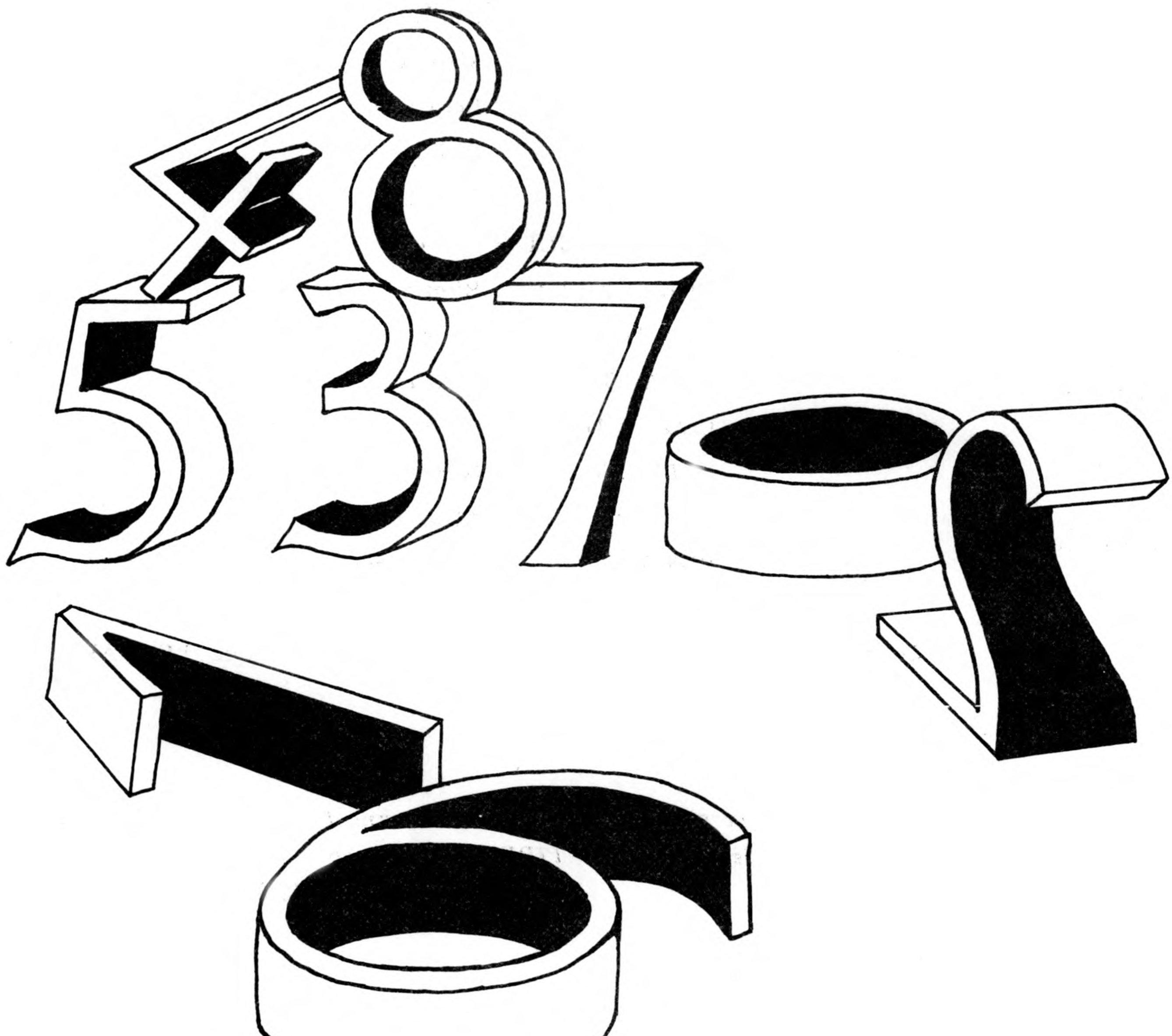
IREM de GRENOBLE

ARITHMETIQUE EN CINQUIEME



Animateurs de l'IREM de Grenoble ayant participé aux travaux du groupe 6ème-5ème.

