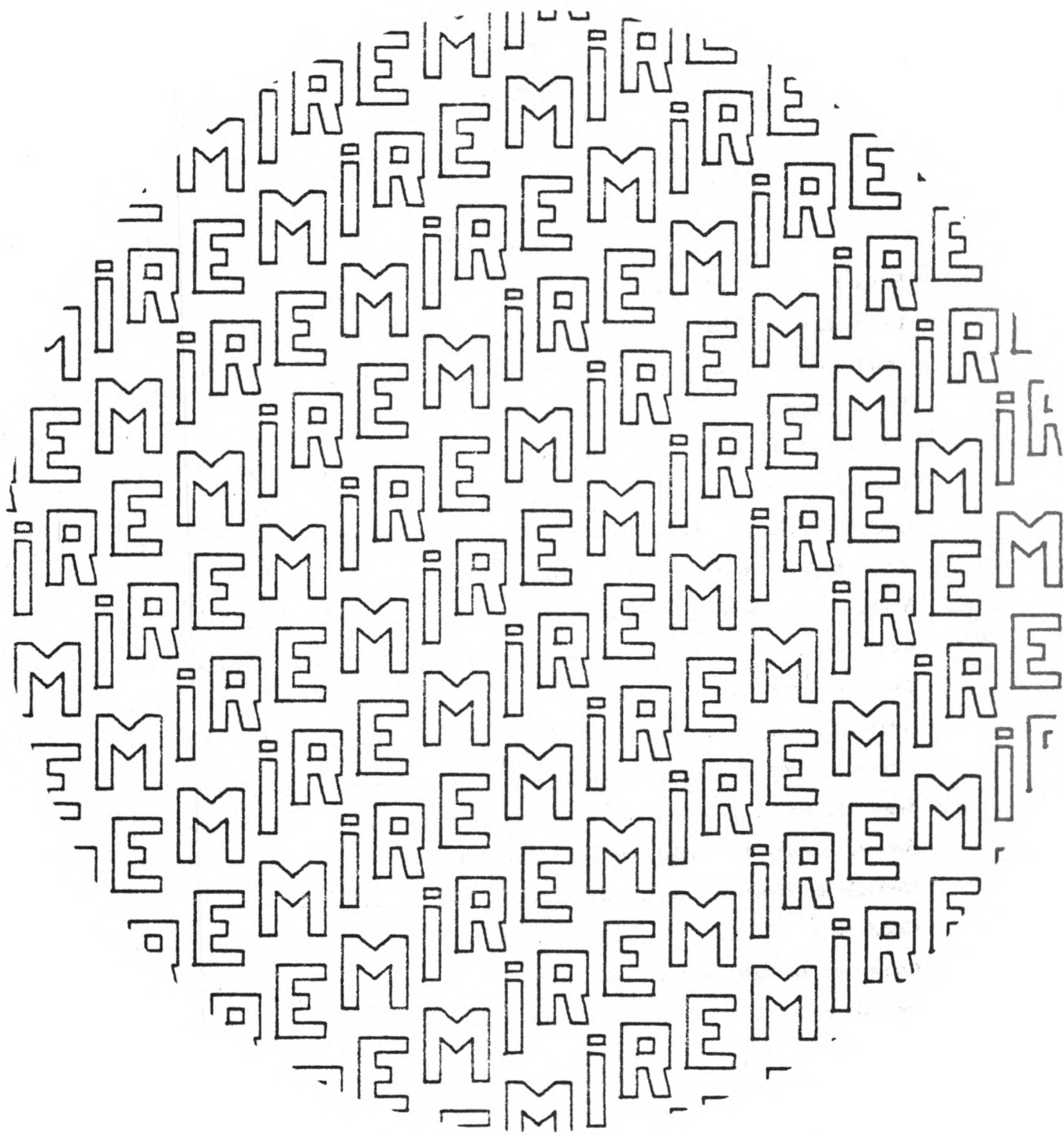


SOMMAIRE

Introduction	3
La machine avec les élèves	4
Profil provisoire d'une machine pédagogiquement intéressante	5
Le compte en banque	7
Addition et multiplication en multiprécision	9
Fonction linéaire	13
Quelques problèmes sur la division (PGCD)	15
Reste de la division	16
Multiprécision (division)	17
Calcul de e	20
Etude de suites	21
Séries	25
Erreurs (séries)	27
Sinus, cosinus	29
Racines simples d'un polynôme (ou d'une fonction)	33
Méthode de Newton	34
Calcul de $\sqrt[n]{a}$	34
Conversion en base deux	35
Réflexions	40



«Le réexamen du contenu de la science doit commencer par annuler sa rupture d'avec la base collective de travail : le matériau de la science doit être compris et éclairé comme expérience pratique de l'humanité ;»

Bogdanov

GENESE.

Ce texte est une mise au point de certains thèmes qui ont été l'objet d'une réflexion de quelques animateurs de l'IREM de Grenoble. Rappelons brièvement la genèse de ce travail.

- Un atelier ouvert aux animateurs en 1975-1976.
- Différentes expériences dans quelques classes et clubs de certains lycées de l'Académie.
- Ouverture en 1976-1977 à Grenoble d'un stage E.P.M. (Emploi Petites Machines) pour une dizaine de professeurs.
- La demande de documentation de nombreux collègues nous a conduits à écrire le présent fascicule. Espérons qu'il introduira une dynamique d'échanges au niveau des travaux réalisés dans les classes et qu'il permettra la parution d'un «Matchinettes (suite)».*

Nous avons voulu transmettre un certain nombre d'idées exploitables avec la plupart des machines et les listages des différentes opérations à effectuer sont ici comme paradigmes de ce que l'on peut faire.

INTRODUCTION.

Le travail sur petites machines est singulier dans les différents parcours pédagogiques empruntés par les mathématiques.

En effet l'utilisation pour des activités mathématiques d'une calculatrice non qualifiée de «scientifique» par ses constructeurs (peut-être parce qu'inqualifiable) relève d'une démarche suffisamment controversée pour qu'on désire l'analyser.

* *Matchinettes II* est paru et disponible à l'IREM de GRENOBLE.

Le type de machine avec lequel nous avons travaillé est en effet un objet «grand public» en vente un peu partout à un prix variant de 50 à 150 F.

Conçues essentiellement pour pouvoir gérer les budgets des ménages (soyez modernes ordonnent les publicités), ces calculatrices permettent à leur utilisateurs de faire les quatre opérations sans effort.

Méprisées par beaucoup, elles ne peuvent plus être ignorées par les enseignants, tant leur présence dans la vie quotidienne devient permanente.

La singularité de notre démarche trouve son contrepoint dans la pluralité des objectifs poursuivis :

- maîtrise par l'enfant de la calculatrice,
- initiation à l'algorithmique et à la programmation,
- réflexion sur les résultats obtenus,
- éveil de la curiosité relativement à des propriétés mathématiques,
- développement de l'«esprit scientifique expérimental»,
- validation ou non d'un modèle,
- etc...

LA MACHINE AVEC LES ELEVES.

Dans un premier temps, il convient d'essayer de trouver des stratégies permettant de déterminer les effets des différentes touches (en elles-mêmes et les unes par rapport aux autres).

Nous pouvons faire construire aux élèves des tableaux semblables à ceux-ci :

Touche	Observations	
	Affichage	Remarque
7	7.	
$\sqrt{}$	2,6457513	
Conclusion : Affiche directement la racine.		

7	7.	
+	7.	
3	3.	
=	10.	
Conclusion : ...		

Nous laissons aux utilisateurs le soin de construire des tableaux similaires pour explorer les effets des touches $\times$, $\div$, EX, M, etc ...

L'intérêt de ces manipulations est manifeste : l'élève rationalise l'ensemble des conduites lui permettant d'explorer l'utilisation de l'outil-machine. Mais il rencontre très vite les limites d'une telle activité.

La machine reste une boîte noire ; les modèles de fonctionnement proposés sont révocables à tout moment. De même ils sont en perpétuelle construction.

Par exemple : on tape un nombre a, un signe opératoire puis un nombre b ; b remplace a sur le cadran d'affichage. On peut supposer que a se trouve dans une mémoire de la machine ; de même le signe opératoire est «quelque part» dans la machine (on pourra parler de «mémoire des signes»).

PROFIL PROVISOIRE D'UNE MACHINE PEDAGOGIQUEMENT INTERESSANTE.

Ces réflexions nous amènent à formuler des impératifs dépendant du travail possible avec une machine. Il faut que l'on puisse :

- explorer le registre de travail ou la pile, par une touche échange ou EX,
- échanger le contenu de la mémoire M et l'affichage sans détruire aucune donnée (M EX).*

En résumé il nous semble indispensable de pouvoir accéder à toutes les informations contenues dans la machine sans les détruire.

