Jéomatri

MATHEMATIQUES en 4ème

IREM
de GRENOBLE

LE LIVRE DU MAITRE

OPHRYS

J'entends et j'oublie,

je vois et je retiens,

je fais et je comprends.

Proverbe chinois

L'illustration intérieure a été réalisée par J.C. Jaillet.

ISBN. 2.7080.0467.0

La Loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1er de l'Article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

© by Editions Ophrys 1979

TEXTES OFFICIELS

I – PROGRAMME DE MATHEMATIQUES DE LA CLASSE DE QUATRIEME.

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous ; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises ; elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive.

Les notions suivantes :

- applications ; composition des applications ;
- bijection, bijection réciproque ;
- partition d'un ensemble et relation d'équivalence

n'ont pas à faire l'objet d'un apprentissage pour elles-mêmes : on les dégagera progressivement à partir des exemples qui se présenteront dans l'étude du programme.

1.1 Calcul numérique.

Exemples introduisant la notion de fraction.
Révision des opérations sur les décimaux.
Pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels.
Relation d'ordre ; valeur absolue ; exemples de calculs approchés.
Produits $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$: leur utilisation.
Exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.

1.2 Géométrie plane.

L'étude de la géométrie est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation, lesquelles requièrent l'usage des instruments de dessin : règle graduée, compas, équerre : l'effort de réflexion qu'elles suggèrent conduit au raisonnement déductif.

Le programme est rédigé en termes d'acquisition, non de progression. Il revient au professeur de suivre une ligne cohérente, mais aucun choix d'hypothèses ne lui est imposé. Il a notamment toute latitude pour faire intervenir, dès que cela lui apparaît opportun, les notions de distance, de cercle, de parallélisme, d'orthogonalité, qui ont été introduites jusque-là de façon intuitive.

Droites du plan ; demi-droites.

Abscisse d'un point d'une droite dans un repère de cette droite ; notation $\overline{MN}$; relation de Chasles.

Médiatrice ; sa construction. Losange ; triangle isocèle.

Symétrie orthogonale par rapport à une droite. Rectangle.

Parallélisme, orthogonalité.

Projection sur une droite selon une direction ; conservation du milieu par projection. Projection orthogonale ; distance d'un point à une droite.

Coordonnées d'un point du plan dans un repère quelconque.

Translation ; composition des translations. Vecteur ; addition des vecteurs.

(Arrêté du 16 novembre 1978 - B.O. n° spécial 1 - 14.12.78).

II – INSTRUCTIONS - CLASSES DE QUATRIEME ET DE TROISIEME.

La circulaire n° 77-157 du 29 avril 1977 (B.O. n° 22 bis du 9 juin 1977, pages 1568 et suivantes) définit les objectifs de l'enseignement des mathématiques dans les collèges. Il y a lieu de la compléter en ce qui concerne les classes de Quatrième et Troisième.

Observons d'abord que figurent, dans les programmes de mathématiques de Sixième et de Cinquième de 1977, les éléments de calcul numérique et d'algèbre, ainsi que les notions concrètes de géométrie, nécessaires pour l'enseignement des programmes du premier cycle en Sciences physiques et en Technologie.

L'important travail de réflexion que les programmes du 22 juillet 1971, particulièrement novateurs, ont exigé des professeurs s'est concrétisé dans la circulaire n° 73-087 du 19 février 1973 (B.O.E.N. du 22.02.73), qui a représenté une féconde mise au point. Les «réflexions sur l'enseignement» qu'elle contient gardent toute leur valeur.

Il est souhaitable que durant les deux années les professeurs mènent de front l'étude du calcul et celle de la géométrie ; c'est ainsi que pourront s'éclairer mutuellement les notions d'ordre dans $\mathbb{R}$ et sur la droite, la notion de fraction et celle d'échelle régulière, etc. Il importe qu'il n'y ait pas de cloison étanche entre les deux disciplines ; l'une et l'autre peuvent de façon égale concourir à la formation du raisonnement.

Le programme de 1971 semblait subordonner l'étude de la droite à celle des réels ; on observera qu'avec le programme actuel l'ensemble $\mathbb{R}$ n'intervient en géométrie de Quatrième que par un petit nombre de ses propriétés, qui prolongent les propriétés de $\mathbb{D}$ étudiées en Cinquième ; on pourra donc parler de distance dès le début de la classe de quatrième.

En calcul la nouveauté réside dans l'accent qui est mis sur la notion de fraction, et dans la possibilité qu'elle procure d'aborder, si on le désire, les rationnels avant les réels. On pourra donc, soit - comme dans les programmes précédents - considérer les rationnels comme des réels particuliers (quotients d'entiers), soit présenter la notion de fraction à l'aide d'exemples relevant de la pratique usuelle (découpages, engrenages, échelles, ... ; diviseurs d'un entier naturel) et introduire l'équivalence de deux fractions ; on se gardera, à propos des opérations sur les rationnels, d'accumuler les démonstrations ; l'essentiel est que les élèves aient bien compris que tout rationnel non nul a un inverse et qu'on dispose d'une division dans $\mathbb{Q}$.

Pour $\mathbb{R}$ il suffit que les élèves sachent qu'il s'agit, suivant la présentation adoptée, d'un sur-ensemble de $\mathbb{D}$ ou de $\mathbb{Q}$ sur lequel l'addition, la multiplication, la relation d'ordre se prolongent en disposant des mêmes propriétés, et que tout élément positif de $\mathbb{R}$ admet une racine carrée.

On s'attachera, si possible à chaque séance, à exercer les élèves à la pratique des opérations, au calcul mental (éventuellement à l'usage des calculatrices de poche). Toutes les fois qu'on le pourra, on situera cet entraînement dans le cadre de problèmes, dont les résultats feront l'objet de calculs approchés.

L'opération connue sous le nom d'extraction de la racine carrée ne figure pas au programme.

Certaines transformations géométriques (translation, symétrie...) pourront inspirer des remarques intéressantes dans des exercices de représentation graphique d'une application.

En ce qui concerne l'application affine, sa représentation graphique pourra être utilement considérée comme un cas particulier de la représentation d'une relation $ax + by + c = 0$, en liaison avec les équations d'une droite.

Ainsi que le dit l'Académie des Sciences :

«Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans les classes de Quatrième et de Troisième provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en Sixième et Cinquième par l'usage expérimental des instruments de dessin (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et, à partir de cette intuition, amener progressivement l'élève à raisonner et à manipuler consciemment les instruments pour lui faire acquérir peu à peu la notion de plan euclidien. (...) Il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie. En revanche, il devra apprendre à faire de courts raisonnements, à partir de faits géométriques considérés comme évidents et donc admis comme vrais. Dans cet apprentissage de la réflexion et de la méthode déductive, il importe que le maître observe strictement quelques règles. Tout d'abord, les faits que l'on admet à un instant donné et qui vont servir de base au raisonnement doivent être clairement énoncés et ne prêter à aucune confusion dans l'esprit de l'élève. Ensuite le raisonnement doit être rigoureux, il ne doit jamais faire appel à des hypothèses non explicitement formulées et à fortiori doit se garder des cercles vicieux. Enfin il faut éviter qu'une propriété simple, qui est presque évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée, car alors l'élève ne pourra pas comprendre quelle est le règle du jeu.

S'il convient d'éviter une présentation axiomatique, il est, en revanche, indispensable que le maître possède, sur les matières enseignées dans ces deux classes, une vue d'ensemble cohérente (...) Faute d'une telle vue d'ensemble, le maître risquerait d'entraîner les élèves dans des développements inutilement compliqués et souvent stériles».

Les nouveaux programmes, et tout spécialement leur partie géométrique, mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie ...

De ce point de vue l'analyse de situations et la résolution de problèmes jouent un rôle majeur. En particulier l'enseignement de la géométrie est indissociable de la recherche de constructions géométriques.

(Circulaire n° 78-392 du 16 novembre 1978 - B.O. n° spécial 1 - 14-12-78)

III – OBJECTIFS.

Les mathématiques doivent la place importante qu'elles occupent dans l'enseignement des collèges à la contribution appréciable que leur étude peut apporter à la réalisation

des objectifs assignés à ce niveau. Il est donc essentiel de préciser le rôle dévolu à l'enseignement des mathématiques dans la formation de l'élève de collège, de définir en conséquence la matière mathématique susceptible de se prêter à cette exigence, de déterminer enfin les méthodes et les types d'activités qui permettent d'atteindre les buts recherchés.

1.1 Rôle de l'enseignement des mathématiques dans les collèges.

1) Il convient d'abord de consolider les acquis de la scolarité élémentaire, en assurant spécialement la compréhension et la pratique des quatre opérations sur les nombres entiers ou décimaux, ainsi que l'usage des diverses unités de mesure.

2) Il s'agit ensuite de fournir à l'élève un bagage de connaissance pratiques, de techniques usuelles, de méthodes opératoires lui permettant de résoudre — en les ramenant (si besoin est) à des méthodes mathématiques — les problèmes simples qui se posent dans la vie courante, ou même à l'occasion d'autres enseignements (sciences expérimentales, géographie, etc.).

3) On attend également de l'enseignement mathématique qu'il contribue pour une large part à la formation intellectuelle de l'élève de collège. Cet enseignement doit notamment :

a) Cultiver les qualités d'observation et d'analyse (identifier, par exemple, les éléments simples qui interviennent dans une situation donnée, plus ou moins complexe, et distinguer les relations qui les unissent) ;

b) Exercer l'élève à donner des objets tangibles du monde réel une représentation concrète (figure, schéma, signe, ...) puis conceptuelle ; développer ainsi, progressivement, ses capacités d'abstraction ;

c) Entraîner l'élève à la pensée déductive, l'inciter à la rigueur logique, lui apprendre à bâtir une chaîne de déductions, à déceler éventuellement une faille dans un raisonnement ; développer — de façon constructive — son esprit critique ; lui montrer par exemple les incertitudes que comporte une induction non contrôlée ;

d) Stimuler l'imagination (induire, généraliser ; concevoir une méthode ; trouver des exemples pour illustrer une propriété, ou des contre-exemples pour infirmer une proposition...) ;

e) Habituer l'élève à s'exprimer clairement, avec un vocabulaire simple mais dans un langage précis (décrire un objet mathématique, formuler une hypothèse, énoncer une définition ou une propriété, exposer une démonstration...) ;

f) Développer chez lui des qualités de soin et d'ordre, en l'incitant à apporter la plus grande attention au tracé des figures géométriques qu'il dessine et à l'exécution des calculs qu'il effectue.

4) Il importe enfin que la formation mathématique donnée dans les collèges permette aux élèves qui se sentent attirés par ce type d'activité intellectuelle de mettre leurs aptitudes à l'épreuve. Elle doit leur fournir une base solide, sinon étendue, pour les études approfondies qu'ils sont susceptibles de mener ultérieurement, sans toutefois anticiper sur le contenu de ces futures études.

1.2 Choix de la matière à enseigner.

Si les deux objectifs fondamentaux que constituent l'acquisition d'un bagage technique utilisable et la participation à la formation intellectuelle générale — et notamment au développement de la pensée logique — peuvent en principe être visés indépendamment l'un de l'autre, leur poursuite conjointe répond cependant à un souci d'efficacité lié à des motifs psychologiques.

En effet, il faut éviter que l'élève de collège ne perçoive l'élaboration d'une théorie déductive comme une activité intellectuelle gratuite, et même sans signification, donc dépourvue d'intérêt à ses yeux. Une construction théorique destinée à l'exercer à une démarche logique doit par conséquent déboucher sur l'obtention d'un outil commode que l'élève aura couramment à utiliser (par exemple l'outil vectoriel). Elle peut aussi établir, par une chaîne d'implications, des liens entre divers concepts conformes à l'intuition sensible de l'élève, et directement exploitables par lui (par exemple, les propriétés fondamentales du plan euclidien , distance, orthogonalité...).

Les axiomes de départ devront, bien entendu, être simples et «naturels» et les raisonnements courts. Or, de nombreuses notions mathématiques d'apparence élémentaire se prêtent malaisément, au niveau des collèges, à une approche axiomatique qui ne soit pas factice, ou ne permettent guère des enchaînements déductifs simples. La plupart de ces notions ne s'avèrent pas indispensables à l'enseignement de ce niveau, et il serait injustifié et téméraire d'en faire un thème d'étude. D'autres n'ont qu'une utilité pratique limitée mais présentent un intérêt théorique éminent qui oblige à les mentionner : on pourra ne les introduire que de façon très succinte, et au moment opportun.

Mais certaines de ces notions, dont il est difficile de donner une définition qui soit à la fois simple et mathématiquement «correcte», appartiennent incontestablement au bagage instrumental et technique dont il convient de doter l'élève au cours de sa scolarité de collège. Il est évident que dans ce cas une appréhension «concrète» de la notion suffit à l'élève, et que c'est la maîtrise des mécanismes qu'il faut rechercher, non une abstraction qui serait prématurée à ce niveau et donc préjudiciable à l'élève. L'exemple de la notion d'angle et du calcul trigonométrique est, à cet égard, digne d'être noté.

1.3 Contenus.

Deux étapes seront à distinguer très nettement.

1) En classes de 6ème et 5ème.

En liaison étroite avec l'enseignement donné dans le premier degré, l'essentiel sera de renforcer l'acquis des élèves en calcul et de le compléter (emploi de décimaux relatifs, usage des parenthèses). Ils feront aussi des observations sur des objets physiques usuels ; celles-ci seront des occasions de calcul. Le dessin géométrique plan, avec des instruments, sera pratiqué.

Le vocabulaire dit «moderne» sera utilisé. Il n'a pourtant pas à faire l'objet d'un chapitre détaillé du programme ; tout développement sur les «relations» serait superflu.

C'est à dessein et pour tenir compte de l'age des élèves, qu'on ne fera systématiquement, en Sixième, que de la géométrie plane, et aussi qu'on n'y étudiera pas la multiplication des décimaux relatifs ; cette dernière sera réservée (après une révision suffisante de l'addition et de la soustraction) à la classe de Cinquième.

2) En classes de 4ème et 3ème.

Le calcul numérique sera développé (fractions, nombres rationnels et décimaux, encadrements) ; le calcul littéral sera introduit. Les élèves étudieront et représenteront graphiquement des fonctions simples ; il sera opportum, sur des exemples concrets, de définir des taux de croissance et de donner quelques exemples de croissance de type exponentiel.

La géométrie partira de l'expérience acquise avec le dessin géométrique. Des observations physiques, bien choisies, conduiront à dégager des faits expérimentaux qui seront présentés comme «propositions initiales» à partir desquelles seront déduites, par voie logique, des conséquences, illustrées par des figures soignées ; leur recherche développera l'imagination des élèves et leurs qualités de raisonnement.

1.4 Méthodes et types d'activités.

Les objectifs visés par l'enseignement des mathématiques dans les collèges ne seraient que très partiellement atteints si cet enseignement se bornait à faire acquérir un certain savoir. Un élève pourrait certes en tirer un profit intellectuel, en participant activement à la formation des concepts et à l'élaboration des raisonnements qui conduisent aux résultats mathématiques à connaître. Mais ces connaissances risquent d'être mal assurées si on ne les fait pas «fonctionner»: un vernis cognitif s'écaille vite ; le savoir s'estompe, s'il n'est pas utilisé.

L'enseignement doit donc se donner aussi pour but de faire acquérir des techniques d'utilisation du savoir, de développer ainsi chez l'élève des savoir-faire, des capacités d'action. C'est par l'action, et par la satisfaction qu'elle leur procure, que beaucoup d'élèves prennent goût aux mathématiques, et parviennent de surcroît à une meilleure compréhension des concepts.

L'ambition d'un enseignement de mathématiques ne peut pas se mesurer à l'étendue du contenu des programmes, mais à l'usage qui en est fait. L'éducation mathématique n'a de sens que si l'élève est formé à exploiter, dans les circonstances et les péripéties quotidiennes de la vie, et en quelque sorte spontanément, les connaissances que cette éducation lui a apportées et les qualités qu'elle a développées en lui.

Il est donc essentiel que les élèves de collège soient exercés à résoudre des exercices et des problèmes nombreux et variés. C'est dans cette recherche qu'on éprouvera leur aptitude à mettre en œuvre les connaissances acquises, aptitude dont le développement est l'une des finalités d'un enseignement de culture.

(Extrait de la circulaire n° 77-157 du 29 avril 1977 - B.O. n° 22 bis du 09.06.77).

PRESENTATION

I – LE GROUPE «JEOMATRI».

L'IREM de Grenoble est né l'année de mise en route du programme de 1971 pour les classes de 4ème et 3ème, et l'une de ses premières activités a été d'animer des stages où ce programme a été analysé.

Parallèlement, pendant la seconde année d'existence de l'IREM, quelques animateurs ont rédigé des documents de géométrie pour leurs classes de 3ème. Ce groupe a pris le nom de JEOMATRI (JEO pour «Joie», MA pour «mathématique» et TRI pour «troisième» !).

Depuis 5 ans, ce groupe a été chargé par l'IREM de Grenoble de travailler sur les problèmes que pose l'enseignement des mathématiques dans les classes de 4ème et de 3ème. Au fil des années, il s'est renouvelé mais les professeurs enseignant dans le premier cycle y ont toujours été fortement majoritaires.

Dès le début, nos options ont été les suivantes .

* Notre travail devait s'insérer dans le cadre du programme officiel (d'abord celui de 1971, puis celui de 1978). Cela signifie que nous voulions nous poser les questions que se posent quotidiennement les maîtres.

* Nous voulions prendre en charge la totalité de ce programme, car nous pensions, d'une part que les élèves pouvaient rencontrer des difficultés dans n'importe quelle partie de ce programme, d'autre part que l'organisation de ce programme (liaison algèbre-géométrie, liaison 4ème - 3ème) était une question mathématique et pédagogique non négligeable.

* Nous ne voulions pas conduire une recherche isolée, coupée de la pratique des classes. Notre préoccupation permanente a donc été de

– garder le contact avec un grand nombre de collègues (dans les stages que nous animions, dans nos établissements, par des publications) et de confronter nos idées avec les leurs ;

– ne faire que des propositions suffisamment étudiées et précises pour qu'elles puissent être immédiatement utilisées dans une classe. C'est ainsi que cette année 1978-1979, par exemple, nous travaillons en liaison avec une trentaine de classes.

Nous pouvons ainsi affirmer que tout ce qui figure dans ce livre a été expérimenté, le plus souvent plusieurs fois, dans de nombreuses classes. La seule exception est le chapitre concernant les nombres rationnels. Ecrit en 1978, il n'aurait pu être utilisé dans une classe qu'en dehors du programme en vigueur.

C'est ici l'occasion de remercier les très nombreux collègues qui ont ainsi accepté de travailler avec nous dans des conditions parfois difficiles.

Il est tout aussi nécessaire de remercier les élèves. Leurs réactions nous ont conduit à modifier tel ou tel choix, telle façon de présenter les choses, tel exposé. Surtout, ils nous ont conduit à réécrire et réécrire sans cesse, à la recherche d'un langage qui leur soit compréhensible.

Signalons aussi que la publication de notre livre «Faisons des Mathématiques avec Jéomatri», publié par les éditions CEDIC en 1976, a été une étape importante pour nous. Nous remercions également les éditions CEDIC de nous avoir autorisé à reprendre une partie de cet ouvrage.

Ce manuel de 4ème est donc une concrétisation (en attendant celui de 3ème en 1980, celui de 5ème en 1981 et celui de 6ème en 1982) d'un véritable travail collectif.

C'est pourquoi les droits d'auteurs seront versés à l'IREM, et consacrés à des activités de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

Il nous paraît utile maintenant de formuler quelques observations sur l'enseignement des mathématiques en 4ème et 3ème. Elles éclaireront les choix que nous avons faits sur l'introduction des objets mathématiques, sur la mise en place des modes de raisonnement et sans aucun doute l'écriture même du livre.

II – REFLEXIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN 4ème et 3ème.

2.1 Algèbre et géométrie.

Nous souhaitons qu'il n'y ait pas de cloison étanche entre l'enseignement de l'algèbre et celui de la géométrie. Nous pensons que beaucoup de liaisons sont possibles. Nous croyons aussi que la démarche de l'élève passe à peu près par les mêmes étapes en algèbre et en géométrie.

Néanmoins, il apparaît dès l'abord une différence importante : dans la pratique actuelle on se donne, en algèbre, une obligation de résultats : on veut que les élèves «sachent calculer». Or, on sait bien que cet objectif est très difficile à atteindre et par exemple, un élève qui semble avoir bien compris comment sont organisées les propriétés des opérations sur les nombres décimaux, ne sait pas pour autant calculer. Cela tient à un certain nombre de raisons dont voici quelques unes :

– problèmes liés à l'écriture des nombres entiers et décimaux ;

– grand nombre de conventions d'écriture ;

– multiplicité des règles de calcul : il y a certainement plusieurs dizaines de règles nouvelles introduites pendant ces deux années de 4ème et 3ème. Dans l'apprentissage de l'algèbre, il est impossible de se limiter à quelques énoncés peu nombreux.

Le souci de rentabilité est présent tout au long des activités numériques. Le temps passé à l'apprentissage du calcul fait souvent perdre de vue que ces activités passent ou devraient passer par un certain nombre de phases.

2.2 Différentes phases de l'activité mathématique.

* En géométrie, la première étape est évidemment l'observation et le dessin de figures. Cette observation est d'autant plus active qu'on utilise des procédés comme le coloriage, le découpage, le pliage, l'usage de calques, ...

Des observations de situations géométriques (droites graduées - graphiques - dessins divers - mesures pratiques) ou de situations concrètes sont tout aussi nécessaires en algèbre. Citons, par exemple, certains apprentissages dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{D}$, l'introduction des fractions, le calcul approché.

En algèbre, de plus, pour préparer l'introduction de nouvelles propriétés, on examinera des exemples numériques. Dans ce domaine, il est bon de faire appel le plus largement possible aux connaissances antérieures des élèves, qui après tout, ma-manipulent des nombres à l'école et hors de l'école depuis fort longtemps.

* On abordera une deuxième étape dès qu'on voudra, en géométrie faire un usage plus réfléchi des instruments de dessin, car alors se pose le problème de la quantification des propriétés observées.

Ainsi, par exemple, une chose est d'utiliser un compas pour simplement tracer un cercle, une autre est de l'utiliser pour tracer une perpendiculaire. Il faudra examiner préalablement la médiatrice d'un segment de droite. Or une figure ne permet effectivement d'observer que quelques points de la médiatrice d'un segment. Les élèves accepteront sans doute facilement qu'on décide que la propriété vérifiée par ces quelques points est vraie pour TOUS les points de la médiatrice : ceux pour lesquels on a fait la vérification et les autres, y compris d'ailleurs ceux qu'on ne peut pas dessiner sur la feuille de papier.

Il nous semble indispensable que ce problème ne soit pas escamoté et que les élèves aient bien le sentiment qu'on a franchi une étape, et qu'on est déjà au delà de ce qu'on peut effectivement *voir* sur ce dessin.

Un autre aspect de la quantification des propriétés observées apparaît dès qu'on se pose la question de savoir si le dessin sur lequel on observe illustre bien le cas général.

L'importance de la quantification en algèbre est bien connu des professeurs.

Il faut remarquer que se poser le problème de la quantification n'a guère de sens pour les élèves si la propriété à laquelle on veut aboutir est déjà implicitement quantifiée par tous. C'est le cas le plus souvent en algèbre, par exemple en ce qui concerne les propriétés des opérations et du prolongement de ces propriétés lorsqu'on passe d'un ensemble de nombres à un ensemble plus gros.

Mais c'est aussi parfois le cas en géométrie. Par exemple, faire une manipulation dont l'objectif est de faire admettre que par deux points il passe une droite et une seule risque bien de ne pas être pris au sérieux par les élèves.

Pour des situations un peu moins simples, l'examen d'un nombre suffisant de cas, la comparaison entre les observations des différents élèves, une discussion dans la classe, suffisent pour qu'un consensus général s'établisse sur la propriété à admettre.

Un discours déductif ayant pour objet de déduire cette propriété de propriétés antérieures pas toujours plus évidentes, ne renforcera pas cette adhésion et risque de ne pas être compris, et donc d'être inutile et même nuisible. Ainsi, des générations d'élèves ont dû se demander pourquoi on démontrait la transitivité du parallélisme.

Une des difficultés essentielles de cette étape est l'utilisation de lettres muettes. Cette difficulté est d'autant plus grande que la quantification se fait très souvent sur plusieurs variables. Cela explique notamment l'aspect excessivement et inutilement formalisé de nombreux énoncés d'algèbre qu'on rencontre souvent. Même si on évite cet excès de formalisation, l'apprentissage du maniement des lettres muettes est long et ne sera certainement pas terminé à la fin du 1er cycle.

* Nous pensons que la plupart des situations étudiées pendant longtemps se rangent assez bien dans le cadre décrit ci-dessus. C'est peut-être une explication (parmi d'autres) de la difficulté qu'ont les maîtres à convaincre les élèves de la nécessité de démontrer. Ainsi, si on souhaite franchir cette nouvelle étape, il est nécessaire, par exemple

– de faire observer très tôt des situations géométriques sophistiquées et surprenantes, où les élèves pourront convenir qu'il n'est pas raisonnable de généraliser à partir des quelques observations dont ils disposent,

– d'examiner des situations apparemment voisines, comme par exemple les écritures $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$ et $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;

– de rapprocher des situations apparemment différentes (groupes par exemple).

Dans cette étape, les élèves apprendront donc peu à peu à réunir des propriétés par des liens logiques. Ils y prendront d'autant plus d'intérêt qu'ils seront amenés à comprendre que cela permet, non seulement de résoudre le problème de l'universalité des énoncés, mais encore de prévoir de nouvelles propriétés des objets étudiés, ou encore d'établir que certains problèmes ont maintenant une solution (soustraction dans $\mathbb{Z}$, division dans $\mathbb{Q}$, etc ...).

Notons enfin que dans l'élaboration des démonstrations, l'algèbre risque de poser plus de problèmes que la géométrie :

– les démonstrations en algèbre n'apparaissent souvent que comme des transformations d'écritures un peu magiques ;

– les objets algébriques sont souvent plus difficiles à percevoir. Ainsi par exemple comprendre ce qu'est la composé de 2 translations est certainement plus facile que de comprendre ce qu'est la composée de 2 applications numériques ; établir qu'une projection d'une droite sur une droite est bijective et relativement accessible à une élève de 4ème ; résoudre le même problème pour une application affine est très difficile.

* En géométrie, dans cette démarche déductive, un nouveau problème va bientôt se poser. En effet, même à partir d'observations de figures, on peut être amené à établir des propriétés qui ne sont pas absolument réductibles à la figure observée. Donnons deux exemples classiques de cette situations :

— pour étudier une figure conduisant à l'énoncé de Thalès (programme de 3ème) on est amené à dessiner des droites munies d'échelles régulières graduées. Si les points choisis ont des abscisses entières ou décimales, on constate bien que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$. Sinon, on ne peut connaître de ces rapports que des valeurs approchées et la démarche qui va conduire à décider qu'ils sont égaux n'est plus une simple observation ;

— on peut, dans le cadre des programmes actuels, choisir l'énoncé de Pythagore comme axiome. Si alors on fait dessiner un triangle rectangle et mesurer ses côtés, les élèves observeront qu'en général a^2 est «voisin» de $b^2 + c^2$. Le passage à la propriété «$a^2 = b^2 + c^2$» est une démarche de même nature car il y a, de toute évidence, une différence entre la propriété observée et l'énoncé choisi.

Petit à petit, les objets étudiés vont donc changer de statut. De simples traits sur une feuille de papier, ils vont devenir des objets plus précisément déterminés, vérifiant des propriétés ou soumis à des contraintes non immédiatement identifiables sur un dessin.

Ainsi en est-il d'une droite qui très rapidement ne peut plus être totalement réductible au trait dessiné avec le bord de la règle, non seulement parce qu'elle est «illimitée» mais surtout parce qu'il faut accepter l'idée qu'elle est liée à $\mathbb{R}$ par des bijections. Pourtant, du simple point de vue expérimental, un codage décimal, et avec peu de décimales, serait non seulement légitime, mais probablement plus opérationnel.

De même la distance de deux points est d'abord un nombre décimal (avec peu de décimales) qu'on lit sur le bord d'une règle graduée. On aura également changé de niveau lorsqu'on sera arrivé à l'idée d'une application de l'ensemble des bipoints sur $\mathbb{R}_+$.

De manière plus générale, le plan organisé par le parallélisme, les translations, l'orthogonalité et lié à $\mathbb{R}$ par Thalès et la distance, tel qu'il se présente en fin de 3ème, n'est plus immédiatement identifiable avec la feuille de papier sur laquelle on dessine. De nouveaux objets sont d'ailleurs apparus ; c'est le cas, par exemple, lorsque l'étude poursuivie

— fait apparaître des idées qui n'ont pas de réalité matérielle : droites confondues, application identique, groupe de transformations, ...

— oblige à un passage au quotient : directions, vecteurs, angles, ...

Cela ne signifie pas qu'on ne peut pas dessiner ces objets, mais pour le faire il faut se donner des conventions convenables.

On voit que le statut des nombres évolue parallèlement. Très liés d'abord à l'expérimentation pratique (entiers naturels et relatifs, décimaux, fractions), ils ont visiblement changé de statut lorsqu'ils deviennent les nombres rationnels ou les nombres réels. Cela ne signifie évidemment pas qu'on présente les entiers relatifs ou les rationnels comme classes de couples, et les réels comme limites de suites !

Cependant, dans ce processus d'abstraction, la difficulté est plus grande en géométrie qu'en algèbre : aucun élève ne confondra *trois* et le graphisme *3*, alors que beaucoup ne distingueront pas facilement la droite sur laquelle ils raisonnent du trait qu'ils viennent de tracer.

Il nous paraît essentiel cependant que le mode d'enseignement de la géométrie permette aux élèves de prendre conscience de cette évolution et qu'ils comprennent l'existence de ces deux statuts des objets géométriques et le va et vient qui existe entre ces deux statuts.

On peut remarquer que la confusion entre les différents statuts des objets était sans doute le plus grand défaut des programmes d'avant 1971 (d'où des expressions comme «prolongeons la droite...», les «démonstrations» des cas d'égalité des triangles, ...). C'est cette confusion qui a souvent conduit, et conduit encore, de nombreux enseignants à repousser l'argument : «Je vois sur la figure que ...» alors que *voir sur une figure* est parfaitement raisonnable, et peut être fécond si on sait qu'on se situe au niveau matériel des observations.

Si on accepte ce qui précède sur l'activité mathématique des élèves de cet âge, il semble que trois attitudes soient possibles.

III – EXAMEN DE TROIS OPTIONS PEDAGOGIQUES.

3.1 Une option qui semble actuellement avoir de nombreux partisans (peut-être par réaction...) est la suivante.

On étudie des situations limitées, apparemment disjointes, à partir de thèmes ; par exemple : utilisation du compas, pavages, orthogonalité et distances, bracelets de nombres, etc...