BARTH	Christian
BLANC	Annie
BOURGEAT	Martine
CAPPONI	Bernard
CLAROU	Philippe
GACHET	Claude
GUILLERAULT	Michel
GUILLERMARD	Rirette
LAFON	Nicole
LANARO	Ostilia
LEGRAND	Marc
LETZGUS	Geneviève
MASSON	Alain
VERJUS	Maryvonne

La frappe de ce document a été réalisée par Monique BERNARD.

Toutes les remarques et suggestions concernant ce fascicule sont à adresser au groupe 6ème-5ème de l'IREM de Grenoble - B.P. 41
38401 Saint-Martin-d'Hères

SOMMAIRE

POURQUOI UNE BROCHURE ARITHMETIQUE EN 5ème ?

L'arithmétique est une partie du programme ne semblant pas poser de problèmes pédagogiques importants. Nous avons cependant choisi de nous y intéresser

— parce que sa relative facilité permet de traiter à travers des activités, beaucoup de résultats peuvent être établis par les élèves eux-mêmes,

— parce que c'est le lieu privilégié d'une préparation au calcul algébrique : acquisition d'une bonne maîtrise des nombres et réflexion sur les différentes écritures d'un nombre.

• UNE REFLEXION SUR L'ECRITURE DES NOMBRES.

Pour réfléchir sur l'écriture des nombres nous proposons (page 6) une activité à partir d'un arbre généalogique où il s'agit de faire savoir aux enfants qu'un même personnage peut être désigné de plusieurs façons (en référence aux autres) mais qu'il y a des situations ou un «nom» est plus intéressant qu'un autre. Nous avons essayé de prolonger cette idée à l'écriture des nombres : par exemple 7×3 n'est pas forcément une opération à faire mais une façon d'écrire 21. Ecrire 51 ou écrire 3×17 c'est donner deux «noms» différents pour un même nombre mais la deuxième écriture montre mieux que l'autre que 51 est un multiple de 17. Ou encore écrire 64 est moins intéressant que d'écrire 4^3 si l'on veut montrer que ce nombre est un cube.

Tout en travaillant sur les multiples et les diviseurs nous avons le souci de réfléchir sur les écritures et les significations qu'elles portent : ce travail est important et facilite beaucoup l'approche de la décomposition en facteurs premiers (nous l'appelons écriture primaire) et permet de faire sentir aux enfants l'intérêt d'une telle décomposition. Par exemple : pour dire que 144 est un multiple de 12 on l'écrit

$2^4 \times 2^3$ puis $2 \times 2 \times 2^2 \times 3 \times 3$ puis $12 \times 2^2 \times 3$;

sur cet exemple apparaît aussi que ce n'est pas toujours la décomposition en facteurs premiers qui est la plus intéressante mais elle permet de trouver facilement d'autres écritures. Etre à l'aise avec ces écritures d'un nombre facilitera par exemple les réductions au même dénominateur en 4ème.

• PAS D'UTILISATION PREMATUREE DES LETTRES.

Nous n'avons à aucun moment (sauf dans quelques exercices et dans l'écriture n^2, page 4) utilisé des lettres pour désigner des entiers naturels, laissant ainsi au professeur le soin de le faire quand cela lui semble possible.

L'utilisation trop précoce et insuffisamment préparée des lettres nous semble être assez souvent néfaste et être un facteur d'échec pour de nombreux enfants.

Par exemple : une phrase somme «a *divise* b signifie qu'il existe un naturel k tel que b = ak», se trouve souvent en début d'un cours d'arithmétique : elle est lue mais beaucoup d'élèves ne lui donnent pas de sens et c'est alors un frein à une bonne compréhension de la notion.