* *Note relative à la deuxième édition. La plupart des machines actuellement sur le marché n'ont pas été construites à des fins pédagogiques et ne possèdent pas cette caractéristique. Certaines ne permettent même pas l'exploration de la pile. Cette situation est très regrettable, et bien qu'on puisse souvent imaginer des programmes pour remplacer les exemples que nous proposons nous insistons sur l'intérêt de ces deux possibilités.*

Notes:

LE COMPTE EN BANQUE

Dans un premier temps il convient d'apprendre à se servir de la machine.

Après quelques opérations sans malice (par exemple 3×4) on peut proposer de faire les différentes opérations nécessaires à la gestion d'un compte bancaire (simple).

Le problème se présente sous l'aspect suivant :

- connaissant l'ancien solde,
- ayant une liste des chèques utilisés,
- connaissant les versements au compte:

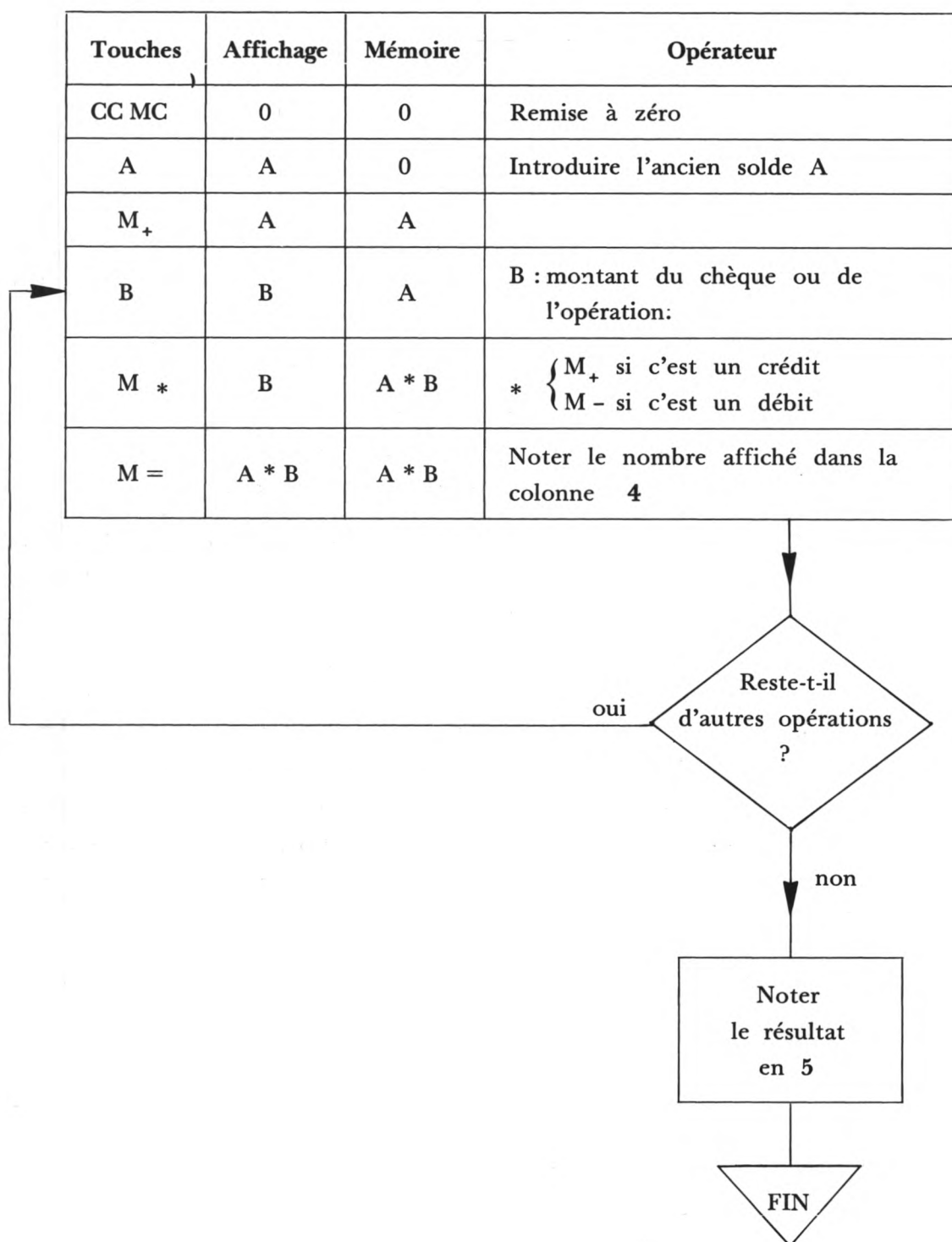
Etablir une feuille de tenue de compte sur laquelle on peut lire le solde opération après opération. (Avec des élèves il paraît important de les laisser organiser leurs feuilles de papier).

On obtient un schéma du type suivant :

Ancien solde :			
Opération	Débit	Crédit	Solde
①	②	③	④
Nouveau solde : ⑤			

On pourra compliquer un peu cet exercice en introduisant des agios ou bien le solde d'un compte style carte de crédit internationale.

A propos de cet exercice simple il convient de bien faire dégager la séquence des différentes opérations effectuées et l'on obtiendra quelque « chose » qui ressemblera à ceci :



ADDITIONS ET MULTIPLICATIONS EN MULTIPRECISION

Quelle que soit la machine que l'on utilise, et en particulier les machines de poche, la technologie limite le nombre de chiffres exacts dans le résultat d'une opération (en notation habituelle cette notion recouvre celle de **capacité** de la machine).

Les enfants découvrent seuls et très vite les opérations «**trop grosses**» pour la machine utilisée. (Sur la totalité des modèles connus de petites machines un signal de dépassement est affiché).

Cet obstacle va permettre d'introduire une dynamique nouvelle dans le comportement de l'élève vis à vis de la calculatrice : de la consommation d'opérations plus ou moins élémentaires on passe à la résolution d'un problème à l'aide d'un matériel donné.

L'argument : «Si on n'arrive pas à faire avec une machine ce qu'on peut faire à la main alors c'est qu'on se sert mal de la machine» trouve ici toute sa force.

Choisissons une machine qui fasse des opérations sur des nombres de 8 chiffres et essayons de faire une addition de plusieurs nombres (de plus de 8 chiffres).

A = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 0 1 1 1 2

B = 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8

C = 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 6

D = 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7

E = 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8

On «découpe» chaque nombre en tranches de n chiffres ($n < 8$) et l'on fait les sommes dans chaque colonne (sans oublier les retenues éventuelles).

Pour deux nombres a et b cela donne :

$$A = A_1 + A_2 \times 10^n + A_3 \times 10^{2n}$$

$$B = B1 + B2 \times 10^n + B3 \times 10^{2n}$$

$$A + B = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) \times 10^n + (A_3 + B_3) \times 10^{2n}$$

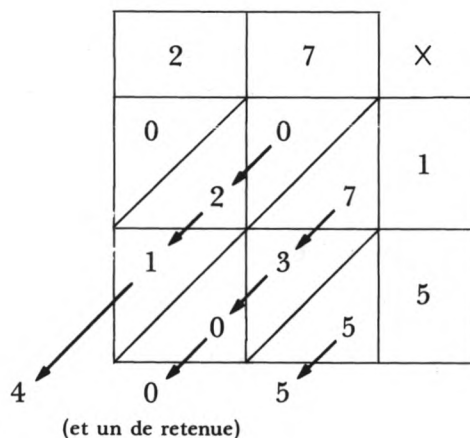
Ce qui nous donne la feuille de calculs suivante :

[illegible]

L'amplitude de chaque tranche est choisie en fonction de la quantité des nombres que l'on veut additionner et de leurs longueurs.

Nous emploierons une méthode analogue pour les multiplications entraînant un dépassement de capacité.

Rappelons cette disposition amusante et savante de multiplications buissonnières :



$$27 \times 15 = 405$$

Employons cette disposition pour des calculs sur des tranches de 4 chiffres.

	123	4567	8910	1112	X
	111	4146	8090	1009	9080
	6840	8360	2800	6960	
	86	3228	6298	786	7069
	9487	4123	4790	728	
	84	3136	6118	763	6867
	4641	1589	4970	6104	
112	2009	0243	6461	6104	
1074					
9251					

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
 X 9 0 8 0 7 0 6 9 6 8 6 7

1 1 2 1 0 7 4 9 2 5 1 2 0 0 9 0 2 4 3 6 4 6 1 6 1 0 4

Remarques :

- 1) Avec une machine donnée on s'interrogera sur la longueur des tranches à utiliser.
- 2) D'autres dispositions de la multiplication seront posées pour ne pas fixer la mémoire sur une représentation.
- 3) Ne pas oublier les retenues dans les additions.
- 4) On imaginera facilement une ou plusieurs méthodes pour la soustraction.