Pour chacune de ces situations
- on observe et on dessine,
- on décide des propriétés qu'on admettra *provisoirement,*
- à partir de ces propriétés, on en démontre d'autres ;
- ces nouvelles propriétés conduisent à de nouvelles observations.

Les objectifs poursuivis semblent être de
- permettre aux élèves une bonne connaissance de situations matérielles et développer leurs qualités d'observations, de méthode, d'adresse, d'organisation, en particulier en favorisant une utilisation raisonnée des instruments de dessin ;
- fournir un apprentissage du raisonnement déductif.

Les avantages et les inconvénients de ce choix sont évidents. En gros
- il permet une organisation très souple de la classe ; il donne au maître une grande liberté pour choisir ses thèmes, varier les exercices, s'adapter à l'évolution de ses élèves ; en ce sens, et à condition qu'on soit très modeste en ce qui concerne le raisonnement déductif, il semble que ce choix est particulièrement adapté aux deux années du cycle d'observation (6ème et 5ème), tout au moins en ce qui concerne la géométrie ;
- par contre, maintenu encore 2 ans, ce choix risquerait de donner une impression d'excessive gratuité ; en effet, s'il n'y a pas de lien construit entre les différents thèmes étudiés, les propriétés admises ne peuvent l'être que provisoirement et donc il en est de même pour les propriétés démontrées ; on risque en particulier de donner une vision très anarchique de la géométrie.

Lorsqu'un enfant a travaillé longtemps (plusieurs années) sur un même sujet (les nombres, la géométrie, etc...) ses connaissances non seulement s'accumulent mais encore elles se lient les unes aux autres dans une sorte d'organisation inconsciente. Il serait très optimiste (ou très naïf) de penser que cette organisation est naturellement harmonieuse et féconde. C'est au contraire une des tâches les plus importantes et les plus enthousiasmantes de l'enseignant que d'aider les enfants à mettre de l'ordre dans la masse d'information qu'ils reçoivent.

3.2 Une deuxième option consiste à chercher à organiser entre elles *toutes* les propriétés admises ou démontrées. Même si on ne se pose pas de questions métaphysiques sur le système d'axiomes choisis il s'agit bien, comme le disait le programme de 1971, d'élaborer une véritable théorie.

Voici quelques difficultés de cette voie :

— les propriétés «admises» doivent être «acceptables» par les élèves ;

— il ne faut pas que les axiomes apparaissent comme destinés à remplacer toute démonstration difficile, car on retrouverait alors la gratuité dénoncée plus haut ;

— l'attention portée à la construction de la théorie fait souvent négliger les autres activités ;

— la nécessité d'organiser totalement les propriétés conduit à produire un discours inadapté aux élèves. Par exemple, sous prétexte de construire $\mathbb{Z}$, on symétrise le monoïde $(\mathbb{N}, +)$ sans se préoccuper de la capacité d'élèves de 12 ans à manipuler un ensemble infini d'ensembles infinis.

— il y a une difficulté à faire comprendre aux élèves, à chaque étape, que la théorie déjà construite est insuffisante et en quoi la nouvelle étape l'enrichit.

Très curieusement, cette option qui est parfois violemment combattue en ce qui concerne la géométrie, est implicitement admise par beaucoup pour l'algèbre même si on ne prononce pas le mot axiome.

Le programme de 1971 incitait fortement à choisir cette option. Cela a parfois conduit à des constructions fâcheuses. Rappelons par exemple les difficultés apportées par l'introduction des réels par les suites décimales illimitées. Dans ce cadre, on a même essayé de *démontrer* que $\mathbb{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication en additionnant et en multipliant des encadrements !

Cela a entraîné les dégats que l'on sait car il n'est pas raisonnable de vouloir présenter un réel comme la *limite d'une suite* alors que, même dans une classe de première ou de terminale, la notion de limite est très difficile à assimiler.

En ce qui concerne la géométrie, rappelons aussi pour mémoire la définition des droites qui a même fait la joie du Canard enchaîné, et la littérature étonnante qui a été écrite sur les angles.

3.3 Une troisième option, et c'est celle dont nous sommes partisans et que nous avons choisie pour ce livre, est une sorte de moyen terme entre les deux précédentes.

D'une part, on s'efforcera d'organiser une *partie* des propriétés étudiées dans ce que, pour simplifier, nous continuerons à appeler une théorie.

Parallèlement, un certain nombre de questions seront abordées dans l'esprit de la première option.

Ainsi, certains des objets mathématiques étudiés garderont leur statut premier d'objets observables ; d'autres, au contraire, verront leur statut évoluer dans le sens que nous avons expliqué plus haut, dans la mesure où ces objets viendront prendre leur place dans le morceau de théorie construit.

Cette manière de procéder nous semble pouvoir s'appliquer également à l'algèbre et à la géométrie.

Cela pose évidemment un certain nombre de questions. Par exemple :

— les propriétés admises ou démontrées dans la théorie peuvent être utilisées même dans l'étude d'un thème isolé ;

— le choix de ce qui entrera dans la théorie et de ce qui restera en dehors ne peut être totalement arbitraire pour des raisons de cohérence, mais évidemment plusieurs choix sont possibles ; nous en avons fait un pour ce livre ;

— le moment où sera abordé tel ou tel thème d'étude sur les deux années de 4ème et 3ème n'est pas non plus arbitraire ;

— la construction de la théorie a pour objet :

- en géométrie, d'organiser entre elles les principales propriétés du plan euclidien,
- en algèbre, d'organiser entre elles les principales propriétés des nombres, et ceci de la façon la plus simple possible.

Il faut donc garder comme thèmes d'étude isolés tout ce qui est accessoire et conduit à une théorie compliquée.

Cette façon de procéder nous paraît présenter les avantages des deux précédentes en éliminant les principaux inconvénients. En particulier, elle permettra au maître de s'adapter à la situation spécifique de sa classe sans que se créent des distorsions trop grandes d'une classe à l'autre. Dans l'état actuel de l'enseignement dans le premier cycle, ces distorsions ne nous paraissent pas souhaitables.

Notons enfin que la rédaction de l'actuel programme autorise le choix de cette option.

IV — NOS OBJECTIFS.

Il est plus facile maintenant d'exposer les objectifs que nous avons poursuivis en écrivant ce livre.

4.1 Ecrire un livre dans le cadre du programme officiel.

Ce livre contient donc intégralement toutes les rubriques du programme. Bien entendu, nous les avons librement ordonnées.

Nous n'avons abordé aucune notion qui ne soit explicitement au programme à l'exception d'une seule, la notion de groupe.

Encore ne s'agit-il pas là d'une véritable adjonction : nous n'avons évidemment pas fait une étude théorique de cette notion. Simplement, puisque les élèves vont rencontrer un certain nombre de groupes pendant ces années de 4ème et 3ème, nous avons tenu à dire ce que c'était, à rapprocher ainsi des situations comparables et à montrer par exemple qu'on se pose le même type de questions dans $(\mathbb{Z}, +)$,

dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$ ou dans le groupe des translations.

Entre autres choses, cela nous a paru utile pour donner un premier éclairage sur les équations.

Nous savons que «l'activité mathématique demande beaucoup de temps (appréhension, réflexion, maturation, recherche, essai, mise au point) et que contrairement aux idées reçues, elle demande une pratique expérimentale» (1). Aussi nous pensons qu'il sera, une nouvelle fois, impossible d'étudier tout le programme proposé d'une façon approfondie, efficace et profitable à tous les élèves. Cependant, nous avons voulu laisser à chaque enseignant la responsabilité de faire ses propres choix en fonction de sa classe. Ce sera à lui de déterminer les parties du programme qu'il veut traiter de façon détaillée et celles qu'il abordera plus rapidement.

Aussi avons-nous traité tous les chapitres avec le même sérieux. Tout au plus nous sommes-nous permis d'être un peu plus brefs sur «équations, inéquations, calculs approchés» nous proposant de reprendre ces questions plus en détail dans le manuel de 3ème.

4.2 Favoriser au maximum les différentes étapes de l'activité mathématique.

Pour cela, nous avons donc

— fait appel aussi souvent que possible aux connaissances antérieures des élèves ;

— fourni de très nombreuses occasions d'observations, de dessins et de manipulations et de raisonnement sur ces observations aussi bien en algèbre qu'en géométrie ;

— donné aux élèves des occasions nombreuses de réflexion sur les écritures et le langage mathématique ; nous avons en particulier beaucoup insisté sur le maniement des lettres muettes ;

— essayé de familiariser progressivement les élèves au raisonnement en fournissant de nombreux exemples et des exercices traités et en les faisant réfléchir sur ce qu'ils faisaient, en particulier, sur la quantification des énoncés.

Nous avons également marqué le plus clairement possible les différents niveaux où on se plaçait pour conduire une étude, depuis le niveau de l'observation jusqu'à celui de la théorie, et par conséquent essayé de préciser le statut des objets étudiés.

Pour bien insister sur ces différences, nous avons imprimé en bleu ce qui concernait l'observation et en noir ce qui concernait la théorie. Cette façon de faire a l'avantage de visualiser ce que nous voulions distinguer ; elle a l'inconvénient d'être un peu schématique et de gommer les étapes intermédiaires. Par exemple, lorsqu'on parle d'une droite matérielle graduée par IR, on n'est déjà plus au niveau de l'observation, mais on n'étudie pas encore un sous-ensemble du plan mathématique.

Enfin, nous avons voulu donner aux élèves des moyens pour faire fonctionner au fur et à mesure les nouvelles notions étudiées ; pour cela, nous avons incorporé au déroulement du discours de très nombreux exercices d'applications.

(1) Pierre Julien répondant en mars 1976 à une interview de la revue *l'Education*, en qualité de président de l'Assemblée des Directeurs d'IREM.

4.3 Ecrire un texte lisible par les élèves.

Un des reproches les plus fréquents que les enseignants font à certains livres de classe, c'est que les élèves ne peuvent pas les lire. Nous avons beaucoup travaillé sur ce problème et nous avons la faiblesse de penser que notre livre ne méritera pas ce reproche et que, le plus souvent, les élèves pourront lire eux-mêmes les textes proposés.

Cela n'empêchera évidemment pas que certains élèves pourront être, à un moment donné, arrêtés par tel mot ou expression, ou par telle tournure de phrase.

Cela ne signifie pas non plus qu'ils sauront répondre à toutes les questions posées, ou qu'ils comprendront seuls le but de la démarche proposée.

Aussi, dans ce problème de la lecture du livre, le rôle du maître reste prééminent. Nous souhaitons que dans ce domaine aussi l'aide apportée soit la plus individualisée possible.

Nous avons fait un usage modéré du langage ensembliste, ne l'utilisant que lorsqu'il permettait une meilleure compréhension et nous n'avons pas supprimé le langage traditionnel de la géométrie.

De même, nous avons essayés d'éviter les écritures symboliques trop lourdes.

Nous avons proscrit les symboles logiques $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Longleftrightarrow$, et nous avons essayé d'utiliser convenablement, c'est-à-dire comme des verbes, les symboles $=$ et $<$.

Enfin, nous avons essayé d'utiliser aussi rarement que possible l'équivalence (si et seulement si), car on sait bien que c'est un concept difficilement compréhensible par les élèves.

Cependant, nous ne confondons pas du tout formalisme et rigueur. Si nous avons évité une formalisation excessive, nous avons essayé d'être aussi rigoureux que possible, aussi bien dans la démarche (distinction claire entre ce qui est démontré et ce qui ne l'est pas — conduite d'un raisonnement — etc...) que dans l'emploi du langage.

Dans ce domaine, nous avons tenté de fixer avec précision le sens des mots employés en expliquant ce sens, en donnant l'origine du mot (isométrie) en rappelant éventuellement leur usage courant (parallèle, triangle, ...) et aussi en ne nous permettant aucune entorse par rapport au sens convenu (égalité par exemple).

Nous sommes en effet persuadés qu'un langage fluctuant, peu précis, est un handicap supplémentaire pour ce qu'on appelle habituellement «les enfants défavorisés», et que par opposition, l'emploi d'un langage rigoureux est une attitude non sélective. Qu'on nous entende bien : il ne s'agit évidemment pas de réprimer le langage employé par les élèves ; bien au contraire : une des tâches d'un enseignant est d'essayer de comprendre comment fonctionne l'intelligence de ses élèves à travers le langage écrit ou parlé qu'ils emploient. Mais une autre tâche, tout aussi importante, est de leur donner les moyens de comprendre le discours qu'on tient devant eux, d'où la nécessité d'un langage précis (ce qui ne signifie pas précieux).

4.4 Permettre l'utilisation de méthodes pédagogiques variées.

Il est bien clair qu'un texte écrit induit une méthode. Mais nous avons fait en sorte que cette méthode ne soit pas nécessairement la même pour les

exercices de manipulations, les exercices de motivation, l'utilisation de propriétés connues, l'établissement de nouveaux concepts, les exercices d'application.

Suivant les passages du livre, voici plusieurs méthodes possibles :

- travail de préparation individuel à la maison,
- travail individuel en classe,
- travail de groupe,
- travail collectif en classe pour organiser une recherche, pour regrouper des observations,
- débat en classe sur ce qu'on vient de faire et les suites qu'on peut en attendre,
- travail collectif guidé par le maître (avec utilisation du tableau) par exemple pour la construction d'un raisonnement,
- explications données par le maître, en particulier avant que les élèves ne lisent un nouveau chapitre,
- etc...

On voit cependant que ce livre n'incite guère à ce qu'on convient d'appeler le cours magistral, et qu'au contraire il privilégie les méthodes qui rendent les élèves actifs, où ils apprennent avec leur mains autant qu'avec leur tête, où ils participent à l'organisation de leurs connaissances plutôt que d'apprendre des recettes et où la restitution «par cœur» d'un texte mathématique n'est pas le critère essentiel du contrôle des connaissances.

V – PRESENTATION DU LIVRE.

5.1 Le livre contient 8 chapitres.

L	Ecritures et langage	(4)
DP	Points et droites	(5)
D	Décimaux	(4)
TM	Transformations matérielles	(3)
Q	Les nombres rationnels	(7)
TR	Translations	(6)
R	Les nombres réels	(6)
SR	Symétrie centrale et repérage	(5)

Ces chapitres, plus ou moins longs, sont divisés en 40 sous-chapitres (nombres entre parenthèses).

Les chapitres désignés par une seule lettre s'intéressent plus à des activités numériques ; ceux qui sont désignés par deux lettres à des activités géométriques.

5.2 Nous avons indiqué plus haut le sens des textes noirs et des textes bleus.

Les mots nouveaux et les expressions nouvelles sont imprimés en majuscules, et repris dans l'index terminologique en fin de livre.

Les propriétés importantes sont signalées en marge par ◇.

Les symboles sont signalés en marge par ►.

5.3 Puisqu'observations et manipulations sont des moments essentiels de l'activité mathématique, il fallait s'en donner les moyens. C'est pourquoi nous avons fourni des feuilles annexes de manipulations sur lesquelles on peut dessiner, écrire, qu'on peut plier ou découper et qui seront donc consommées en cours d'année.

Il était donc impossible de les lier au livre, qui lui doit durer plusieurs années.

Les élèves seront donc amenés à les acheter (et nous le regrettons) comme ils achètent leurs autres outils de dessin, règle, équerre, etc...

5.4 A la fin de six des huit chapitres quelques pages bordées de bleu, sous le titre «Faisons le point», regroupent les idées principales du chapitre.

Nous n'en avons pas donné à la fin des chapitres L et D ; pour le premier parce qu'il n'était pas question de formaliser les problèmes de langue et de logique abordés ; et pour le chapitre D, d'une part parce qu'il s'agissait d'un domaine déjà connu des élèves, et de l'autre pour ne pas répéter inutilement des résultats qui se trouvent dans la synthèse du chapitre R, qui est un peu la synthèse générale d'algèbre.

Nous avons mis sous le titre «Un peu d'histoire» une note historique sur un mathématicien que nous avons cherché à situer dans son époque en donnant des points de références accessibles aux élèves. Nous avons voulu que ces mathématiciens soient de nationalités et d'époques différentes.

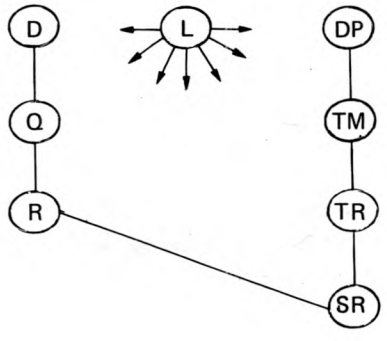
5.5 Après chaque chapitre, nous avons fourni un nombre relativement important d'exercices qui viennent s'ajouter à ceux qui figurent déjà dans le chapitre.

Dans une très large mesure, nous les avons classé approximativement dans l'ordre d'introduction des notions, surtout en ce qui concerne les exercices «techniques».

Par contre, nous avons refusé tout classement par ordre de difficultés croissantes, un tel classement étant pas trop subjectif.

Enfin nous avons voulu, sur quelques exemples, expliquer aux élèves comment on peut s'y prendre pour traiter un problème.

5.6 Le diagramme ci-contre donne l'ordre d'enchaînement des chapitres. On peut donc faire de la géométrie dès le début de l'année.



Cet organigramme appelle plusieurs remarques.

* Les sous-chapitres L1, L2 et L3 sont une première réflexion sur les écritures mathématiques, l'emploi de lettres muettes et le raisonnement.

Quant au sous-chapitre L4, il est en plus, une première réflexion sur le problème des équations.

Le chapitre L ne s'intègre pas à proprement parler dans une progression. On n'est donc pas obligé de le traiter d'un seul tenant dès le début de l'année. Il nous paraît cependant nécessaire de na pas trop attendre.

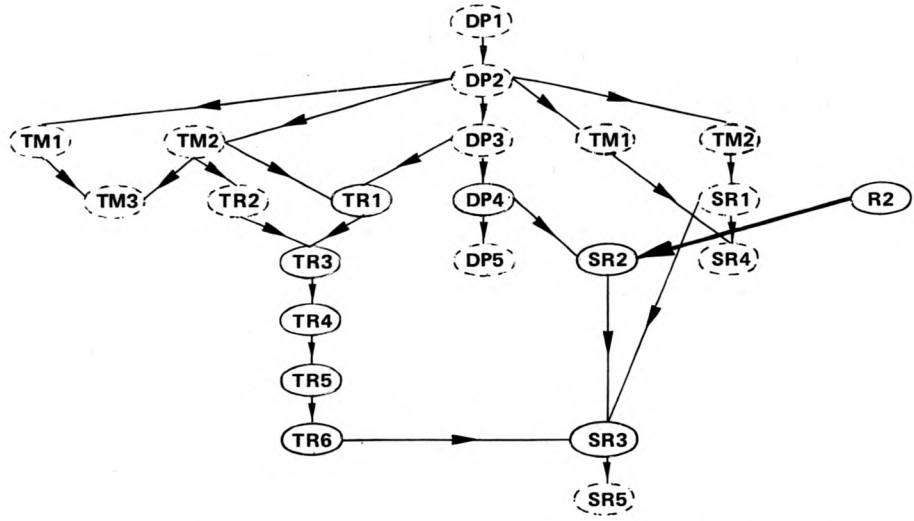
Par contre, les exercices proposés à la fin de ce chapitre peuvent être utilisés à n'importe quel moment de l'année.

* Le chapitre D est en quelque sorte une révision de ce qui a été fait en 6ème et en 5ème. Le temps à lui consacrer peut donc être extrêmement variable d'une classe à l'autre. Il est même possible que pour certaines classes, ce que nous avons proposé ici soit insuffisant.

* En ce qui concerne l'algèbre, l'ordre des chapitres n'est évidemment pas modifiable : D ⟶ Q ⟶ R.

* Pour la géométrie, notons que le chapitre SR peut être commencé dès qu'on a traité R2.

Voici un organigramme plus précis des 20 sous-chapitres de géométrie.



Le cadre plein indique un sous-chapitre essentiellement théorique et le cadre pointillé indique un sous chapitre manipulatoire.

Ces organigrammes et ces remarques vous aideront, nous l'espérons, à faire les choix imposés par le manque de temps, en fonction de votre classe.

Dans ce domaine, on peut bien entendu

– ne pas demander aux élèves de faire *tous* les exercices proposés à l'intérieur d'un chapitre,

— sauter telle ou telle partie d'un sous-chapitre,

— donner certaines parties mathématiques à préparer à la maison, et se contenter d'en faire une synthèse en classe ;

— traiter sous forme de travail collectif en classe telle partie que nous avons proposée comme travail de recherche individuelle.

5.7 Dans le livre du maître, nous avons voulu indiquer quels sont les choix pédagogiques et mathématiques que nous avons faits ; on les trouvera explicités dans les commentaires généraux et s'il y a lieu, dans les compléments mathématiques. Les commentaires de détail insistent en particulier sur les problèmes de raisonnement qui peuvent se poser aux élèves, et indiquent lorsque l'on passe de quelques observations à une propriété générale.

Lorsqu'une question nous semblait risquer de faire perdre du temps au professeur, nous avons donné une réponse.

VI — EN GUISE DE CONCLUSION.

En rédigeant cet ouvrage, nous avons cherché à fournir UN OUTIL DE TRAVAIL POUR LE GROUPE CLASSE, MAITRE ET ELEVE ; outil de travail le plus possible modulable et modifiable suivant les classes et suivant le moment de la classe.

Dans la situation actuelle, il ne nous a pas paru raisonnable d'aller au delà ; mais peut-être avons-nous écrit une sorte d'ouvrage de transition pour une autre organisation du temps scolaire.

Nous souhaitons en tous cas que, pour le moment, il permette une approche active de la mathématique de 4ème car nous croyons que :

«L'enfant n'est pas naturellement inattentif... Un enfant qui comprend les objectifs d'un apprentissage, qui peut les lier à sa vie personnelle, est prêt à accepter de grands efforts. Il est naturellement désireux d'apprendre, il a une curiosité innée, insasiable, il est toujours en alerte. Une force considérable le pousse à explorer, découvrir apprendre. S'il n'en est pas ainsi, c'est qu'il s'ennuie, et lorsqu'il s'ennuie, c'est souvent que les opérations qu'on lui propose sont dénuées de toute signification.

C'est l'ennui qui écrase, décourage, dégoûte l'enfant, et non l'effort. La difficulté de l'effort est grandement réduite par la curiosité intellectuelle».(1)

Bien entendu, toutes les remarques, critiques, propositions que vous voudrez bien nous faire seront les bienvenues. Elles s'intègreront dans la recherche de l'IREM de Grenoble et seront donc utiles à l'ensemble des collègues. Elles permettront aussi, bien sûr, une amélioration et pourquoi pas, un nouveau pas en avant lors d'une éventuelle réédition.

(1) Extrait d'une transcription d'une conférence prononcée par Bertrand Schwartz au Massachussetts Institute of Technology en octobre 1975.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE L

Ecritures et langage

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Dans ce chapitre, nous cherchons essentiellement à faire réfléchir sur le symbolisme mathématique, et à donner une idée de la notion d'opération.

Bien entendu, quand les élèves arrivent en 4ème, ils ont déjà écrit des mathématiques, en utilisant le symbolisme usuel ; mais bien souvent ils le manient maladroitement et sans en comprendre la portée.

Il n'était pas question de donner une théorie du symbolisme mathématique. Mais à l'inverse nous n'avons pas voulu l'utiliser sans en parler : en effet il n'est pas sûr que la lecture et la répétition de formules correctes suffisent pour que tous les élèves puissent se constituer une grammaire convenable, même implicite.

Nous avons donc consacré quelques pages à la réflexion sur le symbolisme, en insistant particulièrement sur l'usage des lettres : l'expérience montre la difficulté qu'ont les élèves à comprendre ce que peut signifier une lettre dans une formule. Ce problème est fortement lié à celui des démonstrations, car de très nombreux théorèmes énoncent une propriété universelle, et il faut bien finir par comprendre ce que signifie, par exemple, «quels que soient les réels a, b et c, si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$».

Les démonstrations soulèvent évidemment d'autres questions. Nous n'en avons abordé que quelques unes dans ce premier chapitre ; l'une au moins mérite d'être signalée : à quoi servent-elles ?

L'algèbre, et la géométrie, font constamment intervenir des lois (ou opérations). Nous avons pensé faire faire finalement une économie en insistant sur les lois de groupe ; sans exposer le moins du monde une théorie des groupes, nous en avons indiqué les propriétés qui seront constamment utilisées par la suite.

Naturellement, les thèmes de ce chapitre seront repris tout au long du livre.

Signalons enfin que, pour ne pas augmenter les difficultés de ce premier chapitre, nous n'y avons proposé que des calculs portant sur des nombres positifs.

1.2 Dans L1, nous proposons de réviser l'utilisation des parenthèses et les conventions de priorité. En effet force est de constater que les chances pour qu'un élève qui

entre en 4ème connaisse parfaitement le sens d'une écriture telle que « $5 + 3 \times 7$ » sont très faibles.

L'élève a généralement oublié les conventions de priorité et calcule dans l'ordre de gauche à droite. (sauf peut-être si on lui demande de calculer $95 \times 12 - 12$!).

1.3 Dans L2, nous redisons à l'occasion d'activités numériques les propriétés de l'addition et de la multiplication des décimaux. Nous avons volontairement donné à l'expression de ces propriétés une forme qui peut paraître un peu lourde mais qui a l'avantage de ne pas être formalisée.

1.4 Dans L3, nous avons essayé d'écrire autrement ces mêmes propriétés pour expliquer l'intérêt et le fonctionnement des lettres muettes. Comme cela est très difficile nous l'avons fait une fois avec des lettres, une fois avec des boîtes. Chaque fois que la nécessité s'en fera sentir nous insisterons sur ce problème dans la suite.

Il est très difficile de faire accepter par les élèves l'idée qu'un certain nombre de vérifications ne suffit pas pour être sûr de la généralité d'une propriété. Et lorsque l'idée est acceptée, encore faut-il savoir démontrer.

Les exercices que nous proposons ici ne sont qu'une première approche de ces difficultés ; nous ne prétendons pas que cela soit suffisant.

1.5 Le sous-chapitre L4 intitulé *horloge* s'inscrit dans le cadre de la réflexion précédente sur le raisonnement et sur l'usage des lettres. Ce n'est pas à proprement parler une étude sur la notion de groupe ; à partir de l'observation d'une horloge on montre comment on peut définir une opération, que nous avons notée $\oplus$, et une opération que nous avons notée $\otimes$, dans l'ensemble des nombres du cadran. On remarque que, $(H, \oplus)$ est un groupe, et que $(H, \otimes)$ n'en est pas un. On fait à ce propos une première approche des équations : on étudie une méthode de résolution pour une équation dans H du type $x \oplus b = a$. Cette étude, ainsi que les contre-exemples fournis par $(H, \otimes)$ pour les équations de la forme $x \otimes b = a$, et la régularité, devraient renforcer la compréhension de ces notions dans l'étude des groupes qui figurent au programme.

1.6 Les questions abordées dans ce chapitre ne nécessitaient pas un «Faisons le point».

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

L1

III – AVEC PLUSIEURS PARENTHESES ——— page 4

Exercices. 1. 5 ; 2 ; 2,88.
2. 211 ; 1 485 ; 2 925.

IV – REGLES DE PRIORITE ——— page 4

Voici des réponses à la question posée.

$3 \times 7 = 21$	$(4 \times 5) + 1 = 21$	$(9 : 3) \times 7 = 21$
$(8 \times 3) - 3 = 21$	$3 \times (4 + 3) = 21$	$(9 \times 7) : 3 = 21$

Avec les conventions de priorité on peut écrire que
$4 \times 5 + 1 = 21$ et $8 \times 3 - 3 = 21$.

On peut remarquer que dans une suite de multiplications et de divisions, il n'y a pas de convention de priorité et par conséquent les parenthèses sont nécessaires.

L2

II – FAISONS DES MULTIPLICATIONS — page 6

2.1 $123\,456\,789 \times 9 = 1\,111\,111\,101$.

2.2 $8\,547 \times 13 = 111\,111$.

IV – EXERCICES — page 8

4.1 Voici des réponses aux questions posées ; il y en a d'autres.

$(1 + 2 - 3) \times 4 = 0$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$1 \times 2 + 3 - 4 = 1$	$1 + 2 \times 3 + 4 = 11$
$1 + 2 + 3 - 4 = 2$	$(1 + 2) \times 3 + 4 = 13$
$1 + 2 \times 3 - 4 = 3$	$1 \times 2 + 3 \times 4 = 14$
$1 + 2 - 3 + 4 = 4$	$(1 \times 2 + 3) \times 4 = 20$
$(1 + 2) \times 3 - 4 = 5$	$1 + (2 + 3) \times 4 = 21$
$(1 : 2) \times 3 \times 4 = 6$	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

4.4 100 ; 100 ; 100 ; 100 ; 100 ; 101.

4.5

3	36	2
4	6	9
18	1	12

216 216

4.6

5,2	1,8	4,4	1	3,6
2,6	4,2	0,8	5,4	3
2	1,6	3,2	4,8	4,4
3,4	3	5,6	0,2	3,8
2,8	5,4	2	4,6	1,2

18 14

L3

I – FAISONS DES MATHEMATIQUES DANS L'ESCALIER — page 10

1.1

1	2	3	4	5	6
1	2	3	5	8	13

On peut remarquer que le codage proposé ici a non seulement pour objet de remplacer une expression longue par un symbole plus concis, mais que c'est aussi un codage fonctionnel. C'est toujours le cas lorsqu'on utilise une notation avec des indices 1, 2, 3 ...

II – LETTRES ET DEMONSTRATIONS — page 11

2.1 Il se trouve que $3 + 7 + 11$ est un multiple de 3, mais ce n'est évidemment par la démonstration précédente qui permet de l'affirmer ! On voit aisément que si n est un entier naturel, $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$ est un multiple de 5.

V – EXERCICES page 14

Première étape d'une progression sur le calcul algébrique, progression qui s'étendra sur l'année entière à travers les chapitres L, D, Q et R.

VI – INTUITION ET DEMONSTRATION page 14

6.1 Il suffit évidemment de montrer un exemple pour justifier la réponse «non». N'importe quel exemple convient puisque la somme de quatre entiers consécutifs n'est jamais un multiple de 4.

6.2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$x^2 + x + 17$	17	19	23	29	37	47	59	73	89	107

Cet exercice a pour objet de faire comprendre que produire un certain nombre d'exemples, si grand soit-il, ne suffit pas pour affirmer qu'une propriété universelle est vraie. On peut proposer d'autres exercices du même type, par exemple avec $2x^2 + 29$.

