I.R.E.M. de GRENOBLE **Année 1979-1980**

ACTIVITES POUR LE SECOND CYCLE

(Analyse)

Cette brochure est un recueil de thèmes d'activités en Analyse pour le Second Cycle. La plupart font intervenir l'emploi de calculatrices de poche, non nécessairement programmables. Deux d'entre elles ont été conçues explicitement dans l'esprit du nouveau programme de seconde indifférenciée : «La touche SIN», et «Etude de la durée du jour suivant la date au long de l'année». Les autres contiennent des idées d'activités que l'on peut placer à différents niveaux.

Ont participé à l'élaboration de cette brochure :

Claude BONAL
Maurice BRUNET
Bernard CORNU
Janine COUP LA FRONDE
Soazic LE BERRE
Bernard MALGRANGE

TABLE DES MATIERES

ETUDE DE LA DUREE DU JOUR SUIVANT LA DATE AU LONG DE L'ANNEE

(activité dirigée pour la classe de seconde)

Le calendrier des P.T.T. 1980 apporte les données suivantes :

en janvier les jours augmentent de	1h05	en juillet les jours diminuent de	1h01
février	1h38	août	1h39
mars	1h51	septembre	1h46
avril	1h42	octobre	1h47
mai	1h18	novembre	1h19
juin	12 mn	décembre	14 mn

Printemps : 20 mars (à 11h10) — Automne : 22 septembre (à 21h09)
Eté : 21 juin (5h47) — Hiver : 21 décembre (à 16h56).

Travail.

A partir de ces données, et en utilisant les connaissances qualitatives que l'on a du phénomène, construire un graphique donnant la durée du jour chaque jour de l'année.

On prend comme référence la durée du jour le premier janvier qui n'est pas donnée, et **on situe ensuite le niveau 12h aux équinoxes,** ce qui permet de connaître avec une bonne approximation la durée du jour n'importe quel jour de l'année.

Objectifs.

Construction de courbe par lissage, interpolation non linéaire.
Connaissance d'un phénomène périodique, sinusoïdal.
Observation et utilisation de symétries.
Introduction à la continuité et à la dérivation (bien que la variable soit discrète).

Intérêt.

Travail sur un phénomène concret de la nature que l'on a ainsi l'occasion de mieux connaître.

Fait appel à la réflexion, à l'observation, aux connaissances sur les fonctions (notamment sinus et cosinus) et les courbes, au soin et à l'initiative. Travail accessible à tous, mais qui suscite le souci de la perfection. Résultats très satisfaisants, contrôlables par la consultation du calendrier aux pages : heures de lever et de coucher du soleil.

Aspect dialectique : construction de courbe, lecture de résultats sur u graphique avec aller-retour de l'une à l'autre de ces activités.

Nombreux prolongements possibles (cosmographie, angles, comparaisons avec d'autres phénomènes comme la température, les marées, réflexion sur le caractère «continu» du phénomène).

Etapes du travail.

1. Première approximation : une ligne brisée joignant les points qui donnent, par référence à la durée d_0 du 1er janvier, la durée du jour au 1er février, au 1er mars, etc... L'interpolation linéaire donne de bons résultats pour le printemps et l'automne, mais n'a plus de signification en juin ou décembre.

2. Repérer les symétries (semi-période), les dates du maximum, du minimum, les équinoxes.

Observer le taux d'augmentation, maximum vers le 20 mars, quasiment nul vers le 21 juin, etc... et tracer des droites qui servent d'appui à la courbe (tangentes).

Améliorer le tracé en remplaçant la ligne brisée par une courbe continue ressemblant à une sinusoïde.

3. Ayant correctement situé le maximum, le minimum, l'allure au voisinage des équinoxes, fixer le niveau médian (égalité des jours et des nuits) et appelant 12h la durée du jour à ce niveau trouver la durée du jour à une date donnée : faire de nombreuses lectures.

4. Contrôle par la consultation des heures du lever et du coucher du soleil.

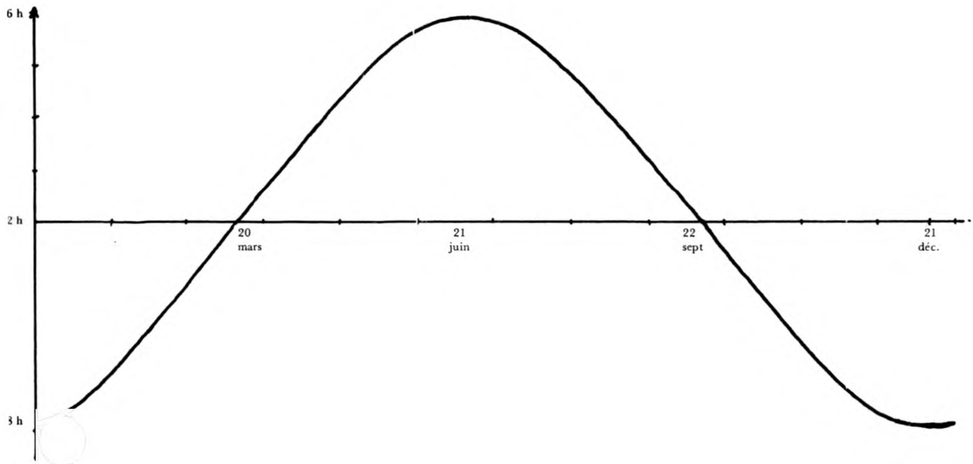
Il y a une bonne concordance des résultats graphiques avec la différence entre heure de lever et heure de coucher du soleil, à un décalage près de quelques minutes : 12 h 7 mn le 20 mars, 12 h 8mn le 22 septembre au lieu de 12 h, 16 h 7 mn le 21 juin et 8 h 11 mn le 21 décembre, la moyenne entre les deux étant de 12 h 9 mn.

Ce décalage semble dû à des phénomènes physiques (observation du sommet du disque solaire et non du centre, réfraction de la lumière quand le soleil est à l'horizon...) dont la courbe théorique que nous avons tracée ne tient évidemment pas compte.

Remarque.

La consultation d'un éphéméride donnant les heures du lever et du coucher du soleil tous les jours permet de connaître avec une erreur majorée par 1 minute la durée du jour chaque jour, et de tracer la courbe représentant la durée, mais **cela ne présente pas du tout le même intérêt** : simplement construction d'une courbe point par point, plus aucune lecture à faire.

Ne pas se tromper d'exercice !



GRAPHIQUE OBTENU PAR UN ELEVE

LA TOUCHE «SIN»

(activité dirigée pour la classe de seconde)

On peut, avant même d'avoir étudié la fonction sinus, se familiariser avec certaines de ses propriétés en étudiant la touche «sin» de la calculatrice. Cela ne remplace en aucune manière l'étude théorique de la fonction sinus, mais permet de découvrir expérimentalement quelques propriétés, qui donneront toute sa raison d'être à la fonction sinus. Nous proposons ci-dessous un schéma pour l'approche de cette touche «sin».

1. – Constater qu'il s'agit d'une fonction, c'est-à-dire que si on met un nombre à l'affichage, puis si on appuie sur la touche sin, un autre nombre apparaît. On pourra donc employer la notation : $y = \sin x$.

– Constater que le résultat est différent selon que la machine a été mise en «degrés», «radians», ou «grades».

Exemple : degrés : $10 \xmapsto{\sin} 0{,}17364818$
radians : $10 \longmapsto -0{,}54402111$
grades : $10 \longmapsto 0{,}15643447$

On a donc en fait trois fonctions différentes. On réservera la notation $\sin x$ au cas où la machine est mise en radians.

2. Quels nombres peuvent-être obtenus par la touche «sin» ?

En faisant de nombreux essais, et en cherchant à obtenir le plus grand nombre possible et le plus petit nombre possible, on sera amené à conjecturer que «sin» ne permet d'obtenir que des nombres compris entre -1 et 1. On peut essayer d'obtenir exactement ces valeurs.