Observations :

Cette activité passionne les jeunes élèves, la machine perd son caractère magique car ils réussissent à la contraindre à effectuer un travail qu'elle refusait : elle perd sa qualité de gadget pour devenir un outil.

Notes :

FONCTION LINEAIRE

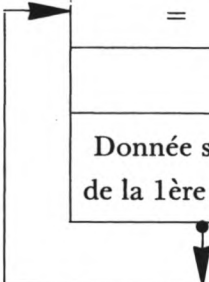
La plupart des calculatrices de poche (même très élémentaires) possèdent la possibilité d'utiliser le «facteur constant» en multiplication ou en division. Après avoir testé son fonctionnement on pourra utiliser cette propriété de la machine pour compléter un tableau de proportionnalité.

Exemple : On dispose d'un plan de quartier à une échelle inconnue mais, on reconnaît sur ce plan un bâtiment dont on a mesuré la longueur (35 m) qui est représenté par un rectangle de 23 mm de long. Les questions à résoudre correspondent aux blancs du tableau suivant :

Dimensions réelles en m	Dimensions sur le plan en mm
35	23
12	
147,5	
54,3	
	10
	145
	etc.

Sur notre machine le «facteur constant» est le 2ème nombre affiché (sur d'autres c'est le premier) il faut donc multiplier les nombres de la 1ère colonne par $23/35$ en donnant à ce dernier nombre la 2ème place dans la 1ère multiplication d'où le programme pour remplir les cases de la 2ème colonne.

Machine	Opérateur
23	
÷	
35	
=	
X	
12	
EX	
=	
	noter dans la 2ème colonne
Donnée suivante de la 1ère colonne	



QUELQUES PROBLEMES SUR LA DIVISION

A – Recherche du PGCD de a et b.

Nous utiliserons l'algorithme d'Euclide et dans un premier temps nous chercherons le reste de a par b en retranchant b autant de fois que l'on peut. Il est recommandé de faire un organigramme de cet algorithme avant d'établir le programme.

Exemple de programme pour la machine utilisée. L'affichage est désigné par X.

Machine	Opérateur	Liste des diviseurs successifs
	1) Ranger les 2 nombres $a \geq b$ 2) Préparer une liste des diviseurs successifs : noter b	
a		
—		
b		
=		
	$X \geq$ dernier diviseur noté	
	$X = 0$ le dernier diviseur noté est le PGCD	
	$X <$ dernier diviseur noté noter X dans la liste	
EX		

Si a est beaucoup plus grand que b la méthode des soustractions successives peut devenir fastidieuse on a alors avantage à rechercher directement le reste de la division euclidienne.

B – Reste de la division de a par b .

La formule $r = a - bq$ montre que, nécessitant l'introduction de trois nombres de calcul de r impose l'emploi d'une mémoire pour éviter le réintroduction au clavier.

On a le programme suivant :

Machine	Opérateur
a	
M ₊	
÷	
b	
=	
	Noter q la partie entière du nombre affiché
EX	
X	
q	
EX	
=	
M -	
M =	

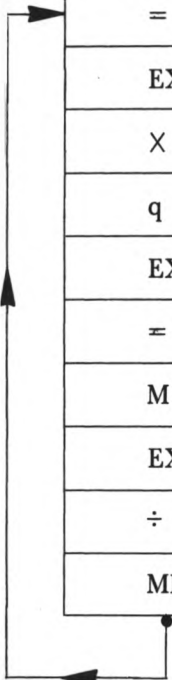
FIN le reste de a par b est affiché.

Un exercice intéressant est de modifier le programme précédent de recherche du PGCD en utilisant ce programme de recherche du reste. Une programmation astucieuse ne comporte pas d'autre introduction numérique au clavier que a , b et les quotients successifs a et b n'étant introduits qu'une seule fois.

Pour établir le programme il est recommandé :

- de schématiser l'algorithme par un organigramme,
- de faire un tableau de gestion du registre de la machine qui rappelle l'état des diverses mémoires après chaque action sur le clavier. Voici ce tableau d'étude pour une machine telle que la notre :

Clavier	X (Affichage)	Y (Réserve)	M (Mémoire)	Signe	
a	a	0	0	+	état de la machine à la mise en route
M ₊	a	0	a	+	
÷	a	a	a	÷	
b	b	a	a	÷	
=	a/b	b	a	÷	→ noter $E(\frac{a}{b}) = q$
EX	b	a/b	a	÷	si $\frac{a}{b}$ entier
X	b	b	a	X	le dernier diviseur
q	q	b	a	X	est le PGCD. FIN.
EX	b	q	a	X	on l'obtient par E
=	bq	b	a	X	
M -	bq	b	$a - bq = r$	X	
EX	b	bq	r	X	
÷	b	b	r	÷	
MEX	r	b	b	÷	noter le nouveau diviseur



Le programme correspondant à ce tableau d'étude comportera dans la colonne opérateur, après la ligne X de la colonne machine, un test portant sur le nombre X affiché : si X est entier on continuera le programme avec la boucle indiquée sur le tableau d'étude sinon le dernier diviseur sera le PGCD. Le tableau indique qu'il sera dans la mémoire Y et pour l'obtenir on appuiera donc sur la touche EX.

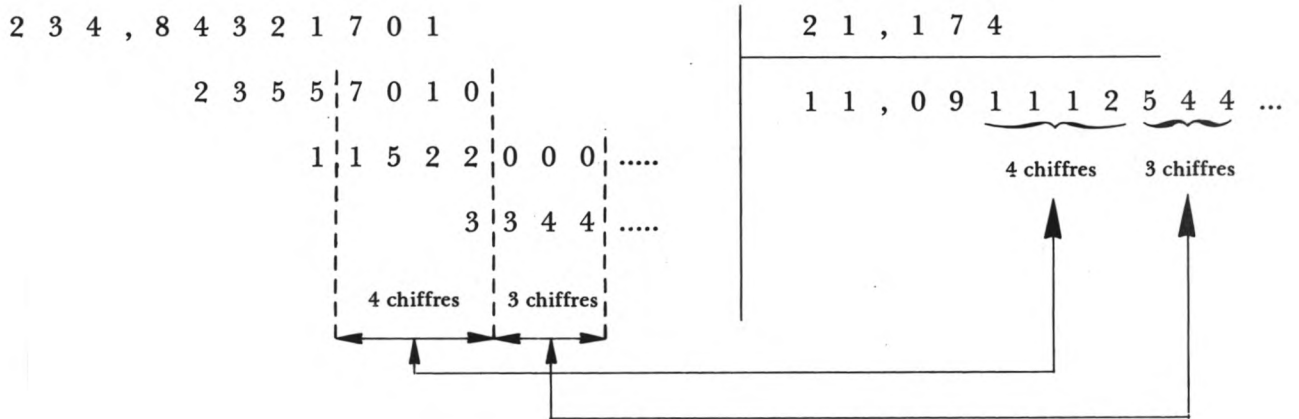
Bien entendu ce tableau sera différent avec une autre machine, en particulier si la machine ne permet pas l'échange de la mémoire avec l'affichage, le programme, plus compliqué, reste possible à établir lorsqu'on peut échanger X et Y.

C — Multiprécision.

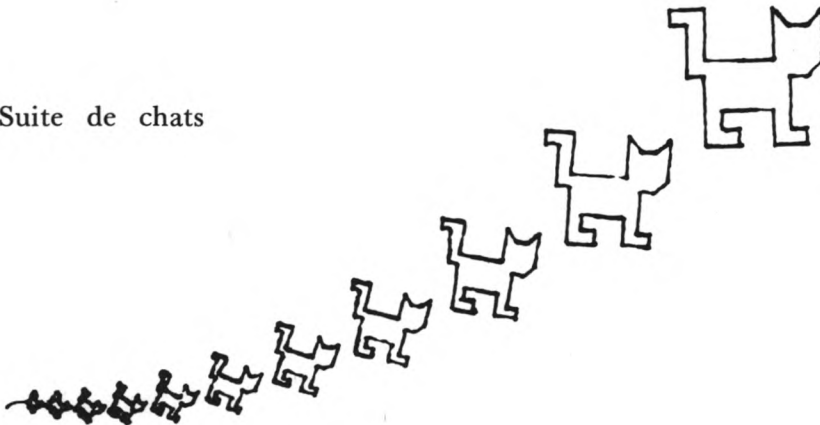
Le calcul à l'aide de la machine du reste de la division permet un intéressant exercice de multiprécision sur la division. Lorsque le diviseur s'écrit avec 8 chiffres au plus. La méthode employée ici consiste à «abaisser» des tranches de plus d'un chiffre du dividende pour trouver des tranches du même nombre de chiffres du quotient. Les choix à faire relativement à ce nombre de chiffres posent des problèmes intéressants pour des élèves de 4ème ou 3ème. La position des virgules est importante.