VII – VRAI OU FAUX page 15

1. Vrai – 2. Faux – 3. Vrai – 4. Vrai – 5. Vrai – 6. Faux – 7. Faux.

L4

I – EN REGARDANT UNE HORLOGE page 16

1.5 A la question «Combien penses-tu qu'il faudrait faire de vérifications pour en être sûr ? », une première réponse peut être 12^3 (soit 1 728). Mais on peut remarquer que, quels que soient a, b et c éléments de H,

$$(12 \oplus b) \oplus c = 12 \oplus (b \oplus c) \ ;$$
$$(a \oplus 12) \oplus c = a \oplus (12 \oplus c) \ ;$$
$$(a \oplus b) \oplus 12 = a \oplus (b \oplus 12).$$

Cette remarque ramène le nombre de vérifications à 11^3 (soit 1 331). La commutativité permet encore de réduire ce nombre.

1.6 Nous avons voulu rédiger complètement le raisonnement à cause des difficultés qu'il comporte quant à l'usage des lettres ; en outre, le raisonnement par implication nécessite une vérification, que les élèves confondent souvent avec un contrôle des calculs. Cette réflexion sur les équations sera reprise tout au long du livre.

IV – UNE AUTRE OPERATION DANS H page 22

4.4 L'élément 8 n'ayant pas de symétrique pour l'opération $\otimes$, $(H, \otimes)$ n'est pas un groupe. La négation d'une propriété universelle étant une propriété existentielle, il suffit de produire un exemple. Au langage près, c'est ce que nous essayons de faire comprendre aux élèves une nouvelle fois.

4.6 Tant qu'on n'utilise pas de théorèmes d'équivalence, la transformation d'une équation (1) en une équation (2) permet seulement d'affirmer que toute solution de (1) est solution de (2). Cet exemple montre bien qu'il existe des situations où une solution de (2) n'est pas nécessairement une solution de (1).

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

Les numéros 1 à 4 sont des exercices sur le parenthésage.

Dans les numéros 5 à 10, on utilise les règles de priorité.

Les numéros 11 et 12 et les numéros 14 à 23 sont des exercices où l'on utilise les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{D}$. Les nombreux exercices de calcul mental qui figurent parmi ces exercices pourront être donnés en classe.

Le numéro 13 indique une autre méthode que celle utilisée en [L2, page 5] pour calculer la somme des n premiers naturels non nuls (n désigne un naturel supérieur à 2).

Le numéro 24 indique une méthode astucieuse pour calculer la somme des n premiers naturels impairs (n désigne un naturel supérieur à 2).

Les numéros 25 à 28 et le numéro 32 sont des exercices faisant intervenir des «figures magiques». Ces exercices ne sont pas tous évidents. Ils ne doivent pas apparaître aux élèves comme des jeux de devinette, mais peuvent au contraire leur donner l'occasion de raisonner et d'organiser leur recherche.

Le numéro 29 reprend l'exercice étudié en [L2, paragraphe V, page 9], mais en partant d'un nombre de quatre chiffres au lieu d'un nombre de trois chiffres.

Dans les numéros 30 et 31 apparait la suite de Fibonacci et chacun de ces exercices peut compléter l'exercice étudié en [L3, paragraphe 1.1, page 10].

Les numéros 33 à 37 sont des exercices de calcul algébrique.

Les numéros 38 à 41 sont des exercices sur les opérations dans un ensemble et sur les groupes.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

25

(9 × 5) : 3	=	**15**
×	×	×	
(1 × 6) : 2	=	**3**
+	+	+	
(7 × 8) : 4	=	**14**
=	=	=	
16	**38**	**10**	

9 + 4 − 8	=	**5**
+	+	+	
2 + 5 − 6	=	**1**
−	−	−	
3 + 7 − 1	=	**9**
=	=	=	
8	**2**	**13**	

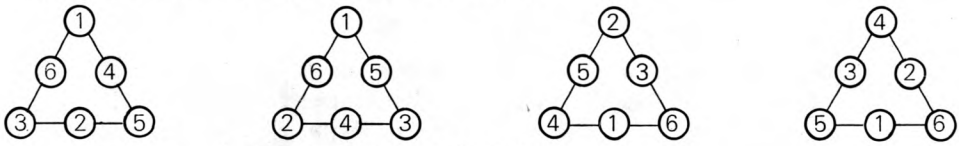
26

5	26	**35**	44
47	**32**	**17**	**14**
20	**11**	50	29
38	41	8	**23**

27 Il y a une seule solution, aux symétries et rotations près.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

28 Il y a quatre solutions aux symétries et rotations près.



30

hauteur de la tour	1	2	3	4	5
nombres de tours	2	3	5	8	13

Soit n un naturel. Notons t_n le nombre de tours de hauteur n.

Soit n un naturel supérieur à 2.

Pour construire une tour de hauteur n, on peut commencer par poser un cube blanc ou un cube noir.

Si le premier cube posé est blanc, le second cube pouvant être blanc ou noir, le problème revient à construire au dessus du premier cube une tour de hauteur $n - 1$.

Si le premier cube posé est noir, le second cube est nécessairement blanc.

Ces deux cubes étant posés, le problème revient à construire une tour de hauteur $n - 2$.

31

n	1	2	3	4	5	6
nombre de pavage d'un rectangle $2 \times n$	1	2	3	5	8	13

Soit n un naturel. Notons P_n le nombre de pavages possibles pour un rectangle $2 \times n$.

Soit n un naturel supérieur à 2. Pour paver un rectangle $2 \times n$, on peut commencer à gauche :

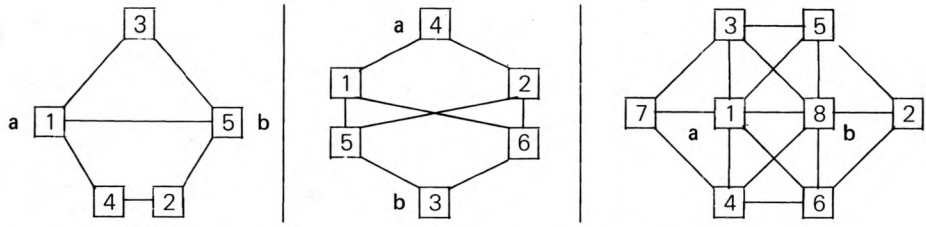
- soit par un rectangle 2×1 placé verticalement,
- soit par deux rectangles 2×1 placés horizontalement.

Si l'on commence de la première façon, il reste à paver un rectangle $2 \times (n - 1)$.

Si l'on commence de la seconde façon, il reste à paver un rectangle $2 \times (n - 2)$.

Donc $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$.

32



Il y a d'autres solutions. Cependant, pour le schéma numéro 1, chacun des nombres 1 et 5 doit nécessairement être placé dans l'une des cases a ou b. Pour le schéma numéro 2, chacun des nombres 3 et 4 doit nécessairement être placé dans l'une des cases a ou b. Enfin, pour le schéma numéro 3, chacun des nombres 1 et 8 doit nécessairement être placé dans l'une des cases a ou b.

38 Pour les triplets (x, y, z) de nombres proposés, $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$.

Mais l'opération $\perp$ n'est pas associative car, par exemple, $(1 \perp 2) \perp 3 \neq 1 \perp (2 \perp 3)$.

Il s'agit, ici encore, du problème de la quantification : le fait que $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ pour quelques triplets (x, y, z) d'éléments de $\mathbb{D}$ ne permet pas d'affirmer que l'opération $\perp$ est associative.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE DP

Droites et points

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Dans DP1 et DP2, nous avons poursuivi trois objectifs :

a) donner l'occasion aux élèves d'utiliser des instruments traditionnels de dessin : règle, règle graduée, crayon, équerre, compas.

b) leur montrer des situations géométriques : alignements de points, positions relatives de droites, lien entre distance et orthogonalité, ...

Nous n'avons pas cherché à privilégier les situations qui préparent l'introduction des axiomes que nous avons choisis : de telles situations nous ont paru assez peu motivantes. Au contraire, nous avons voulu montrer des dessins plus spectaculaires, susceptibles d'éveiller la curiosité des élèves.

Nous souhaitons surtout les familiariser avec les figures géométriques ; nous espérons ainsi diminuer les difficultés dans ce domaine au moment où ils aborderont la résolution des problèmes. C'est pourquoi, notamment, nous avons pris soin de décrire certaines figures.

c) enfin, nous avons voulu commencer à faire sentir la nécessité d'une modélisation de la géométrie matérielle. Pour cela,

- nous avons donné à constater des résultats imprévisibles,
- nous avons essayé de montrer comment la connaissance de certaines propriétés permet d'en DEMONTRER d'autres.

Cette démarche nous a également permis de donner à nouveau une idée de ce qu'est une démonstration.

1.2 Il était alors possible de parler de plan mathématique, et donc de donner les premiers axiomes de la théorie (DP3).

Nous avons tenu à les exprimer dans le langage le plus simple et le moins solennel possible. Il nous semble d'ailleurs évident qu'on ne peut demander à un élève d'apprendre par cœur de tels énoncés.

Les axiomes vont donc apparaître comme des propriétés simples qu'on accepte sans démonstration et qui servent à démontrer d'autres propriétés. Pour les

élèves vont commencer à se dégager deux géométries :

— une géométrie où on se contente de faire des constatations,

— une géométrie où on peut faire des démonstrations.

Cette idée n'est pas simple. Ce n'est qu'au fur et à mesure que le cours avancera en 4ème et 3ème que pourront se dégager les règles du jeu :

— toute observation dans un plan matériel qui n'est pas décrite par un axiome doit pouvoir être justifiée par la démonstration d'une propriété dans la théorie ;

— la théorie mathématique ainsi élaborée doit pouvoir être illustrée par des dessins (sous réserve de quelques conventions pour tracer ces dessins).

Il n'est pas question d'expliquer ici aux élèves que les quatre axiomes proposés dans DP3 ne sont pas suffisants pour construire une théorie rendant compte de la géométrie physique. Ils découvriront cette insuffisance petit à petit : ce sera le moment d'introduire de nouveaux axiomes.

Pour le moment, nous n'avons utilisé ces axiomes que pour étudier le parallélisme [DP3] et les projections [DP4].

Il est encore moins question de discuter de la cohérence de ce choix d'axiomes, ou d'indiquer les raisons qui ont guidé ce choix.

D'autre part, pour l'ensemble de la géométrie de 4ème et de 3ème, nous avons choisi le système d'axiomes qui tout en étant cohérent, nous a paru le plus commode pédagogiquement. De ce fait, nous n'avons pas choisi un nombre minimum d'axiomes. Ici par exemple, le choix du quatrième axiome : «toute droite du plan appartient à une direction et appartient à une seule direction» n'était pas nécessaire. Il a cependant l'avantage d'éviter une démonstration peu convaincante sur la relation «... est parallèles à ...».

1.3 Nous avons regroupé dans DP5 quelques observations concernant la distance et l'orthogonalité, en particulier des observations sur la compatibilité du parallélisme et de l'orthogonalité.

Pour le moment, la distance de deux points est un nombre décimal qu'on lit sur une règle graduée, et il ne saurait être question de parler de distance dans la théorie tant qu'on n'a pas introduit IR.

Nous aurions pu cependant parler de directions mathématiques orthogonales. Nous n'avons pas voulu le faire ; nous préférions en effet introduire simultanément dans la théorie distance et orthogonalité, pour mieux faire comprendre combien elles sont liées. Nous ne le ferons que dans le livre de 3ème.

II — COMMENTAIRES DE DETAIL.

DP1 **I — DES MOTS** page 31

Les questions posées admettent de multiples réponses :

1.1 PLAN : feuille de papier, mur, table, surface d'une eau au repos, etc...

1.2 DROITE : arête d'un parallélépipède rectangle comme par exemple le bord de la table, trait le long d'une règle, arête d'un outil tranchant, fil à plomb, etc...

1.3 POINT : trace d'un crayon bien taillé, intersection de deux lignes, coin de la classe, etc...

Toutes ces réponses et bien d'autres sont évidemment acceptables : celles qui sont privilégiées ensuite ne le sont que pour des raisons de commodité.

II – DES INSTRUMENTS POUR DESSINER ET ENCORE DU VOCABULAIRE page 31

2.1 Les trois dessins proposés dans la remarque représentent évidemment une droite. Il y a lieu cependant de faire remarquer l'inconvénient de la deuxième représentation qui est aussi celle du segment CD. Pour la troisième, une règle est nécessaire pour s'assurer que le dessin est bien une représentation de la droite EF.

DP2

I – OU ON CONTINUE A DESSINER ET A OBSERVER page 38

1.1 Il est possible que certains élèves ne distinguent pas facilement en quoi

1.2 ces deux manipulations sont différentes et ils demanderont peut-être «pourquoi on fait deux fois la même chose ? » Il peut donc être nécessaire de s'y attarder.

1.5 Nous avons préféré donner la figure sur une feuille de manipulation de façon que sur les dessins des élèves, les points M, N et P existent et se trouvent sur la feuille de papier. Bien entendu, la propriété peut s'observer sur d'autres configurations et il peut être intéressant de laisser les élèves disposer droites et points comme ils l'entendent. L'exercice sera incontestablement plus long, mais il permettra une discussion fructueuse : parallélisme, droites qui se coupent à l'extérieur de la feuille, ...

II – OU ON ESSAIE AUSSI DE FAIRE DES DEMONSTRATIONS page 40

2.3 On remarquera que dans la rédaction des raisonnements proposés, nous avons fait une phrase pour chaque propriété utilisée, et que nous sommes allés à la ligne après chaque phrase. Cette manière de procéder peut peut-être aider les élèves à écrire des rédactions claires.

2.4 On peut penser que certains élèves compteront 4 droites passant par A, C, D et E. D'autres au contraire, ne compteront que celles qu'ils n'ont pas encore comptées, respectivement 3, 2, 1 et 0. La comparaison de ces deux méthodes, correctes l'une et l'autre, est l'occasion d'une discussion dans la classe.

DP4

I – DESSINONS page 50

Ce paragraphe a pour but de faire découvrir (par le dessin) qu'on peut faire une application d'une droite sur une droite.

Nous avons proposé deux cas de figures ; on peut évidemment en proposer d'autres comme par exemple les cas où a et b sont parallèles, et où a et b sont orthogonales.

1.3 Ce paragraphe permettra peut-être de comprendre que ce sont des ensembles non finis qu'on veut mettre en relation. Cette idée risque d'être nouvelle pour beaucoup d'élèves. Il sera donc probablement nécessaire de s'y attarder.

II – DEFINITION D'UNE PROJECTION ——— page 51

2.2 Nous avons profité de cet exemple pour faire réfléchir une nouvelle fois sur l'usage des lettres muettes et sur le langage mathématique.

Ce paragraphe est aussi l'occasion de faire revoir le vocabulaire concernant les applications.

III – PROPRIETES ——— page 52

3.1 Les notions d'application réciproque d'une application et de bijection ne sont certainement pas acquises en début de 4ème. C'est pourquoi nous avons conduit ce paragraphe le plus lentement possible.

Il est tout à fait inutile de parler ici d'injection et de surjection. Ces notions ne sont d'ailleurs pas au programme.

IV – EXERCICES ——— page 54

4.1 Nous avons profité de cet exemple pour expliquer
- ce qu'est la composée de deux applications,
- ce que signifie que deux applications sont égales,
- ce qu'est l'application identique sur un ensemble.

Ces trois notions ne sont pas simples et ce paragraphe va donc demander un peu de temps.

4.3 Nous avons placé en exercice la notion de projection du plan d'une droite, privilégiant ainsi celle de projection d'une droite sur une droite.

Ce choix a été motivé par les raisons suivantes :

– on a de toute façon besoin très vite des projections droite sur droite ;

– si on avait commencé par les projections plan sur droites, une projection droite sur droite apparaitrait comme une restriction d'une application $P \longrightarrow d$, ce qui est certainement une idée difficile ;

– sur un dessin illustrant une application $P \longrightarrow d$, la source est représentée par toute la feuille de papier, c'est-à-dire rien du tout ;

– enfin la première application géométrique ainsi présentée est une bijection, ce qui facilite son abord.

DP5 **II – TRIANGLE RECTANGLE** ——— page 58

2.1 (dernière question). On demande de vérifier que l'hypoténuse est le plus long des trois côté.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

Les numéros 14 à 20 sont des exercices de révision sur les applications et les bijections. En ce qui concerne les exercices de géométrie, les numéros 7 et 8 sont les seuls exercices qui se situent dans la théorie mathématique ; ils concernent les projections du plan sur une droite.

Les autres exercices de géométrie sont des exercices d'observation (et parfois de raisonnement) dans le plan matériel.

Les numéros 9 à 13 sont des exercices sur l'orthogonalité et pourront être traités après DP5.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

5

nombre de points	2	3	4	5	6
nombre de régions	2	4	8	16	31

Les élèves ont tendance à prévoir 32 régions pour 6 points.

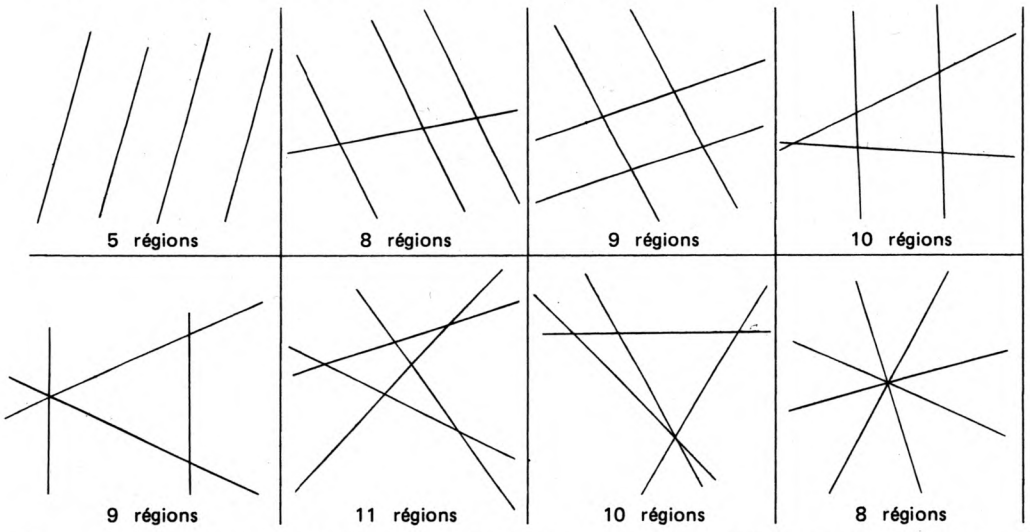
Il s'agit, ici encore, du problème de la quantification.

L'étude des quatre premiers cas ne permet pas d'affirmer que le nombre de régions pour n points (n désigne un naturel supérieur à 1) est 2^{n-1}.

Cet exercice est à rapprocher de l'exercice étudié en [L3, paragraphe 6.2, page 15].

Soit n un naturel supérieur à 3. On peut démontrer que, pour n points, le nombre de régions est $1 + C_n^2 + C_n^4$, ce qui s'écrit $1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2}$.

6 La troisième question pose un problème d'organisation assez difficile pour les élèves. Voici les différents cas de figure dans le cas de quatre droites.



7 1. Si la droite AB est parallèle à la droite d, la réponse à la question est non.

Si la droite AB et la droite d sont sécantes, il faut choisir pour direction δ la direction de la droite AB.

2. Le seul cas où il est possible de choisir une telle direction est le cas où les points A, B et C sont alignés sur une droite sécante à d. Dans ce cas, pour que $f(A) = f(B) = f(C)$, il faut choisir pour direction δ la direction de la droite AB.

8 Si les droites a et b sont parallèles, l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = g(M)$ est l'ensemble vide.

Si les droites a et b se coupent en un point A, l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = g(M)$ est la droite de direction δ qui passe par A.

11 Lorsque l'élève a tracé toutes les médiatrices, il voit apparaître une ellipse. Ce dessin demande un certain soin et est long à exécuter. L'intérêt de l'exercice est de faire apparaître une courbe par enveloppe de droites.

14 Cet exercice pose un problème d'organisation pour les élèves.

Rappelons que, si n et p sont des naturels non nuls, le nombre d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments est p^n.

21 Il s'agit d'un problème de recherche que l'on pourra demander de faire à la maison.

Soit n un naturel. Notons T_n le nombre maximum de régions que l'on peut obtenir avec n droites.

Remarquons tout d'abord que le nombre maximum de régions est obtenu lorsque les droites sont sécantes deux à deux sans que trois d'entre elles soient concourantes. Si l'on part d'une figure avec trois droites, lorsqu'on trace une quatrième droite, quatre nouvelles régions apparaissent. Donc $T_4 = T_3 + 4 = 7 + 4 = 11$. Si l'on part d'une figure avec quatre droites, lorsqu'on trace une cinquième droite cinq nouvelles régions apparaissent. Donc $T_5 = T_4 + 5 = 11 + 5 = 16$. Plus généralement, si n est un naturel non nul et si l'on part d'une figure avec $n-1$ droites, lorsqu'on trace une $n^{ème}$ droite, n nouvelles régions apparaissent. Donc $T_n = T_{n-1} + n$.

Pour dix droites, le nombre maximum de régions est donc $T_5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, c'est-à-dire 56.

Soit n un naturel. On peut démontrer que $T_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

IV – COMPLEMENTS MATHEMATIQUES.

Les axiomes proposés dans [DP] ne suffisent pas pour construire une théorie décrivant complètement les plans physiques ; les exemples donnés ici (paragraphes 4.2, 4.3 et 4.4) permettront de s'en convaincre. Auparavant, remarquons que le 4ème axiome donné dans [DP] est logiquement superflu (paragraphe 4.1) ; nous avons expliqué plus haut pourquoi nous l'avons cependant proposé. Pour terminer, nous examinerons quelques problèmes de dénombrement (paragraphe 4.5).

4.1 Soit $(P, \mathbf{D})$ un couple tel que

a) les éléments de **D** sont des sous-ensembles de P ;

b) si A et B sont deux éléments distincts de P, il existe un élément d de **D**, et un seul, tel que $A \in d$ et $B \in d$;

c) si d est un élément de **D** et si A est un élément de P qui n'est pas dans d, il existe un élément d' de **D**, et un seul, tel que $A \in d'$ et $d \cap d' = \phi$;

d) il existe au moins un ensemble de trois éléments de P qui n'est inclus dans aucun élément de **D**.

Dans ces conditions, nous dirons que $(P, \mathbf{D})$ est un plan. Dans un tel cas, par la suite, nous utiliserons le langage géométrique habituel (bien entendu, il ne saurait être question d'infliger aux élèves la définition ci-dessus).

Supposons que $(P, \mathbf{D})$ soit un plan. Montrons, par l'absurde, que le parallélisme est une relation transitive sur **D**. Supposons donc que a, b et c soient des droites telles que $a \parallel b$ et $b \parallel c$, et que a et c ne soient pas parallèles (rappelons que, par définition, $a \parallel b$ si $a = b$ ou si $a \cap b = \phi$). Soit E le point commun à a et c :

il passe par E deux droites parallèles à b, qui sont a et c ; elles sont distinctes puisqu'elles ne sont pas parallèles. On obtient ainsi une contradiction avec la condition c) ci-dessus.

La relation de parallélisme est donc transitive ; elle est en outre réflexive (toute droite est parallèle à elle-même) et symétrique (si une droite a est parallèle à une droite b, alors b est parallèle à a). C'est donc une relation d'équivalence sur **D**, qui permet de définir une partition de **D**. Donc chaque droite appartient à une seule direction, et ce que nous avons proposé comme 4ème axiome aurait pu être démontré à partir des trois premiers.

4.2 Soit A, B, C et D quatre objets distincts (par exemple 1, 2, 3 et 4, ou encore $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$). Notons Q l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ et **E** l'ensemble des parties à 2 éléments de Q ; autrement dit, $\mathbf{E} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$. Il est facile de vérifier que (Q, **E**) est un plan au sens du paragraphe 4.1 ; seule la condition a) demande un peu de patience pour être vérifiée si l'on souhaite faire un raisonnement exhaustif : il y a 6 droites, et pour chaque droite il y a deux points qui ne sont pas sur elle. Ce plan a 3 directions, qui sont $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$, $\{\{A, C\}, \{B, D\}\}$, et $\{\{A, D\}, \{B, C\}\}$.

Indiquons, à titre de curiosité, que si p est un nombre premier et si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des plans dont toutes les droites ont p^n éléments ; nous avons décrit ci-dessus un exemple où $p = 2$ et $n = 1$. A l'heure actuelle, on ignore s'il existe des plans dont les droites ont un nombre fini d'éléments qui ne soit pas de la forme p^n avec les conditions ci-dessus.

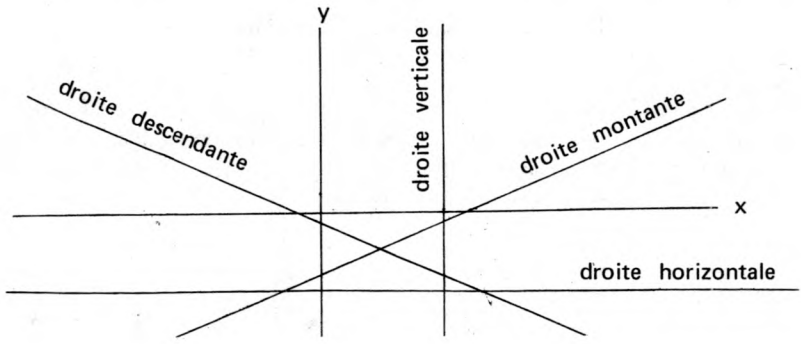
4.3 Notons Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ainsi définis.

a) Par définition, une partie δ de $\mathbb{R}^2$ appartient à Δ_1 s'il existe un réel c tel que δ admette $x = c$ par équation en (x, y) (si c est un réel, la droite d'équation $x = c$ est l'ensemble des couples (c, y) où $y \in \mathbb{R}$).

Nous dirons par convention que Δ_1 est l'ensemble des droites verticales de $\mathbb{R}^2$.

b) Par définition, une partie δ de $\mathbb{R}^2$ appartient à Δ_2 s'il existe un réel *négatif ou nul* a et un réel b tels que δ admette $y = ax + b$ pour équation en (x, y) ; nous dirons que Δ_2 est l'ensemble des droites descendantes et des droites horizontales de $\mathbb{R}^2$.

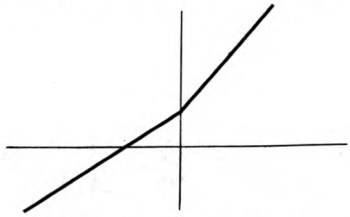
c) Par définition, une partie δ de $\mathbb{R}^2$ appartient à Δ_3 s'il existe un réel *strictement positif* a et un réel b tels que δ admette $y = ax + b$ pour équation en (x, y) ; nous dirons que Δ_3 est l'ensemble des droites montantes de $\mathbb{R}^2$.



Notons Δ l'ensemble $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$; on peut remarquer que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont disjoints. Il est bien connu, et assez facile à démontrer, que $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ est un plan.

4.4 Définissons maintenant Δ_3' : une partie δ de $\mathbb{R}^2$ appartient à Δ_3' s'il existe un réel *strictement positif* a et un réel b tels que $(x, y) \in \delta$ si et seulement si

$x \leqslant 0$ et $y = ax + b$ ou $x > 0$ et $y = 2ax + b$

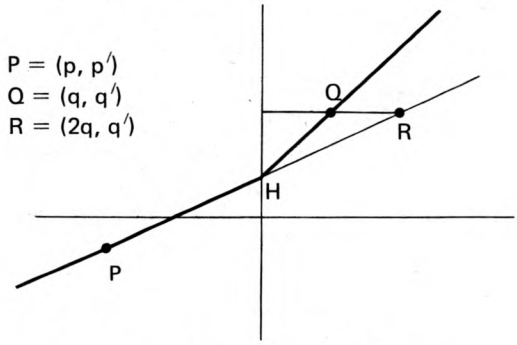


Nous dirons que Δ_3' est l'ensemble des droites cassées montantes de $\mathbb{R}^2$. Notons Δ' l'ensemble $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3'$.

On peut vérifier par le calcul, et des dessins permettent de se persuader, que $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ est un plan.

La seule difficulté consiste à vérifier que, si p, p', q et q' sont des réels tels que $p < 0 < q$ et $p' \leqslant q'$, et si $P = (p, p')$ et $Q = (q, q')$, il existe bien un élément de Δ' qui contient P et Q.

La figure ci contre montre comment on peut le faire (le coefficient directeur de la droite HQ est le double de celui de la droite PHR).



Il est clair que $\Delta \neq \Delta'$, et donc que les plans $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ et $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ sont distincts. On peut démontrer que ces deux plans sont vraiment différents ; plus précisément :

soit (P, **D**) et (P', **D'**) des plans ;

s'il existe une bijection φ de P vers P' telle que l'image par φ de toute droite du plan (P, **D**) soit une droite de plan (P', **D'**),

on dit que les plans (P, **D**) et (P', **D'**) sont isomorphes.

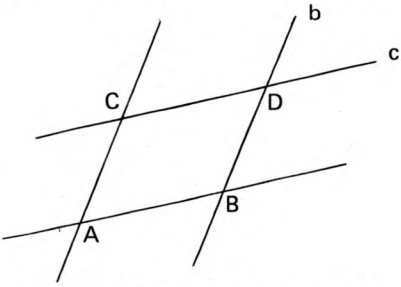
Les plans $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ et $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ ne sont pas isomorphes.

Remarque. Les exemples donnés en **4.3** et **4.4** montrent qu'en toute rigueur parler du «plan P» n'a pas de sens : il peut se faire qu'étant donné un ensemble P, il existe deux ensembles distincts **D** et **D'** tels que (P, **D**) et (P, **D'**) soient des plans : lequel sera «le plan P» ? C'est pourtant un abus de langage courant, commode et sans grand inconvénient.

4.5 Soit (P, **D**) un plan.

Soit A, B et C trois points non alignés (il s'en trouve d'après la condition d) de 4.1). Les droites AB et AC sont distinctes, sinon A, B et C seraient alignés.

Soit b la parallèle à la droite AC qui passe par B, et c la parallèle à la droite AB qui passe par C ; les droites b et c ne sont pas parallèles puisque les droites AB et AC ne le sont pas. Soit D leur point commun ; il est distinct de A, B et C : par exemple D est sur la droite c et B n'y est pas, etc...



Le plan a donc au moins quatre points : A, B, C et D.

Les droites AB, AC, AD, BC, BD et CD sont distinctes : par exemple les droites AB et CD sont distinctes car C n'est pas sur la droite AB, etc...