3. On veut tracer le graphe de la fonction sin sur du papier millimétré. Placer les points $(x, \sin x)$ pour $x = 0, 10, 20, 30, 40, 50, \dots 150$.

Peut-on deviner l'allure du graphe ?

Recommencer en prenant :
$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 15$
et
$x = -1, -2, -3, -4, ..., -8$.

On peut observer deux phénomènes que l'on précisera par la suite : la périodicité et l'imparité.

4. Calculer $\sin x$ et $\sin(-x)$ pour diverses valeurs de x. On a toujours : $\sin x = -\sin(-x)$.

5. On s'intéresse maintenant à la fonction sin, la machine étant en deg Nous noterons provisoirement $\sin_D$ cette fonction.

Calculer $\sin_D x$ pour $x = 0, 1, 2, 3, ..., 15$.

Retrouver la périodicité, en prenant des valeurs convenables pour x.

6. Trouver le plus petit $x > 0$ tel que $\sin x = 0$, et le plus petit $x > 0$ tel que $\sin_D x = 0$.

En déduire α tel que $\sin x = \sin_D (\alpha x)$. Vérifier cette formule sur diverses valeurs de x.

Quels sont les nombres réels x tels que $\sin x = \frac{1}{2}$? Ceux tels que $\sin_D x = \frac{1}{2}$?

7. Trouver des nombres p tels que $\sin x = \sin(x + p)$.

Trouver des nombres s tels que $\sin(s + x) = \sin(s - x)$.

Toutes ces manipulations n'ont d'intérêt que dans la mesure où l'étude théorique viendra justifier, élucider les résultats obtenus avec la machine. L'expérimentation que nous proposons doit être faite avant l'étude théorique, mais il est souhaitable de revenir sur ces activités après l'étude théorique.

En classe de première ou terminale, on peut poursuivre un peu plus l'étude sur machine, en particulier en étudiant le comportement de la touche «sin» lorsque x est voisin de zéro (calcul de $\sin x - x$, de $\frac{\sin x}{x}$, en radians... et en degrés ! ; comparaison de $\sin x$ et de $x - \frac{x^3}{6}$, etc...).

I.R.E.M. de GRENOBLE
groupe second cycle
juin 1980

BRICOLAGES SUR L'INTEGRATION

Intégrer, ce n'est pas seulement rechercher des primitives. On le sait, on le dit, mais on ne le pratique guère. Une fois faite l'introduction à l'intégrale de Riemann, le programme n'incite pas à faire autre chose que des calculs de primitives. C'est d'autant plus regrettable que le calcul approché d'intégrales fait appel à des outils extrêmement réduits (niveau 1er cycle souvent) si l'on ne cherche pas à majorer finement les erreurs commises sur le résultat. (Ce qui n'empêche pas de s'interroger sur l'efficacité de diverses méthodes). Ajoutons que les méthodes approchées sont parfois les seules dont on dispose !

Nous nous placerons d'un point de vue délibérément élémentaire.

I – QUELQUES METHODES USUELLES.

1. Sommes de Riemann.

Si f est une fonction définie sur $[a, b]$ $(a < b)$
et si $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$
c'est-à-dire si $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ et
$x_0 = a$ $\quad x_n = b$,
une somme de Riemann relative à f et à la subdivision est une somme du type :

$$f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

où $c_1 \in [x_0, x_1]$ $\quad c_2 \in [x_1, x_2] \ldots$ $\quad c_n \in [x_{n-1}, x_n]$

Rappelons que si f est intégrable sur [a, b], une somme de Riemann fournit une approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$.

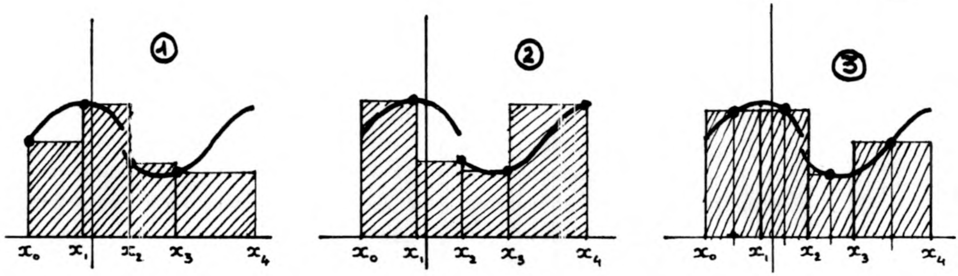
En pratique on prend souvent

$$c_i = x_i \qquad (1)$$

ou $$c_i = x_{i+1} \qquad (2)$$

ou $$c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \qquad (3) \qquad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

ce qui revient à remplacer f par une fonction en escaliers, comme l'indiquent les graphiques qui suivent.



Pour des raisons de commodité on prend des subdivisions à "pas" constant c'est-à-dire telles que :

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} \qquad (= h)$$

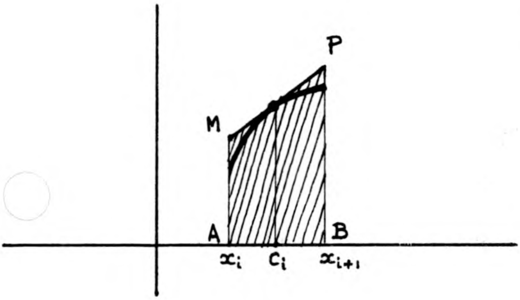
mais le choix des x_i peut être fait aussi selon les irrégularités de la fonction ou selon sa rapidité de variation.

On obtient les approximations suivantes :

1. $S_1 = [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \times h$
2. $S_2 = [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \times h$
3. $S_3 = [f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n)] \times h \qquad c_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

2 – APPROXIMATION PAR DES FONCTIONS AFFINES PAR MORCEAUX.

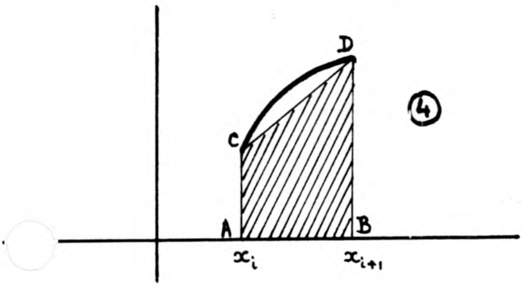
a) Méthode "des tangentes"



Dans le cas où f est dérivable en tout point on remplace f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par sa fonction affine tangente au point c_i $(c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ ce qui revient à remplacer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$ par l'aire algébrique du trapèze ABPM c'est-à-dire par $f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$.

Il ressort que cette méthode n'est autre que l'approximation par une somme de Riemann (du type 3 vu précédemment), valable même si f n'est pas dérivable aux points c_i.

b) Méthode "des trapèzes"



Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on remplace la courbe représentative de f par la corde dont les extrêmités sont les points C et D de coordonnées $\begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ f(x_{i+1}) \end{pmatrix}$ ce qui revient à remplacer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$ par $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$.

Pour un pas constant égal à h on obtient l'approximation :

$$S_4 = [\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots\ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}] \times h$$

c) Méthode de Simpson

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on remplace f par la fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui coïncide avec f en x_i, x_{i+1} et $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

On prend là aussi un pas constant pour la subdivision.

Soit : $u = x_i$, $v = x_{i+1}$.