Voici sans autres explications un exemple :

$$234,84321701 : 21,174$$



Suite de chats



Diverses méthodes peuvent être employées. Il semble commode de traiter séparément le problème de la virgule et d'opérer sur des entiers, les dividendes successifs ayant 8 chiffres (capacité de la machine).

La recherche de la suite décimale périodique obtenue à partir de la fraction $\frac{a}{b}$ est un cas particulier intéressant qui mérite l'établissement d'un programme.

Exemple $1/31$. On pourra opérer par tranches de 6 chiffres. On écrira d'abord 0,... et on notera la suite des tranches de 6 chiffres, si la tranche obtenue dans le programme n'a pas 6 chiffres on la complètera par des zéros à gauche.

Machine	Opérateur
1	
X	
1000000	
=	
M ₊	
÷	
31	
X	
	noter à droite du dernier chiffre écrit une tranche de 6 chiffres égale à la partie entière du nombre affiché (soit a cette partie entière)
EX	
a	
=	
M ₋	
M =	
M.C	

(Compléter éventuellement par des zéros à gauche pour avoir 6 chiffres).

Résultat obtenu : 0,032258064516129032258064

1ère période

La période est de longueur 15. Une propriété connue concernant la période de $1/p$ (p premier) est que, si elle est de longueur paire, les deux demi-périodes ont leur chiffres 2 à 2 complémentaires à 9.

Exemple $1/7 = 0,142857...$ $142 + 857 = 999$.

Il existe une propriété plus générale que nous laissons méditer au lecteur et qui pourrait se traduire sur l'exemple précédent par

$$03225 + 80645 + 16129 = 99999$$

ou encore par $032 + 258 + 064 + 516 + 129 = 999$.

D – Quelques applications.

1) Problème : Calculer les 15 premiers chiffres décimaux de e

$$\text{On a } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Sans dissimuler les problèmes relatifs aux erreurs : erreur de troncature (on arrête la série à un certain rang) et erreur d'arrondi (chaque terme calculé est arrondi) nous n'abordons ici que la technique de calcul.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
0	1																		
1	1																		
2		5																	
3		1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	L'arrondi est fait de façon classique à $5 \cdot 10^{-18}$ près.
4			4	1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	
5				8	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
6				1	3	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	Chaque ligne est obtenue en divisant la précédente par n.
7					1	9	8	4	1	2	6	9	8	4	1	2	7	0	
8						2	4	8	0	1	5	8	7	3	0	1	5	9	
9							2	7	5	5	7	3	1	9	2	2	3	5	
10								2	7	5	5	7	3	1	9	2	2	4	L'addition est faite par tranches de 7 chiffres.
11									2	5	0	5	2	1	0	8	3	4	
12										2	0	8	7	6	7	5	7	0	
13											1	6	0	5	9	0	4	4	
14												1	1	4	7	0	7	5	
15														7	6	4	7	2	
16															4	7	7	9	
17																2	8	1	
18																	1	6	
19																		1	
	2	,	7	1	8	2	8	1	8	2	8	4	5	9	0	4	5	1	6

Cette série ne converge pas très rapidement, d'autres sont plus intéressantes à ce point de vue.

ETUDES DE SUITES

Il est indispensable de tester auparavant les possibilités de la machine, en particulier, ce que les constructeurs appellent le facteur constant. La machine que nous avons utilisée possède cette particularité sur les 4 opérations. Le 2ème nombre entré dans la 1ère opération jouant le rôle de facteur constant.

Entrée au clavier	Affichage
a	a
* (+ - X ou ÷)	a
b	b
=	c * b
c	c
=	c * b
⋮	⋮

Suite arithmétique et suite géométrique.

Les programmes sont, en général, très faciles à établir. Voici sans commentaires, ceux qui peuvent être employés sur une machine similaire aux nôtres.

1er terme a
raison b

« + suite arithmétique
 *
 « X suite géométrique

possibilité d'employer les
signes - ou ÷

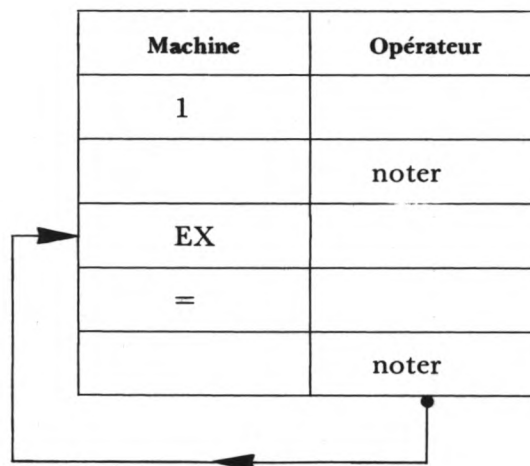
Machine	Opérateur
a	noter
*	
b	
=	
	noter

Suite de Fibonacci : $u_0 = 1$ $u_1 = 1$ $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Certaines machines sont construites de façon que même si aucun signe opératoire n'a été introduit, l'état des circuits est tel qu'en frappant le signe = elles effectuent une opération. Il est facile de tester si cette propriété existe.

Introduction au clavier	Affichage
a	a
EX	0
b	b
=	à observer

Dans ce cas, la machine sur laquelle nous travaillons affiche $a + b$. On en déduit un programme particulièrement simple pour obtenir les termes de la suite de Fibonacci.



Un bon exercice consiste à essayer d'obtenir par une gestion astucieuse du registre les termes de deux suites sans réintroduction au clavier : Exemple suite de Fibonacci et suite obtenue en faisant le rapport de deux termes successifs de la précédente.

Exemple :

a) Préparer un tableau dans lequel on inscrira les résultats successifs :

u_n	1	1	
v_n	1	1	

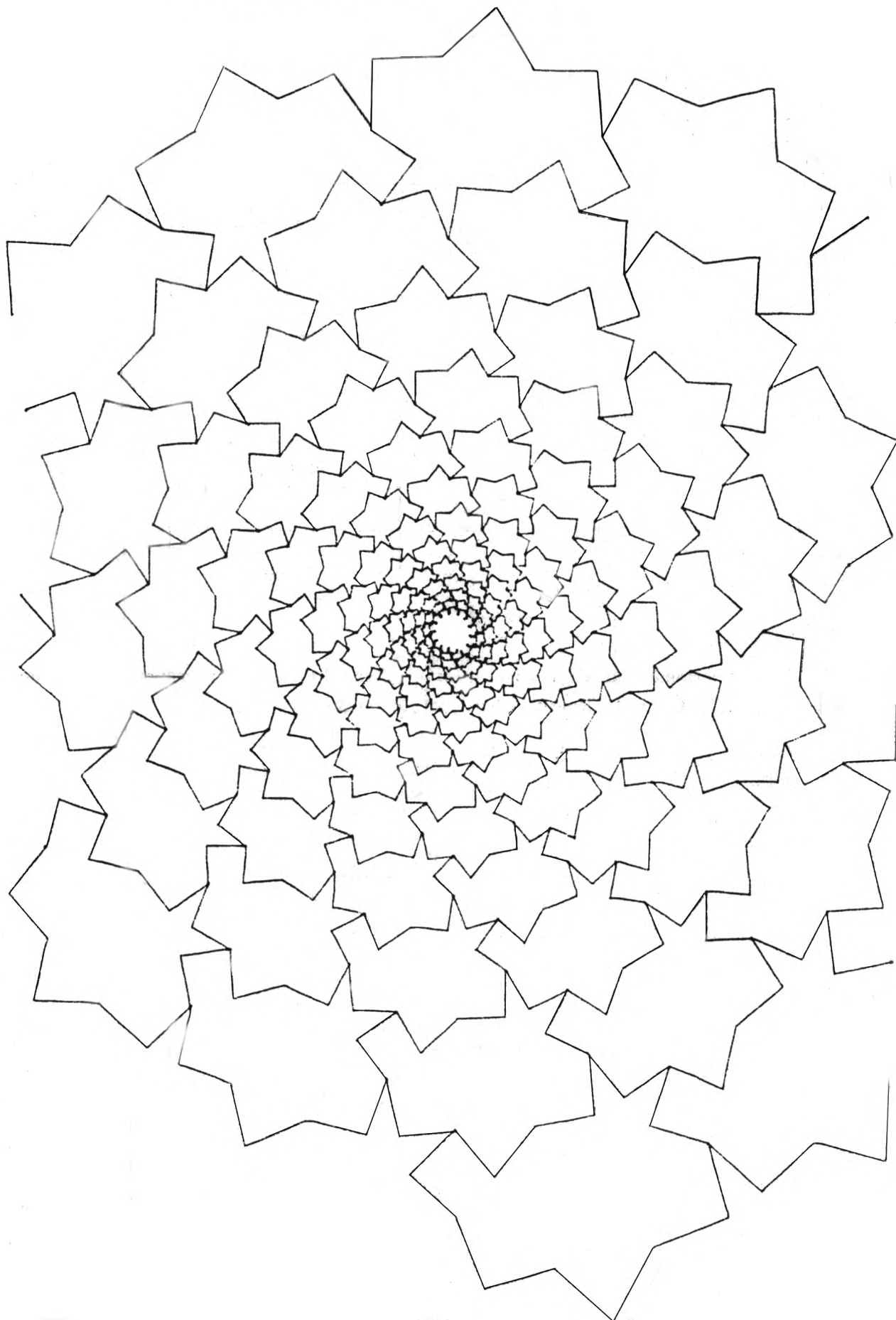
b) Programme

Machine	Opérateur
1	
M_+	
+	
MEX	
$\div$	
	noter ligne u_n
MEX	
=	
	noter ligne v_n
EX	
MEX	

Remarque : Il s'agit uniquement d'un exercice de programmation car la suite v_n est très facilement donnée par le programme.