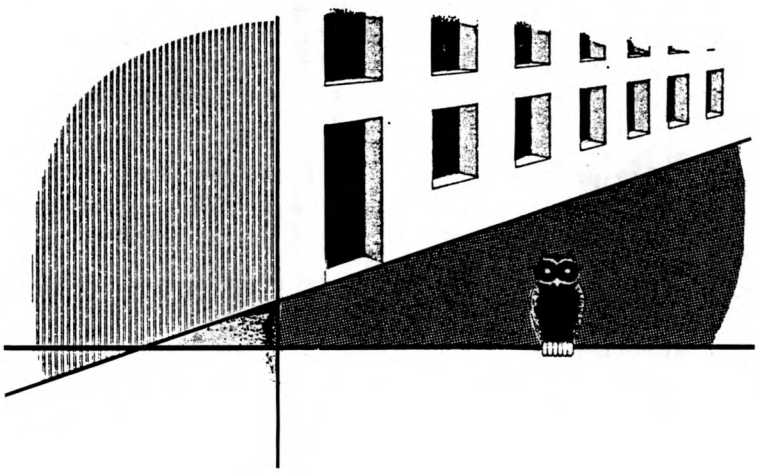
Le plan a donc au moins six droites.

Les directions des droites AB, AC et AD sont distinctes : le plan a au moins trois directions.

Soit d une droite ; soit δ une direction qui ne contient ni la droite d, ni la droite AB (il existe une telle direction, puisque le plan a au moins trois directions). La projection de la droite AB sur d de direction δ est une bijection ; donc d a au moins deux points : toutes les droites du plan ont au moins deux points.

Le plan donné en exemple au 4.2 a effectivement 4 points, 6 droites et 3 directions, et chacune de ses droites a exactement 2 points.

Ce type de résultat paraitrait farfelu à la plupart des élèves : sur les droites qu'on dessine il y a bien plus de deux points, un plan matériel permet de dessiner bien plus que 6 droites, etc...



COMMENTAIRES DU CHAPITRE D

Entiers et décimaux

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

L'ensemble des décimaux a été étudié en 6ème et 5ème et nous en proposons ici une révision.

1.1 Dans D1 nous reprenons la notion d'échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}_1$ ou $\mathbb{D}_2$. Il nous parait important que les élèves «voient» les nombres se ranger sur une droite matérielle.

1.2 Dans D2, nous révisons l'addition et la multiplication dans $\mathbb{D}$. Il sera sûrement nécessaire d'expliquer plus le fonctionnement de ce que nous avons appelé la machine à multiplier pour des élèves qui n'en auraient pas eu la pratique en 6ème et 5ème.

1.3 Dans D3, à propos de la soustraction nous introduisons la notation $\overline{XY}$. C'est là l'occasion

– de faire calculer des différences,

– de préparer l'étude des surlignés qui sera approfondie dans la suite du cours.

Nous avons traité complètement le problème de la différence de deux décimaux, continuant ainsi notre réflexion sur les équations.

Nous n'avons pas donné de règle de suppression de parenthèses précédées du signe moins. Nous pensons qu'une telle règle est inutile et nous préférons que l'élève se souvienne que «soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé». Nous avons proposé des exercices de calcul littéral en respectant une progression qui sera poursuivie dans les chapitres suivants.

1.4 Dans D4, à partir de la pratique antérieure des élèves, nous introduisons la notion de quotient approché et nous faisons observer qu'il existe des couples (a ; b) de nombres décimaux tels que la division de a par b ne tombe pas juste.

1.5 Nous n'avons pas proposé de «Faisons le point» dans ce chapitre pour deux raisons :

– il s'agit essentiellement d'un chapitre de révision ;

– nous avons récapitulé les propriété des ensembles de nombre dans «Faisons le point» du chapitre R.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

D1 **I – ECHELLES** page 67

1.1 Le mot échelon n'a pas ici le même sens que dans le langage courant où il est synonyme de barreau. Nous l'avons tout de même préféré au mot «intervalle» qui a un sens mathématique sensiblement différent.

Pour le moment donc, seuls les barreaux ont une abscisse à l'exclusion des autres points de la droite. Il en sera ainsi jusqu'au chapitre R.

Nous avons décidé que zéro ici n'est ni positif, ni négatif et par suite nous dirons que zéro n'a pas de signe.

D2 **I – DES REVISIONS** page 71

C'est évidemment de propos délibéré que nous avons conduit en parallèle la révision de l'addition et celle de la multiplication.

1.4 Les élèves acceptent difficilement que a ne désigne pas forcément un nombre négatif. C'est pourquoi nous posons cette question sous une forme de différente à deux reprises dans 1.4 et dans 1.5.

1.6 1er exercice : on fera remarquer l'intérêt pratique de la commutativité et de l'associativité de l'addition.

2ème exercice : il est bon d'entraîner les élèves à donner d'abord le signe d'un produit.

3ème exercice : 0,020 4 ; 4,704 ; 0,7 ; - 114,66 ; - 1,84.

II – PROPRIETES DE L'ADDITION ET DE LA MULTIPLICATION page 73

2.2 Voici une démonstration de la propriété.

Calculons la somme des entiers $u + v$ et $-u + (-v)$; nous allons démontrer que cette somme est zéro :

$$(u + v) + (- u + (- v)) = (u + v) + (- v + (- u)) ;$$
$$(u + v) + (- v + (- u)) = ((u + v) + (- v)) + (- u) ;$$
$$((u + v) + (- v)) + (- u) = (u + (v + (- v))) + (- u) ;$$
$$(u + (v + (- v))) + (- u) = (u + 0) + (- u) ;$$
$$(u + 0) + (- u) = u + (- u) ;$$
$$u + (- u) = 0.$$

Donc $u + v$ et $- u + (- v)$ ont pour somme zéro. Ils sont opposés.

2.4 Nous n'avons pas proposé d'exercices où les lettres sont affectées de coefficients pour éviter de multiplier les difficultés. Nous le ferons plus tard.

D3 **I – SURLIGNES** page 77

Nous avons voulu que les élèves puissent «lire» sur une échelle régulière le «surligné» d'un bipoint.

Cela peut les aider par la suite à contrôler leurs calculs.

Nous avons dit que «$\overline{AB}$ (par exemple) est positif, car si on place un pion en A on le déplace vers la droite pour l'amener en B». Cela est évidemment lié au sens que nous avons choisi pour la graduation.

II – DIFFERENCE DE DEUX NOMBRES DECIMAUX ——— page 78

2.2 On résoud dans $\mathbb{D}$ l'équation $b + x = a$ en x. Ce raisonnement est à rapprocher de ce qu'on a fait dans L4.

D4 **I – OU ON FAIT DES DIVISIONS** ——— page 82

Nous avons étudié dans D3 le problème de la soustraction dans $\mathbb{D}$ et montré que si a et b sont des décimaux il existe toujours un décimal x tel que $b + x = a$. Nous montrons ici qu'il existe des décimaux a et b pour lesquels il n'existe pas de décimal q tel que $a = b \times q$.

1.1	Amérique latine	6,88
	Afrique	4,21
	Europe	1,78
	U.R.S.S.	2,62
	Amérique du Nord	3,41
	Océanie	4
	Total	3,53

On peut discuter avec les élèves de la valeur pratique réelle des résultats demandés ici à 10^{-2} près.

1.2	impôts sur le revenu	18,66
	impôts sur les sociétés	9,77
	impôts sur la fortune	5,34
	taxes sur chiffres d'affaires	42,73
	autres impôts directs	7,72
	douane et produits pétroliers	7,36
	contributions indirectes	2,86
	recettes non fiscales	5,52
	Total	99,96

L'énoncé incite fortement à donner des résultats approchés par défaut. C'est pourquoi la somme des pourcentages n'est pas 100 mais 99,96.

Il s'agit ici du budget de l'état, c'est-à-dire des recettes prévues et non pas des recettes réelles qu'on ne connait qu'en fin d'exercice. Les élèves seront peut-être curieux de connaître le sens des différents termes employés.

Ligne 1 : il s'agit des impôts sur le revenu perçus à partir des déclarations de revenus des contribuables.

Ligne 3 : droits d'enregistrement dont impôts sur les successions, opérations de bourse.

Ligne 5 : en particulier taxes sur les salaires pour les établissements non assujettis à la T.V.A., notamment toutes les œuvres sociales ou de culture populaire.

Ligne 8 : exploitations industrielles et commerciales de l'état. Intérêts des prêts. P.M.U. Versements de la C.E.E., ...

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

Les numéros 1 et 2 sont des exercices sur les ensembles $\mathbb{D}_n$ (n désignant un naturel non nul).

Les numéros 3 à 12 concernent l'ordre dans $\mathbb{D}$.

Les numéros 13 à 33 sont des exercices de calcul de sommes, de différences et de produits dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{D}$.

Les numéros 34 et 35 ont pour but de faire placer des barreaux sur une échelle régulière graduée et de faire calculer des surlignés.

Dans le numéro 36, on demande aux élèves de résoudre des équations en x dans $\mathbb{D}$ du type $b + x = a$ (a et b désignant des décimaux) ou des équations se ramenant à ce type.

Les numéros 36 à 39 concernent la division dans $\mathbb{D}$ et les quotients approchés.

Les numéros 40 à 46 sont des exercices de calcul algébrique.

Le numéro 47 est un exercice à données concrètes qui fait intervenir deux suites de nombres proportionnels.

Dans les numéros 48 et 49, on demande aux élèves de faire une démonstration.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

12 L'ensemble des décimaux x tels que $x > -x$ est l'ensemble des décimaux positifs.
L'ensemble des décimaux x tels que $x < -x$ est l'ensemble des décimaux négatifs.
Cet exercice a pour but de renforcer chez les élèves l'idée que $-x$ n'est pas forcément négatif (x désignant un nombre décimal).

29

x	y	z	xy	x + y	y - z	- x - y	- xy
- 0,5	**2**	**- 4**	- 1	1,5	6	- 1,5	1
4	- 0,2	**0**	- 0,8	**3,8**	- 0,2	- 3,8	**0,8**
- 4	1,5	1,5	- 6	- 2,5	**0**	2,5	**6**

30

+	- 3	- 18	3	5	- 70
- 12	- 15	- 30	- 9	**- 7**	- 82
18	**15**	**0**	21	23	- 52
2	- 1	- 16	**5**	7	- 68
- 10	- 13	- 28	- 7	**- 5**	- 80
7	**4**	- 11	10	12	- 63
40	37	22	43	45	**- 30**

–	13	- 10	74	- 51	1
61	**48**	71	- 13	112	60
37	24	47	**- 37**	88	36
109	96	119	**35**	160	108
- 3	- 16	**7**	- 77	**48**	- 4
3	- 10	13	- 71	54	**2**

31

- 10	3	- 4	9	2
7	- 5	8	1	- 11
- 6	12	0	- 12	6
11	- 1	- 8	5	- 7
- 2	- 9	4	- 3	10

37

41 | 22
190
140 | 1,863
80
14

38

100 | 80
200
400 | 0,012 5
0

Pour le quotient approché à 10^{-5} près par défaut de 1 par 80, les élèves donneront vraisemblablement l'une des deux réponses suivantes : 0,012 5 ou 0,012 50. Ces deux réponses sont évidemment toutes deux acceptables, 0,012 5 et 0,012 50 étant deux écritures différentes du même nombre décimal.

39

51 | 23
50 | 2,217 391 304 347 826 086 956 5
40
170
90
210
30
70
100
80
110
180
190
60
140
200
160
220
130
150
120
5

Dans cette division, les 22 restes partiels possibles apparaissent.

47

distances en miles	1	21,875	125	175	4,7	0,625
distances en kilomètres	1,6	35	200	280	7,52	1

COMMENTAIRES DU CHAPITRE TM

Transformations matérielles

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

Ce chapitre est entièrement manipulatoire, ce qui n'empêche évidemment pas de raisonner. Nous y avons poursuivi trois objectifs.

1.1 Donner aux élèves un nouveau moyen, dynamique, d'appréhender la géométrie matérielle. Pour cela, nous avons proposé l'étude de deux transformations matérielles, le pliage et la translation.

Nous en proposons d'autres en exercices et nous parlerons de rotation et de symétrie centrale dans le chapitre SR.

Pour la similitude du plan suivi dans TM1 et TM2, nous avons voulu mettre en évidence les propriétés communes :

- un point se transforme en un point ;
- des points alignés se transforment en points alignés ;
- un figure et sa transformée sont superposables et les distances se conservent.

Dans TM3, nous avons voulu montrer la liaison entre pliage et translation. Dans une certaine mesure, cette étude est aussi une première préparation à la notion de composée de deux transformations du plan.

1.2 «Couvrir» le programme de la classe en ce qui concerne : symétrie orthogonale - médiatrice - construction de perpendiculaire - droite de symétrie d'une figure.

Nous avons décidé d'aborder ces notions uniquement au niveau matériel en 4ème. Nous avons donné plus haut (commentaires du chapitre DP) les raisons de ce choix : nous ne munirons le plan mathématique d'une orthogonalité et d'une distance qu'en 3ème lorsque nous pourrons disposer librement de IR.

1.3 Préparer la suite de l'élaboration de la théorie. A cet effet, nous avons fait faire dans TM2 les manipulations qui introduisent les axiomes utilisés dans TR1 et les premières propriétés qui en découlent.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

TM1 **I – PLIAGE** page 93

1.2 On peut remarquer que l'effort de quantification (on peut aussi transformer n'importe quel point de cette manière ; étant donnés deux points quelconques R et Q et leurs transformés R' et Q', les segments RQ et $R'Q'$ ont même longueur) est bien un véritable effort d'abstraction, même si cet effort ne se présente pas sous la forme des raisonnements qu'on a l'habitude de faire en mathématiques.

III – RETOUR SUR LES PLIAGES page 95

3.2 Affirmer ici que la transformée d'une droite est une droite serait par contre une quantification abusive. En effet, la manipulation proposée est insuffisante pour conduire à un consensus sur l'ensemble des propriétés :

– tout point de la droite AB a son transformé sur la droite $A'B'$,

– tout point de la droite $A'B'$ est le transformé d'un point de la droite AB,

– ce qui est vrai pour la droite AB est vrai pour toute droite.

3.3 Nous avons voulu donner une figure où la superposition demandée peut se faire sans retourner le calque (figure qui a une droite de symétrie) et une figure où le retournement du calque est indispensable.

Il serait peut-être intéressant de refaire la manipulation avec une figure qui, comme la lettre N, a un centre de symétrie sans avoir de droite de symétrie.

3.4 Exercices.

1. Un segment admet comme droites de symétrie la droite qui porte ce segment et la médiatrice du segment.

2. Une droite admet comme droites de symétrie elle-même et toutes les droites qui lui sont orthogonales.

TM2 **I – UNE NOUVELLE TRANSFORMATION** page 97

1.1 Ici on admet que la description de la figure proposée est générique, c'est-à-dire qu'elle définit la translation. Ce ne sera peut-être pas évident pour tous les élèves.

1.2 Une nouvelle fois, le problème de la quantification est posé : il est probable que les élèves répondront tous «oui» à la question : «Penses-tu qu'une translation matérielle soit une isométrie ? ». Il est intéressant de voir sur quoi se fonde cette certitude ... raisonnable.

1.3 3ème exercice.

C'est une première préparation à la notion de translation réciproque.

II – COMMENT ON TROUVE LE TRANSFORME D'UN POINT ——— page 98

2.4 Cette manipulation prépare déjà un peu mieux que celle proposée pour les pliages à l'idée de transformée d'une droite puisqu'on se donne un point sur la droite obtenue et qu'on cherche le point dont il est le transformé.

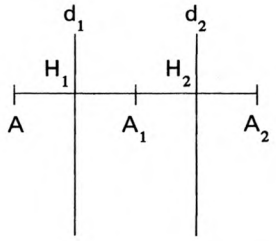
TM3 **I – DEUX PLIAGES AUTOUR DE DEUX DROITES PARALLELES** — page 100

1.1 Dernière question : on voit qu'on peut raisonner même sur des situations matérielles.

1.2 Ici se pose toujours le même problème de quantification.

A la fin du paragraphe, le fait qu'on ne trouve pas le même résultat est l'occasion d'imaginer une opération non commutative.

1.3 Etant donnée la position des points A, A_1 et A_2 par rapport aux droites d_1 et d_2, il est possible que certains élèves arrivent à expliquer pourquoi la longueur du segment AA_2 est le double de celle du segment H_1H_2.



On voit que les deux dernières questions peuvent donner lieu à un raisonnement dans un plan matériel.

II – DECOMPOSITION D'UNE TRANSLATION ——— page 101

Dernière question. Il ne sera peut-être pas évident pour tous les élèves qu'on peut choisir pour droite d_1 n'importe quelle droite de la direction orthogonale à celle de la droite CC_2.

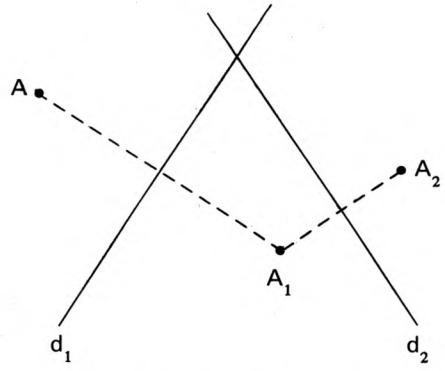
Il pourrait être intéressant, ici, d'étudier le problème suivant .

Soit deux points A et A_2 et d_1 une droite qui n'est pas orthogonale à la droite AA_2.

On appelle A_1 le transformé de A par le pliage autour de d_1 et d_2 la médiatrice du segment A_1A_2.

Le point A a alors pour transformé A_2 par la suite des deux pliages.

Est-ce que la translation qui transforme A en A_2 est la suite des deux pliages ?



Il est probable que certains élèves répondront oui. Il sera facile de leur faire découvrir pourquoi ils se trompent, par exemple en leur faisant remarquer que le point commun aux droites d_1 et d_2 est invariant par la suite des deux pliages.

Le problème numéro 1 du chapitre SR peut compléter cette étude.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

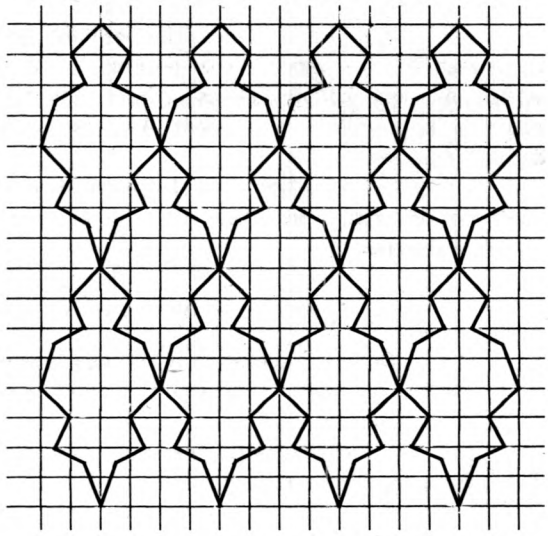
Tous les exercices de ce chapitre sont des exercices d'observation (et parfois de raisonnement) dans le plan matériel.

Les numéros 1 à 7 sont des exercices sur les pliages et les translations.

Dans l'exercice numéro 8, nous avons voulu donner un exemple de transformation pour laquelle des points alignés ne se transforment pas en des points alignés et dans l'exercice numéro 9 des exemples de transformation qui ne sont pes des isométries matérielles.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

1 Voici le dessin obtenu.



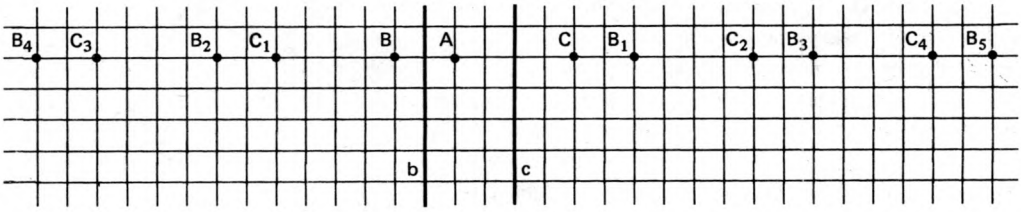
2 Les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

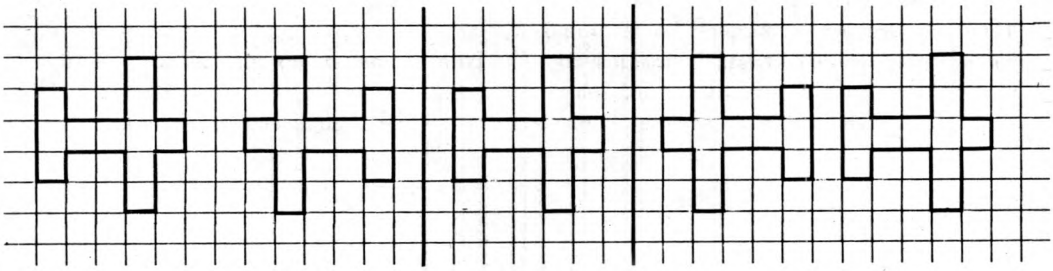
On peut aussi remarquer que l'orthocentre du triangle ABC appartient à la droite M_1M_2.

3 Les points M_0, M_1, ..., M_9 appartiennent à un même cercle.

Les segments M_0M_2, M_1M_3, ..., M_6M_8 et M_7M_9 ont la même longueur : en effet les pliages sont des isométries.

4 Voici les dessins obtenus.

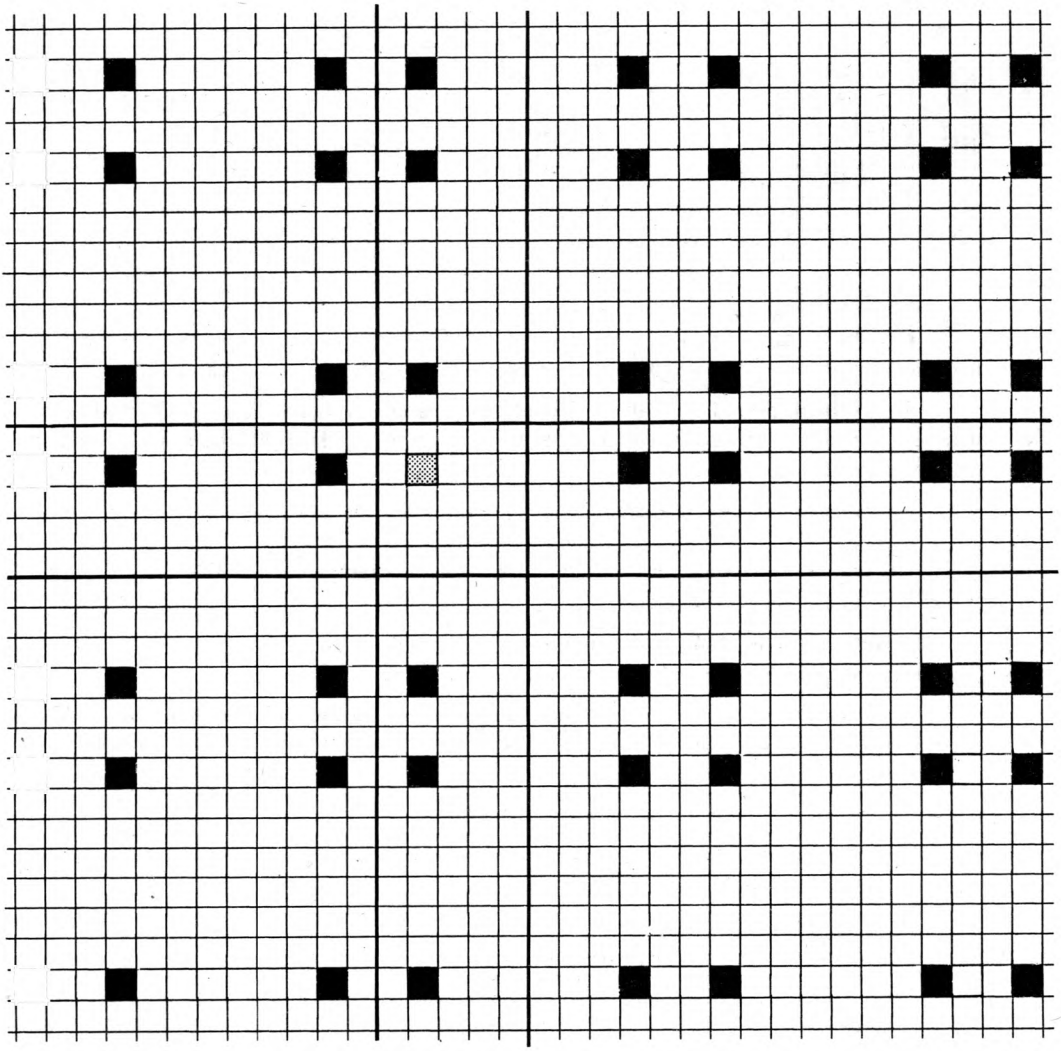




Voici une manipulation qui pourrait compléter cet exercice.

Faire un dessin simple mais n'admettant pas de droite de symétrie. Dessiner son transformé dans un pliage. Puis poser un miroir sur la droite de pliage perpendiculairement au plan du dessin. Les élèves constateront que l'image qu'ils voient dans le miroir a pris la place du transformé par le pliage.

5 Voici par exemple le dessin obtenu dans le premier cas.



6 Le point H' appartient au cercle. Les droites AH et BC sont orthogonales ; il en est de même pour les droites BH et AC ainsi que pour les droites CH et AB.

En d'autres termes, les droites AH, BH et CH sont les hauteurs du triangle ABC ; le point H est l'orthocentre de ce triangle.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE Q

Les rationnels

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Un choix.

Le libellé du programme laisse une grande liberté dans la présentation des rationnels et des réels. En particulier, on peut suivre l'une des deux voies suivantes :

– ou bien présenter d'abord IR et les opérations dans IR, puis $\mathbb{Q}$ comme sous-ensemble de IR : les rationnels sont alors les quotients dans IR d'un entier relatif par un entier relatif non nul.

– ou bien étudier d'abord $\mathbb{Q}$; l'ensemble IR est alors un sur-ensemble de $\mathbb{Q}$.

La première voie est celle qu'imposait les programmes de 1971. Voici pourquoi nous avons préféré la deuxième :

– un élève de 4ème appréhende difficilement le concept de nombre réel dont on ne peut lui donner qu'une présentation trop abstraite ;

– il accepte volontiers l'existence de nombres autres que les décimaux, mais le fait de ne pas pouvoir exhiber une écriture pour chacun d'eux le gêne fortement ;

– certes $\sqrt{2}$ est bien l'écriture d'un réel ; mais la racine carrée est une notion très abstraite ne serait-ce que par sa définition ;

– pratiquement, les seuls réels dont on peut donner une écriture qui «parle» et qui puisse être rattachée à des situations concrètes sont les rationnels ;

– cette présentation a en outre l'avantage de faciliter l'étude des fractions ; c'est d'ailleurs ce que semble préconiser le programme.

Nous espérons ainsi qu'à la fin du premier cycle, les élèves auront une meilleure connaissance des rationnels et qu'ils comprendront mieux le lien qui existe entre des écritures comme 0,75 , $\frac{3}{4}$, 3:4 et aussi *trois-quart,* contrairement à ce qui s'est bien souvent passé avec les programmes de 1971.

1.2 Nous avons voulu, dans ce chapitre, utiliser au mieux les connaissances antérieures de l'élève (décimaux et échelles graduées : chapitre D) et consolider celles qu'il

peut avoir des fractions (Q1) pour

— donner des écritures parlantes d'un rationnel (Q1 et Q2),

— établir un consensus le plus large possible sur la façon de multiplier ou d'ajouter des rationnels (Q2 et Q5),

— présenter l'ordre dans $\mathbb{Q}$ en relation étroite avec l'ordre naturel des points sur une droite (Q7).

Nous avons traité dans $\mathbb{Q}^*$, et non dans $\mathbb{Q}$, les problèmes liés à la multiplication (Q2, Q3, Q4) parce que

— l'introduction des rationnels à partir des fractions ne permet pas d'obtenir naturellement 0 : une fraction comme $\frac{0}{3}$ n'a aucune réalité matérielle ;

— le problème de la division qui n'a pas toujours de solution dans $\mathbb{D}^*$ en a toujours une dans $\mathbb{Q}^*$ (Q2 et Q4) ;

— les problèmes posés par 0, la multiplication et la division ne peuvent être abordés que d'une manière théorique : nous les avons traité à part (Q5 et Q6).

— Enfin, nous avons voulu familiariser les élèves avec la pratique toute particulière des opérations dans $\mathbb{Q}$ liées aux écritures des rationnels (Q4, Q5, Q6) : pour cela nous avons toujours commencé par faire manipuler les fractions à numérateur et à dénominateur positifs avant d'introduire les difficultés supplémentaires du calcul algébrique (signe —).

1.3 Dans Q1 et dans la première partie de Q2, nous poursuivons trois objectifs :

— familiariser les élèves avec les fractions en nous aidant au maximum de dessins ;

— changer petit à petit le statut de la fraction qui, d'abord opérateur sur des grandeurs (longueurs, aires, durées), devient finalement l'écriture d'un nombre : par de multiples analogies, nous montrons que les fractions se comportent comme des écritures de nombres ; cette idée est renforcée par l'introduction des écritures fractionnaires des décimaux. ;

— montrer que les différentes écritures d'un rationnel correspondent à un partage «plus ou moins fin» de segments de droite ou de surfaces simples.

1.4 Dans Q2, de nombreuses observations de dessins nous amènent à la multiplication dans $\mathbb{Q}_+^*$. Nous étudions ses propriétés de façon à

— en dégager la structure de groupe,

— étudier le problème de la division,

— faire le lien entre les écritures a:b et $\frac{a}{b}$ qui désignent toutes deux le même quotient.

1.5 Dans Q3, nous introduisons l'ensemble $\mathbb{Q}^*$, et différentes écritures d'un rationnel. Nous avons ici rencontré quelques difficultés : s'il est assez facile de donner un sens à des écritures somme $-\frac{4}{3}$ ou $\frac{-4}{3}$, il est plus difficile d'en donner un à $\frac{4}{-3}$.

Nous avons eu recours à la machine à multiplier (ou à diviser) pour établir un consensus avant de décider que $\frac{-4}{3}$, $\frac{4}{-3}$ et $-\frac{4}{3}$ sont des écritures d'un même nombre, et de généraliser. Nous ne prétendons pas, évidemment, avoir fait des démonstrations.

La multiplication est alors présentée comme un prolongement de la multiplication dans $\mathbb{Q}_+^*$ à $\mathbb{Q}^*$.

Nous faisons enfin observer que $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe.

1.6 Dans Q4, nous poursuivons trois objectifs :

- étudier les conséquences de la structure de groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$;
- approfondir la réflexion sur les écritures des rationnels (fractions irréductibles) ;
- familiariser les élèves avec la pratique des calculs sur les quotients.

1.7 Dans Q5, nous introduisons 0 et l'addition dans $\mathbb{Q}$. Nous essayons de faire comprendre aux élèves qu'il est possible de donner de plusieurs nombres rationnels des écritures de même dénominateurs et nous leurs proposons de nombreux exercices d'apprentissage.

Nous présentons l'addition à partir de telles écritures.

1.8 Le sous-chapitre Q6 est l'occasion d'une nouvelle réflexion sur l'écriture des rationnels (écritures fractionnaires de 0).