Il existe trois réels a, b, c tels que :

$$au^2 + bu + c = f(u)$$

$$av^2 + bv + c = f(v)$$

$$a\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + b\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + c = f\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

$$\int_u^v (at^2 + bt + c)\,dt = \left[\frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct\right]_u^v$$

$$= \frac{a}{3}(v^3 - u^3) + \frac{b}{2}(v^2 - u^2) + c(v - u)$$

$$= \frac{v-u}{6}\left[2a(u^2 + uv + v^2) + 3b(v + u) + c\right]$$

$$= \frac{v-u}{6}\left[f(u) + f(v) + 4f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right].$$

Une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,dt$ est alors donnée par :

$$S_5 = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f(c_1) + 2f(x_1) + 4f(c_2) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(c_n) + f(x_n)\right].$$

Tout se passe comme si l'on partageait [a, b] en 2n intervalles de même longueur $h' = \frac{h}{2}$.

$$S_5 = \frac{h'}{3}\left[f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + \ldots + 4f(t_{2n-1}) + f(t_{2n})\right].$$

Cette méthode est efficace, mais afin de rester élémentaires nous ne l'utiliserons pas.

II – CALCULS PRATIQUES.

1. Organisation du calcul.

Que ce soit pour S_1, S_2 ou S_3, il s'agit de calculer une somme du type :

$$S = [f(x) + f(x + h) + f(x + 2h) + \ldots + f(x + (n-1)h)] \times h.$$

Pour le calcul de S_4 on se ramène à ce cas en écrivant :

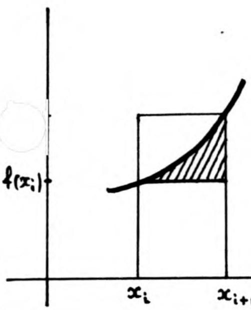
$$S_4 = [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n) - f(x_0)}{2}] \times h.$$

Il va falloir calculer les valeurs successives de $f(x), f(x+h), f(x+2h)$ etc... La calculatrice va donc devoir effectuer n fois le même travail ("boucle") sur les valeurs successives $x, x+h, \dots x+(n-1)h$. Une mémoire devra être réservée à ces valeurs, une seconde mémoire réservée au pas h et une troisième mémoire réservée aux sommes partielles $f(x) + f(x+h) + \dots$ La sommation devra s'arrêter après le calcul des n images. Pour ce faire on utilisera une mémoire comme compteur de boucles. (Un test permettra à la machine de savoir à quel moment les n boucles ont été effectuées et ainsi permettra d'arrêter la sommation.)

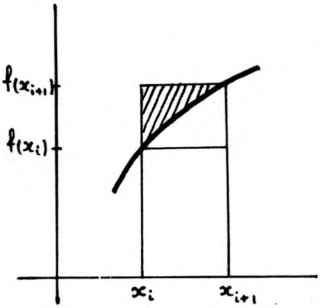
2. Quelle méthode choisir ?

a) La majoration des erreurs commises par chaque méthode sort du cadre que nous nous sommes fixé ici. A titre indicatif (*), indiquons que l'erreur commise en remplaçant l'intégrale par S_1 ou S_2 est majorée par $k_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$ (k_1 étant une constante dépendant de la dérivée de f) ; la méthode des tangentes fournit une approximation à moins de $k_2 \frac{(b-a)^3}{n^2}$ près (k_2 dépendant de la dérivée seconde de f) ; tandis que la méthode des trapèzes fournit une approximation à moins de $2k_2 \frac{(b-a)^3}{n^2}$ près. La méthode la plus performante est celle de Simpson, avec une erreur inférieure à $k_4 \frac{(b-a)^5}{n^4}$. (k_4 dépendant de la dérivée quatrième de f.)

b) Cas où la fonction f (ou - f) est convexe sur [a, b]



S_1 est préférable



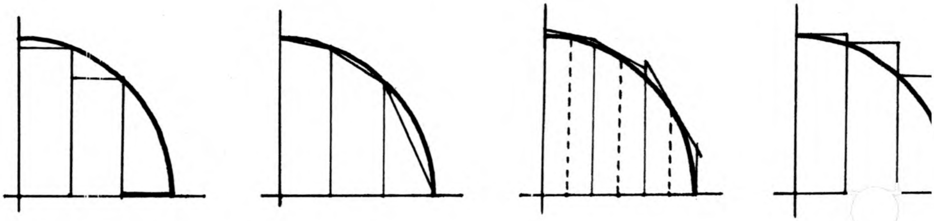
S_2 est préférable

Des considérations élémentaires montrent que l'on obtient une meilleure précision en choisissant S_1 plutôt que S_2 (ou le contraire) (l'aire hachurée représente l'erreur commise sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$).
Remarquons que le signe de l'erreur est connu, que ce soit dans le calcul par S_1, S_2, S_3 ou S_4.

(*) Pour plus de précision se reporter au document de l'IREM de Marseille "quelques méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales".

c) Comparaison des quatre calculs sur un exemple.

Soit à évaluer π par $4 \times \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

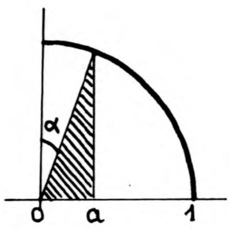


	S_2	S_4	S_3	S_1
n = 10 somme	2,90	3,1045	3,152	3,30
erreur	$-2{,}4 \times 10^{-1}$	$-3{,}7 \times 10^{-2}$	$1{,}1 \times 10^{-2}$	$1{,}6 \times 10^{-1}$
n = 50	3,098	3,1382	3,14256	3,178
	$-4{,}3 \times 10^{-2}$	$-3{,}3 \times 10^{-3}$	$9{,}7 \times 10^{-4}$	$3{,}6 \times 10^{-2}$
n = 100	3,120	3,1404	3,14194	3,160
	$-2{,}1 \times 10^{-2}$	$1{,}2 \times 10^{-3}$	$3{,}4 \times 10^{-4}$	$1{,}9 \times 10^{-2}$

d) Il apparait clairement sur les graphiques précédents que l'approximation est mauvaise au voisinage de 1 quel que soit le calcul effectué, car les variations de f sont alors "rapides". On peut se faire une idée plus précise sur ce fait par la remarque suivante :

On peut évaluer $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ en évaluant $\int_0^a \sqrt{1-x^2}\, dx \quad (0 < a < 1)$.

En effet cette intégrale permet d'évaluer l'aire du secteur d'angle α. Il suffira ensuite de multiplier par $\frac{2\pi}{\alpha}$ pour avoir une estimation de l'intégrale.



(Notons que ceci ne constitue en rien une méthode d'évaluation de π puisqu'on utilise π dans ce calcul ; il s'agit simplement de montrer l'influence de la rapidité des variations de f sur le calcul approché.)

Soit $\alpha = \frac{\pi}{N}$, $a = \sin \alpha$. L'aire du secteur est $\int_0^a \sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{1}{2} a\sqrt{1-a^2}.$

D'où $$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = 2N \left[\int_0^a \sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{1}{2} a\sqrt{1-a^2}.\right]$$

Afin de pouvoir comparer la précision de ce calcul (par S_3) avec celle obtenue au paragraphe précédent, on prend un pas sur [o, a] le plus voisin possible du pas pris sur [o, 1]. On obtient les résultats suivants :

	$n = 50$	$n = 100$
$\alpha = \frac{\pi}{6}$	3,141708 $1{,}15 \times 10^{-4}$	3,141621 $2{,}90 \times 10^{-5}$
$\alpha = \frac{\pi}{12}$	$1{,}06 \times 10^{-4}$	$2{,}87 \times 10^{-5}$
$\alpha = \frac{\pi}{24}$	$9{,}15 \times 10^{-5}$	$2{,}65 \times 10^{-5}$
$\alpha = \frac{\pi}{48}$	$7{,}01 \times 10^{-5}$	$2{,}29 \times 10^{-5}$
$\alpha = \frac{\pi}{96}$	$7{,}01 \times 10^{-5}$	$1{,}75 \times 10^{-5}$

3. A défaut de mieux...

Soit une ellipse donnée dans un repère orthonormé du plan par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \qquad t \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Problème : calculer son périmètre.