Machine	Opérateur
1	
+	
=	
	noter
$\frac{1}{x}$	

A colorier pour vous détendre :



SERIES

In cauda Venenum

A — UNE SERIE CLASSIQUE.

Nous nous sommes posés les problèmes suivants :

- 1) Comment obtenir les termes u_k de la suite définie par :

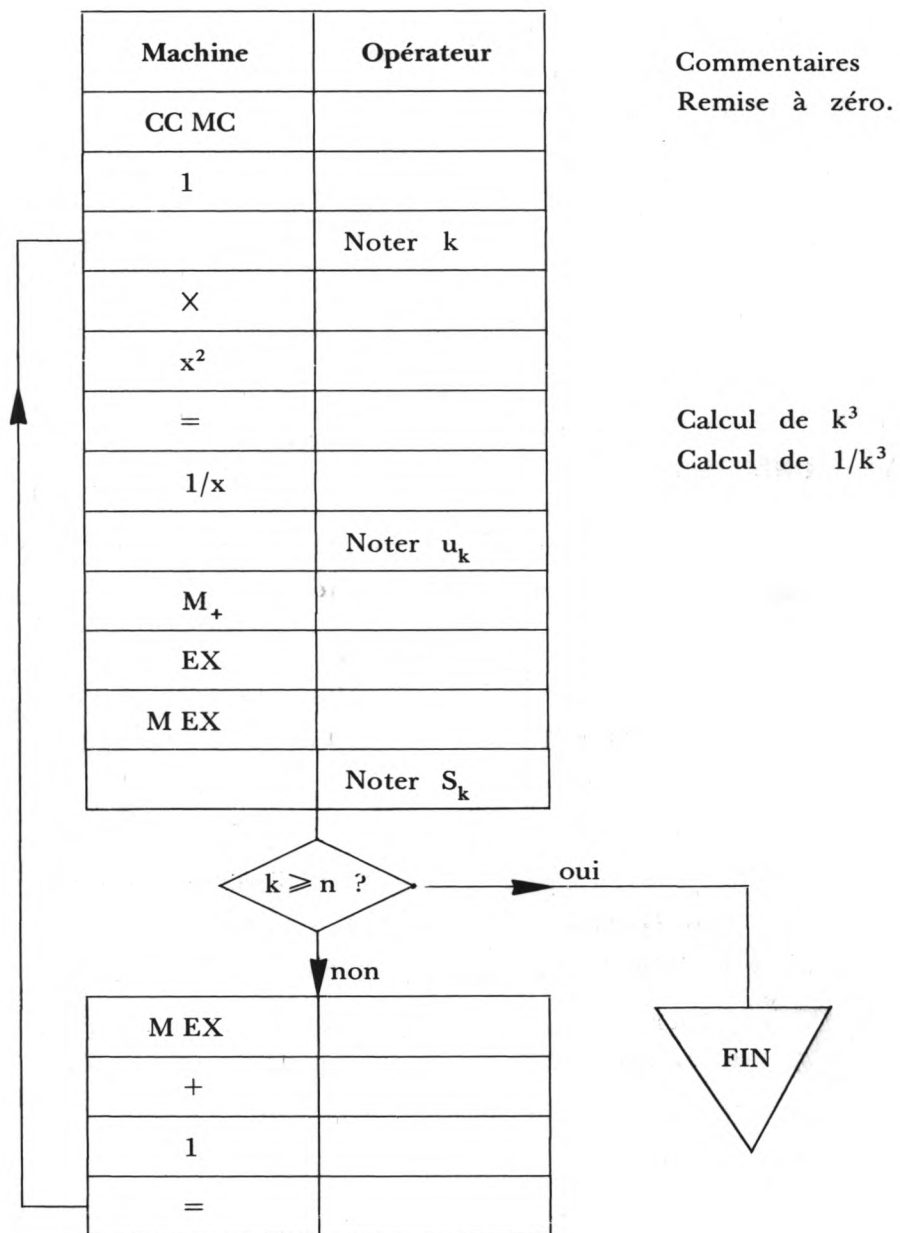
$$u_k = \frac{1}{k^3} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

- 2) Comment avoir en même temps les sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3}$$

- 3) Quelles différentes sortes d'erreurs de calcul faisons-nous et quelle était la meilleure manière d'organiser notre calcul.

Pour répondre aux deux premiers impératifs nous avons établi la suite de calculs suivante (appelons n le nombre de termes dont on veut calculer la somme).



Nous obtiendrons la feuille de résultats ci-dessous :

k	u_k	S_k
1	1	1
2	0.125	1.125
3	0.037037	1.162037
4	0.015625	1.177662
5	0.008	1.185662
6	0.0046296	1.1902916
7	0.0029154	1.1932070

Mais si on s'intéresse à :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Comment évaluer les différentes erreurs que nous avons commises en calculant S_n à la place de S .

Nous avons fait des erreurs :

- de troncature
- de sommation
- d'arrondi.

a) Erreur de troncature.

Cette erreur provient des termes «oubliés» de la somme infinie.

$$S = S_n + R_n$$

avec

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Classiquement R_n est majoré par l'intégrale :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

$$\text{et } \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}$$

$$\text{donc } R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

b) Erreur de sommation.

Il s'agit de la somme des erreurs faites sur chacun des termes de la série. Dans un premier temps l'erreur sur chaque terme est majorée par 10^{-7} . Sur n termes nous avons une erreur $\mathcal{E}_S$:

$$\mathcal{E}_S \leq n \cdot 10^{-7}$$

On remarque que cette majoration est très forte (certains termes sont connus exactement, $\frac{1}{5^3}$ par exemple).

c) Erreur d'arrondi.

C'est l'erreur faite en arrondissant le résultat final ; on peut la fixer dans des limites correspondantes à la précision cherchée. Pour simplifier notre étude supposons que cette dernière erreur est nulle.

L'erreur totale est majorée par :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2n^2} + n \cdot 10^{-7}$$

Ou encore $\mathcal{E}_M = f(n)$

$$\text{avec } f(n) = \frac{1}{2n^2} + n \cdot 10^{-7}$$

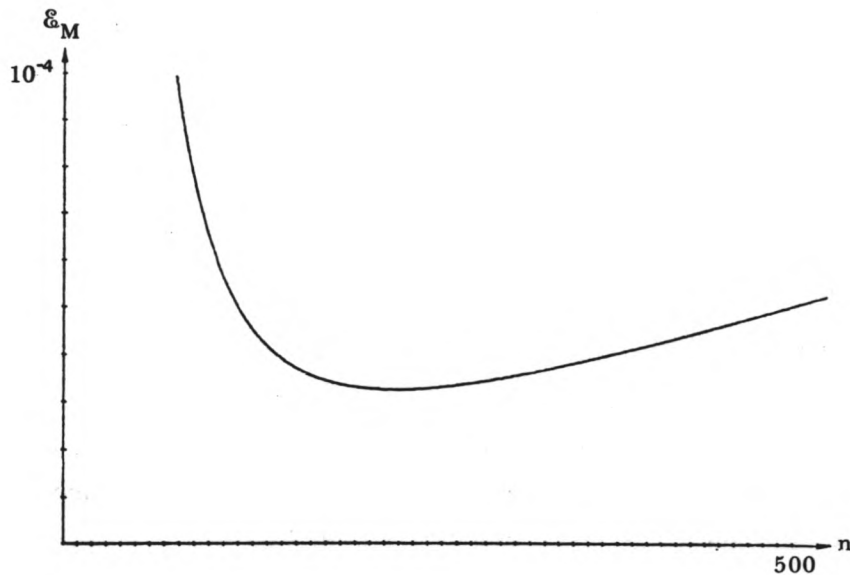
On peut étudier cette fonction :

$$f'(n) = -\frac{1}{n^3} + 10^{-7}$$

$$f'(n) < 0 \quad \text{si} \quad n \leq 215$$

$$f'(n) > 0 \quad \text{si} \quad n \geq 216$$

Nous obtenons une courbe de majoration de l'erreur.