L'étude de la distributivité conduit à des calculs algébriques qui s'intègrent dans notre progression.

1.9 Dans Q7 enfin, nous lions étroitement l'ordre dans $\mathbb{Q}$ à l'ordre naturel sur la droite, et nous avons essayé de donner un aspect dynamique aux relations qui existent entre l'ordre et les opérations.

Nous n'avons ici donné aucun développement théorique.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

Q1 **I – DES DESSINS ET DES FRACTIONS** ——— page 109

1.1 Une longueur est une classe de segments : le signe + dans l'écriture $\ell + \ell$ ne désigne donc pas l'addition des nombres.

De même l'écriture 2ℓ, dans laquelle 2 est un opérateur, ne désigne pas le produit de deux nombres.

III – LES FRACTIONS SONT DES ECRITURES DE NOMBRES ——— page 112

3.8 Il est juste de dire que dans «alpaga» une lettre sur deux est un a : la place des lettres ne joue aucun rôle ici.

IV – ECRITURE FRACTIONNAIRE DES NOMBRES DECIMAUX ——— page 114

4.2 Puisqu'on peut écrire que $0{,}75 = \frac{75}{100}$, il est naturel d'utiliser des écritures comme $-\frac{75}{100}$. Il sera commode, un peu plus tard, d'appeler fraction une écriture d'un quotient de deux entiers relatifs. Avec cette définition, l'écriture $-\frac{75}{100}$ n'est pas une fraction.

Nous n'avons pas donné de notation à l'ensemble des nombres que nous avons introduits. Il s'agit de $\mathbb{Q}_+^*$, écriture qu'il n'est pas raisonnable d'employer avant d'avoir noté $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels.

Q2 **I – DES SITUATIONS COMPARABLES** ——— page 116

1.3 Dans 1.3 nous définissons la multiplication des fractions, c'est-à-dire
1.4 des écritures. Nous ne pouvons affirmer que nous avons multiplié des rationnels qu'après avoir précisé que si $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ d'une part, $\frac{c}{d}$ et $\frac{c'}{d'}$ d'autre part sont deux écritures d'un même rationnel, alors $\frac{a \times c}{b \times d}$ et $\frac{a' \times c'}{b' \times d'}$ sont aussi deux écritures d'un même rationnel.

Nous abordons ce problème difficile dans la remarque du paragraphe 1.4 et nous l'approfondirons dans Q3.

1.5 Nous essayons d'instaurer ici un consensus autour du fait que la multiplication dans $\mathbb{Q}_+^*$ prolonge celle dans $\mathbb{D}_+^*$, c'est-à-dire que le produit de deux décimaux pour la multiplication dans $\mathbb{Q}_+^*$ est égal à leur produit pour la multiplication dans $\mathbb{D}_+^*$.

III – DIVISION ——— page 120

Nous poursuivons dans ce paragraphe trois objectifs :

– définir le quotient de deux rationnels positifs par analogie avec le quotient de deux entiers positifs ;

– montrer que diviser par un rationnel revient à multiplier par son inverse ;

– introduire la convention d'écriture des quotients.

A partir de maintenant, si a et b sont deux naturels non nuls, le rationnel $\frac{a}{b}$ est la quotient dans $\mathbb{Q}$ de a par b. (Il est facile de voir à ce niveau du cours que la phrase précédente est encore vraie si l'on remplace «naturels» par «décimaux positifs» : voir l'exercice 3.4).

3.4 On ne peut pas pour le moment écrire que $7{,}2 \times \frac{7}{3} = \frac{7{,}2 \times 7}{3}$; en effet ce calcul repose sur une propriété non encore démontrée ou admise, puisque $7{,}2 \notin \mathbb{N}$.

Une démarche possible $\dfrac{7{,}2}{\left(\frac{3}{7}\right)} = 7{,}2 \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{72}{10} \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{72 \times 7}{10 \times 3} = \dfrac{504}{30}$.

On refusera de même d'écrire que : $\dfrac{\left(\frac{1}{0{,}2}\right)}{\left(\frac{2{,}2}{3}\right)} = \dfrac{1}{0{,}2} \times \dfrac{3}{2{,}2}$: en effet, nous ne savons pas encore que diviser par $\dfrac{2{,}2}{3}$ revient à multiplier par son inverse ; nous ignorons aussi que cet inverse est $\dfrac{3}{2{,}2}$, puisque $2{,}2 \notin \mathbb{N}$.

Ce qu'il est, par exemple, possible d'écrire pour le moment :

$\dfrac{1}{0{,}2} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{10}\right)} = 1 \times \dfrac{10}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ et $\dfrac{2{,}2}{3} = \dfrac{\left(\frac{22}{10}\right)}{3} = \dfrac{22}{10} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{22}{30}$.

On peut alors en déduire que

$$\frac{\left(\frac{1}{0{,}2}\right)}{\left(\frac{2{,}2}{3}\right)} = \frac{5}{\left(\frac{22}{30}\right)} = 5 \times \frac{30}{22} = \frac{5 \times 30}{22} = \frac{150}{22}.$$

De même

$\dfrac{7}{4{,}5} = \dfrac{7}{\left(\frac{45}{10}\right)} = 7 \times \dfrac{10}{45} = \dfrac{7 \times 10}{45} = \dfrac{7 \times 2}{9} = \dfrac{14}{9}$; $\dfrac{8{,}5}{7{,}1} = \dfrac{\left(\frac{85}{10}\right)}{\left(\frac{71}{10}\right)} = \dfrac{85}{10} \times \dfrac{10}{71} = \dfrac{85 \times 10}{10 \times 71} = \dfrac{85}{71}$;

$\dfrac{\left(\frac{3}{9{,}1}\right)}{7} = \dfrac{\left(\frac{3}{\frac{91}{10}}\right)}{7} = \dfrac{3 \times \frac{10}{91}}{7} = \dfrac{3 \times 10}{91} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{3 \times 10}{91 \times 7} = \dfrac{30}{637}$.

Q3 **I – DE NOUVELLES FRACTIONS** page 122

L'introduction des écritures $-\dfrac{a}{b}$ et surtout $\dfrac{-a}{b}$, $\dfrac{a}{-b}$ et $\dfrac{-a}{-b}$ (où a et b sont des entiers naturels non nuls) paraîtra peut-être un peu longue. C'est que le problème n'est pas mince. La fraction $\dfrac{a}{b}$ apparue d'abord comme un opérateur sur une grandeur est devenue l'écriture d'un nombre : le quotient du naturel a par le naturel b ; on généralisait ainsi la situation bien connue où a est divisible par b.

Mais la notion de quotient dans $\mathbb{Z}$ n'a pas été étudiée par les élèves en classe de 5ème et par exemple une écriture comme $-6 : 3$ n'a pas de sens pour eux.

Nous avons donc procédé lentement en étudiant successivement :

– le quotient d'un entier négatif par un entier positif
  - dans le cas où on reste dans $\mathbb{Z}$ $(-6 : 3)$,
  - dans le cas où on sort de $\mathbb{Z}$ $(-4 : 3)$;

— le quotient d'un entier relatif par un entier négatif
- dans le cas où on reste dans $\mathbb{Z}$ ($-6 : (-3)$ et $6 : (-3)$),
- dans le cas où on sort de $\mathbb{Z}$ ($-4 : (-3)$ et $4 : (-3)$).

Cette étude par analogie conduit à «symétriser» l'ensemble des rationnels positifs connu jusqu'alors. Nous pensons que la machine à multiplier est un bon moyen pour VOIR et par conséquent pour COMPRENDRE les différents aspects de ce problème difficile, mais capital si on veut comprendre ce qu'est l'ensemble des rationnels.

1.1 Nous pensons que l'écriture $-\frac{a}{b}$ et l'idée des rationnels négatifs seront très facilement acceptées.

La machine à multiplier a été introduite dans le chapitre D : il sera nécessaire d'en expliquer le fonctionnement aux élèves qui ne l'auraient pas utilisée à ce moment-là.

Nous cherchons à faire accepter ici que $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$ et $-\frac{a}{b}$ sont des écritures d'un même nombre ; de même pour $\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b}$.

II — LE GROUPE $(\mathbb{Q}^*, \times)$ ——— page 126

2.2 Il apparaît ici une double quantification dont il ne faut pas mésestimer la difficulté.

2.3 Les démonstrations sont analogues à celles faites pour $\mathbb{Q}_+^*$.
$(\mathbb{D}^*, \times)$ n'est pas un groupe parce que 3, par exemple, ne possède pas d'inverse dans $\mathbb{D}^*$.

Q4 **I — CONSEQUENCES DES PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION** —— page 128

On retrouve ici les conséquences de la structure de groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$: des rapprochements avec $(\mathbb{D}, +)$ et le groupe étudié dans L sont souhaitables.

Nous proposons dans l'exercice numéro 67 une démonstration du fait que si si a et b sont dans $\mathbb{Q}^*$ alors $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

II — PLUSIEURS ECRITURES D'UN MEME RATIONNEL ——— page 131

2.2 Les élèves trouveront peut-être ici que nous nous répétons ; il convient cependant de remarquer que maintenant a, b et k sont des rationnels et que cette propriété est donc un prolongement de ce qu'il connaissait.

2.3 Nous sommes restés un peu flous sur cette question des écritures fractionnaires irréductibles pour éviter de faire de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$; au fond, ce que nous essayons de faire comprendre aux élèves, c'est qu'on peut toujours trouver une écriture fractionnaire irréductible d'un rationnel en donnant d'abord une écriture fractionnaire de ce rationnel puis en s'intéressant aux deux naturels qui figurent dans cette écriture indépendamment de toute question de signe.

2.4 Exercice : $\frac{105}{72}$; $\frac{140}{96}$; $\frac{175}{120}$. Il est probable que les élèves qui n'auront pas pensé à utiliser l'écriture irréductible $\frac{35}{24}$ ne sauront pas trouver les trois fractions demandées.

III – OU ON MULTIPLIE DES QUOTIENTS page 133

3.1 Nous avons voulu traiter ces problèmes ici pour que l'élève n'utilise pas sans s'en rendre compte une propriété ni démontrée, ni admise.

La démonstration de cette propriété est simple :

$$\frac{x}{y} \times \frac{z}{t} = x \times \frac{1}{y} \times z \times \frac{1}{t} = xz \times \frac{1}{y} \times \frac{1}{t} = xz \times \frac{1}{yt} = \frac{xz}{yt}$$

(Nous avons omis volontairement des parenthèses).

IV – EXERCICES page 135

4.4 2ème calcul.

On ne connaît pas encore «la règle des signes» pour les produits dans $\mathbb{Q}^*$; on ne peut donc justifier le résultat que par «la règle des signes» des produits dans $\mathbb{Z}$.

Le résultat peut être écrit - 1.

Q5

I – INTRODUCTION page 137

Nous avons surtout recherché, dans ce paragraphe, un effet psychologique : tout ce qui a été fait jusqu'ici dans ce chapitre Q ne prend pas en charge le rationnel 0.

II – ECRITURES FRACTIONNAIRES DE ZERO page 137

Nous allons par la suite additionner des rationnels dont les écritures fractionnaires ont même dénominateur. Il nous faut donc des écritures fractionnaires de 0 ; c'est l'objet de ce paragraphe.

III – ECRITURES FRACTIONNAIRES AYANT MEME DENOMINATEUR page 138

3.1 Nous avons intentionnellement proposé les fractions $\frac{9}{222}$ et $\frac{13}{333}$ dont les dénominateurs sont grands. La plupart des élèves donneront certainement comme écritures $\frac{9 \times 333}{222 \times 333}$ et $\frac{13 \times 222}{333 \times 222}$, ou encore $\frac{2\,997}{73\,926}$ et $\frac{2\,886}{73\,926}$: nous leur ferons découvrir dans le paragraphe suivant qu'ils pouvaient donner des écritures beaucoup plus simples. Nous pensons cependant qu'il est sécurisant pour un élève d'avoir une méthode qui convienne dans toutes les situations.

Nous ne parlons pratiquement pas de «réduction de fractions au même dénominateur». En effet ce langage n'est pas en accord avec les réflexions sur les écritures que nous avons proposées dans ce livre : on ne procède pas en effet à des

«transformations» sur les écritures, mais au remplacement des écritures de rationnels par d'autres écritures.

3.2 Nous faisons découvrir que le travail est simplifié par la recherche de
3.3 multiples communs des dénominateurs : il est naturel de prendre
3.4 le plus petit dans le cas où son obtention est immédiate, ce que l'élève découvrira par la pratique. Nous pensons cependant qu'il n'y a pas lieu d'imposer ce procédé.

Dans l'un des exercices du paragraphe 3.2 et le tout dernier du paragraphe 3.4, il convient naturellement de remplacer d'abord $\frac{25}{-36}$ par $\frac{-25}{36}$ et $\frac{5}{-18}$ par $\frac{-5}{18}$.

IV – ADDITION DANS $\mathbb{Q}$ page 140

4.1 Nous retrouvons ici la double quantification déjà rencontrée dans [Q3 - paragraphe 2.2]. La somme des rationnels $\frac{2}{7}$ et $\frac{4}{7}$ est d'abord liée aux écritures fractionnaires ; nous admettons ensuite qu'elle est indépendantes des écritures de $\frac{2}{7}$ et $\frac{4}{7}$; puis nous généralisons, toujours sans démonstration, au cas de deux rationnels quelconques.

C'est volontairement que nous n'avons pas donné la formule $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$: elle n'apporte rien à la compréhension et risque de cacher l'essentiel qui est bien le changement d'écriture des rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

4.5 Un rapprochement entre ces paragraphes et ceux où l'on a déjà traité
4.6 les propriétés du groupe pourra être fait si on le juge profitable.

Q6

I – ZERO ET MULTIPLICATION page 144

1.1 Nous prolongeons ici la multiplication de $\mathbb{Q}^*$ à $\mathbb{Q}$.

1.2 Il suffit naturellement de s'intéresser au cas où l'un des rationnels est nul.

1.3 Nous laissons toute l'initiative à l'élève ; bien sûr nous aimerions qu'il exhibe un contre-exemple tel que le suivant :

$0 \times 2 = 0 \times 3$, et pourtant $2 \neq 3$.

II – RETOUR SUR LES QUOTIENTS page 145

C'est le point final des nos réflexions sur les écritures des rationnels.

III – DISTRIBUTIVITE — page 146

Nous poursuivons ici l'apprentissage du calcul algébrique et la progression dans la pratique des développements et des factorisations. Nous n'avons pas encore introduit des produits comme $\left(2a + \frac{3}{4}\right)\left(-3b + \frac{1}{3}\right)$ où les coefficients de a et de b ne sont ni 1 ni - 1. Nous proposerons de tels développements dans le chapitre R.

IV – ADDITION DE QUOTIENTS — page 147

Nous généralisons la formule $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ au cas où a et b sont des des rationnels et où m est un rationnel non nul.

Q7

I – UNE RELATION D'ORDRE DANS L'ENSEMBLE DES RATIONNELS — page 148

1.1 2ème exercice. Pour ranger deux rationnels, il est bien souvent suffisant, comme nous le faisons ici, de comparer leur partie entière.

1.2 Sur toutes les droites, le point d'abscisse 0 est à gauche du point d'abscisse 1 ; ce n'est évidemment pas une nécessité, mais nous n'avons pas voulu, ici, compliquer les choses inutilement.

Nous nous sommes refusés de donner une définition théorique de l'ordre comme par exemple :

«Quels que soient les rationnels a et b,
$a \leqslant b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{Q}_+$ ».

Une telle définition pose en effet des questions

— pédagogiques : peut-elle coïncider, dans l'esprit des élèves, à l'idée intuitive qu'ils se font de l'ordre ?

— théoriques : elle suppose que les rationnels positifs et les rationnels négatifs sont définis à priori, c'est-à-dire indépendamment de l'ordre.

III – ORDRE ET ADDITION — page 151

3.2 Nous faisons découvrir ici «qu'ajouter un même nombre» revient à «translater» sur la droite : cette translation est matérialisée par le déplacement de la réglette ; le fait de faire opérer sur quatre nombres rend plus visuel cette translation.

Les trois manipulations tendent à établir un consensus sur une première quantification : on voit bien que ce qui est vrai pour 1, $\frac{2}{3}$ et $-\frac{4}{3}$ est vrai pour n'importe quel rationnel (c).

De même un consensus s'établit pour décider que ce qui est vrai pour les rationnels $\frac{5}{6}$, $\frac{-2}{3}$, 2 et $-\frac{3}{2}$ est vrai pour n'importe quels autres rationnels : il suffit en fait de l'affirmer pour deux rationnels quelconques (a et b).

4.1 Bien sûr, si les deux rationnels sont de signes contraires, ils sont rangés comme leurs inverses.

4.2 Il nous aurait été possible de démontrer ces propriétés à partir des affirmations de la fin du paragraphe II sur les écritures des rationnels positifs et des rationnels négatifs : il aurait fallu alors étudier tous les cas possibles. Nous avons préféré éviter ces développements.

4.4 Nous faisons découvrir ici que «multiplier par un même nombre»
4.5 revient à «faire une homothétie sur la droite».
4.6 Les exemples proposés montrent les rôles respectifs du signe (on
4.7 échange les demi-droites d_+ et d_- dans le cas d'un nombre négatif) et de la valeur absolue (on «dilate» ou on «contracte» suivant que cette valeur absolue est supérieure ou inférieure à 1) du rapport de l'homothétie.

Nous espérons que les dessins, en liaison avec la machine à multiplier, aideront les élèves à bien comprendre comment les nombres s'organisent dans une multiplication.

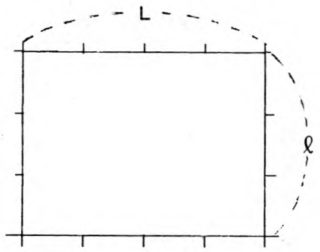
III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

Les numéros 1 à 6 sont des exercices à données concrètes sur les fractions.
Les numéros 7 à 11 concernent les écritures des rationnels positifs.
Les numéros 12 à 22 sont des exercices sur les produits et quotients de rationnels positifs.
Le numéro 23 est lié à l'introduction des rationnels négatifs et aux abscisses des points sur une droite matérielle.
Les numéros 24 et 25 concernent les écritures des rationnels positifs ou négatifs.
Les numéros 26 à 37 sont liés au groupe $(\mathbb{Q}^*, \times)$ et aux écritures irréductibles.
Les numéros 38 et 39 amènent les élèves à donner des écritures fractionnaires de même dénominateur de plusieurs rationnels.
Les numéros 40 à 48 sont liés au groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
Les numéros 49 à 53 font intervenir les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Q}$.
Les numéros 55 à 62 concernent l'ordre dans $\mathbb{Q}$.
Les numéros 63 et 64 sont des exercices à données concrètes.
Les numéros 65 à 68 amènent les élèves à faire des démonstrations.
Le numéro 69 est un exercice corrigé.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

3



On voit que $\ell = \frac{3}{14}\,p$ et que $L = \frac{4}{14}\,p$.

5 Le prix d'achat égale onze seizièmes du prix de vente.
Le bénéfice égale cinq onzièmes du prix d'achat.

6 $s = \frac{4}{9}\,s'$.

16 Cet exercice peut être mis en liaison avec Q2 : il convient alors de donner une écriture fractionnaire de chaque décimal. Par exemple, $2{,}5 = \frac{25}{10}$; l'inverse de 2,5 est donc $\frac{10}{25}$.

18 Le but de cet exercice est de faire voir que diviser par 3 revient à «diviser le numérateur par 3» ou à «multiplier le dénominateur par 3».

19 Se reporter au commentaire Q2 - III, si cet exercice est donné en liaison avec Q2.

21 et **22** L'intérêt de ces exercices est de faire découvrir les diverses possibilités de multiplication suivant la place occupée par les écritures de nombres.

31 Quelques réponses : $-\frac{11}{9} = \frac{-11}{9}$; $-\frac{165}{255} = \frac{-33}{51}$; $\frac{360}{504} = \frac{5}{7}$; $\frac{-780}{3510} = \frac{-2}{9}$.

32 Les réponses, dans l'ordre, sont : $\frac{41}{13}$; $\frac{-3}{112}$; $\frac{-7}{5}$; $\frac{56}{3}$; $\frac{47}{11}$.

34 Les réponses, dans l'ordre, sont : -2 ; -6 ; -1 ; $\frac{5}{24}$; -1.

35 Cet exercice doit être fait après [Q4 - paragraphe II - 1.2] puisque a, b et c sont des rationnels.

37 Les réponses, dans l'ordre, sont : $\frac{48}{25}$; $\frac{11}{175}$; $\frac{-1}{9}$; $\frac{3}{2}$.

38 Quelques réponses : $\frac{12}{-32} = \frac{-21}{56}$ et $\frac{36}{63} = \frac{32}{56}$; $\frac{-7}{42} = \frac{-6}{36}$ et ... $\frac{11}{36} = \frac{11}{36}$.

Bien sûr, beaucoup d'autres réponses justes peuvent être données.

39 $\frac{2}{3} = \frac{70}{105}$; $\frac{-4}{7} = \frac{-60}{105}$ et $\frac{6}{-5} = \frac{-126}{105}$; $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$; $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ et $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$;

$\frac{-3}{5} = \frac{-72}{120}$; $\frac{5}{-8} = \frac{-75}{120}$ et $\frac{4}{15} = \frac{32}{120}$.

43 Les réponses, dans l'ordre, sont : $\frac{29}{12}$; $\frac{-7}{72}$; $\frac{227}{180}$; $\frac{31}{24}$; $\frac{-10}{99}$; $\frac{1}{6}$; 0.

44 Les réponses, dans l'ordre, sont : $\frac{191}{140}$; 1 ; $\frac{21}{30}$, soit encore $\frac{7}{10}$; $\frac{61}{15}$; $\frac{137}{360}$.

46 Les réponses, dans l'ordre, sont : $\frac{1}{12}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{5}{27}$; $\frac{-34}{105}$; $\frac{-63}{84}$, soit encore $\frac{-3}{4}$; $\frac{11}{24}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{113}{60}$; 1.

47 Il est préférable de donner une écriture sans parenthèses. Le premier nombre est $-2-\frac{4}{5}$ soit encore $\frac{-14}{5}$; le deuxième nombre est $-1-\frac{3}{5}$, soit encore $\frac{-8}{5}$.

50 Les réponses, dans l'ordre, sont : $\frac{25}{12}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{41}{10}$ soit encore 4,1 ; $\frac{-1}{8}$; $\frac{-11}{4}$; $\frac{-7}{6}$.

54 Les réponses, dans l'ordre, sont : $\frac{88}{279}$; $\frac{-10}{3}$; $\frac{-15}{7}$; 1 ; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{11}{6}$.

65 Si $\frac{a}{b}$ est une écriture du rationnel t, alors $a = bt$; de même, $c = dt$. Donc $a + c = bt + dt$ et $a + c = (b + d)t$ et finalement $\frac{a+c}{b+d} = t$.

Les deux autres démonstrations sont analogues.

La condition, pour $\frac{a-c}{b-d}$ est que $b - d \neq 0$ et, pour $\frac{2a+3c}{2b+3d}$ que $2b + 3d \neq 0$.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE TR

Les translations

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Nous poursuivons donc la construction de la théorie par l'étude des translations pour les raisons suivantes :

– c'est une façon dynamique de percevoir la géométrie ;

– on peut le faire tout de suite : en effet, pour étudier les translations il n'est pas nécessaire que le plan soit lié à IR, c'est-à-dire que les droites soient graduées de façon à ce que la propriété de Thalès soit vérifiée ;

– si le morceau de théorie construit dans DP était de toute évidence assez pauvre, il n'en est plus de même ici ; en particulier, dès la fin du chapitre TR, il va être possible de résoudre des problèmes de géométrie relativement variés et en même temps suffisamment accessibles pour que les élèves puissent commencer à y apprendre à faire fonctionner les propriétés qu'ils connaissent.

1.2 La notion de permutation de plan n'est sans doute pas très simple, mais nous espérons que ce qui a été proposé dans le chapitre TM aidera à son acquisition.

En tous cas, il nous a paru préférable de faire les choses dans l'ordre qui va des translations aux vecteurs. Sinon, il aurait fallu commencer par l'étude de la partition de l'ensemble P X P par la relation d'équipollence des bipoints, ce qui est franchement compliqué.

1.3 Bien qu'on en ait déjà parlé à propos des projections, la notion de composée d'applications géométriques est très nouvelle pour les élèves. Aussi, pour préparer son introduction, nous avons proposé les manipulations de TR2 et TR3 où nous n'avons pas hésité à répéter deux fois la même chose : une fois avec des «gros points», les hexagones, et une fois avec des «points ordinaires».

Nous avons essayé de faire comprendre, aussi bien dans ces manipulations que dans le début de TR4, que la loi de composition des applications est une opération interne pour l'ensemble T. Cela n'est pas sans problème. Par exemple,

– il est nécessaire d'introduire l'application identique du plan, qui est une notion très abstraite ; de plus, il faut assimiler cette application à une translation, alors qu'on a dit qu'une translation ne laisse aucun point invariant ; nous avons essayé de faire comprendre cela en composant une translation et sa réciproque, ce qui nous a de plus permis d'établir que la réciproque d'une translation est une translation.

— il est certainement difficile de comprendre ce que signifie «la composition des applications est associative» ; nous avons essayé de le faire comprendre par des schémas plutôt que par un discours.

1.4 Les translations sont des bijections du plan sur lui-même qui transforment une droite en une droite parallèle et qui ne laissent aucun point invariant. Les axiomes proposés dans le chapitre DP ne permettent pas de démontrer qu'il existe de telles permutations du plan.

Il était donc nécessaire d'introduire un nouvel axiome au moins. Si on avait pris comme axiome : «étant donnés deux points A et B, il existe au moins une translation t telle que $B = t(A)$», on aurait pu démontrer que cette translation est unique, et que la composée de deux translations est une translation.

Nous n'avons cependant pas jugé utile d'encombrer les élèves avec des démonstrations pénibles dont l'intérêt ne serait pas évident pour eux. C'est pourquoi, ici encore, nous n'avons pas choisi une axiomatique minimale.

1.5 Dans le même ordre d'idée, nous n'avons démontré que partiellement la commutativité de la composition des translations. Plus précisément, nous avons montré que si r et s sont des translations de directions différentes, $r \circ s = s \circ r$; et nous avons admis la propriété dans le cas où r et s sont de même direction.

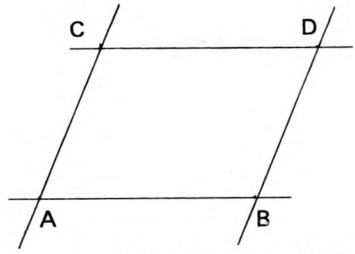
Voici une démonstration de cette propriété.

Soit s et r deux translations de directions différentes (et donc distinctes de Id_P).

Soit A un point ; définissons B, C et D :

$$B = s(A) \quad , \quad C = t(A) \quad \text{et} \quad D = s \circ t(A).$$

Nous savons, d'après la démonstration donnée dans le chapitre TR, que $t \circ s = s \circ t$, et donc que $t \circ s(A) = D$.



Le point D n'est pas sur la droite AB : la droite CD est parallèle à la droite AB puisque $D = s \circ t(A) = s(C)$ et $B = s(A)$, et C n'est pas sur la droite AB puisque t et s n'ont pas la même direction. On en déduit en particulier que $D \neq A$ et que $s \circ t \neq Id_P$; on peut donc parler de la droite AD, et ce qui précède montre que les droites AB et AD n'ont pas la même direction ; puisque $s(A) = B$ et $s \circ t(A) = D$, les translations s et $s \circ t$ ont des directions distinctes ; il en est de même pour t et $s \circ t$.

Soit maintenant r et s des translations distinctes de Id_P et ayant la même direction ; soit t une translation distincte de Id_P et ayant une autre direction que r et s (on se convaincra facilement qu'il en existe). Puisque, d'après ce qui précède, $s \circ t$ et r n'ont pas la même direction,

$$r \circ (s \circ t) = (s \circ t) \circ r \quad ;$$

puisque t et r n'ont pas la même direction,

$$t \circ r = r \circ t \ ;$$

on peut alors écrire que

$$(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t) = (s \circ t) \circ r = s \circ (t \circ r) = s \circ (r \circ t) = (s \circ r) \circ t.$$

Donc $$(r \circ s) \circ t = (s \circ r) \circ t,$$

et puisque $(\mathbf{T}, \circ)$ est un groupe,

$$r \circ s = s \circ r.$$

On comprend pourquoi nous n'avons pas proposé une telle démonstration aux élèves.

1.6 En définissant un vecteur comme ensemble de bipoints qui définissent une même translation, on évitait d'avoir recours au parallélogramme considéré comme ensemble de quatre points ayant un centre de symétrie.

D'une part, il était impossible de faire appel à cette notion puisque le plan n'est toujours pas lié à $\mathbb{R}$.

D'autre part, nous pensons que ce que nous proposons est plus simple. En particulier l'équipollence est de toute évidence une relation d'équivalence lorsqu'on l'introduit de cette façon.

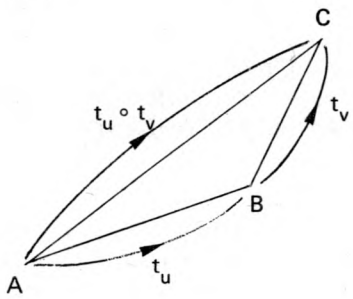
Néanmoins, il s'agit de faire une partition de l'ensemble des bipoints et cela reste difficile à percevoir. C'est pourquoi

- nous avons commencé par l'examen d'un ensemble de points, où l'on peut produire tous les vecteurs et tous les bipoints de chaque vecteur,
- nous avons demandé beaucoup de dessin dans TR5 et TR6,
- nous avons insisté sur la bijection entre l'ensemble **T** des translations et l'ensemble **V** des vecteurs.

1.7 Nous avons délibérément insisté sur la structure de groupe de $(\mathbf{T}, \circ)$ et de $(\mathbf{V}, +)$.

D'abord, pour les raisons données dans l'introduction : rapprocher des situations apparemment différentes. C'est dans cet esprit, par exemple, que nous avons traité le problème de la différence de deux vecteurs.

Ensuite, nous avons pu construire le groupe $(\mathbf{V}, +)$ par transport de la structure du groupe $(\mathbf{T}, \circ)$. Le vecteur $u + v$ est alors le vecteur associé à la translation $t_u \circ t_v$. Cette façon de procéder aidera peut-être les élèves à comprendre ce qu'est la somme de deux vecteurs, et l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



1.8 Un vecteur étant une classe d'équivalence, nous avons utilisé la notation $\overrightarrow{AB}$ pour désigner le vecteur dont (A, B) est un représentant. Bien que nous ne l'ayons pas signalé aux élèves, nous avons utilisé le signe $\longrightarrow$ pour désigner l'application qui à tout bipoint fait correspondre le vecteur associé. Cette notation est donc une notation fonctionnelle, comme la notation |...| qui désigne l'application valeur absolue. De même qu'il serait fâcheux d'écrire «soit |a|» pour introduire un élément de $\mathbb{R}_+$, il est fâcheux d'écrire «soit $\vec{u}$» pour introduire un élément de **V**. L'expérience nous a montré que la notation que nous utilisons ne perturbe absolument pas les élèves.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

TR1 **I – DEFINITION DES TRANSLATIONS MATHEMATIQUES** ——— page 169

1.5 La notation $t_{(A, B)}$ est évidemment un peu lourde mais elle dit clairement à quelle translation on s'intéresse. Elle sera utile pour établir la relation de Chasles.