On a $$x' = -3 \sin t$$ $$y' = 2 \cos t$$

D'où $$x'^2 + y'^2 = 9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t$$ $$x'^2 + y'^2 = 4 + 5 \sin^2 t .$$

Le périmètre est alors égal à $4 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4 + 5\sin^2 t}\, dt$, intégrale que l'on ne sait pas calculer autrement que par des méthodes approchées.

A titre d'exemple, donnons un programme possible de calcul sur T.I. 57 par la méthode des tangentes.

Affectation des mémoires

R_o compteur de boucles	R_1 pas	R_2 t	R_3 sommes partielles	R_7 n

← introduire n

00	STO 7	15	1	31	2nd Lbl 2	
01	2nd π	16	SUM O	32	2nd Rad	
02	÷	17	RCL 0	33	RCL 2	
03	2	18	2nd x = t	34	2^{nd} sin	
04	÷	19	GTO 3	35	x^2	
05	RCL 7	20	RCL 1	36	×	Calcul de $\sqrt{4 + 5 \sin^2 t}$
06	=	21	SUM 2	37	5	
07	STO 1	22	GTO 1	38	+	
08	÷	23	2nd Lbl 3	39	4	
09	2	24	RCL 3	40	=	
10	=	25	×	41	$\sqrt{x}$	
11	STO 2	26	RCL 1	42	INV SBR	
12	2nd Lbl 1	27	×			
13	SBR 2	28	4			
14	SUM 3	29	=			
		30	R/S			

UTILISATION DE CALCULATRICES POUR APPROCHER LA NOTION DE LIMITE

Ce chapitre a pour but l'approche de la notion de limites de fonctions, grâce à l'emploi de calculettes éventuellement programmables qui, dans un temps réduit permettent l'étude du comportement de ces fonctions pour des valeurs «très grandes» de la variable, ou au voisinage d'un point donné.

Les deux exemples simples des paragraphes I et II, pour lesquels on obtient des limites monotones avec des convergences relativement rapides, constituent une première étape nécessaire, mais ne permettent pas de faire bien comprendre la notion délicate de limite.

Des tests sur la notion de limite nous ont montré, en particulier, que dans l'esprit des élèves au mot «limite» est associée la notion de «borne» ; c'est pourquoi aux paragraphes III et IV nous proposons des exemples de limites avec des convergences lentes, et non monotones (c'est-à-dire obtenues avec des oscillations), en utilisant les fonctions sinus et cosinus.

I – Soit la fonction $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{3x-1}{x-2}$$

1) Etude du comportement de f pour des valeurs de $|x|$, de plus en plus grandes.

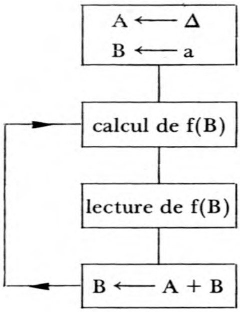
Pour se faire une idée du comportement de f pour des valeurs de $|x|$ de plus en plus grandes, on cherche les images par f des points d'une suite x_0, x_1, ..., x_n..., monotone, non bornée. On peut prendre n'importe quelle suite.

Sur machine programmable il est commode de prendre une suite arithmétique, géométrique (de raison $q > 1$) ou exponentielle (par exemple a, a^2, a^4, a^8,... avec $a > 1$) etc...

Voici un exemple de programme pour T.I.57 utilisant une suite arithmétique de 1er terme a et de pas Δ :

$a, \ a + \Delta, \ a + 2\Delta, \ a + 3\Delta, ...$

Programme **un programme sur T.I.57 :** **utilisation**



00	×
01	3
02	—
03	1
04	=
05	÷
06	(
07	RCL 1
08	—
09	2
10	)
11	=
12	Pause
13	RCL 0
14	SUM 1
15	RCL 1
16	Pause
17	RST

Mettre une valeur Δ à l'affichage
STO 0.
Mettre une valeur a à l'affichage
STO 1
R/S.

a) On peut prendre $\Delta = 1$, $a = -1$. Que remarque-t-on ? Puis $\Delta = 10$, $a = 0$; puis un pas plus grand 100, 1 000, 100 000..., avec $a = 0$. On peut reprendre ce qui précède avec un pas négatif et a au choix.

Il est alors intéressant de laisser découvrir aux élèves l'intérêt de l'écriture $f(x) - 3 = g(x)$.

b) Mettre ensuite f(x) sous la forme

$f(x) = 3 + g(x)$ avec $g(x) = \frac{5}{x - 2}$.

c) Faire trouver aux élèves le comportement de g(x) au voisinage de $+\infty$.

Pour les élèves sceptiques, il suffira de remplacer f(x) par g(x) et faire si besoin est, le programme de calcul de g(x).

A partir de la constatation du fait que g(x) est voisin de 0 quand $|x|$ est «grand» et que f(x) est voisin de 3 quand $|x|$ est «grand», on pourra ou non formuler une définition.

2) **Etude du comportement de f pour des valeurs de x de plus en plus proches de** 2.

Laisser aux élèves le soin de faire des expériences dans [1 , 3].

Des suites simples convergeant vers 2 seront les bienvenues ; par exemple : $2 + 10^{-n}$; $2 - \frac{1}{n}$, etc... Les élèves seront amenés à constater que : $|f(x)|$ prend des valeurs «très grandes», quand x est voisin de 2.

On pourra là aussi formuler ou non une définition.

II – 1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$$

a) On peut remarquer que f est impaire.

b) On peut également écrire le programme de calcul de f(x) de la même façon qu'au I.

Remarquons que f(x) peut s'écrire sous la forme $\dfrac{2}{x + \frac{1}{x}}$ avec $x \neq 0$; cette écriture est algébriquement plus compliquée mais conduit à un programme de calcul plus simple.

c) Les élèves constateront que : f(x) est voisin de 0, quand x prend des valeurs très grandes.

2) Soit $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{x^2 + 5}{x + 2}$$

a) On peut écrire le programme de calcul de f(x) de la même façon qu'au I, prendre par exemple : $\Delta = 10$, $a = 0$ et laisser découvrir aux élèves l'intérêt de l'écriture $f(x) - x$, puis de $f(x) - (x - 2)$.

b) On peut mettre ensuite f(x) sous la forme $f(x) = x - 2 + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \dfrac{9}{x + 2}$.

c) On peut demander aux élèves d'étudier le comportement de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

III – Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x + \sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

On peut remarquer que f est paire, puis on peut faire écrire le programme de calcul de f(x). (Penser à la touche Rad...).

1) Etude du comportement de f pour des valeurs «très grandes» de x.

On peut faire constater que f est voisin de 1, quand x est «très grand» puis étudier comment «évolue» f(x) en se rapprochant de 1, et comparer aux résultats du I ; (en particulier on constatera «l'oscillation» des valeurs de f(x) autour de 1).

2) Etude du comportement de f pour des valeurs de x voisines de 0.

Etude analogue à celle du paragraphe I, 2).

IV – ETUDES ANALOGUES AU III : RECHERCHE DU COMPORTEMENT DES FONCTIONS f, g, h, AU VOISINAGE DE $+\infty$.

1) $f : x \longmapsto \dfrac{3x + \sin x}{7x + \cos x}$ $\quad \lim\limits_{\infty} f = \dfrac{3}{7}$; les valeurs f(x) oscillent autour de $\dfrac{3}{7}$.

2) $g : x \longmapsto \dfrac{x + \sin x}{x + 2}$ $\quad \lim\limits_{\infty} g = 1$; les valeurs g(x) oscillent en restant inférieures à 1.

3) $h : x \longmapsto \dfrac{x + \sin x}{x + 0{,}1}$ $\quad \lim\limits_{\infty} h = 1$; les valeurs h(x) oscillent autour de 1.