On ne peut descendre en dessous du seuil :

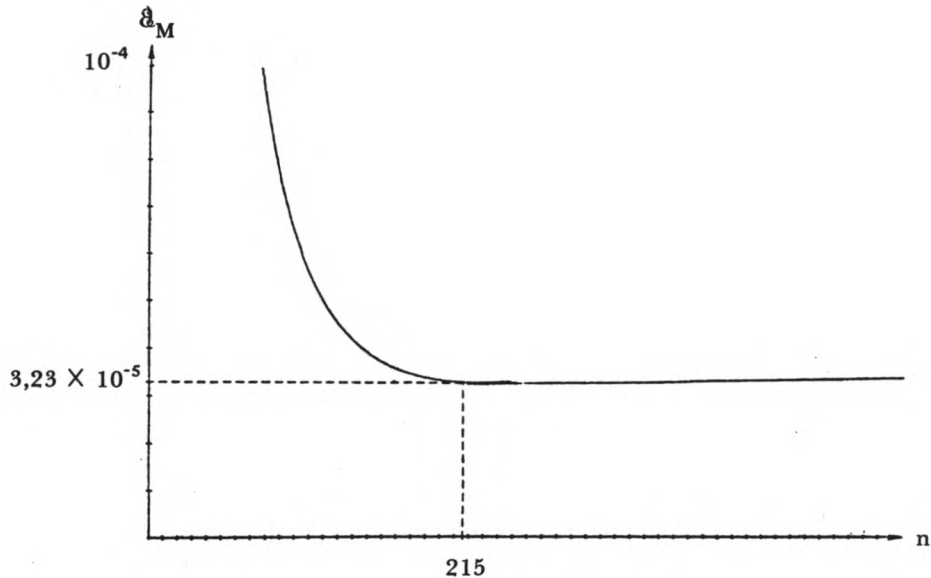
$$\mathcal{E} = f(215) \simeq 3,23 \times 10^{-5}$$

Il faut remarquer qu'à partir de 216 les u_k sont inférieurs à 10^{-7} c'est-à-dire qu'ils sont remplacés par 0 sur la machine. L'erreur est donc majorée par :

$$\text{l'erreur de troncature : } \frac{1}{2 \times 216^2} = 107 \times 10^{-7}$$

augmentée de l'erreur de sommation sur les termes déjà calculés : 216×10^{-7} .

Nous remplaçons alors la courbe précédente par :



B — SINUS ET COSINUS.

Thalassa ! Thalassa !

(Anabase IV, 8 - Xénophon)

Nos machines ne possèdent pas de fonctions trigonométriques mais on peut, bien sûr, calculer le sinus ou le cosinus d'un angle.

a) Par les développements limités :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

On s'assurera que pour $x \leq \frac{\pi}{4}$ il est inutile de dépasser le terme $\frac{x^9}{9!}$.

Un programme annexe et utile est la conversion en radians d'un arc en ° / ' / ''.

Il est intéressant de commencer par une conversion en degrés décimaux.

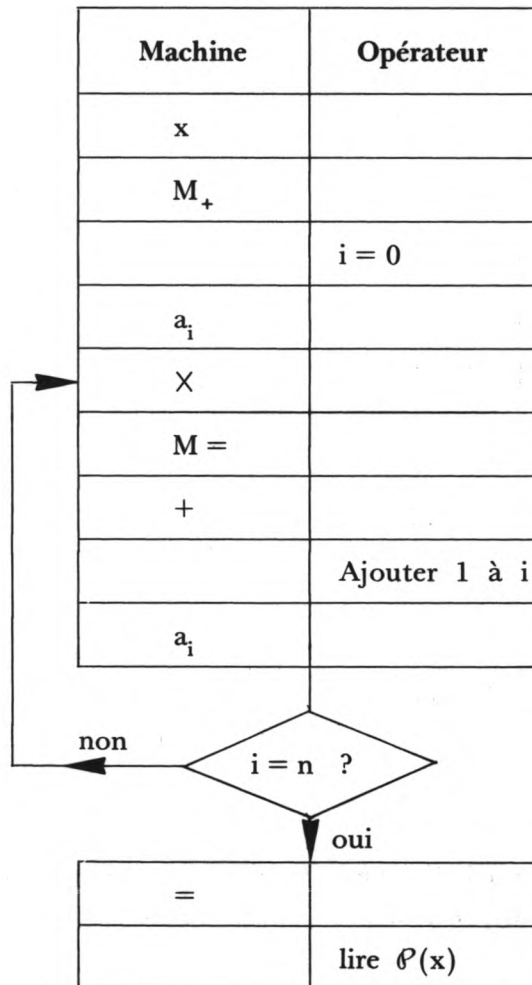
Rappelons le calcul de la valeur d'un polynôme à l'aide du schéma de Horner

$$\text{si } P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ou encore

$$P(x) = (((a_0 x + a_1) x + a_2) x \dots + a_1) x + a_n$$

Cela nous donne la suite de calculs :

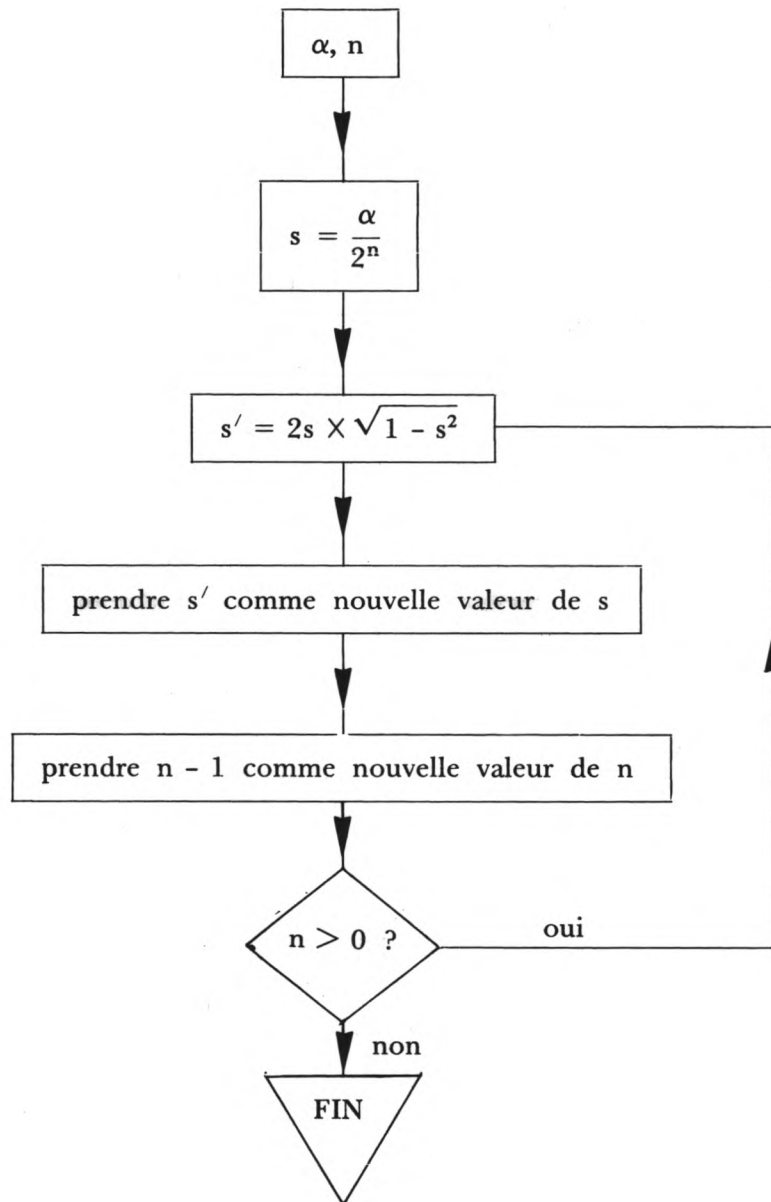


b) Par un des algorithmes proposés par Engels (à Karlsruhe en Août 1976).

Pour le sinus de α . On partage α en 2^n parties égales. Pour $\frac{\alpha}{2^n}$ on confond le sinus s et l'angle $\frac{\alpha}{2^n}$. On passe au sinus de l'arc double

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

Nous avons donc l'algorithme suivant :



Hors-texte

Une machine, une bécane, une bête, un mulet... pourquoi pas un dromadaire. Nous vous offrons cette comptine pour le plaisir.