II – EXERCICES ——— page 171

2.1 Outre l'application de ce qu'on vient d'apprendre, cet exercice permet aussi d'étudier la question assez classique de l'alignement de trois points. La démarche, ici aussi, est assez classique : démontrer que trois points sont alignés revient à démontrer que deux droites sont confondues – les droites CD et CE sont confondues parce qu'elles ont un point commun et qu'elles sont parallèles.

2.2 La question : «Pourquoi peux-tu écrire que $t_{(A, B)} = t_{(C, D)}$» est l'occasion de réfléchir sur l'intérêt de la propriété 4 : deux points déterminent une translation unique. C'est le cas des points C et D. Cette translation est évidemment $t_{(C, D)}$ et nous venons d'établir que c'était $t_{(A, B)}$.

Il serait intéressant que les élèves puissent comprendre que cette propriété n'est pas vérifiée par toute application. Malheureusement, pour le moment, nous ne disposons pas d'exemple dont on soit assuré qu'il soit très convaincant. On peut essayer d'étudier la question pour une projection. Soit deux droites sécantes d_1 et d_2 : est-ce que la donnée d'un point de d_1 et d'un point de d_2 suffit pour définir une projection de d_1 sur d_2. Ce n'est évidemment pas très enthousiasmant.

On pourra, un peu plus tard, essayer de traiter cette question pour une rotation matérielle (chapitre SR).

On peut aussi essayer de se poser ce problème pour une application algébrique. Par exemple : soit f une application affine : $x \longmapsto ax + b$; on sait que $f(5) = 13$. Cela suffit-il pour connaître f ?

2.3 Cet exercice simple ne devrait pas arrêter les élèves mais on ne peut évidemment pas s'attendre à ce qu'ils rédigent clairement un «raisonnement par l'absurde».

TR2 page 173

Une nouvelle fois se pose la question de la quantification : ce qu'on observe pour quelques dalles est-il vrai pour TOUTES les dalles ? Tout le monde dira oui, évidemment. Ce n'est pas une raison pour évacuer la question.

TR3 page 176

Ce qu'on fait ici est vraiment la préparation directe à TR4 : le groupe des translations.

TR4 **I – RECIPROQUE D'UNE TRANSLATION** page 179

Une nouvelle fois, nous insistons sur ce qu'est l'égalité de deux applications. Les applications $s \circ r$ et Id_P sont égales parce que tout point du plan à même image par $s \circ r$ et Id_P.

II – LE GROUPE DES TRANSLATIONS page 180

2.4 Nous avons profité de l'occasion pour dire une fois pour toutes que la composition des applications est associative (dans toutes les situations où cette question a un sens).

Nous ne savons pas très bien quelle signification peut avoir une telle question pour un élève de cet âge ; aussi avons-nous préféré nous limiter aux manipulations sur les translations matérielles, et au dessin proposé ici.

2.5 Voici une nouvelle occasion de montrer l'utilité de la propriété 4. Les applications $s \circ r$ et $r \circ s$ sont des translations et $s \circ r(A) = r \circ s(A)$. Appelons A' ce point. Les points A et A' définissent une translation unique, donc $s \circ r = r \circ s$.

2.6 Même remarque.

Exercice 2 : pour résoudre les équations proposées, on peut faire apparaître une solution en utilisant la relation de Chasles et en prouver l'unicité en utilisant les propriétés du groupe $(\mathbf{T}, \circ)$.

TR5 **II – VECTEURS DU PLAN** page 184

2.1 Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la relation «... a même image que ...» est de toute évidence une relation d'équivalence. C'est une des raisons pour laquelle nous avons choisi cette démarche.

Nous avons fait démontrer aux élèves qu'un bipoint appartient à une classe unique. C'est la façon la plus commode de démontrer qu'une relation est une relation d'équivalence : ce procédé est bien moins lourd que d'étudier la réflexivité, la symétrie et la transitivité.

2.3 Nous avons noté le vecteur nul θ, et non 0, pour éviter les confusions. Cette notation n'est pas universelle.

TR6 **I – SOMME DE DEUX VECTEURS** page 187

1.1 Nous avons employé le signe + pour l'opération de **V** déduite de l'opération ∘ de **T**. C'est l'usage, mais tout autre symbole : •, ∗, □, ... conviendrait aussi bien. Nous avons pensé qu'il était préférable de suivre cet usage quasi universel, mais il faudra prendre garde aux confusions qui pourront se produire entre l'addition des nombres (rationnels puis réels) et celle des vecteurs.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

Les numéros 4 et 5 concernent les translations matérielles, et donnent des exemples de pavage du plan matériel.

Les numéros 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11 et 25 utilisent la notion de translation. Le numéro 1 peut être traité dès que l'on connaît la définition d'une translation. Les numéros 2 et 7 nécessitent de savoir que l'image d'une droite par une translation est une parallèle à cette droite. Les autres ne peuvent être traités qu'après l'étude de la composition des translations.

Le numéro 9 fait appel à la notion de parallélogramme et de bipoints équipollents.

Le numéro 12 concerne les équations dans les groupes (**T**, ∘) et (**V**, +).

Les numéros 13 à 24 utilisent la notion de vecteur et, sauf le problème 13, l'addition des vecteurs.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

1 Les droites CX et CY sont parallèles (car parallèles à la droite AB) ; elles ont un point commun : elles sont donc confondues.

8 Les points C et C′ sont les images des points A et A′ par la même translation $s \circ r$.

10 Les droites EC et CF sont parallèles (car parallèles à la droite BD) ; elles ont un point commun : elles sont donc confondues.

11 Il y a deux cas à envisager : $s \circ r \neq Id_P$; $s \circ r = Id_P$.

12 2. On pourra soit faire allusion au fait que les vecteurs s'ajoutent comme les translations se composent, soit faire une démonstration analogue à celle de la question 1.

18 On peut aussi démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = \theta$.

20 M = D. **21** M = D. **22** M = C. **23** M = C.

24 Ce problème est une nouvelle occasion de revenir sur l'usage de lettres muettes.

1. $u(M) = \overrightarrow{CB}$, et donc $u(A) = u(B) = u(C) = \overrightarrow{CB}$.
2. $v(M) = \overrightarrow{CM}$, et donc $v(A) = \overrightarrow{CA}$, $v(B) = \overrightarrow{CB}$ et $v(C) = \theta$.

IV – COMPLEMENTS MATHEMATIQUES.

Dans [TR], nous avons défini les translations comme les bijections du plan sur lui-même qui transforment chaque droite d en une droite parallèle à d, et qui n'ont pas de point invariant. Nous avons en outre choisi comme axiomes les énoncés suivants.

1. Etant donnés deux points distincts A et B, il existe une et une seule translation t telle que t(A) = B.

2. La composée de deux translations est une translation.

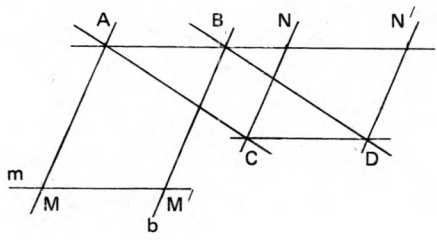
Nous verrons d'abord qu'il était logiquement inutile de supposer qu'étant donné deux points distincts A et B , il existe au plus une translation t telle que t(A) = B (paragraphe 4.1) : c'est uniquement pour des raisons pédagogiques que nous avons retenu cette condition comme axiome. Il était également superflu, logiquement, de supposer que la la composée de deux translations est une translation (paragraphe 4.2). Puis nous donnons un contre-exemple montrant qu'il était par contre indispensable d'introduire un nouvel axiome assurant que, quels que soient les points distincts A et B, il existe au moins une translation t telle que t(A) = B (paragraphe 4.3). Enfin nous donnons deux exemples de plans vérifiant les axiomes de [TR] (paragraphes 4.4 et 4.5).

4.1 Soit A et B deux points distincts, et soient s et t des translations telles que s(A) = t(A) = B.

Si M est un point qui n'est pas sur la droite AB , son image par s est sur la parallèle à la droite AB qui passe par M, et également sur la parallèle à la droite AM qui passe par B (ceci résulte directement de la définition des translations, indépendamment de l'existence et de l'unicité de celles-ci). Ces deux droites, que nous noterons respectivement m et b, sont sécantes car les droites AB et AM le sont, par hypothèse. Donc s(M) est à l'intersection des droites b et m. Il en est de même pour t(M), et sous l'hypothèse faite, t(M) = s(M).

Soit C un point extérieur à la droite AB ; d'après ce qui précède, on sait que s(C) = t(C) ; notons D le point s(C). La droite CD est parallèle à la droite AB, et distincte de celle-ci.

Si N est un point de la droite AB, il n'est pas sur la droite CD ; il suffit de refaire avec N, C et D ce qui vient d'être fait avec M, A et B pour savoir que s(N) = t(N).



Donc quel que soit le point M du plan, s(M) = t(M) ; nous pouvons affirmer que s = t. Il existe donc au plus une translation qui transforme A en B.

4.2 Soit (P, **D**) un plan (au sens du paragraphe 4.1 du commentaire du chapitre DP).

Rappelons qu'une permutation de P est une bijection de P vers P. Nous appelerons *dilatations* de (P, **D**) les permutations p de P telles que l'image par p d'une droite d du plan soit une droite parallèle à d (signalons que la dénomination *dilatation,* bien que fréquemment utilisée, n'est pas universelle).

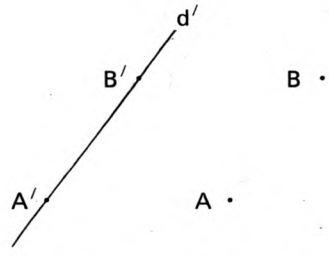
Les translations de (P, **D**) et Id_P sont des dilatations de ce plan. On démontre que les autres dilatations, s'il en existe, ont un unique point invariant ; on les appelle les homothéties du plan ; elles ne nous intéresseront pas du tout ici.

Montrons d'abord que l'ensemble Δ des dilatations du plan est un sous-groupe du groupe des permutations de P.

* $\Delta \neq \phi$ car $Id_P \in \Delta$.

* Si $p \in \Delta$ et $q \in \Delta$, alors $p \circ q \in \Delta$. En effet, soit d une droite du plan ; par hypothèse q(d) est une droite parallèle à d ; puisque q(d) est une droite, p(q(d)) est une droite, parallèle à q(d), et donc à d : l'image de d par $p \circ q$ est une droite, parallèle à d, et $p \circ q \in \Delta$.

* Si $p \in \Delta$, alors $p^{-1} \in \Delta$. En effet, soit d' une droite ; notons e l'ensemble $p^{-1}(d')$: nous allons montrer que e est une droite, parallèle à d'. Soit A' et B' deux points distincts de d' ; notons A et B leurs images par p^{-1} : ce sont des éléments de e, distincts car p^{-1} est une permutation. Remarquons que



$p(A) = p \circ p^{-1}(A') = Id_P(A') = A'$ et $p(B) = B'$.

Notons d la droite AB ; l'image de la droite d par la dilatation p est une droite parallèle à d qui passe par p(A) et p(B), c'est-à-dire par A' et B' : cette image est donc d'. Donc, $p(d) = d'$ et $d \parallel d'$.

D'autre part $e = p^{-1}(d')$; donc

$$p(e) = p \circ p^{-1}(d') = Id_P(d') = d',$$

et $p(d) = p(e) = d'$. Les sous-ensembles e et d de P ont la même image par une bijection (la permutation p), donc $e = d$. Finalement, $p^{-1}(d') = e = d$, et $p^{-1}(d')$ est une droite parallèle à d' ; concluons : $p^{-1} \in \Delta$.

Il nous suffit maintenant de montrer que **T** est un sous-groupe de $(\Delta, \circ)$ pour pouvoir affirmer que $(\mathbf{T}, \circ)$ est un groupe.

Nous avons déjà remarqué que $\mathbf{T} \subset \Delta$. Les deux propriétés suivantes suffisent donc à montrer que **T** est un sous-groupe de $(\Delta, \circ)$.

* $\mathbf{T} \neq \phi$ car $Id_P \in \mathbf{T}$.

* Si $s \in \mathbf{T}$ et $t \in \mathbf{T}$, alors $s^{-1} \circ t \in \mathbf{T}$. En effet, soit s et t des éléments de **T** ; puisque $(\Delta, \circ)$ est un groupe, nous savons déjà que $s^{-1} \circ t \in \Delta$, et donc que l'image d'une droite d par $s^{-1} \circ t$ est une droite parallèle à d. Il suffit donc de montrer que

soit $s^{-1} \circ t = Id_P$,

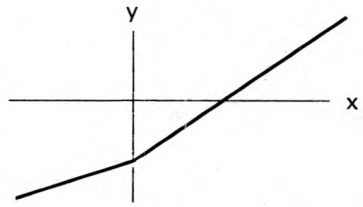
soit $s^{-1} \circ t$ n'a pas de point invariant.

Supposons donc que $s^{-1} \circ t$ ait au moins un point invariant, et notons A l'un d'eux. Alors $s^{-1} \circ t(A) = A$, et $s \circ s^{-1} \circ t(A) = s(A)$; puisque $s \circ s^{-1} \circ t(A) = Id_P \circ t(A) = t(A)$, les translations s et t donnent la même image d'un point. Suivant le résultat du paragraphe 4.1, on peut conclure que $s = t$, et donc que $s^{-1} \circ t = Id_P$: ou bien $s^{-1} \circ t$ n'a pas de point invariant, ou bien $s^{-1} \circ t = Id_P$; dans les deux cas, $s^{-1} \circ t \in T$.

[Soit $(G, *)$ un groupe ; si $g \in G$, notons g^{-1} son symétrique pour la loi $*$; soit H un ensemble. Rappelons que, pour que H soit un sous-groupe de $(G, *)$, il suffit que $H \subset G$; $H \neq \phi$; si $x \in H$ et $y \in H$, alors $x * y^{-1} \in H$].

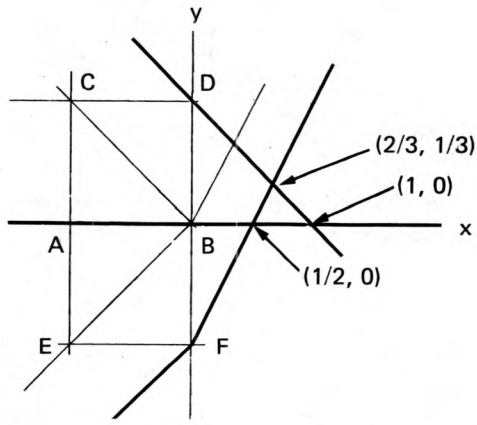
Nous avons vu que $(\mathbf{T}, \circ)$ est un groupe commutatif.

4.3 Considérons à nouveau le plan $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ défini au paragraphe 4.4 du commentaire du chapitre DP.



Nous avions indiqué que $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ est un plan, c'est-à-dire qu'il vérifie les axiomes du chapitre DP. Nous allons montrer que, cependant, il existe dans ce plan deux points distincts M et N pour lesquels il n'existe aucune translation t telle que $t(M) = N$.

Définissons A, B, C, D, et F : $A = (-1, 0)$; $B = (0, 0)$; $C = (-1, 1)$; $D = (0, 1)$; $E = (-1, -1)$; $F = (0, -1)$.



Supposons que t soit une translation du plan $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ telle que $B = t(A)$. Le point $t(C)$ est sur la parallèle à la droite AB qui passe par C, et sur la parallèle à la droite AC qui passe par B ; donc $t(C) = D$, et de même $t(E) = F$.

Le point $t(B)$ se trouve sur la droite AB, sur la parallèle à la droite CB qui passe par D et sur la parallèle à la droite EB qui passe par F ; or ces trois droites ne sont pas concourantes, comme un calcul simple — ou une figure correcte $\simeq$ le montre (se rappeler que les droites montantes de $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ sont «cassées»). Il ne peut donc pas exister de translation de $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ qui transforme A en B.

Il est donc impossible de démontrer, à l'aide des seuls axiomes du chapitre DP, qu'étant donnés deux points distincts M et N, il existe une translation t telle que $N = t(M)$.

4.4 Reprenons le plan $(Q, \mathbf{E})$ donné en exemple au paragraphe 4.2 du chapitre DP. Ses points sont A, B, C et D ; ses droites sont {A, B}, {A, C}; {A, D}, {B, C}, {B, D} et {C, D}.

Notons t l'application définie ci-contre.

Q	A	B	C	D
Q	B	A	D	C

t

On peut remarquer que t est une permutation de P qui n'a pas de point invariant ; en outre, le tableau suivant montre que si d est une droite de $(Q, \mathbf{E})$, l'image de d par t est une droite parallèle à d.

E	{A, B}	{A, C}	{A, D}	{B, C}	{B, D}	{C, D}
E	{A, B}	{B, D}	{B, C}	{A, D}	{A, C}	{C, D}

t

Donc t est une translation. Outre l'identité, les autres translations de (Q, **E**) sont les applications u et v définies ci-dessous (toutes les autres permutations de Q ont au moins un point invariant).

Q	A	B	C	D
Q	C	D	A	B

u

Q	A	B	C	D
Q	D	C	B	A

v

Il en résulte qu'étant donné un couple (M, N) de points, il existe une translation qui transforme M en N.

	A	B	C	D
A	Id_Q	t	u	v
B	t	Id_Q	v	u
C	u	v	Id_Q	t
D	v	u	t	Id_Q

Donc (Q, **E**) vérifie les axiomes des chapitres DP et TR.

Indiquons à titre de curiosité que ce plan n'a pas d'homothétie ; une vérification simple permet de s'en assurer.

4.5 Le plan $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ présenté au paragraphe 4.3 du commentaire du chapitre DP vérifie lui aussi l'axiome des translations.

En effet, soit (p, p′) et (q, q′) des points de $\mathbb{R}^2$. Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, x') &\longmapsto (x + q - p, x' + q' - p') \end{aligned}$$

est une translation de $(\mathbb{R}^2, \Delta)$, qui transforme (p, p′) en (q, q′).

D'ailleurs, si l'on définit les éléments de Δ comme les parties de $\mathbb{R}^2$ qui admettent une équation en (x, y) de la forme $ax + by + c = 0$ (où a, b et c sont dans $\mathbb{R}$ et tels que $(a, b) \neq (0, 0)$), il est possible de remplacer $(\mathbb{R}, +, \times)$ par n'importe quel corps commutatif. C'est ainsi que l'on pourrait donner une autre présentation du plan à 4 points du paragraphe précédent, en utilisant le corps à deux éléments $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$.

Remarquons en passant que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (a + \alpha(x - a), b + \alpha(y - b)) \end{aligned}$$

est une homothétie de centre (a, b) de $(\mathbb{R}^2, \Delta)$; et toutes les homothéties de $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ sont de cette forme.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE R

Les réels

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 «Pratique des opérations (sur les rationnels) sur les réels». Le moins qu'on puisse dire est que le programme laisse toute liberté sur la manière d'introduire $\mathbb{R}$.

L'introduction de $\mathbb{Q}$ a posé pas mal de problèmes de cohérence dans la progression mais, en fin d'étude, les élèves ont sans doute une idée précise de ce qu'est un rationnel, qu'ils pensent aux fractions (un rationnel est un nombre qui admet une écriture fractionnaire), ou aux quotients (un rationnel est le quotient de deux entiers).

Rien de comparable n'est possible pour imaginer ce qu'est un nombre réel.

Aussi nous nous sommes contentés d'essayer de faire comprendre les points suivants :

– il n'est pas déraisonnable d'imaginer des nombres qui ne sont pas rationnels ; nous avons étudié l'équation $x^2 = 2$;

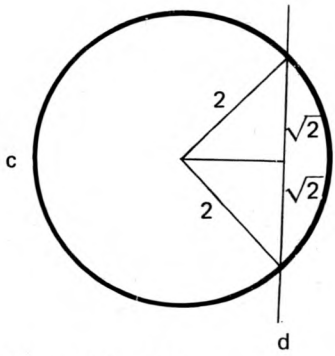
– on peut donc imaginer un nouvel ensemble, qui prolonge $\mathbb{Q}$;

– quel que soit n dans $\mathbb{N}$, tout réel admet des valeurs approchées décimales à 10^{-n} près.

Pour les rationnels, on peut trouver des valeurs décimales approchées en effectuant une division. Imaginer que cette méthode ne soit pas applicable pour d'autres nombres est encore une façon d'imaginer les nombres irrationnels. Ce que nous avons raconté sur l'histoire de π n'a pas d'autre but.

1.2 Le plus rapidement possible, nous avons dit qu'il existe des bijections d'une droite matérielle sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas une idée simple dans la mesure où, comme nous l'avons fait remarquer dans l'introduction, une droite matérielle est intuitivement «recouverte» par des nombres décimaux.

Néanmoins on ne peut se contenter de $\mathbb{D}$, ni même de $\mathbb{Q}$. Sinon on pourrait, par exemple, avoir la situation suivante :
soit c un cercle de rayon r et d une droite dont la distance au centre du cercle est inférieure à r ; il se peut que $c \cap d = \phi$.



1.3 Dans cette étude concernant les droites matérielles, nous avons

– fixé le vocabulaire relatif au repérage sur une droite ;

– essayé de faire comprendre que certaines de ces bijections ont un rôle privilégié : celles qui sont suggérées par des échelles régulières ;

– étudié des questions relatives au milieu, en particulier celle du parallélogramme aplati, préparant ainsi le chapitre SR.

1.4 La liaison de $\mathbb{R}$ avec les droites matérielles permet aussi

– de prolonger facilement l'ordre de $\mathbb{Q}$,

– d'introduire la valeur absolue comme une distance sur la droite. Nous pensons que le support géométrique est ici une aide précieuse. Nous avons été assez bref sur cette question, que nous comptons reprendre en 3ème.

1.5 Puisque $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, comme $(\mathbb{Q}, +, \times)$, il était possible de franchir de nouvelles étapes dans l'apprentissage du calcul algébrique, poursuivant ainsi la progression commencée dès le début de l'année. C'est l'objet du paragraphe I de R3.

1.6 En ce qui concerne le calcul approché, en dehors de la question des valeurs approchées décimales, nous nous sommes contentés des exercices manipulatoires de R5 et nous n'avons pas voulu faire d'étude plus théorique de ces questions d'encadrements. Nous comptons reprendre ce sujet plus en détail dans le manuel de 3ème.

Nous avons cependant introduit la notation 10^n (où $n \in \mathbb{Z}$), qui est tout de même bien commode lorsqu'on parle de valeurs approchées décimales.

1.7 De même, nous avons été le plus bref possible, ici, en ce qui concerne les équations et les inéquations, ne dépassant pas le problème déjà connu d'une équation dans un groupe et l'application immédiate du fait que

$$\text{si } a \leqslant b, \quad \text{alors } a + c \leqslant b + c.$$

Il nous a paru plus raisonnable de partager cet apprentissage difficile des équations et inéquations sur les deux années de 4ème et 3ème.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL

R1 **I – ENCORE DE NOUVEAUX NOMBRES** ——— page 199

1.2 Voici un exemple de démonstration difficile comme il en existe souvent en algèbre. D'abord, c'est un raisonnement par l'absurde. Ensuite on donne l'impression de jongler avec des écritures alors, qu'en fait, on utilise pas mal de propriétés antérieures.

Ce qui augmente encore la difficulté, c'est que certaines de ces propriétés ne sont pas nécessairement connues des élèves, telle celle que nous avons indiqué aux élèves : «un nombre dont le carré est pair, est pair», mais aussi, sans doute, les règles de calcul sur les exposants utilisées pour passer de $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ à $\frac{a^2}{b^2}$, et de $(2a')^2$ à $4a'^2$.

L'objectif est donc ici plus de faire comprendre l'existence et la nature du problème posé que le détail de la démonstration. C'est pourquoi nous n'avons pas détaillé outre mesure cette démonstration.

1.3 Remarque. Voir à ce sujet le problème 23.

1.4 Cette analogie avec des problèmes comparables, étudiés antérieurement, nous paraît essentielle.

Exercices. Nous avons proposé deux graphismes pour cet exercice sur l'inclusion des ensembles de nombres, car il nous semble que certains élèves voient mieux sur l'un et d'autres sur l'autre.

II – BIJECTIONS D'UNE DROITE MATERIELLE VERS IR ——— page 201

2.1 Comme la question est posée, on peut s'attendre à ce que les élèves proposent $\sqrt{2}$ comme abscisse du point V. Bien entendu, il est tout à fait raisonnable de de proposer par exemple 1,4 ou 1,5.

2.2 Cette manipulation n'a pas d'intérêt pour elle-même. Il est possible cependant qu'elle aide à comprendre, un peu plus tard, que lorsqu'on veut que le plan mathématique vérifie l'axiome du milieu (4ème) ou l'axiome de Thalès (3ème) on ne peut munir chaque droite de n'importe quelle bijection de cette droite sur IR.

III – OPERATION DANS IR ——— page 203

3.1 Nous sommes passés très vite sur la structure algébrique de IR. Comme pour indiquer que, de ce point de vue, IR n'apporte rien de nouveau par rapport à $\mathbb{Q}$.

3.2 Nous avons tout de même profité de l'occasion pour revenir sur la question du zéro.

IV – ORDRE DANS IR ——— page 204

Même remarque qu'au 3.1.

R2 **I – SURLIGNES** page 205

1.2 On peut faire remarquer qu'on sait que l'équation en x dans IR, $x - 2 = 8$ a une solution unique puisque c'est l'équation d'une soustraction dans le groupe (IR, +). Or il est probable que 10 est une solution évidente pour tous.

II – MILIEU D'UN BIPOINT page 207

2.4 L'équation en y dans IR, $-5 = \frac{8 + y}{2}$ pose un problème sur lequel on n'a pas encore fait réfléchir les élèves. En effet, elle a même ensemble de solutions que l'équation $-10 = 8 + y$ qui, elle, est l'équation d'une soustraction dans le groupe (IR, +).

2.5 Cette propriété sera reprise au moment de la synthèse sur les parallélogrammes dans SR3.

R3 **I – OU ON UTILISE LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION** page 209

Tous ces exercices auraient pu être traités beaucoup plus tôt si on ne tient compte que des connaissances qu'ils mettent en œuvre. Cependant, l'apprentissage du calcul algébrique n'est pas une chose simple et comme nous l'avons déjà dit, nous avons tenu à répartir cet apprentissage dans une progression qui couvre les quatre chapitres d'algèbre.

1.3 Les exercices de factorisation proposés ne demandent pas une factorisation optimale et l'élève qui écrit par exemple que $-7ab^2 + 14a^2b = a(-7b^2 + 14ab)$ a parfaitement répondu à la question. Cela n'empêche pas de lui faire remarquer que d'autres écritures sont possibles.

1.9 Nous avons voulu solenniser le moins possible les «produits remarquables» utilisés dans le sens du développement ; ils ne sont après tout qu'un cas particulier du produit de deux sommes.

1.10 Par contre, utilisés dans le sens de la factorisation, ils apparaissent souvent
1.12 aux élèves comme un tour de magie. C'est pourquoi nous avons tenu à expliquer en détail ce qu'on faisait.

R4 **II – VALEUR ABSOLUE D'UN REEL** page 216

2.1 Exercice 4.

De façon inconsciente, les élèves pensent que les problèmes qu'on leur pose ont toujours une solution et que cette solution est unique et il faut bien reconnaître que la pratique scolaire habituelle ne peut que les renforcer dans cette idée.

Les deux questions posées ici ne sont donc peut-être pas aussi «naïves» qu'elles le paraissent.

2.2 Exercice 1.

C'est évidemment de propos délibéré que nous avons orienté les élèves vers un raisonnement géométrique.

Exercice 2.

C'est un exercice difficile que nous proposons de conduire collectivement au tableau. Le fait que les deux nombres trouvés ne soient pas solutions de l'équation va certainement surprendre les élèves. Nous essayons par ce type d'exemples d'éviter que ne se créé l'idée que lorsqu'on «transforme» une équation, on trouve nécessairement une équation équivalente.

R5 I – ARTHUR ET SON JARDIN page 217

Le résultat, $0{,}63 \times 35 < \ell < 0{,}68 \times 35$, doit être facilement trouvé par tous. Par contre, il y aura peut-être une discussion intéressante pour comprendre pourquoi les données nous imposent de prendre $0{,}63 \times 57$ et $0{,}68 \times 58$ comme valeurs approchées par défaut et par excès de L.

Il ne s'agit évidemment pas ici de faire appel aux propriétés théoriques de l'ordre dans IR. Les résultats :

$22{,}05 < \ell < 23{,}80$ - $35{,}91 < L < 39{,}44$ - $115{,}92 < P < 126{,}48$ - $791{,}815\,5 < S < 938{,}672\,0$.

Une nouvelle discussion peut s'engager sur la nécessité de garder toutes les décimales, sur le choix d'encadrements raisonnables et sur le fait qu'il faut alors diminuer les valeurs approchées par défaut et augmenter les valeurs approchées par excès.

II – ARTHUR, SOPHIE ET LE GADGET page 219

Aucune information n'est donnée pour placer le quadrillage sur le dessin. Les élèves vont donc trouver des résultats différents qu'il est certainement intéressant d'afficher au tableau.

On aura donc une suite de nombres inférieurs à s et une suite de nombres supérieurs à s. La discussion qui conduira à choisir le plus grand des nombres de la première suite et le plus petit des nombres de la seconde suite pour encadrer s sera certainement intéressante.

R6 I – PUISSANCE DE DIX page 221

1.1 Nous avons bien veillé à ne pas confondre une puissance de dix et l'écriture d'un tel nombre sous forme 10^n. Les nombres mille, un centième, sont des puissances de 10, même quand ils ne sont pas écrits 10^3 et 10^{-2}. Il est donc prudent de lire l'écriture 10^n «dix exposant n» et non pas «dix puissance n». Cette dernière locution conduit de plus à parler de «puissances positives» et de «puissances négatives» de 10, ce qui est très fâcheux.

II – VALEURS APPROCHEES DECIMALES D'UN RATIONNEL ——— page 223

2.1 Exercice 1.

Nous avions dans D4 demandé les quotients approchés à 10^{-5} et 10^{-13} près par défaut de 11 par 7.

Nous n'avons pas indiqué qu'un décimal est égal à ses valeurs approchées par défaut à partir d'un certain rang. En effet, comme nous l'avons déjà indiqué, nous ne voulions pas être long sur cette question des valeurs approchées.