Il vaut mieux découvrir les propriétés et les définitions à partir de manipulations sur des entiers en se familiarisant longuement avec elles pour les comprendre et savoir les utiliser. Ensuite, il sera peut-être intéressant pour les résumer d'utiliser une écriture que l'on cherchera avec les enfants dans une réflexion collective ; et l'introduction des lettres aura alors sa place.

- **UN TRAVAIL SOUS FORME D'ACTIVITES.**

Elles font appel à l'initiative des élèves et laissent une large place aux remarques spontanées qui peuvent être regroupées collectivement. Les activités proposées aux élèves sont de 2 types.

1 – Tout d'abord des activités pour préparer l'introduction d'un nouveau concept. Par exemple les arbres et les nombres figurés sont deux approches différentes pour la notion de nombres premiers ; d'ailleurs nous avons cherché le plus possible à approcher de facons différentes une même notion. Cette manière de travailler est un facteur de réflexion et de consolidation important. Pour que ces approches puissent se faire à des périodes de l'année pas trop rapprochées les unes des autres, il nous semble intéressant de commencer l'arithmétique assez tôt dans l'année.

2 – Ensuite des activités qui utilisent ces notions nouvelles soit pour les consolider soit pour familiariser l'élève avec des méthodes qu'il utilisera plus tard (activités d'ouverture). On trouvera des activités d'ouverture surtout dans les thèmes proposés. Il nous semble bon que ces activités d'ouverture s'insèrent entre les autres. Cela permettra d'aller plus loin que la simple acquisition et le contrôle de mécanismes.

- **UTILISATION DE «CALCULETTES»**

Les «calculettes» constituent un outil de plus en plus à la portée des enfants.

Nous pensons qu'il faut leur apprendre à s'en servir et à les utiliser dans les recherches qu'ils font en arithmétique. Les calculatrices permettent d'aller souvent plus loin sans être arrété par les difficultés de calcul et l'aspect fastidieux de calculs prolongés (qui peut faire des divisions pendant des heures entières pour chercher des diviseurs !).

Certaines activités proposées seraient trop longues pour des enfants ne possédant pas de machines, il faudrait penser alors à les limiter.

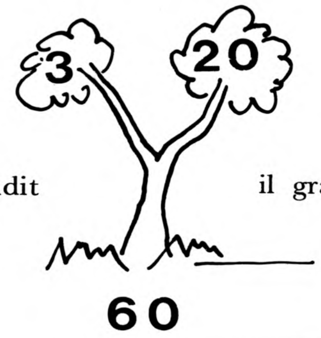
IREM de GRENOBLE

FICHES D' ACTIVITES

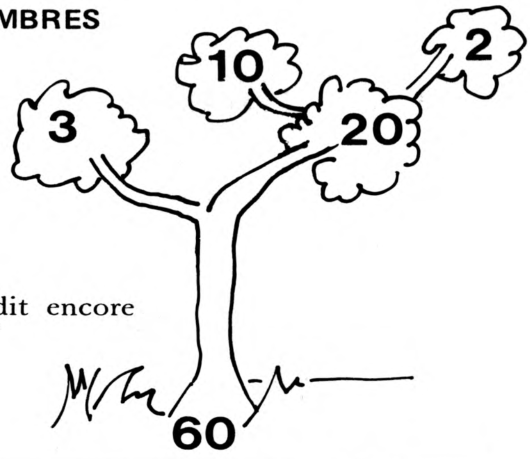
A l'exception de la division Euclidienne, ces fiches traitent l'ensemble du programme d'Arithmétique de 5ème.

DES ARBRES ET DES NOMBRES

et l'arbre grandit



il grandit encore



1

1. Fais, toi aussi, pousser un arbre de la même façon. Tu dessineras plusieurs moments de la «croissance» de cet arbre.

un peu plus tard

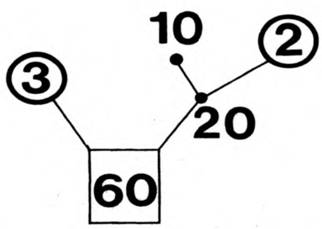
un peu plus tard

2. Recommence avec 56.

On va faire le bilan de tous les arbres trouvés.
Pour 56, si les arbres que tu as dessiné ne sont pas au tableau, va les représenter.