RECHERCHE DES ZEROS D'UNE FONCTION
(ou des racines d'une équation)

On cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$.

Il arrive que l'on puisse obtenir une expression exacte des racines au moyen des symboles usuels ; c'est le cas dans presque tous les exercices posés usuellement aux élèves. Mais nous souhaitons travailler ici dans un autre état d'esprit : la machine permet de résoudre d'autres équations, non pas en donnant la solution, mais en donnant des valeurs approchées des racines, avec la précision que l'on désire.

1. Par «tâtonnements».

On calcule $f(x)$ pour différentes valeurs de x, en essayant de se rapprocher d'une valeur x_0 telle que $f(x_0) = 0$. Si on trouve un x_1 tel que $f(x_1) > 0$ et un x_2 tel que $f(x_2) < 0$, et si f est continue sur l'intervalle ayant pour extrémités x_1 et x_2, alors on sait qu'il y a au moins une racine de l'équation dans cet intervalle. En rétrécissant petit à petit cet intervalle, on va en encadrer une, avec la précision que l'on souhaite.

Sur une machine programmable, le calcul de $f(x)$ est plus rapide ; mais cette activité est possible sur une machine scientifique non programmable.

Exemple : trouver les racines de l'équation $x + \mathrm{Log}\, x = 0$ avec 6 décimales exactes.

Programme pour le calcul de $f(x)$ (T.I.57 ... ou T.I.30) : $\boxed{+}$ $\boxed{\mathrm{Ln}\ x}$ $\boxed{=}$

x	f(x)	
1	1	
2	2,69	f(x) augmente ; on cherche de l'autre côté.
0,5	-0,19	une racine est entre 0,5 et 1.
0,7	0,34	une racine est entre 0,5 et 0,7.
0,6	+	
0,55	–	
0,57	+	
0,56	–	

etc...

On peut améliorer ces tâtonnements en procédant à de vagues interpolations. Par exemple :

On cherche les racines de $x^2 - 4\cos x = 0$.

$f(0) = -4$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1{,}16 \\ f(2) = 5{,}66 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{la racine est probablement plus près de 1 que de 2.} \\ \text{On essaiera 1,2 :}\end{array}$$

$f(1{,}2) = -0{,}009$

$f(1{,}3) = 0{,}62$

La racine est beaucoup plus proche de 1,2 que de 1,3 ; on essaie 1,21 :

$f(1{,}21) \ : +$

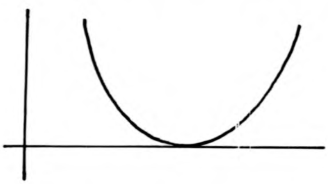
$f(1{,}205) : +$

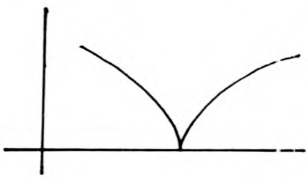
$$\left.\begin{array}{l} f(1{,}202) : + \\ f(1{,}201) : - \end{array}\right\}$$

Remarque.

Il ne faut pas oublier que l'équation peut avoir plusieurs racines. Seule l'étude théorique permettra de préciser l'ensemble des racines ; on peut préalablement procéder à un balayage pour explorer f, en choisissant un pas tel que l'on n'escamote pas les variations intéressantes de f (il faut du «flair» !).

Il se peut également que f s'annule sans changer de signe. Il faudra alors être attentif aux variations de f(x) et plus seulement à son signe :





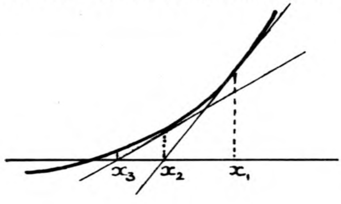
2. Par dichotomie ou par balayage.

Les tâtonnements du paragraphe précédent peuvent être organisés : lorsqu'on a trouvé un intervalle dans lequel se trouve une racine, on peut soit le diviser en deux intervalles égaux (dichotomie), soit le «balayer» avec un «pas» choisi. Cette dichotomie ou ce balayage peuvent être programmés sur une calculatrice. Par exemple, pour la dichotomie, on peut procéder de la façon suivante : on part d'un intervalle $[a_0, b_0]$ tel que $f(a_0)$ et $f(b_0)$ soient de signes contraires. On calcule $f(a_0) \times f(\frac{a_0 + b_0}{2})$. Si ce nombre est positif, on pose $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ et

$b_1 = b_0$; s'il est négatif, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. On est ainsi ramené à un intervalle $[a_1, b_1]$ deux fois plus petit, dans lequel se trouve un zéro. On réitère alors ce découpage.

3. Il existe des méthodes plus rapides.

Examinons la célèbre méthode de NEWTON. Elle consiste, partant d'un point x_1, à se rapprocher de la racine en suivant la tangente à la courbe : on obtient un point x_2, puis un point x_3, etc... La suite x_n est donnée par la relation :



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cette suite, en général, se rapproche de la racine. Cette méthode se prête très bien à la programmation.

Pour chaque fonction f à traiter, on programme le calcul de $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On choisit un x_1, et on calcule successivement $\varphi(x_1)$, $\varphi(\varphi(x_1))$, $\varphi(\varphi(\varphi(x_1)))$,...

Exemple : $f(x) = x^3 - 5x$

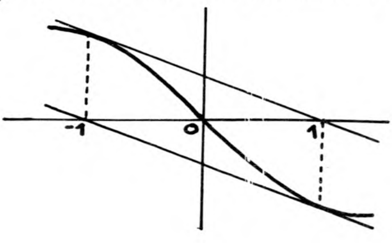
$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3}{3x^2 - 5}.$$

En partant de $x_1 = 0{,}5$, on obtient :
$-0{,}059$
$0{,}00008$
$-2 \cdot 10^{-13}$
$4 \cdot 10^{-39}$ on trouve la racine 0.

En partant de $x_1 = 10$:
6,78
4,69
3,38
⋮
2,236068 on trouve $\sqrt{5}$.

En partant de $x_1 = -7$, on trouve $-\sqrt{5}$.

En partant de $x_1 = 1$, on obtient alternativement 1 et -1 :



Autres exemples à traiter ainsi :

$x^2 - 4\cos x = 0$

$x + \frac{\operatorname{Log} x}{x} = 0$

$xe^x - 1 = 0$

$x^3 - 3x + 2 = 0.$

Application : calcul d'une racine $n^{\text{ème}}$ avec une calculatrice «4 opérations».

* On veut par exemple calculer par approximations successives $\sqrt{\alpha}$. Si x est une approximation, on cherche une meilleure approximation sous la forme x + h. On doit avoir :

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2.$$

En omettant le terme en h^2, négligeable, c'est-à-dire en remplaçant la courbe par sa tangente, et en remplaçant $(x+h)^2$ par α, on obtient :

$$\alpha = x^2 + 2xh$$

$$h = \frac{\alpha}{2x} - \frac{x}{2}$$

d'où $x + h = \frac{\alpha}{2x} + \frac{x}{2}$,

c'est-à-dire la suite :

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{x_n} + x_n\right)}$$

c'est la méthode de Newton.

Calculons par exemple $\sqrt{7}$:

$x_1 = 3$

$x_2 = 2{,}666$

$x_3 = 2{,}6458$

$x_4 = 2{,}6457513$

$x_5 = 2{,}6457513.$

* Pour la racine $k^{\text{ème}}$, on a un résultat analogue :

$$(x+h)^k = x^k + kx^{k-1}h + [\ldots]$$

d'où $h = \frac{\alpha - x^k}{kx^{k-1}} = \frac{\alpha}{kx^{k-1}} - \frac{x}{k}$

et $x + h = \frac{\alpha}{kx^{k-1}} + \frac{(k-1)\,x}{k}$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)\,x_n + \frac{\alpha}{x_n^{\,k-1}}\right)}$$

Calculons par exemple $\sqrt[17]{131\,072}$.