III – VALEURS APPROCHEES DECIMAL D'UN REEL ——— page 225

3.2 $3{,}160 < \frac{256}{81} < 3{,}161$ - $3{,}142 < \frac{22}{7} < 3{,}143$ - $3{,}141\,592\,9 < \frac{355}{113} < 3{,}141\,593\,0$.

3.3 Nous avons déjà traité des exercices comparables dans Q7.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

Les numéros 2, 3, 5 et 25 portent sur les droites graduées et les surlignés.
Dans les numéros 4, 5 et 6 intervient l'ordre dans IR.
Les numéros 3, 6, 23 et 25 sont des exercices où l'élève est amené à faire des démonstrations.
Les numéros 7, 8, 9 et 11 à 21 sont des exercices progressifs de calcul algébrique.
Le numéro 10 a bour but de rappeler la priorité de l'exponentiation.
Les numéros 22 et 24 sont des exercices de calcul comportant des radicaux.
Le numéro 26 fait résoudre des équations dans IR.
Le numéro 27 fais résoudre des inéquations dans IR.
Le numéro 28 est l'occasion d'un retour sur les applications et bijections.
Les numéros 29 à 34 concernent la valeur absolue dans IR.
Les numéros 35, 36 et 37 sont des calculs sur des valeurs approchées.
Les numéros 38 et 39 sont des exercices sur les puissances de 10.
Les numéros 40 à 42 sont des exercices à données concrètes.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

23 Si $a = 2x$ alors $a^2 = 4x^2$, ou encore $a^2 = 2(2x^2)$. L'entier 2 est un diviseur de a^2, donc a^2 est pair.

Si $b = 2y + 1$ alors $b^2 = (2y + 1)^2$,
$= 4y^2 + 4y + 1$,
$= 2(2y^2 + 2y) + 1$.

Le reste dans la division euclidienne de b par 2 est donc 1, et b^2 est un entier impair.

Si le naturel n^2 est pair, n ne peut pas être impair car si n était impair n^2 le serait aussi.

25 1) $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MI} + \overline{IA} + \overline{MI} + \overline{IB}$.

Le point I est le milieu du bipoint (A, B), donc $\overline{IA} = -\overline{IB}$, ou encore $\overline{IA} + \overline{IB} = 0$.

Donc $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MI} + \overline{MI}$ et $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$.

2) $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = (\overline{MA} + \overline{MB})(\overline{MA} - \overline{MB})$;

or $\overline{MA} - \overline{MB} = \overline{BA}$ et $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$.

Donc $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{MI} \times \overline{BA}$, et comme $\overline{MI}$ et $\overline{BA}$ sont les opposés de $\overline{IM}$ et $\overline{AB}$, $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{IM} \times \overline{AB}$.

28 $f(0) = -6$; $f(1) = 9$; $f(-1) = -9$; $f(-2) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $f(\sqrt{2}) = 6 + 9\sqrt{2}$;

$g(0) = -7$; $g(1) = 16$; $g(-1) = 0$; $g(-2) = 25$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $g(\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} + 23$.

L'application f n'est pas une bijection car 0 possède au moins deux antécédents pour f, à savoir -2 et $\frac{1}{2}$; l'application g n'est pas une bijection car 0 possède au moins deux antécédents pour g, à savoir -1 et $\frac{1}{2}$.

29 Les réponses dans l'ordre sont : 1,6 ; $\frac{31}{9}$; 1.

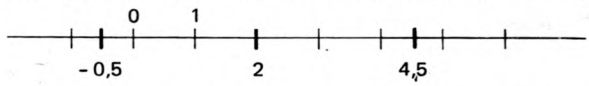
31 Les réponses dans l'ordre sont : $\mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}_-$; $\mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}_-$.

33 Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $|x - 2| = 2{,}5$ sont $-0{,}5$ et 5.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $|3 - x| = 5$ sont -2 et 8.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $|x - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$ sont 0 et $2\sqrt{2}$.

On peut résoudre ces équations géométriquement ; par exemple, la première correspond au dessin suivant.



35 Dans certains cas, il est bon de calculer des valeurs approchées des nombres :

$\frac{15}{17} < 0{,}89$ et $\frac{9}{10} = 0{,}9$, donc $\frac{15}{17} < \frac{9}{10}$;

$\frac{27}{14} < 1{,}93$ et $\frac{49}{25} = 1{,}96$, donc $\frac{27}{14} < \frac{49}{25}$;

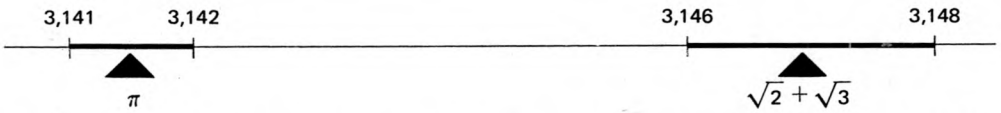
$\frac{103\,402}{103\,403} < 1$ et $1 < \frac{987\,432\,193}{987\,432\,192}$, donc $\frac{103\,402}{103\,403} < \frac{987\,432\,193}{987\,432\,192}$;

$\frac{10}{87} < 0{,}114\,95$ et $\frac{113}{983} > 0{,}114\,95$, donc $\frac{10}{87} < \frac{113}{983}$.

36 $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, donc $3{,}146 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}148$;

d'autre part $3{,}141 < \pi < 3{,}142$.

Comme $3{,}142 < 3{,}146$ on peut affirmer que $\pi < \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Un dessin peut ici aider les élèves à comprendre.



41 Pour résoudre la dernière question, on peut se reporter à l'exercice 8, 3ème question, pour affirmer que $12 \times 310 < vt < 14 \times 370$, c'est-à-dire que $3\,720 < vt < 5\,180$.

Des élèves seront certainement surpris d'apprendre que la lumière a une vitesse ; ils demanderont probablement des explications (à très peu près, cette vitesse est 300 000 km/s ; c'est ainsi qu'il faut un peu plus d'une seconde pour qu'un signal lumineux, ou radio, vienne de la lune à la terre, et qu'il faut environ 8 minutes pour qu'un signal lumineux vienne du soleil à la terre).

42 1) La longueur du cercle sur lequel se déplace le soleil est environ $1{,}5 \times 10^{18}$ km.

2) Le temps mis par le soleil pour couvrir le cercle entier est environ 6×10^{15} secondes, soit environ $\frac{6 \times 10^{15}}{3 \times 10^{7}}$ années, c'est-à-dire 2×10^{8} années.

La fraction du cercle parcouru depuis 2 000 ans est alors environ $\frac{2\,000}{2 \times 10^{8}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{10^{5}}$.

Le nombre de tours décrits par le soleil en 4 milliards d'années est environ $\frac{4 \times 10^{9}}{10^{5} \times 2\,000}$, soit 20.

IV – COMPLEMENTS MATHEMATIQUES.

Rappelons ce que nous avons dit de $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$:

* l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$;
* $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné, dont les lois et l'ordre prolongent ceux de $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$;
* étant donnés un réel a et un naturel n, il existe un décimal d tel que $d \leqslant a < d + 10^{-n}$;
* une unité de longueur étant choisie, il est possible d'attribuer à tout segment un réel positif comme mesure.

Cette façon d'aborder les réels pourra surprendre, surtout si l'on a en tête l'introduction des réels par les suites décimales telle que la décrivait le commentaire du programme de 1971.

Nous essaierons ici d'éclairer notre choix, en particulier en rappelant quelques faits historiques ; ceci nous conduit d'ailleurs à nous demander si une théorie est bien nécessaire.

4.1 Une théorie des réels est-elle nécessaire ?

De nombreux mathématiciens, qu'on pourrait appeler pragmatiques, on conduit des calculs sans se poser de questions sur les nombres qu'ils manipulaient. Citons Heron d'Alexandrie (environs du début de l'ère chrétienne) qui donne un algorithme, particulièrement efficace, pour calculer des racines carrées : si l'on désire connaître la racine carrée d'un nombre a, on choisit une valeur approchée u_0 de cette racine carrée, puis on calcule $\frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right)$; si cette valeur u_1 n'est pas assez proche, on calcule $\frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{a}{u_1}\right)$, etc... Il est d'ailleurs probable qu'Héron n'a fait que reprendre une méthode connue des Babyloniens qui, vers le 18ème siècle avant J.C., avaient proposé une valeur de $\sqrt{2}$ avec une erreur inférieure à $2 \cdot 10^{-6}$. Ces calculs n'étaient pas accompagnés d'une reflexion sur l'existence ou la nature de $\sqrt{2}$.

Les algébristes italiens de la Renaissance, lorsqu'ils introduisaient de façon formelle dans leurs calculs intermédiaires des écritures correspondant à ce que nous

écrivons aujourd'hui -3 ou $\sqrt{-4}$, se comportaient un peu de la même manière : ni les nombres négatifs ni les nombres complexes n'étaient à l'époque définis, mais on ne se préoccupait pas trop du statut de ces écritures du moment qu'elles permettaient finalement d'aboutir à la solution.

Cette façon de procéder est évidemment refusée par les mathématiques officielles d'aujourd'hui ; mais ne serait-elle pas celle que suivraient la plupart de nos élèves si nous ne les guidions pas vers d'autres démarches ? Il faut un peu de sens métaphysique, ou passablement de culture mathématique, pour pouvoir avoir un doute sur l'existence d'un nombre qui mesure la diagonale d'un carré dont le côté a pour mesure 1.

4.2 La théorie des proportions.

Cette métaphysique, ou cette perspicacité, s'est trouvée chez des penseurs grecs, peut-être en premier chez les Pythagoriens (6ème et 5ème siècle avant J.C.) qui faisaient jouer aux nombres un rôle primordial dans leurs discussions philosophiques. La plus ancienne démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ que nous connaissons se trouve dans *les éléments* d'Eudide (environ 300 ans avant J.C.), mais le fait qu'il n'y a pas de rationnel qui soit racine carrée de 2 était très probablement connu et peut-être démontré bien avant ; en témoigne la très jolie et très triste histoire qui veut que le pythagoricien Hippasios ait été jeté d'un bateau en pleine mer pour avoir dévoilé que $\sqrt{2}$ est irrationnel (5ème siècle avant J.C.).

Pour réduire ce scandale de l'irrationnalité, le livre 5 des *éléments* d'Euclide introduit et développe la notion de proportion. Il nous semble intérressant d'en donner un aperçu, même en se contentant d'à peu près (ainsi il est totalement anachronique d'utiliser le concept d'ensemble pour un texte de l'antiquité ; la quasi totalité des notations algébriques n'ont été introduites qu'au 16ème siècle, ou après).

Voilà, en termes modernes, un exposé rapide de la théorie des proportions.

Soit G un ensemble, soit $+$ une loi commutative et associative sur G, telle que si a, b et c, éléments de G, vérifient l'égalité $a + c = b + c$, alors $a = b$; on suppose en outre que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in G$, il existe x unique dans G tel que $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois}} = a$ (autrement dit, on sait définir $\frac{a}{n}$). Soit $\leqslant$ un ordre total sur G, compatible avec la loi $+$, c'est-à-dire telle que si a, b et c sont dans G et si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$; on suppose que si a et b sont dans G et si $a > b$, il existe y dans G tel que $a = b + y$. Enfin, si a et b sont dans G, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ fois}} > b$ (axiome d'Archimède).

Sous ces hypothèses, nous dirons que G, muni de $+$ et $\leqslant$, est un ensemble de grandeurs. On peut remarquer que les longueurs des segments, avec l'addition et l'ordre usuels, semblent bien être un ensemble de grandeurs, et c'est ce qu'on admet d'habitude.

On définit alors sur $G \times G$ la relation d'équivalence $\sim$ ainsi définie : étant donnés a, a', b et b' dans G,

$$(a, a') \sim (b, b') \quad \text{si}$$

quels que soient les naturels non nuls p et q, les trois équivalences suivantes sont vraies :

$$qa > pa' \iff qb > pb',$$
$$qa = pa' \iff qb = pb',$$
$$qa < pa' \iff qb < pb'.$$

(Il faut naturellement démontrer qu'on a bien affaire à une relation d'équivalence).

Pour mieux comprendre le sens de cette définition, imaginons un moment qu'on puisse utiliser l'écriture $\frac{a}{a}$, si a et a' sont dans G. Si a et a' sont dans G, le «rapport de grandeurs» $\frac{a}{a'}$, divisera l'ensemble des rationnels positifs en deux parties : l'ensemble des rationnels positifs $\frac{p}{q}$ tels que $pa' < qa$, c'est-à-dire tels que $\frac{p}{q} < \frac{a}{a'}$, et l'ensemble des rationnels positifs $\frac{p}{q}$ tels que $\frac{p}{q} > \frac{a}{a'}$; de plus si a et a' sont commensurables, il y aura en outre un rationnel unique $\frac{p}{q}$ tel que $\frac{p}{q} = \frac{a}{a'}$. Dire que les couples de grandeurs (a, a') et (b, b') sont équivalents au sens donné plus haut, c'est dire que $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$ divisent l'ensemble des rationnels positifs de la même manière.

Naturellement, si on construit cette théorie assez compliquée des proportions, c'est justement parce qu'on ne sait pas encore donner un sens à l'expression «rapport des grandeurs a et a'» : on peut rencontrer des grandeurs a et a' telles que, quels que soient les naturels p et q, on constate que $qa \neq pa'$; pour de telles grandeurs, il ne sera pas possible de représenter $\frac{a}{a'}$ par un rationnel.

Appelons K l'ensemble quotient de $G \times G$ pour la relation d'équivalence définie ci-dessus ; comme l'ordre $\leqslant$ sur G est compatible avec la relation d'équivalence, on peut définir sur K un ordre quotient, que nous noterons encore $\leqslant$.

On est alors amené à imposer une dernière condition à $(G, \times, \leqslant)$: si a, b et c sont des grandeurs, il existe une grandeur g telle que $(a, b) \sim (g, c)$ (avec la notation de «rapport de grandeurs», il existe une «quatrième proportionnelle» g telle que $\frac{g}{c} = \frac{a}{b}$, ou encore, avec des notations aussi approximatives, telle que $g = \frac{a}{b} \cdot c$). Avec cette condition supplémentaire, on peut définir les éléments de K comme des opérateurs sur G : la classe de (a, b) fait correspondre à la grandeur c la grandeur g telle que $(g, c) \sim (a, b)$ (il faut naturellement s'assurer que cette définition a un sens).

Le texte d'Euclide ne va guère plus loin ; mais à partir de là, on peut construire une multiplication commutative $\times$ sur K, comme composition d'opérateurs. Si l'on confond alors le rationnel positif $\frac{p}{q}$ avec la classe du couple $(\underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \text{ fois}}, \underbrace{a + a + \ldots + a}_{q \text{ fois}})$ où a est un élément quelconque de G, alors $(K, \times, \leqslant)$ est un prolongement de $(\mathbb{Q}_+^*, \times, \leqslant)$ (avec les notations peu correctes introduites plus haut, cela revient à confondre $\frac{p}{q}$ et $\frac{pa}{qa}$).

On pourrait enfin construire une addition + sur K, puis introduire des éléments nul et négatifs comme on le fait pour passer de $\mathbb{N}^*$ à $\mathbb{Z}$. On obtiendrait alors un corps commutatif totalement ordonné dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps ; en outre, si u et v sont des éléments strictement positifs de ce corps, il existe un naturel n tel que $\underbrace{u + u + \ldots + u}_{n \text{ fois}} > v$: on dit que le corps ainsi construit est archimédien.

4.3 Quelques remarques.

Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ a toutes les propriétés ci-dessus ; mais il existe d'autres corps totalement ordonnés qui ont toutes ces propriétés. Nous en donnerons quelques exemples plus loin.

Les propriétés algébriques du corps des réels que nous avons indiquées aux élèves (c'est un surcorps commutatif totalement ordonné de $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$, dont les éléments peuvent être approchés par les décimaux) sont équivalentes aux propriétés du corps construit ci-dessus : elle ne caractérisent donc pas $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$.

Pour la construction euclidienne, ce sont les propriétés de $(G, +, \leqslant)$ qui fixeront celles du corps qu'on en déduit ; il n'est d'ailleurs pas sûr qu'on ait pris conscience de ce fait avant le 19ème siècle. On pourrait penser qu'indiquer, comme nous l'avons fait, que $\mathbb{R}$ permet de mesurer tous les segments, une fois l'unité de longueur choisie, suffit à caractériser les réels. C'est un faux semblant : la structure des droites mathématiques n'est évidemment pas arbitraire ; mais elle n'est pas non plus imposée strictement par l'observation des droites matérielles. A partir de cette observation, et de bien d'autres considérations, tout un système abstrait s'est progressivement constitué ; mais croire qu'il est logiquement déduit des propriétés des droites matérielles est un cercle vivieux du même genre que celui qui consiste à cacher dans les hypothèses les conclusions qu'on veut atteindre ; par exemple, la «démonstration» que nous avons donnée que la diagonale d'un carré de côté 1 a pour mesure $\sqrt{2}$ repose sur de nombreuses hypothèses implicites.

4.4 Avant le 19ème siècle.

Jusqu'au 19ème siècle, on n'a pas fait de progrès formels importants pour construire $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$. Cela ne signifie pas qu'aucun des problèmes liés à ce que nous appelons maintenant les réels n'ait été étudié pendant tout ce temps. Bien au contraire ; mais ce n'est qu'au 19ème siècle que l'état de ces questions a à la fois permis et imposé de donner une construction rigoureuse de $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$.

A titre d'exemple, voici la traduction du latin d'un texte de Buridan (mort en 1358) ; il montrera que la notion de borne supérieure ne date pas du 19ème siècle ; ce texte n'est sûrement pas le premier où l'on peut repérer cette notion ; il a du moins l'avantage de remettre en cause l'idée que le Moyen-Age occidental a été un désert scientifique absolu.

«Soit A une puissance propre à lever un grand poids. On ne saurait assigner le poids maximum que A peut lever. Cette conclusion se prouve en admettant qu'il n'y a pas action lorsque l'agent est égal ou inférieur à la résistance ... Supposons donc que A lève le poids B et que ce soit là, au dire de notre adversaire, le poids maximum que A puisse lever ; c'est alors qu'il y a quelque excès de A sur B ; à B

suspendons un poids tel que la résistance devienne égale à la puissance de A, et soit C ce qui a été suspendu ; il est constant que A ne peut lever l'ensemble de B et de C. Mais, comme C est divisible, enlevons-en une moitié, et laissons l'autre moitié, que nous nommerons D, unie à B ; la puissance de A surpasse l'ensemble de B et de D, et par conséquent peut le lever ; cependant, cet ensemble est plus grand que B ; B n'était donc pas le poids maximum que A puisse lever». (Cité d'après *le système du monde* de Pierre Duhem, cinquième partie, Ch. I, 6 - tome VII, publié par Hermann en 1956).

Ce n'est toutefois que lorsqu'on disposera du symbolisme mathématique qu'il pourra se poser des questions plus précises sur les nombres. En particulier, ce formalisme permettra de faire de l'analyse, et sera perfectionné pour répondre aux besoins d'une analyse de plus en plus raffinée. Citons quelques étapes.

Vers 1700, Newton (1643 - 1727) et Leibniz (1646 - 1716) ont introduit le calcul des intégrales et des dérivées, ce qui revient à calculer une aire plane limitée par une courbe, ou à trouver la pente d'une tangente ; ils avaient naturellement eu des précurseurs, comme Cavalieri, Fermat, Descartes et Pascal au 17ème siècle, ou même Archimède (287 - 212 avant J.C.).

Et l'on s'intéresse également aux séries ; on écrira ainsi que

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

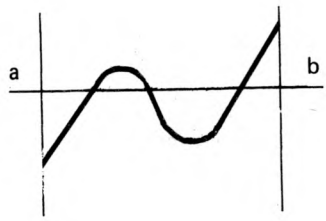
(parce que, si $x \neq 1$, alors $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$) ; cela conduira à écrire que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$, mais aussi que $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$, comme le fit Euler en 1730 !

Les difficultés révélées par ces nouveaux outils que sont l'intégration, la dérivation et surtout les séries conduiront à se poser de nouvelles questions, comme les difficultés venant de l'existence de rapports irrationnels avaient suscité la création de la théorie des proportions.

4.5 Une tentative qui échoue.

Le problème des ensembles usuels de nombres devait être complètement résolu dans la deuxième moitié du 19ème siècle. Signalons auparavant la tentative de Bolzano, en 1817, de démontrer que si f est une fonction numérique continue sur le segment [a, b] telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, il existe au moins un nombre c telle que $a < c < b$ et $f(c) = 0$.

Cette tentative est intéressante : elle montre qu'on prend conscience de la nécessité de démontrer une propriété qui auparavant allait de soi.



Mais elle échoue, et cet échec lui-même est intéressant : le statut des nombres réels, ou de la droite, n'était pas encore fixé et il était bien difficile de démontrer une

propriété, en l'occurence celle de la borne supérieure, alors qu'on n'avait pas une définition précise de l'objet sur lequel on travaillait.

Nous avons mentionné cet échec pour mieux faire sentir que si nous avons attribué une propriété géométrique à $\mathbb{R}$ (bijection avec les droites), ce n'était pas du tout pour préciser logiquement ses propriétés.

4.6 Les constructions des réels.

C'est vers 1870 que sont apparues plusieurs constructions régoureuses, et équivalentes, de $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$. Citons surtout celles de Cantor et de Dedekind, publiées toutes les deux en 1872.

La construction de Dedekind est peut-être le plus intuitive ; c'est en tout cas celle qui se rapproche le plus de la construction du livre 5 des *éléments* d'Euclide. La construction que donne le premier commentaire du programme de 1971 s'en inspire fortement. Rappelons en le principe.

On appelle coupure de $\mathbb{Q}$ les couples (A, B) de parties non vides de $\mathbb{Q}$ telles que

$A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \phi$, si $a \in A$ et $b \in B$ alors $a < b$;
ainsi $(\mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+^*)$ est une coupure de $\mathbb{Q}$ de même que $(\mathbb{Q}_-^*, \mathbb{Q}_+)$.

Il existe des coupures (A, B) telles que soit A ait un maximum, soit B ait un minimum ; c'est le cas de $(\mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+^*)$ et $(\mathbb{Q}_-^*, \mathbb{Q}_+)$, auxquelles on associe 0.

De même, si u est un rationnel, notons ici $U_<$ l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à u et $U_\geqslant$ l'ensemble des rationnels supérieurs ou égaux à u ; définissons de façon analogue $U_\leqslant$ et $U_>$; avec ces notations, $(U_\leqslant, U_>)$ et $(U_<, U_\geqslant)$ sont des coupures ; on décide de confondre chaque rationnel u avec l'ensemble des deux coupures $(U_\leqslant, U_>)$ et $(U_<, U_\geqslant)$.

Il existe aussi des coupures d'une autre sorte : ainsi, si B est l'ensemble des rationnels b tels que $2 < b^2$ et $b > 0$ et si $A = \mathbb{Q} \setminus B$, le couple (A, B) est une coupure, A n'a pas de maximum et B n'a pas de minimum (s'il n'en était pas ainsi, 2 aurait une racine carrée rationnelle). On appelle ces coupures les irrationnels, et on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des rationnels et des irrationnels.

Il reste naturellement à définir une addition $+$, une multiplication $\times$ et un ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ qui prolongent ceux de $\mathbb{Q}$ et font de $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ un corps commutatif, totalement ordonné, archimédien.

On montre alors que ce corps ordonné à la propriété des segments emboités : si a et b sont des suites de réels telles que

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0,$$

il existe au moins un réel qui appartient à tous les segments de la forme $[a_n, b_n]$, où $n \in \mathbb{N}$ (autrement dit, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \phi$).

On peut montrer que tous les corps commutatifs totalement ordonnés et archimédiens sont isomorphes à un sous-corps du corps des réels ; ceux qui ont en outre la propriété des segments emboîtés sont isomorphes à $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$.

4.7 Pour conclure.

Nous arrêtons ici ce survol presque caricatural à force d'être bref. [Pour avoir un exposé détaillé et une première bibliographie sur cette question, on pourra se reporter à *nombre, mesure et continu - épistémologie et histoire* de Jean Dhombres (Cedic/Nathan - 1978) dont nous avons repris l'interprétation du livre 5 des *éléments* d'Euclide ; on pourra aussi consulter *philosophie et calcul de l'infini* de Ch. Houzel, J.L. Ovaert, P. Raymond et J.J. Sansuc (Maspero - 1976)].

Nous avons tenté ce survol pour mettre en évidence deux points.

* D'une part la construction de $\mathbb{R}$ est difficile ; la longue histoire des réels en est un indice : si ce n'était pas si difficile, on n'aurait pas mis si longtemps ! Mais aussi un examen, même superficiel, des diverses constructions mène à la même conclusion ; elles mettent toutes en jeu des collections infinies d'ensembles infinis (ou, ce qui n'arrange rien, d'applications dont la source est infinie). De plus, pour comprendre un peu ce qu'on fait, et pourquoi, un minimum d'analyse est indispensable (segments emboités, ou borne supérieure, ou encore complétion) ; et l'analyse impose inévitablement de manier des files de plusieurs quantificateurs, alternativement existentiels et universels ; la difficulté du maniement de ces files de quantificateurs n'est plus à prouver.

* D'autre part, l'histoire des réels tend à montrer que les problèmes posés par les nombres ont été résolus progressivement, compte tenu des questions qui se posaient. Pourquoi devrions-nous imposer une démarche plus ambitieuse et plus rigoriste à nos élèves ?

4.8 Quelques exemples de corps.

Il existe des corps ordonnés qui sont des sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$. Tous ces corps vérifient les propriétés algébriques que nous avons données. Ils sont tous archimédiens, et peuvent de ce fait être obtenus par la construction euclidienne.

Voici un exemple. Soit d un rationnel positif tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Notons K l'ensemble des réels de la forme $u + v\sqrt{d}$, où u et v sont des rationnels. Il est facile de vérifier que K est fermé pour l'addition et la multiplication : si u, u', v et v' sont des rationnels, $(u + v\sqrt{d}) + (u' + v'\sqrt{d}) = (u + u') + (v + v')\sqrt{d}$, et $u + u'$ et $v + v'$ sont dans $\mathbb{Q}$; $(u + v\sqrt{d})(u' + v'\sqrt{d}) = (uu' + dvv') + (uv' + u'v)\sqrt{d}$, et $uu' + dvv'$ et $uv' + u'v$ sont dans $\mathbb{Q}$.

Les éléments neutres 0 et 1 sont dans K.

Tout élément de K a un opposé, et tout élément non nul de K a un inverse : soient u et v des rationnels ;

$(u + v\sqrt{d}) + (-u + (-v)\sqrt{d}) = 0$, et $-u$ et $-v$ sont dans $\mathbb{Q}$;

si $u + v\sqrt{d} \neq 0$, alors $u^2 - v^2 d = 0$ car d n'est pas le carré d'un rationnel, et dans ce cas

$$(u + v\sqrt{d})\left(\frac{u}{u^2 - v^2 d} + \frac{-v}{u^2 - v^2 d}\sqrt{d}\right) = 1, \quad \text{et} \quad \frac{u}{u^2 - v^2 d} \text{ et } \frac{-v}{u^2 - v^2 d} \text{ sont dans } \mathbb{Q}.$$

Bien entendu, les lois $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives et la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$ dans K, comme elles le sont dans $\mathbb{R}$.

Donc $(K, +, \times)$ est un corps ; on le note généralement $(\mathbb{Q}[\sqrt{d}], +, \times)$. Il est assez facile de démontrer que ce corps n'est pas isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times)$.

L'exemple de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ montre qu'il n'était pas nécessaire d'introduire $\mathbb{R}$ pour résoudre le problème des diagonales des carrés ! Naturellement $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ne résoud pas le le problème de $\sqrt{3}$ ou de $\sqrt[3]{2}$. Mais on peut montrer qu'il existe des sous-corps A de $(\mathbb{R}, +, \times)$, distincts de $\mathbb{R}$, qui sont tels que si a_0, a_1, ..., a_p sont des éléments de A, alors les solutions réelles de l'équation en x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p = 0$$

sont dans A ; en particulier, il y en a un qui est plus petit que tous les autres (au sens de l'inclusion) et il se trouve qu'il est dénombrable ; ceci est suffisant pour être sûr qu'il n'est pas isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times)$. Comme en outre $\mathbb{Q}$ est inclus dans ces sous-corps (comme dans tous les sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$), chacun d'eux contient $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt[3]{2}$ qui sont respectivement solutions des équations en x

$$x^2 - 2 = 0 \quad , \quad x^2 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x^3 - 2 = 0.$$

Les coefficients de ces trois équations sont des rationnels ; pour une raison analogue, ces sous-corps contiennent tous les nombres de la forme $\sqrt[p]{a}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Par contre, un nombre tel que π peut appartenir, ou non, à de tels sous-corps ; il ne faudrait d'ailleurs pas croire qu'un sous-corps qui contient π est nécessairement isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times)$.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE SR

Symétrie centrale et repérage

I – COMMENTAIRES GENERAUX.

1.1 Dans ce chapitre, nous allons établir un lien entre le plan mathématique et l'ensemble des nombres réels (SR2). C'est une idée nouvelle qui n'apparaissait pas dans les chapitres DP et TR. Il existe d'ailleurs des plans qui vérifient les axiomes des chapitres DP et TR et qui ne peuvent pas être liés à IR.

Notons qu'on peut aborder ce chapitre dès qu'on a traité R2 (calculs dans IR et graduations).

Lier le plan à IR c'est, dans cette construction, associer à chaque droite d du plan une ou plusieurs bijections de d sur IR. Il suffisait, d'abord, de redire pour les droites mathématiques ce qui avait été dit pour les droites matérielles dans R1 et R2. Le fait que pour chaque droite d d'un plan mathématique, il existe des bijections de d sur IR, apparaît donc comme un nouvel axiome.

Si d est une droite et f est une bijection de d sur IR, le milieu d'un bipoint apparaît comme le point dont l'abscisse est $\frac{f(A) + f(B)}{2}$; ce point dépend donc de f (Vous pourrez trouver un exercice à ce sujet dans les commentaires de détail). Nous l'avons dit aux élèves mais nous n'avons pas voulu aborder le problème difficile suivant : quel est l'ensemble des bijections de d sur IR pour lesquelles tout bipoint de d a même milieu que pour f ? En particulier, cet ensemble se réduit-il à la classe affine de f ?

Des observations dans un plan matériel conduisent à accepter l'axiome du milieu : on peut munir chaque droite d de bijections de d sur IR de façon que «le milieu se conserve par projection».

Il est alors possible de munir chaque droite d'une SEULE bijection de façon que l'axiome du milieu soit vérifié. Ceci évite d'avoir à donner une réponse à la question théorique posée ci-dessus.