Il était une fois au Caire
Un dromadaire
Qui savait tout faire
C'est pas vrai, ça fait rien
Ce sera vrai demain.

Ce dromadaire
Savait additionner, soustraire
Et même le contraire
C'est pas vrai, ça fait rien
Ça sera vrai demain

Le dromadaire
Est légendaire
C'est pas vrai
Ça fait rien
Ça sera vrai demain
Ou à la Saint Glin-Glin.

RACINES SIMPLES D'UN POLYNOME (OU D'UNE FONCTION).

A — Principe.

Dans le cas d'une racine simple la fonction s'annule en changeant de signe. Il est indispensable de localiser les racines au préalable.

exemple $f(x) = x^3 - 11x + 5$

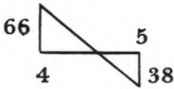
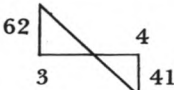
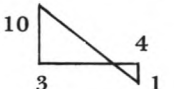
$f(0) = 5$; $f(1) = -5$. Il existe au moins une racine entre 0 et 1.

Diverses méthodes classiques peuvent être employées pour le calcul de la racine. Dans cet exemple nous procédons par interpolation linéaire. La valeur $f(x)$ est calculée suivant le schéma de Horner.

Programme :

x	M ₊	x ²	—	11	×	M =	+	5	=	noter
---	----------------	----------------	---	----	---	-----	---	---	---	-------

L'interpolation linéaire peut être faite par calcul mental ou à la machine. (Un petit croquis simplifie la vie).

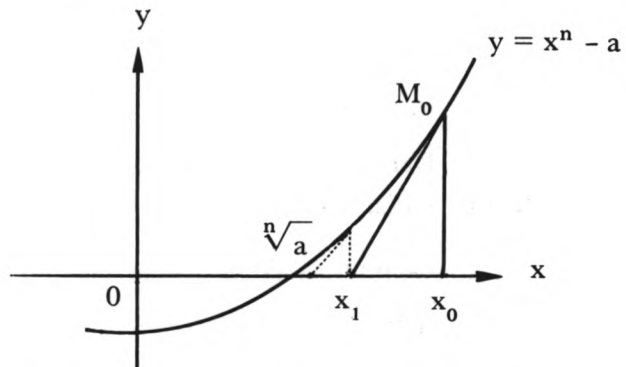
Essai	f(x)	Interpolation	
0	5	calcul mental essai suivant 0,5	
1	-5		
0,5	-0,375	 $\frac{66}{38+66}=0,63$	essai suivant 0,463
0,4	-0,664		
0,463	0,0062	 $\frac{62}{62+41}=0,60$	essai suivant 0,46360
0,464	-0,0041		
0,46360	$4 \cdot 10^{-5}$	calcul mental essai suivant 0,463604	
0,46361	$-6 \cdot 10^{-5}$		
0,463604	$-1 \cdot 10^{-6}$	 $\frac{10}{11}=0,9$	essai suivant 0,4636039
0,463603	$10 \cdot 10^{-6}$		
0,4636039	$-14 \cdot 10^{-7}$		

On atteint alors la limite de précision de la machine. Les conditions dans lesquelles elle calcule ne permettent pas de savoir si $x = 0,4636039$ est une racine approchée par défaut ou par excès sans utilisation de considérations théoriques. On peut se contenter de ce résultat. Une machine plus performante donne $0,4636037866367$.

B — Utilisation de la méthode de Newton.

Exemple calcul de la racine $n^{\text{ième}}$ de a .

Croquis illustrant le procédé.



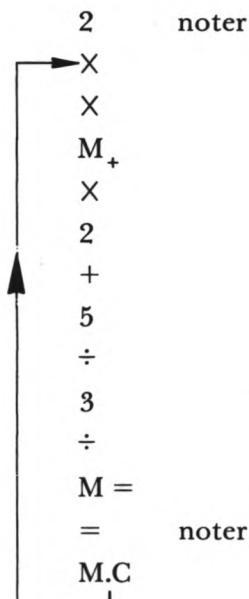
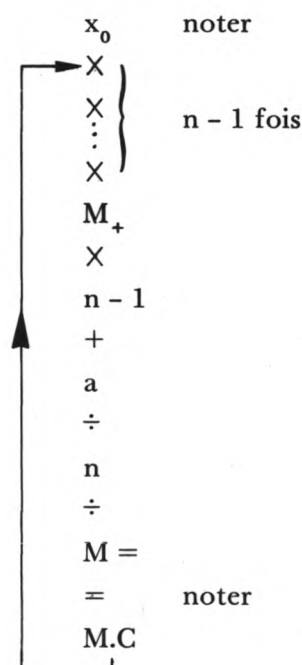
Le procédé consiste à calculer les termes de la suite $x_0, x_1, x_2, \dots$ convergent vers $\sqrt[n]{a}$. Soit x_{p+1} l'abscisse de l'intersection de la tangente au point M_p avec l'axe des abscisses. Un élève de 1ère ou terminale trouve facilement

$$x_{p+1} = \frac{a + (n-1)x_p^n}{n x_p^{n-1}}.$$

Le croquis permet de montrer facilement que le premier essai pourrait être quelconque mais que l'on a intérêt à utiliser une valeur approchée par excès de la racine nième de a .

Exemple $\sqrt[3]{5}$

Programme :



Ce programme a été construit pour ne pas avoir à réintroduire au clavier les termes successifs de la suite.

Déroulement du programme $\sqrt[3]{5}$.

Notes successives.

2
1,75
1,7108843
1,7099763
1,7099759
1,7099758
1,7099759

On constate sur cet exemple que l'on peut aboutir à une suite alternée dont les termes sont très voisins de $\sqrt[n]{a}$. Ce résultat non prévisible par la méthode de Newton est dû au fait que la machine donne des valeurs approchées et si l'une d'elle est approchée par défaut, elle peut être inférieure à $\sqrt[n]{a}$. Une discussion à ce sujet peut être intéressante. On ne peut conclure en général sur le sens de l'erreur.

Autre calcul de la racine nième de a.

L'algorithme que nous allons étudier est moins rapide, donc moins intéressant du point de vue pratique, mais il évoque quelques propriétés aux élèves qui travaillent quelquefois sur des séries et jamais sur des produits.

Principe : la machine possède une touche $\sqrt{}$. Pour calculer $a^{\frac{1}{n}}$ nous allons traduire en base 2 l'exposant $\frac{1}{n}$ (ou même $\frac{p}{q}$). On a donc à étudier au préalable un programme de conversion en base 2.

Problème : n étant donné en base 10, le convertir en base 2.

Sans entrer dans les détails justifiant sa construction voici le programme de ce calcul. On fait la conversion de la partie entière et de la partie décimale séparément.

- 1 — Conversion de la partie entière de n (notée E(n)) :
appelons X la partie entière du nombre affiché.

Machine	Opérateur
E(n)	
	si X est pair noter 0, sinon noter 1
÷	
) 2	
=	
	si X est pair noter 0 sinon noter 1
	a gauche du der- nier chiffre noté

```

graph TD
    A["si X est pair noter 0  
sinon noter 1  
a gauche du der-  
nier chiffre noté"] --> B["="]
  
```

Faire cette boucle tant que la partie entière du nombre affiché n'est pas nulle, sinon fin.

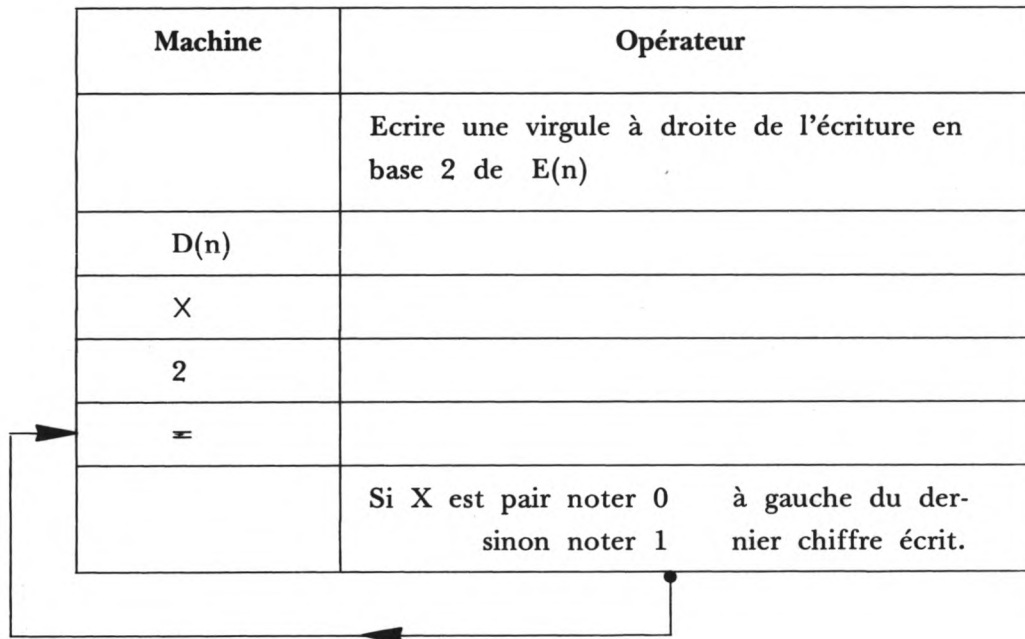
Exemple 2847

Affichage	Noter
2847	1
1423,5	1 1
711,75	1 1 1
355,875	1 1 1 1
177,937...	1 1 1 1 1
88,968...	0 1 1 1 1 1
44,484...	0 0 1 1 1 1 1
22,24...	0 0 0 1 1 1 1 1
11,12	1 0 0 0 1 1 1 1 1
5,56	1 1 0 0 0 1 1 1 1 1
2,78	0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1
1,39	1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1
0,69	fin

Réponse 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1

2 — Conversion de la partie décimale de n (notée $D(n)$) :

appelons X la partie entière du nombre affiché.