Programme pour T.I.57 :

STO 0
×
16
+
131072
÷
RCL 0
y^x
16
=
÷
17
=
R/S
RST

Remarque.

Il peut sembler curieux d'utiliser un tel algorithme de calcul sur une machine disposant d'une touche y^x ! Nous utilisons y^x car la T.I.57 en dispose ; mais comme il ne s'agit que de puissances entières, on pourrait n'utiliser que des multiplications.

4. Méthodes de point fixe.

Dans certains cas, la suite

$$\begin{aligned} &x_1 \\ &x_2 = f(x_1) \\ &x_3 = f(f(x_1)) = f(x_2) \\ &\vdots \\ &x_{n+1} = f(x_n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

converge vers un **point fixe** de f, c'est-à-dire vers une solution de l'équation $f(x) = x$. C'est le cas en particulier si f est «contractante», c'est-à-dire si $|f(x) - f(y)| \leqslant C \, . \, |x - y|$ avec $C < 1$, au voisinage de la racine (par exemple si $f'(S) < 1$, S étant la racine).

On a d'ailleurs déjà utilisé ce phénomène, puisque la méthode de Newton consistait à calculer la suite des itérées de la fonction $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, suite qui converge vers un point fixe de φ, c'est-à-dire vers un zéro de f. Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on se ramène à une équation de point fixe, de la forme $x = \underbrace{x + u(x)\, f(x)}_{g(x)}$ où $u(x) \neq 0$.

On souhaite que g soit la plus contractante possible. Pour celà, on pose $g'(S) = 0$, ce qui conduit à :

$$1 + u(S)\, f'(S) = 0.$$

On est assuré de satisfaire à cette condition en choisissant pour u la fonction : $u(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$. On obtient alors :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

C'est encore la méthode de Newton.

Notons ici la rapidité de convergence de cette méthode. On peut écrire :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - S &= g(x_n) - g(S) \\ &= g'(S)(x_n - S) + \frac{g''(\xi)}{2}(x_n - \xi)^2 \quad \text{[où } \xi \text{ est un nombre compris entre } x_n \text{ et } S\text{]} \\ &= \frac{1}{2} g''(\xi)(x_n - \xi)^2. \end{aligned}$$

L'erreur sur x_{n+1} est de l'ordre du carré de l'erreur sur x_n. A chaque itération, le nombre de décimales exactes double à peu près.

Remarque.

Si on a à résoudre une équation de point fixe $x = f(x)$ dans un cas où la suite des itérées ne converge pas vers un point fixe, (par exemple parce que $f'(S) > 1$), bien souvent on peut arranger la situation en remplaçant f par f^{-1}.

Exemple : au lieu de résoudre $x = \operatorname{tg} x$, on résout $x = \operatorname{Arctg} x$.

SIMULATION

On se contente trop souvent d'introduire la notion de probabilité par un discours sur ce qui se passerait si l'on effectuait 5 000 parties de «pile ou face» ou si l'on lançait 1 000 fois de suite un dé bien équilibré ou si l'on faisait tourner une roulette avec tout autant d'opiniâtreté. Bien rarement le fait-on, faute de temps ou de matériel ou d'intérêt. Le tirage de nombres «aléatoires» peut remplacer efficacement ces expériences. Les calculs de fréquence d'apparition deviennent alors attrayants et peuvent servir non seulement d'introduction au cours mais aussi de vérification expérimentale d'un calcul de probabilités.

Le tirage de nombres aléatoires introduit surtout la notion de «simulation» qui est intimement liée à la «modélisation», face essentielle mais négligée de notre enseignement.

I – GENERATION DE NOMBRES «AU HASARD».

On se propose de construire une suite de nombres réels répartis de façon aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

• On choisit un nombre décimal α ($0 < \alpha < 1$) comportant au moins 5 décimales ; on le multiplie par 147 *. Soit α' la partie décimale de $147\,\alpha$. On recommence en remplaçant α par α' etc... En langage de suites numériques on a :

$$\begin{cases} \alpha_0 \in]0, 1[\\ \alpha_{n+1} = \text{Frac}\,(147\,\alpha_n). \end{cases}$$

* D'autres nombres que 147 peuvent être utilisés.

• Une autre méthode consiste à construire la suite définie par

$$\begin{cases} \alpha_0 \in [0, 1[\\ \alpha_{n+1} = \text{Frac}\,(\alpha_n + \pi)^5 . \end{cases}$$

Il est clair que les termes de la suite obtenue ne sont pas aléatoires puisque la suite est entièrement déterminée dès que l'on a choisi α_0 *. Le qualificatif «pseudo-aléatoire» conviendrait mieux.

Remarquons que si l'on veut une suite de chiffres au hasard, on peut prendre le premier chiffre après la virgule (par exemple) du nombre α_n.

II – EXEMPLES.

1. Simuler le lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée.

On va remplacer les sorties de «pile» et de «face» par 1 et 0 respectivement. Remarquons que si une variable aléatoire X est uniformément répartie entre 0 et 1 on a

$$P\,[\,X < \frac{1}{2}\,] = P\,[\,X \geqslant \frac{1}{2}\,] = \frac{1}{2}$$

l'événement $X < \frac{1}{2}$ peut s'écrire aussi $[2\,X] = 0$ où [ ] désigne la fonction partie entière.

• Sur calculatrice non programmable :

Introduire α_0 ⟶

×

147

=

Lire $[147\,\alpha]$ ⟶

–

$[147\,\alpha]$

=

STO

×

2

=

Lire $[2\,\alpha]$ ⟶

RCL

* On peut en tirer parti si l'on souhaite travailler plusieurs fois de suite sur les mêmes données statistiques.

• **Sur calculatrice programmable** on dispose de la touche «partie décimale» **qui évite de calculer** $147\,\alpha - [147\,\alpha]$. D'autre part il est intéressant de faire compter **par la machine les occurrences de** 1 : ce nombre d'occurrences est tout simplement la somme des nombres $[2\,\alpha_n]$ successifs.

Organisation du calcul.

Il faut une mémoire pour le nombre N de lancers à effectuer, une mémoire servant de compteur de boucles, une mémoire pour α_n et une mémoire pour totaliser les occurrences de 1.

Un test portant sur le compteur permettra à la machine de savoir si les N épreuves ont été ou non effectuées.

Variante du problème précédent.

Simuler le lancer d'un dé à 6 faces bien équilibré.

Au lieu de calculer $[2\,\alpha_n]$ on calculera $[6\,\alpha_n] + 1$ car si une variable aléatoire X est uniformément répartie sur $[0, 1[$ alors 6X est uniformément répartie sur $[0, 6[$ et $[6X]$ prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et 5 avec des probabilités égales.

2. Epreuves de Bernouilli.

Les nombres 1 et 0 doivent sortir avec les probabilités respectives p et $1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Si X est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1[$, la variable aléatoire Y définie par $Y = X + p$ est uniformément répartie sur $[p, p + 1[$. On a donc

$$P[1 \leqslant Y < p + 1] = (p + 1) - 1 = p$$
$$P[p \leqslant Y < 1] = 1 - p$$

ou, encore :

$$P[[Y] = 1] = p$$
$$P[[Y] = 0] = 1 - p.$$

On utilisera donc la suite $[\alpha_n + p]$ pour simuler de tels tirages.

3. Exercices.

a) On lance deux dés indiscernables à 6 faces. Quelle est la probabilité de sortir une somme donnée ?

Quiconque a enseigné les probabilités a dû répondre à l'éternelle question : puisque les dés sont «indiscernables» faut-il compter comme différentes les sommes $a + b$ et $b + a$? *

* Le mot «indiscernable» est très mal choisi puisqu'il suffit de faire une contremarque sur l'un d'eux pour les discerner, ce qui répond à la question. Mais certains élèves restent sceptiques.