Il reste que les élèves auront sans doute du mal à comprendre en quoi l'axiome du milieu est une propriété des bijections des droites sur IR. Ce que nous faisons dans le manuel de 3ème à propos de l'axiome de Thalès améliorera sans doute la compréhension de cette question.

Il reste également qu'on ne pourra pas évacuer totalement le problème du changement de graduations lorsqu'on s'intéressera aux questions relatives au repérage du plan mathématique.

Remarque.

Il est clair qu'un plan qui vérifie la propriété de Thalès, vérifie également la propriété des milieux, choisie ici comme axiome. On peut se demander si la réciproque est vraie.

4.2 L'axiome du milieu étant adopté, il était possible de traiter le problème de la symétrie centrale [SR3, paragraphe I]. Nous avons préparé cette étude par des manipulations [SR1] conduites de la même façon que celles qui ont introduit les translations.

Nous avons présenté une symétrie centrale matérielle comme cas particulier d'une rotation matérielle. C'était l'occasion de fournir une nouvelle transformation matérielle, et des manipulations intéressantes.

4.3 Le paragraphe 2 du sous-chapitre SR3 est la synthèse entre ce qui vient d'être fait et les translations. Un parallélogramme a été défini dans le chapitre TR par parallélisme de droites ; mais c'est aussi un ensemble de quatre points qui a un centre de symétrie, et on démontre ici que ces deux définitions sont équivalentes.

On peut expliquer maintenant pourquoi nous n'avons pas voulu définir un parallélogramme comme un quadruplet. En effet un quadruplet n'est pas une partie du plan (et ne saurait donc avoir un centre de symétrie !). D'autre part, définir un parallélogramme comme un quadruplet conduit à distinguer le parallélogramme (A, B, C, D) du parallélogramme (B, C, D, A), ..., à moins de dire qu'un parallélogramme est un ensemble de 8 quadruplets... !

Le choix que nous avons fait conduit évidemment à la notation $\{A, B, C, D\}$, qui ne donne pas d'information sur l'ordre des points ; il faut donc préciser deux sommets opposés. Une fois cette précision apportée, on peut parler du parallélogramme ABCD ou aussi bien du parallélogramme BCDA, etc...

4.4 Les propriétés des parallélogrammes particuliers sont traitées au niveau matériel. Il serait maintenant possible de munir le plan mathématique d'une distance puisqu'il est lié à $\mathbb{R}$, mais cela demanderait un nouvel effort théorique important que nous préférons reporter en 3ème.

4.5 De même, nous avons traité le repérage dans un plan matériel. Cela évite de se poser la question du changement de graduations puisque nous avons admis que sur une droite matérielle, il existe une graduation et une seule de repère donné.

Cela permet de se consacrer à ce qui nous intéresse ici : manipuler des coordonnées et conduire des calculs élémentaires sur ces coordonnées.

Bien entendu, la question sera largement reprise dans le livre de 3ème.

II – COMMENTAIRES DE DETAIL.

SR1 **I – UNE NOUVELLE TRANSFORMATION MATERIELLE** ——— page 237

On aurait pu proposer aussi des manipulations comparables à celles de TM3, montrant qu'une suite de 2 pliages autour de deux droites concourantes est une rotation matérielle et, qu'inversement, une rotation matérielle peut se décomposer de plusieurs façons en une suite de 2 pliages autour de deus droites concourantes.

Nous ne l'avons pas fait uniquement par souci d'économie de temps.

1.2 Cette manipulation peut peut-être faire comprendre qu'un point et son transformé ne suffisent pas pour définir une rotation. Cette remarque est à rapprocher utilement de ce qui a été fait pour les translations.

II – SYMETRIE CENTRALE MATERIELLE ——— page 238

2.4 Les deux observations sont également importantes :
- un point aligné avec A et B a pour transformé un point aligné avec A' et B' ;
- un point aligné avec A' et B' est le transformé d'un point aligné avec A et B.

2.5 Exercice 5.

On peut sans doute faire une remarque sur le centre de gravité d'un triangle équilatéral qui est un centre de répétition d'ordre 3, mais pas un centre de symétrie.

III – SYMETRIE CENTRALE ET TRANSLATION ——— page 239

Nous avons fait pour symétries centrales et translations ce que nous n'avons pas voulu faire pour pliages et rotations.

Symétries centrales et translations figurent au programme de la classe et il était intéressant de rapprocher ces deux transformations.

D'autre part, l'analogie avec ce qui a été fait en TM3 sur pliage et translations est aussi enrichissant.

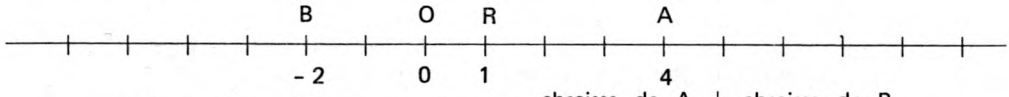
3.2 En particulier, lorsqu'on cherche à décomposer une translation en une suite de deux pliages, la première droite choisie appartient nécessairement à la direction orthogonale à la direction de la translation. Ici au contraire, le premier centre de symétrie peut être choisi librement.

SR2 **I – AXIOME DES DROITES** ——— page 241

1.3 Nous avons dit que si on changeait de bijection, on trouverait peut-être un autre milieu.

On peut faire sentir cela en se plaçant dans un plan matériel.

Soit d une droite matérielle munie d'une échelle régulière graduée. Soit A et B deux points de d.

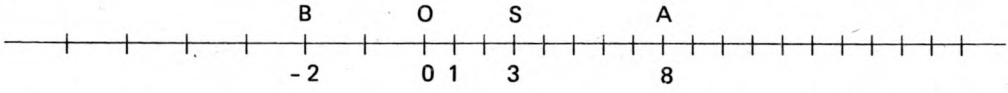


Soit R le point dont l'abscisse est $\frac{\text{abscisse de A} + \text{abscisse de B}}{2}$.

L'abscisse de R est 1. On constate que R est le milieu du segment matériel AB.

Reproduisons la droite d et les points O, A et B.

Conservons les échelons de la demi-droite OB, et partageons en deux chaque échelon de la demi-droite OA.



Le dessin suggère l'idée qu'une autre bijection de d sur R. Soit S le point dont l'abscisse est $\frac{\text{abscisse de A} + \text{abscisse de B}}{2}$.

L'abscisse de S est 3. Le point S est un autre milieu (au sens mathématique).

Il est à remarquer que ce n'est pas le milieu du segment matériel AB.

II – AXIOME DU MILIEU ——————————— page 242

2.2 L'énoncé choisi à la troisième ligne ne dit pas si plusieurs bijections de d sur IR peuvent convenir. C'est volontairement que nous avons laissé cet aspect de la question dans le flou, pour les raisons indiquées dans les commentaires généraux. L'important, pour le moment, est de savoir qu'il y en a au moins une puisqu'on a l'intention de munir chaque droite d'une SEULE bijection de cette droite sur IR.

– Nous avons préféré décrire la situation par une figure plutôt que par un texte au risque d'ailleurs que cette figure ne recouvre pas toute la situation étudiée. Un texte aurait été ici assez long et sa lecture pouvait faire perdre de vue ce qu'on était en train de faire.

2.5 Ici, nous avons préféré donner des énoncés complets, en examinant les différentes situations qui peuvent se rencontrer dans les problèmes.

III – RECIPROQUE DE L'AXIOME DU MILIEU ——————— page 244

La rédaction choisie a pour but de faire comprendre qu'un théorème de ce genre contient trois parties : l'énoncé d'une situations – une hypothèse p et une conclusion q (si p alors q).

La propriété réciproque doit donc contenir l'énoncé de la même situation et avoir q pour hypothèse et p pour conclusion (si q alors p). La réciproque d'une propriété vraie n'est pas nécessairement une propriété vraie, contrairement à ce que pensent souvent des élèves.

IV – ETUDE D'UN PROBLEME page 244

Ce problème n'a pas d'autre intérêt que de faire fonctionner les propriétés qu'on vient d'apprendre.

SR3 **I – SYMETRIE CENTRALE** page 246

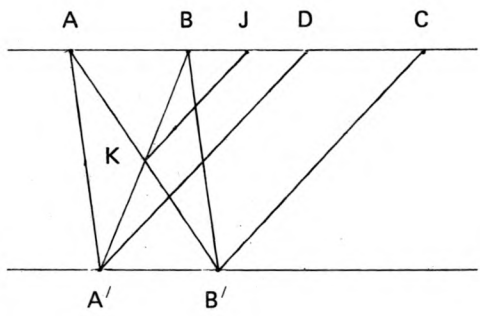
1.3 On a démontré que $s_I^{-1} = s_I$. C'est une nouvelle occasion d'insister sur ce qu'est l'égalité de deux applications.

II – PARALLELOGRAMME page 247

2.4 Nous avons admis ici deux propriétés.

– L'équivalence entre l'égalité $\overline{AB} = \overline{DC}$ et le fait que (A, C) et (B, D) ont même milieu se démontre sur une droite mathématique comme sur une droite matérielle. Il n'y avait donc pas lieu de recommencer.

– Voici une démonstration de l'équivalence entre l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et le fait que (A, C) et (B, D) ont même milieu. Elle est un peu longue. C'est pourquoi nous ne l'avons pas mise dans le livre. Elle peut par contre constituer un sujet de problème.



• Soit A, B, C et D quatre points alignés tels que (A, C) et (B, D) aient même milieu. Appelons J ce milieu.

Soit A' et B' deux points qui n'appartiennent pas à la droite AB tels que $\{A, B, B', A\}$ soit un parallélogramme de sommets opposés A et B'. Appelons K le centre de symétrie de ce parallélogramme.

Dans le triangle $AB'C$, J est le milieu de (A, C) et K est le milieu de (A, B') donc les droites KJ et $B'C$ sont parallèles.

Dans le triangle $BA'D$, J est le milieu de (B, D) et K est le milieu de (A', B) donc les droites KJ et $A'D$ sont parallèles.

On en déduit que les droites $A'D$ et $B'C$ sont parallèles et que $\{A', D, C, B'\}$ est un parallélogramme de sommets opposés D et B'.

On sait maintenant que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

• Soit A, B, C et D quatre points alignés tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Soit A' et B' des points qui n'appartiennent pas à la droite AB et tels que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

$\{A, B, B', A'\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et B'. Appelons K son centre de symétrie.

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$ donc $\{A', D, C, B'\}$ est un parallélogramme de sommets opposés D et B' et les droites $A'D$ et $B'C$ sont parallèles.

Appelons J le point d'intersection de la droite AB et de la droite parallèle à la droite $A'D$ qui passe par K.

Dans le triangle $AB'C$, le point K est le milieu de (A, B') et la droite KJ est parallèle à la droite $B'C$, donc J est le milieu de (A, C) ; de même K est le milieu de (A', B) et les droites KJ et $A'D$ sont parallèles, et J est le milieu de (B, D) ; donc (B, D) et (A, C) ont le même milieu.

2.6 On ne peut faire l'économie de cette propriété très utile dans les problèmes. La démonstration est un peu pénible parce qu'on ne dispose pas de la multiplication externe.

IV – SYMETRIES CENTRALES ET TRANSLATION ——— page 251

Il s'agit évidemment d'un exercice et pas d'un résultat à retenir.

SR5

I – DROITES DE SYMETRIE D'UN PARALLELOGRAMME ——— page 252

1.2 Remarque .

Il faudra évidemment lutter contre la tendance des élèves à écrire : «A = (3 ; - 2)». L'égalité est un verbe entre deux écritures du même objet, ce qui n'est pas le cas ici puisqu'on a affaire à un point et un couple de nombres. Et surtout, cet abus d'écriture est très dangereux puisque les coordonnées d'un point dépendent évidemment du repère choisi.

II – LOSANGE ——— page 252

2.3 Encore un exemple où est posé le problème de la quantification.

L'équation en x dans IR : $1 = \frac{-2+x}{2}$ pose un problème sur lequel on n'a pas encore fait réfléchir les élèves. En effet elle a même ensemble de solutions que l'équation $2 = -2 + x$ qui elle, est l'équation d'une soustraction dans le groupe (IR, +). Nous avons déjà rencontré ce problème dans R2, paragraphe 2.4.

III – EXERCICES ET PROBLEMES.

3.1 Commentaires généraux ; classement des exercices.

Les numéros 1 et 2 sont des compléments aux études faites antérieurement dans les chapitres TM et SR sur les pliages.

Les numéros 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12 et 16 utilisent une ou plusieurs des propriétés ou figure suivantes :

- conservation du milieu par projection,
- droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle,
- équivalences liées au fait qu'un ensemble de quatre points est un parallélogramme.

Dans les numéros 5 et 7 intervient la notion de centre de symétrie d'une figure.

Les numéros 9, 14, 17 et 18 nécessitent d'avoir étudié la symétrie centrale et la notion de symétrique d'un point.

Les numéros 13 et 15 sont relatifs aux parallélogrammes aplatis.

Le numéro 11 fait démontrer une propriété admise dans le document SR3.

Les numéros 19 à 24 et le numéro 27 concernent le repérage dans un plan matériel. Pour ces exercices une réponse qui s'appuie sur l'observation du dessin n'est pas à rejeter à priori.

Les numéros 25 et 26 sont une première approche des représentations graphiques.

Le numéro 28 est un problème résolu.

3.2 Commentaires particuliers ; réponses.

1 **Question** 3 : on n'aurait pas trouvé le même résultat.

2 Le pliage autour de d_1 suivi du pliage autour de d_2 est égal au pliage autour de d_2 suivi du pliage autour de d_1. Il sera bon de faire remarquer qu'il n'en est pas toujours ainsi pour la composée de deux pliages (voir problème numéro 1).

3 Les élèves seront amenés à constater que les droites tracées sont concourantes et ils pourront l'expliquer en utilisant les observations faites dans DP5 sur le parallélisme et l'orthogonalité qui permettent de démontrer que les droites tracées sont les médiatrices du triangle EFG.

13 $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et C.
$\{E, F, G, H\}$ est un parallélogramme de sommets opposés E et G.

15 L'abscisse de D est 5,5 ; celle de E est - 3,5.

17 C'est l'occasion de montrer aux élèves que le raisonnement employé en algèbre pour résoudre des équations est utilisé aussi en géométrie.

18 Les questions 1 et 2 sont faciles. Dans la question 3, le dessin devient compliqué.

IV – COMPLEMENTS MATHEMATIQUES.

Dans [SR] nous introduisons deux nouveaux axiomes : chaque droite du plan est en bijection avec IR, et il est possible de munir chaque droite d'une graduation de façon que les projections parallèles conservent le milieu ; on suppose alors que, dorénavant, les droites sont munies chacune d'une graduation de façon que le milieu soit conservé par projection.

Nous constaterons ici que ces axiomes ne sont pas superflus : les axiomes précédemment retenus n'assurent pas que les droites soient en bijection avec IR (paragraphe 1) ; même si chaque droite du plan peut être mise en bijection avec IR, il peut se faire, pour certains plans, que quelles que soient les bijections vers IR associées aux droites, le milieu ne se conserve pas par projection (paragraphes 2 et 3). Le paragraphe 4 donne un exemple de plan vérifiant tous les axiomes de [DP], [TR] et [SR]. On peut constater qu'un changement de graduations peut permettre de conserver l'axiome du milieu sans que la nouvelle graduation soit obligatoirement dans la classe affine de l'ancienne (paragraphe 5).

Nous terminons en examinant les relations entre l'énoncé de Thalès et l'axiome du milieu (paragraphe 6) : si l'énoncé de Thalès est vérifié, il en est de même par l'axiome du milieu ; la réciproque est fausse.

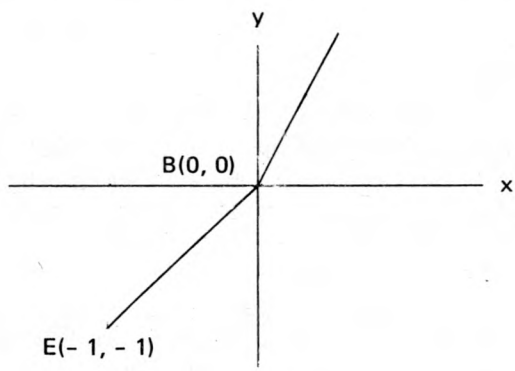
4.1 Nous avons vu que le plan (Q, E) à 4 points étudié dans les commentaires des chapitres DP (paragraphe 4.2) et TR (paragraphe 4.4) vérifie les axiomes des chapitres DP et TR. Bien évidemment, il n'est pas question de trouver une bijection de la droite AB, c'est à dire de $\{A, B\}$, vers IR. Le milieu de (A, B) serait d'ailleurs bien difficile à définir : il doit être sur la droite AB, c'est-à-dire être l'un des points A et B ; lequel ?

On comprend donc pourquoi nous avons été amenés à supposer que pour chaque droite d du plan il y a au moins une bijection de d vers IR. C'est d'ailleurs une démarche qui nous a paru raisonnable, car elle rattache la notion de milieu à celle de mesure sur une droite ; indiquons pourtant qu'il est possible de procéder autrement, en introduisant des axiomes différents.

4.2 Revenons au plan $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ défini dans les commentaires du chapitre DP (paragraphe 4.4).

Il est évidemment possible d'associer à chaque droite δ de ce plan une bijection de δ vers IR : si δ est soit une droite montante, soit une droite descendante, soit une droite horizontale, on peut lui associer $\begin{array}{c}\delta \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x\end{array}$, qui est une bijection ; si δ est une droite verticale, on peut lui associer $\begin{array}{c}\delta \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto y\end{array}$.

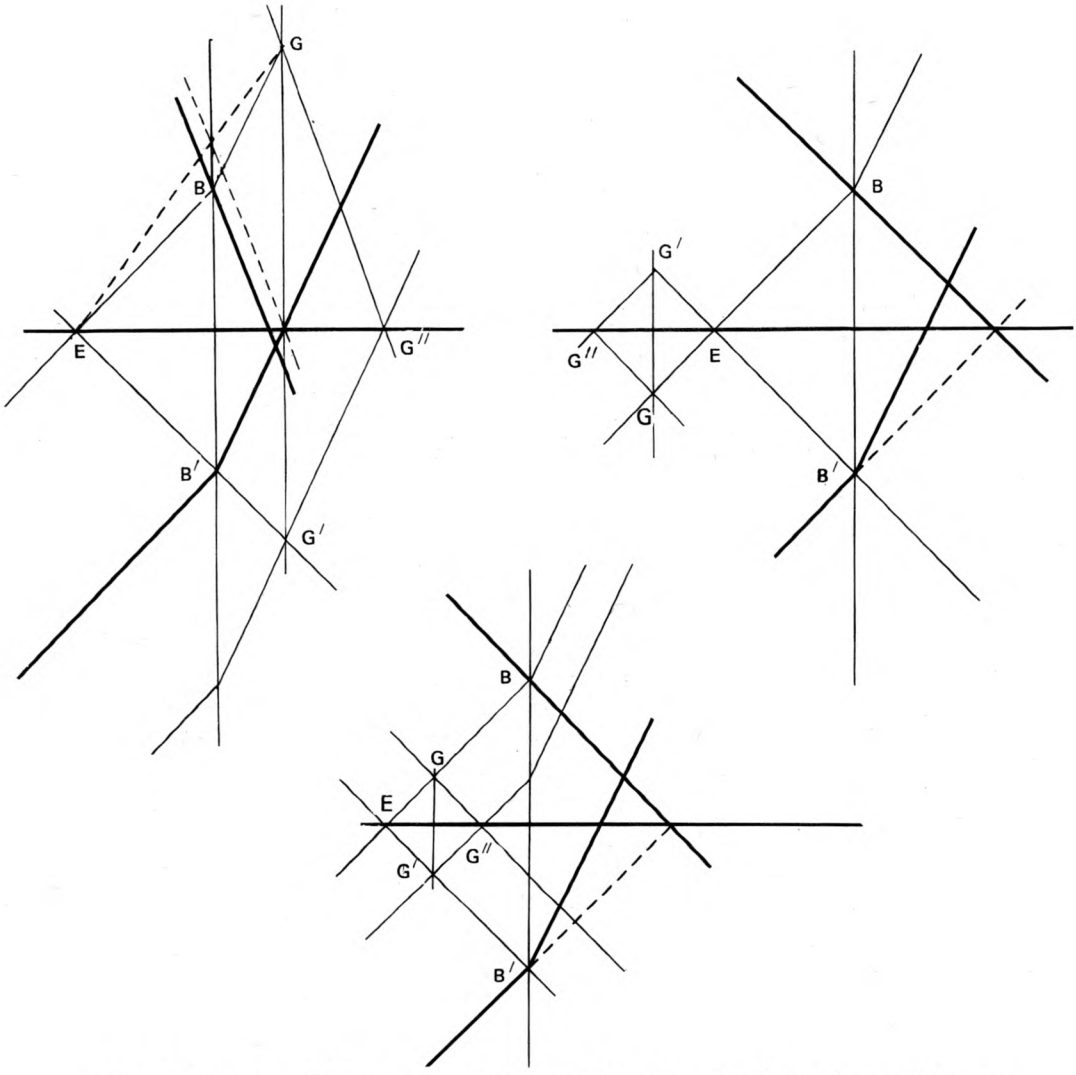
Supposons qu'il soit possible d'associer à chaque droite de ce plan une bijection vers IR de façon que le milieu soit conservé par projection ; munissons chaque droite d'une bijection vers IR de façon que cette propriété soit vérifiée.



Appelons à nouveau B et E les points (0, 0) et (- 1, - 1). Soit G le point de la droite EB tel que $\overline{EB} = \overline{BG}$; autrement dit, B est le milieu de (E, G). Ne sachant rien sur la graduation de la droite EB, nous ne savons pas où est G, sinon que $G \neq E$ et $G \neq B$. Les trois figures suivantes indiquent pourquoi l'hypothèse faite est contradictoire, quelle que soit la position de G.

Sur chaque dessin, B' est le milieu de (E, G') ; le milieu de (E, G'') devrait se trouver sur les trois droites en trait fort.

Concluons : dans un plan, même si l'axiome des droites est vérifié, il n'est pas sûr que l'axiome du milieu le soit.



4.3 L'exemple précédent peut laisser insatisfait : le plan $(\mathbb{R}^2, \Delta')$ ne vérifie pas l'axiome des translations. Mais il existe des couples (P, **D**) qui vérifient les axiomes des chapitres DP et TR, tels que chaque élément de **D** puisse être muni d'une bijection de d vers $\mathbb{R}$, et pourtant tels que, quelles que soient les bijections attachées à chaque droite, l'axiome du milieu ne soit pas satisfait. Nous allons donner une construction très succinte d'un tel plan.

Soit (P, **D**) un plan qui vérifie l'axiome des droites ; supposons qu'il soit possible d'associer à chaque droite une bijection vers $\mathbb{R}$ telle que l'axiome du milieu soit vérifié. Nous avons démontré dans le livre de l'élève que si $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme, les diagonales de ce parallélogramme sont sécantes (elles se coupent même en leur milieu, mais cela ne nous servira à rien ici).

Il existe des corps $(K, +, \times)$ tels que si on note 0 l'élément neutre de leur addition, quel que soit x dans K, il est vrai que $x + x = 0$.

Ces corps sont dits de caractéristique 2. Un exemple de corps de caractéristique 2 est le corps à deux éléments $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$. Un autre exemple est $(\{0, 1, a, b\}, +, \times)$ où les lois $+$ et $\times$ sont données par les tables suivantes.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

×	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Un dernier exemple : le corps des fractions rationnelles à une variable à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif de caractéristique 2, tel qu'il existe une bijection de K vers $\mathbb{R}$ (nous admettrons ici sans démonstration qu'il existe de tels corps ; on peut par exemple considérer le corps des fractions de l'anneau des séries formelles à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). On peut munir K^2 d'un ensemble de droites **D**, comme il a été fait pour $(\mathbb{R}, +, \times)$ au paragraphe **4.3** du commentaire du chapitre DP. Les axiomes des chapitres DP et TR sont vérifiés, comme pour $(\mathbb{R}^2, \Delta)$. Chaque droite d peut être munie d'une bijection de d vers K, et donc d'une bijection de d vers $\mathbb{R}$. Les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont parallèles, de même que les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$; donc $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ est un parallélogramme de sommets opposés $(0, 0)$ et $(1, 1)$. En tenant compte du fait que $(K, +, \times)$ est de caractéristique 2, il est facile de vérifier que les diagonales de ce parallélogramme qui sont les droites d'équation $y = x$ et $y = -x + 1$ ne sont pas sécantes. Ceci, joint à la remarque portant sur les parallélogrammes des plans qui peuvent être munis de graduations pour lesquelles l'axiome du milieu est vérifié, permet de conclure.

4.4 Il existe des plans vérifiant les axiomes des chapitres DP, TR et SR. On peut par exemple considérer le plan $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ défini et étudié au paragraphe **4.3** du chapitre DP et au paragraphe **4.5** du chapitre TR.

Chaque droite de ce plan peut être muni d'une bijection de d vers $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

si d n'est pas une droite verticale, la bijection fait correspondre au couple (x, y), élément de d, le réel x ;

si d est une droite verticale, la bijection fait correspondre au couple (x, y), élément de d, le réel y.

Il est facile de vérifier qu'avec ces bijections, le plan vérifie l'axiome du milieu ; il vérifie d'ailleurs l'énoncé de Thalès.

4.5 On peut considérer $\mathbb{R}$, muni de son addition habituelle, comme un espace vectoriel sur $(\mathbb{Q}, +, \times)$; la loi externe fait correspondre à un rationnel q et un réel t le réel qt. Il existe des applications bijectives linéaires f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, qui ont les propriétés suivantes :

* comme f est linéaire, quels que soient u et v dans $\mathbb{R}$ et p et q dans $\mathbb{Q}$,

$$f(pu + qv) = pf(u) + qf(v) \ ;$$

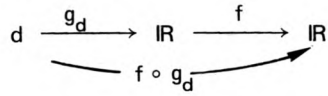
* il existe des réels u et v et des réels h et k tels que

$$h + k = 1 \qquad \text{et} \qquad f(hu + kv) \neq hf(u) + kf(v).$$

Nous admettrons l'existence de telles bijections sans démonstration. [Voici pourtant une indication succinte : supposons qu'une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$ admette 1 et $\sqrt{2}$ comme éléments ; on peut alors considérer l'application linéaire f, telle que $f(1) = \sqrt{2}$ et $f(\sqrt{2}) = 1$, et qui laisse inchangés tous les autres éléments de la base ; on peut enfin définir h, k, u et v ainsi : $u = 1$, $v = \sqrt{2}$, $h = 1 - \sqrt{2}$ et $k = \sqrt{2}$].

Supposons que les droites d'un plan $(P, \mathbf{D})$ soient munies chacune d'une bijection de façon que l'axiome du milieu soit vérifié.

Soit alors d une droite et g_d sa graduation. Soit f une permutation de $\mathbb{R}$ ayant les propriétés indiquées ci-dessus ; alors $f \circ g_d$ est une bijection de d vers $\mathbb{R}$, car c'est la composée de deux bijections.



Soit A et B des points de d, et M son milieu : $g_d(M) = \frac{1}{2}g_d(A) + \frac{1}{2}g_d(B)$.

Suivant l'hypothèse faite sur f, puisque $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} f \circ g_d(M) &= f\left(\frac{1}{2}g_d(A) + \frac{1}{2}g_d(B)\right), \\ &= \frac{1}{2}f(g_d(A)) + \frac{1}{2}f(g_d(B)), \\ &= \frac{1}{2}f \circ g_d(A) + \frac{1}{2}f \circ g_d(B). \end{aligned}$$

Donc, si l'on remplace g_d par $f \circ g_d$ sans rien changer d'autre au plan, les milieux des couples de points de d resteront les mêmes, et l'axiome du milieu sera bien vérifié.

Pourtant, on peut constater que $f \circ g_d$ n'appartient pas à la classe affine de g_d ; nous allons le démontrer par l'absurde. Supposons donc que $f \circ g_d$ soit dans la classe affine de d, et soit a dans $\mathbb{R}^*$ et b dans $\mathbb{R}$ tels que, quel que soit le point M de d,

$$f \circ g_d(M) = ag_d(M) + b.$$

Soit u et v des réels et h et k des réels tels que

$$h + k = 1 \quad \text{et} \quad f(hu + kv) \neq hf(u) + kf(v).$$

Soit P et Q les points de d tels que $g_d(P) = u$ et $g_d(Q) = v$:

$$f \circ g_d(P) = f(u) = ag_d(P) + b = au + b, \quad \text{et}$$

$$f \circ g_d(Q) = f(v) = ag_d(Q) + b = av + b.$$

Notons R le point de d tel que $g_d(R) = hg_d(P) + kg_d(Q) = hu + kv$:

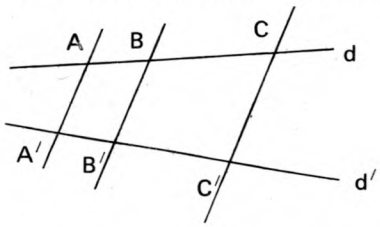
$f \circ g_d(R) = ag_d(R) + b = a(hu + kv) + b = h(au + b) + k(av + b)$ car $h + k = 1$,

et $f \circ g_d(R) = hf(u) + kf(v)$.

D'autre part $f \circ g_d(R) = f(g_d(R)) = f(hu + kv)$. Nous aboutissons à une contradiction, puisque par hypothèse $f(hu + kv) \neq hf(u) + kf(v)$.

Donc $f \circ g_d$ n'appartient pas à la classe affine de g_d, bien que $f \circ g_d$ permette que l'axiome du milieu soit vérifié.

4.6 Soit (P, **D**) un plan dont les droites sont munies de graduations telles que l'énoncé de Thalès soit vérifié. Cet énoncé de Thalès est rappelé par la figure.



$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad (A \neq B).$$

Si B est le milieu de (A, C) alors $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2$; puisque $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = 2$, le point B' est le milieu de (A', C') (nous avons gardé les notations de la figure). Donc si un plan vérifie l'énoncé de Thalès, il vérifie aussi l'axiome du milieu.

Mais la réciproque est fausse. Soit (P, **D**) un plan vérifiant l'énoncé de Thalès, et donc l'axiome du milieu. Soit d une droite et g_d sa graduation. D'après le paragraphe 4.5, il existe une permutation f de $\mathbb{R}$, des points P, Q et R de d et des réels h et k tels que

* si l'on remplage g_d par $f \circ g_d$ sans rien changer d'autre, le nouveau plan ainsi obtenu vérifie l'axiome du milieu ;

* pour la graduation g_d, le point R est le barycentre des points P et Q affectés des masses h et k ;

* pour la graduation $f \circ g_d$, le point R n'est pas le barycentre des points P et Q affectés des masses h et k.

On en déduit aisément que le plan obtenu en remplaçant g_d par $f \circ g_d$ vérifie l'axiome du milieu et ne vérifie pas l'énoncé de Thalès.

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN – 05002 GAP Dépôt légal 174-1979