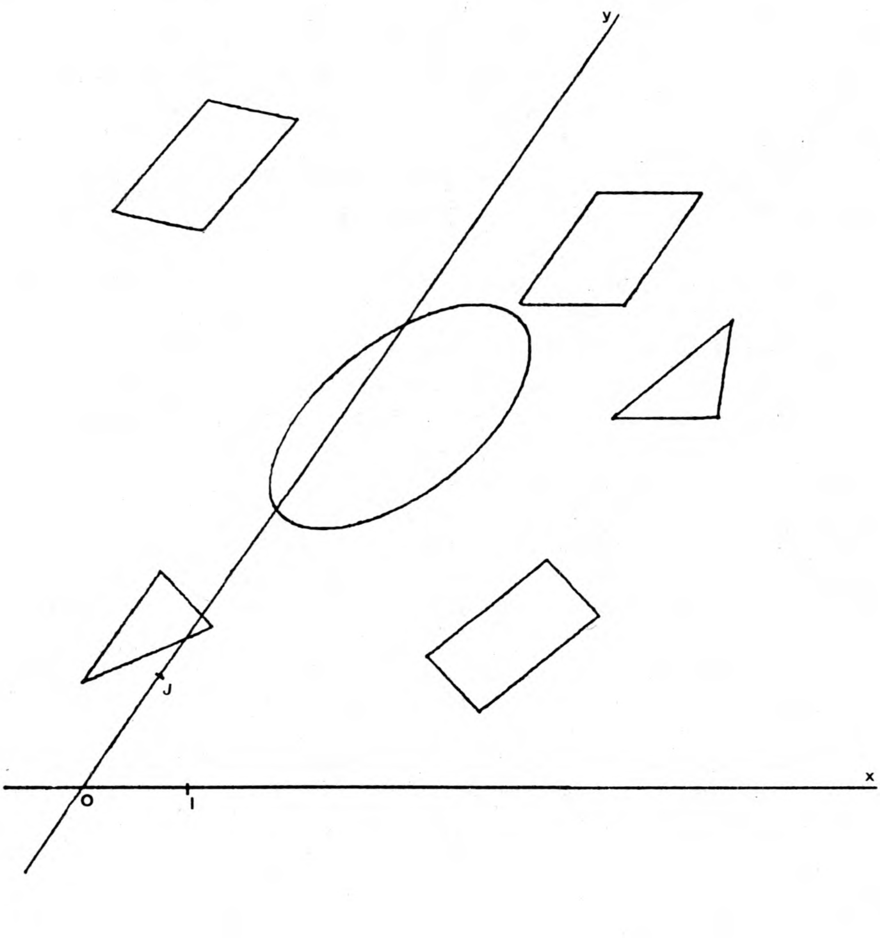
Bien entendu, (O, I, J) est un repère orthonormé :
$\overrightarrow{OJ} = 1 \cdot u + 0 \cdot v$; $\overrightarrow{OJ} = 0 \cdot u + 1 \cdot v$; $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$;
$\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$.

3.5 Représentation matérielle de l'orthogonalité et de la distance.

Ce qui précède montre que trois points non alignés quelconques peuvent être choisis pour déterminer un repère orthonormé ; il n'y a aucune raison pour que les points dessinés forment un repère MATERIELLEMENT orthonormé.

Mais ce premier choix fait, distance et orthogonalité sont complétement déterminés. Sur le dessin suivant, un tel choix a été fait. Quelques triangles équilatéraux et quelques carrés dont les côtés ont 1 pour mesure, et un cercle, ont alors été dessinés.

Un tel exemple montre que la représentation traditionnelle est quand même plus commode !



IMPRIMERIE LOUIS-JEAN – 05002 GAP