On peut simuler cette épreuve en tirant successivement deux entiers au hasard compris entre 1 et 6 (cf. 1.). Ils représenteront les résultats fournis par les deux dés sans s'inquiéter de savoir lequel des deux dés a donné tel résultat.

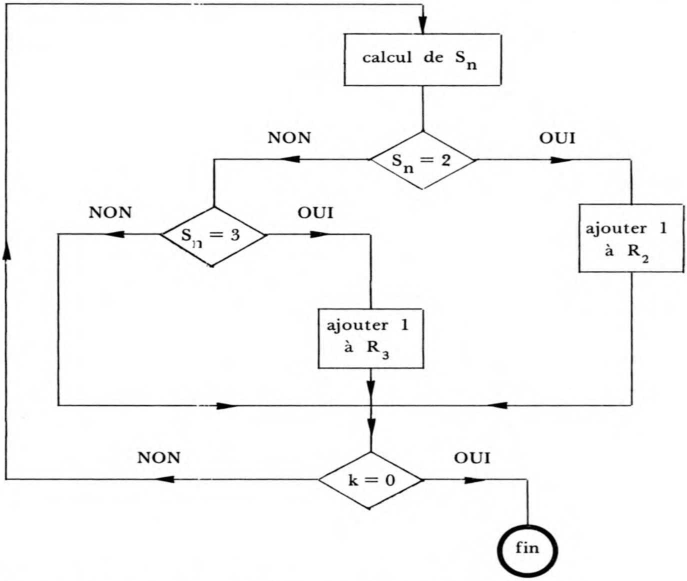
Sur N lancers on se propose de dénombrer les sommes égales à 3.

Organisation des calculs.

Pour chaque double lancer, il s'agit de tirer au hasard deux entiers a_n et b_n compris entre 1 et 6, chacun représentant la face supérieure d'un dé. La génération de a_n et de b_n peut se faire à partir d'une seule suite aléatoire α_n, comme l'indique le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_0 & \longrightarrow & \alpha_1 & \longrightarrow & \alpha_2 & \longrightarrow & \alpha_3 & \longrightarrow & \alpha_4 & \longrightarrow & \alpha_5 \;\ldots\ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & a_1 & & b_1 & & a_2 & & b_2 & & a_3 \;\ldots\ldots \end{array}$$

A chaque boucle on calcule $S_n = a_n + b_n$; on ajoute 1 à la mémoire R_2 si $S_n = 2$ et 1 à la mémoire R_3 si $S_n = 3$. Il s'agit alors de recommencer l'expérience jusqu'à ce que N boucles aient été effectuées. On peut compter les expériences réalisées en introduisant N dans une mémoire et en diminuant d'une unité son contenu après chaque boucle. Un test permettra d'arrêter le processus lorsque le contenu k de cette mémoire arrivera à 0. On a l'organigramme partiel suivant :



Un programme pour TI 57 est proposé en annexe.

b) Le sang de tout être humain possède une caractéristique appelée facteur Rhésus pouvant revêtir deux formes : Rh^+ et Rh^-. Pour chacun des deux sexes la probabilité qu'un français soit Rh^+ est 0,85 ; la probabilité qu'il soit Rh^- est 0,15. Chez les couples où l'homme est Rh^+ et la femme Rh^-, il se produit dans 8% des naissances des accidents qui nécessitent un traitement spécial du nouveau né. (D'après un problème de Bac B).

Faire une simulation concernant le nombre de traitements à effectuer dans une maternité où sont attendues N naissances. (On ignore le facteur rhésus des parents).

- On va d'abord simuler, pour chaque naissance, la détermination du facteur Rhésus du père et de la mère, au moyen de deux tirages de Bernouilli successifs (cf. 2. avec $p = 0,85$).

- Dans le cas où le père est Rh^+ et la mère Rh^- on simule l'accident pour le nouveau né. Il s'agit encore d'un tirage de Bernouilli, pour lequel $p = 0,08$.

- On peut utiliser le même sous programme pour les deux types de tirages de Bernouilli : il suffit d'introduire avant la probabilité adéquate.

Un programme pour TI 57 est proposé en annexe.

ANNEXE

II. 3. a) Mémoires.

R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
k	α_m	f_2	f_3	S_n

où l'on désigne par

k le nombre de lancers restant à effectuer ;
f_2 le nombre d'occurrences de l'événement $S_n = 2$;
f_3 le nombre d'occurences de l'événement $S_n = 3$.

00	SBR 0	
01	STO 4	
02	SBR 0	
03	SUM 4	
04	RCL 4	
05	–	
06	2	
07	=	
08	2^{nd} x = t	
09	GTO 1	
10	–	
11	1	
12	=	
13	INV 2^{nd} x = t	
14	GTO 2	
15	1	
16	SUM 3	
17	2^{nd} Lbl 2	
18	1	
19	INV SUM 0	
20	RCL 0	ou
21	INV 2^{nd} x = t	2^{nd}Dsz
22	RST	
23	RCL 2	
24	R/S	
		⟶ lire f_2
25	RCL 3	
26	R/S	
		⟶ lire f_3
27	2^{nd}Lbl 1	
28	1	
29	SUM 2	
30	GTO 2	
31	2^{nd}Lbl 0	
32	RCL 1	
33	×	
34	1	
35	4	
36	7	
37	=	
38	2^{nd}INV Int	calcul de
39	STO 1	a_n ou de b_n
40	×	
41	6	
42	+	
43	1	
44	=	
45	2^{nd}Int	
46	INV SBR	

Données.

N en R_0
α_0 $(0 < \alpha_0 < 1)$ en R_1.

3. b) Mémoires.

R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
N	α_n	nombre d'accidents	0,85	0,08	0,85 ou 0,08

00	RCL 3
01	STO 5
02	SBR 0
03	$2^{nd}x = t$
04	GTO 1
05	SBR 0
06	2^{nd}INV $x = t$
07	GTO 1
08	RCL 4
09	STO 5
10	SBR 0
11	2^{nd} $x = t$
12	GTO 1
13	1
14	SUM 3
15	2^{nd}Lbl 1
16	1
17	INV SUM 0
18	RCL 0
19	2^{nd}INV $x = t$
20	RST
21	RCL 2
22	R/S

← lire le nombre d'accidents

23	2^{nd}Lbl 0	tirage de Bernouilli
24	RCL 1	
25	×	
26	1	
27	4	
28	7	
29	=	
30	2^{nd}INV Int	
31	STO 1	
32	+	
33	RCL 5	
34	=	
35	2^{nd}Int	
36	INV SBR	

Données.

N en R_0
α_0 $(0 < \alpha_0 < 1)$ en R_1
0,85 en R_3
0,08 en R_4.

QUELQUES CALCULS BANCAIRES AVEC CALCULATRICES

Dans ce chapitre, nous donnons deux exemples de calculs bancaires ; ils permettent une approche de la notion de suites géométriques, éventuellement de puissances à exposants fractionnaires et de logarithmes.

I – CALCUL DE LA VALEUR ACQUISE AU BOUT DE n PERIODES PAR UNE VALEUR INITIALE C_1 (OU CAPITAL INITIAL), PLACEE A INTERETS COMPOSES (OU CAPITALISES) AU TAUX D'INTERET PERIODIQUE i.

Nous exprimerons le taux i sous forme décimale. Par exemple, un taux annuel d'intérêt de 6,5% sera écrit $\frac{6,5}{100} = 0,065$.

Le taux mensuel proportionnel (voir page 41) vaudra $\frac{0,065}{12} = 0,005\,42$.