Faire cette boucle autant de fois que l'on veut.

Le problème de la limite de validité de l'exécution de cette boucle en fonction de la machine est intéressant.

Exemple $M = 3,1415927$

est codé en base 2 11,00100100001111101...

3 — Retour au problème de la racine nième.

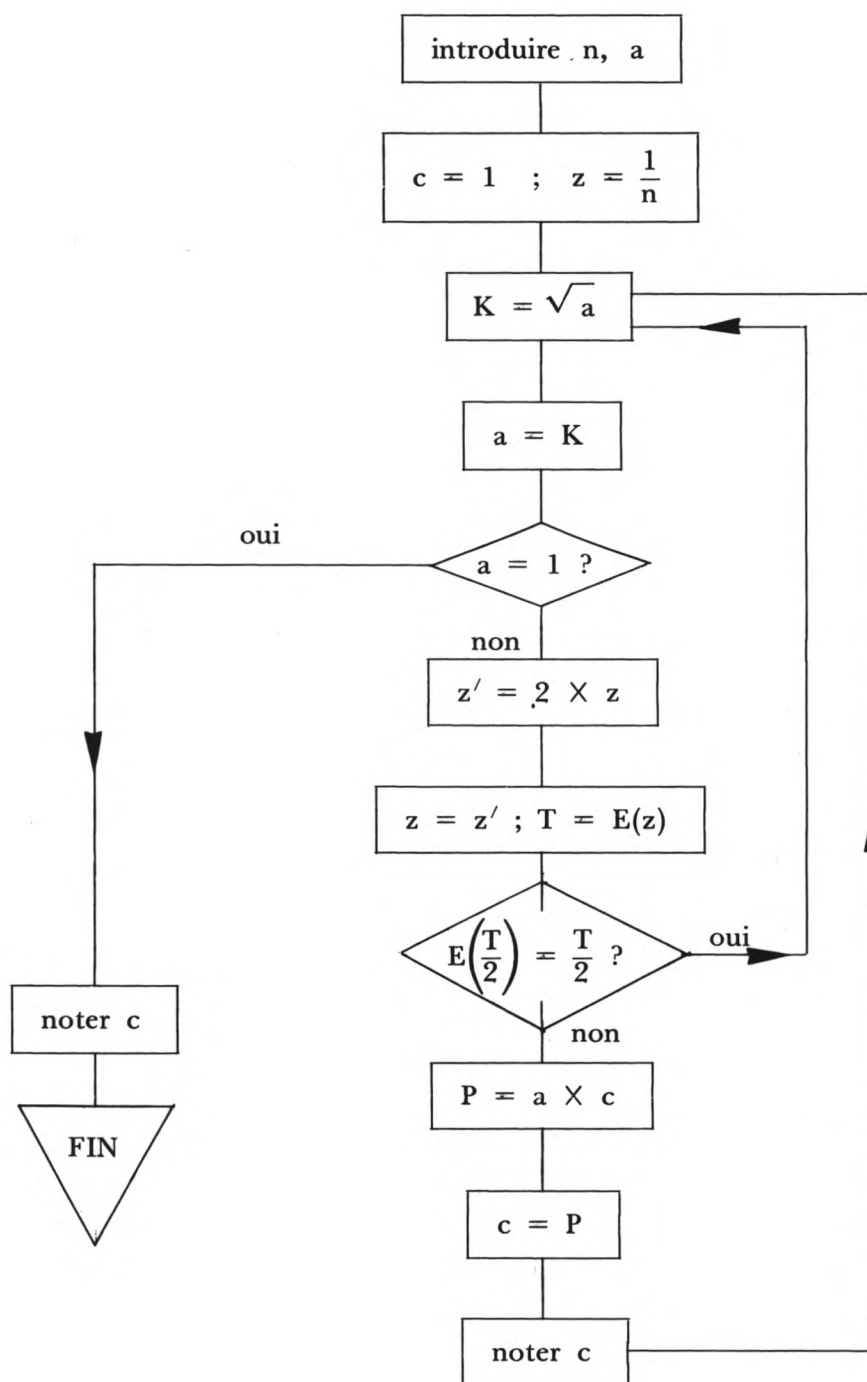
$$\text{On a } \frac{1}{n} = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{2^\gamma} + \dots$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ étant les rangs des 1 dans le codage en base 2 de $\frac{1}{n}$.

$$\text{On peut écrire } \sqrt[n]{a} = (\sqrt{a})^{(\alpha)} \times (\sqrt{a})^{(\beta)} \times (\sqrt{a})^{(\gamma)} \times \dots$$

la fonction $(\sqrt{a})^{(\alpha)}$ étant obtenue en appuyant α fois sur la touche racine.

Nous avons décomposé la suite des calculs nécessaires de la façon suivante :



Mais la machine que nous possédions nous a conduit à transformer cet organigramme pour obtenir la feuille de calcul suivante :

Programme : le programme est particulièrement simple si la machine possède une touche permettant l'échange entre l'affichage et la mémoire. Dans le cas contraire la gestion du registre est plus délicate mais possible pour ne pas réintroduire au clavier des résultats intermédiaires. Dans tous les cas le programme peut être une bonne illustration de la notion de sous programme.

A — Ecrire en base 2 la partie fractionnaire de $\frac{1}{n}$.

(Remarquer que l'on obtient une suite périodique à partir d'un certain rang).

B

N° d'instruction	Machine	Opérateur
1	1	
2	M_+	
3	a	
4		Lire le premier chiffre non encore lu de la suite des chiffres de $1/n$ en base deux Choix : si 0 effectuer les instructions 0 si 1 effectuer les instructions 1
5	M =	
6		Lire $\sqrt[n]{a}$

Instructions 0

Machine	Opérateur
$\sqrt{}$	
	si X = 1 retourner à l'instruction n° 5 sinon retourner à l'instruction n° 4

Instructions 1

Machine	Opérateur
$\sqrt{}$	
	si X = 1 retourner à l'instruction n° 6 sinon continuer le sous-programme
X	
M EX	
=	
M EX	
	retourner à l'instruction n° 4

Exemple : Calcul de $\sqrt[3]{5}$

$$\frac{1}{7} = 0, \underbrace{001001}_{\text{période}} \quad (\text{base deux})$$

Notes : 1, 2 2 2 8 4 4 4

1, 2 5 3 9 8 5 6

1, 2 5 7 9 3 3 5

1, 2 5 8 4 2 7 7

1, 2 5 8 4 9 6 6

1, 2 5 8 4 9 7 2

Fin

Une méthode plus précise donne $\sqrt[3]{5} = 1, 2 5 8 4 9 8 9 5$

Le résultat trouvé est obtenu par défaut ce qui est normal puisque la machine a travaillé par défaut. Une estimation grossière de la marge supérieure de l'erreur peut être intéressante.

REFLEXIONS.

Les machines dans les classes sont les déclencheurs souples d'une renaissance du calcul numérique ; la mise au point par les élèves des suites de calculs (programmes) ou les difficultés opératoires sont occultées, focalise leurs énergies sur les problèmes mathématiques.

Nous n'avons pas mis en avant la construction des organigrammes, notre pratique pédagogique nous incitant à croire que la maîtrise des algorithmes passe par un constant va et vient entre l'expérience et la formalisation.

Ces lignes reflètent quelques clichés des utilisations possibles d'une machine non programmable ; entre le stéréotype et l'archétype le cap n'est pas facile à tenir.

Nous sommes à l'étage archéen de l'utilisation des petites machines mais nul ne peut nier leur présence dans le secondaire ; le logos ainsi bouleversé et notre propre plaisir nous font croire que nous sommes aussi dans le plaisancier.