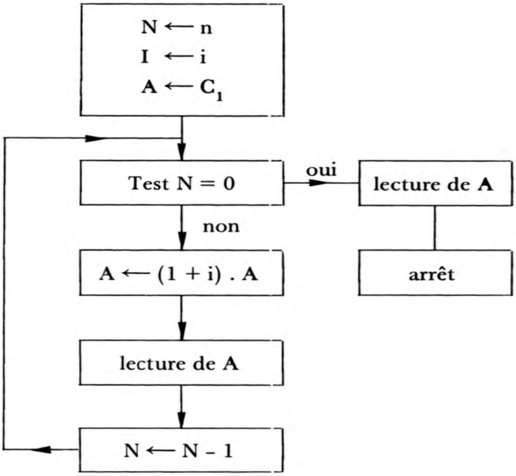
Appelons C_p le capital au début de la $p^{\text{ième}}$ période et I_p l'intérêt produit durant la $p^{\text{ième}}$ période. On a la relation $C_{p+1} = C_p + I_p$ avec $I_p = i \cdot C_p$ d'où $C_{p+1} = (1 + i) \cdot C_p$.

Les capitaux successifs seront : C_1, $C_2 = (1 + i) \cdot C_1$, $C_3 = (1 + i)^2 C_1$, ..., $C_{p+1} = (1 + i)^p \cdot C_1$, ...,

$\boxed{C_{n+1} = (1 + i)^n \cdot C_1}$ (1) C_{n+1} est la valeur acquise au bout de n périodes.

Remarque.

Pour calculer les capitaux successifs C_p on peut utiliser par exemple le programme suivant :



ce qui donne sur T.I.57

	mémoires
STO 0	n dans M_0
R/S	i dans M_1
STO 1	C_1 dans M_2
R/S	
STO 2	**exécution**
Lbl 0	n
RCL 1	R/S
+	i
1	R/S
=	C_1
×	R/S
RCL 2	
=	
STO 2	
Pause	
Dsz	
GTO 0	
RCL 2	
R/S	
RST	

Considérons les cinq paramètres :

n : nombre de périodes

i : taux d'intérêt

C_1 : valeur initiale

C_{n+1} : valeur finale

I : total des intérêts acquis ($I = C_{n+1} - C_1$).

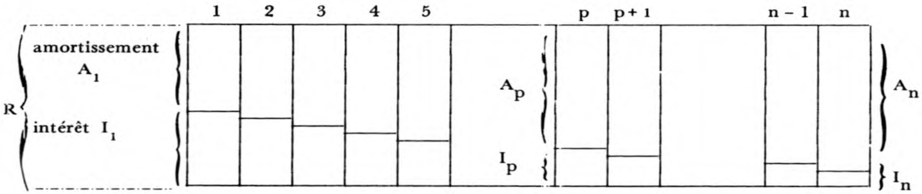
A partir de la formule 1 , on pourra écrire les formules donnant un paramètre en fonction des autres.

II – AMORTISSEMENT D'UN EMPRUNT.

1) Pour rembourser un emprunt sous forme de n versements constants, on considère que chaque remboursement égal à R pour chaque période p, est composé de deux parties distinctes :

– une part d'intérêt I_p payé au banquier comme salaire de l'argent prêté ;

– une part de capital remboursé ou amorti A_p.



Désignons par C_p le capital restant dû au début de la $p^{ième}$ période.

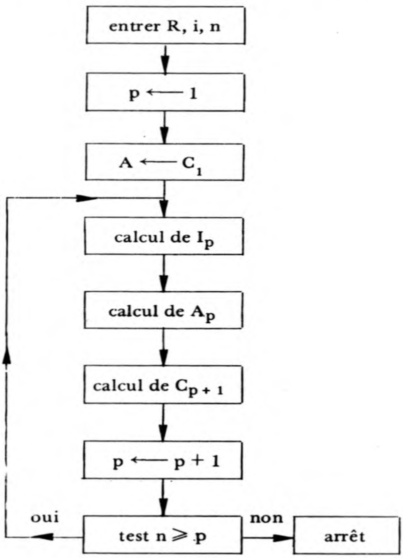
$p \in [1, n]$, $\quad I_p = i \cdot C_p$

$$R = A_p + I_p$$

$$C_{p+1} = C_p - A_p$$

C_{p+1} représente le capital restant dû après le $p^{ième}$ remboursement.

Le programme suivant permet le calcul des différentes valeurs I_p, A_p, C_{p+1} (connaissant n, C_1, i, R et p). Ces valeurs permettent de reconstituer un tableau d'amortissement remis habituellement par les organismes de prêt.



STO 2
R/S
STO 3
R/S
STO 4
1
STO 7
R/S
STO 1
Lbl 1
RCL 1
×
RCL 3
=
pause ⟶ lecture de I_p
−
RCL 2
=
+/−
pause ⟶ lecture de A_p
−
RCL 1
=
+/−
STO 1
pause ⟶ lecture de C_{p+1}
1
SUM 7
RCL 4
x ⩾ t
GTO 1
R/S
RST

pour avoir le n° de la période rajouter : RCL 7 pause.

Mémoires

C_1 puis C_p dans M_1

R dans M_2

i dans M_3

p dans M_7

n dans M_4

Exécution

R
R/S
i
R/S
n
R/S
C_1
R/S

2) On peut écrire la formule donnant R en fonction de C , n et i. La relation entre deux amortissements successifs s'obtient ainsi :

$$\begin{aligned} A_{p+1} &= R - I_{p+1} \\ &= R - i \,.\, C_{p+1} \\ &= R - i \,.\, (C_p - A_p) \\ &= R - i \,.\, C_p + i \,.\, A_p \\ &= A_p + i \,.\, A_p \\ &= (1 + i) \,.\, A_p . \end{aligned}$$

La suite (A_p) est une suite géométrique de 1er terme A_1 et de ra 1 + i

d'où $C_1 = \sum_{p=1}^{n} A_p$ $\qquad C_1 = A_1 \,.\, \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

or $R = A_1 + i \,.\, C_1$ donc $\qquad R = C_1 \,.\, \dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

soit

$$\boxed{R = C_1 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}} \qquad (2)$$

A partir de cette formule on obtient

$$C_1 = R \,.\, \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

et

$$n = - \frac{\mathrm{Log}\,(1 - i \frac{C_1}{R})}{\mathrm{Log}\,(1 + i)} .$$

Les formules permettent de calculer R, C_1 et n, connaissant deux de ces trois données et le taux d'intérêt i. Connaissant C_1, R et n, on ne peut pas déduire directement i de la formule.

On peut obtenir une valeur approchée de i par **des méthodes de r che des zéros d'une fonction** (voir chapitre zéros d'une fonction). On doit trou ver, en effet, i tel que f(i) = 0 avec

$$f : i \longmapsto R \,.\, \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - C_1 .$$

En essayant différentes valeurs de i, on arrive à trouver f(i) voisin de zéro.

On pourra écrire un programme de calcul de f(i).

En utilisant la formule (2) , on obtient **le taux nominal** i ou T.E.G : **taux effectif global.**

Il existe d'autres taux d'intérêts. Si i est le taux d'intérêt effectif global annuel, **le taux actuariel** i' est le taux annuel équivalent au taux mensuel à intérêts composés.

Il vaut $i' = (1 + \frac{i}{12})^{12} - 1$ en écriture décimale ou $100 . [(1 + \frac{i}{12})^{12} - 1]$ % .

On définit également **le taux annuel linéaire ou T.A.L.** On l'obtient en regardant dans un tableau d'amortissement : $\sum_{p=1}^{n} I_p$.

Sur n années et pour une somme de C_1 le total des intérêts est : $\sum_{p=1}^{n} I_p$.

Pour une année et pour 1 franc, on a un taux annuel :

$i'' = \text{T.A.L} = \frac{1}{C_1} (\sum_{p=1}^{n} I_p)$ écrit sou forme décimale ou $i'' = \frac{1}{100\, C_1} (\sum_{p=1}^{n} I_p)$ %.