2

Regarde le schéma simplifié d'un arbre.



A partir de maintenant on utilise seulement des entiers naturels et on ne met pas de 1 en bout de branche.
Un arbre qu'on ne peut plus faire grandir s'appelera «Arbre adulte».

Le nombre de départ c'est le tronc, les bouts de branches ce sont les feuilles. (Le nombre est alors entouré).

Les nombres qui sont dans les feuilles sont des NOMBRES PREMIERS

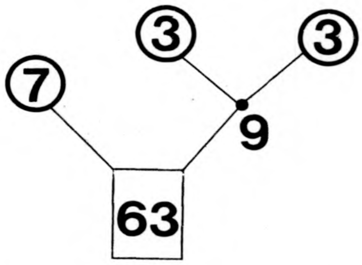
3

Est-ce que 15 peut être une feuille ? Même question pour 17 ; pour 3 et pour 39. Explique tes réponses.

1

Choisis des nombres et construis les arbres adultes qui auront pour tronc ces nombres.
Pour chaque arbre, fais le produit des feuilles. Que constates-tu ?

Voici un exemple :



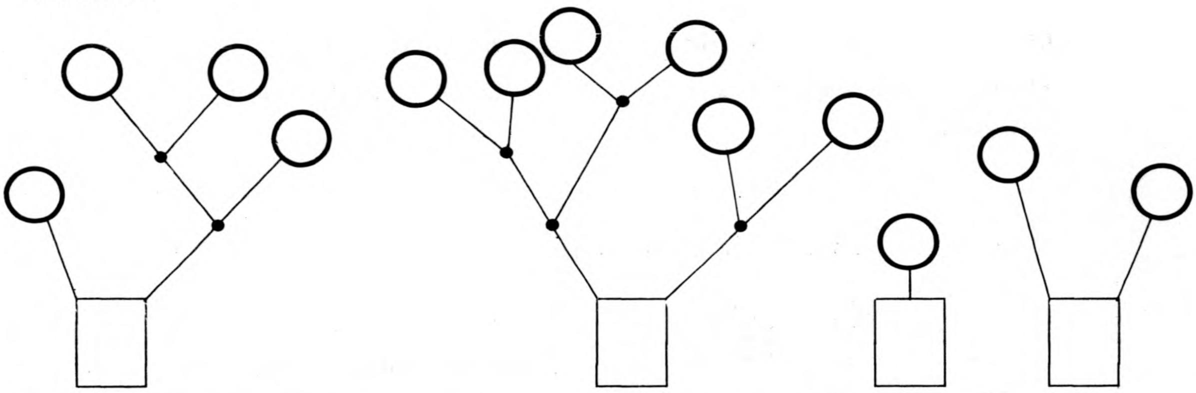
$63 = 7 \times 3 \times 3$ ou encore $63 = 7 \times 3^2$

2

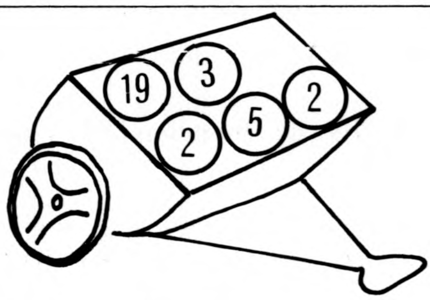
Dessine les arbres adultes des nombres 17, 23, 39, 41, 51, 71, 77, 87.
Que peux-tu dire d'un arbre qui a pour tronc un nombre premier ?

3

Trouve des nombres qui te permettent de compléter les arbres adultes suivants.

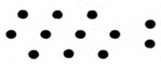


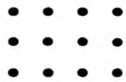
4



Un arbre avait comme feuilles les nombres qui sont dans la remorque.
Construis des arbres différents qui ont chacun toutes ces feuilles-la.
Que remarques-tu ?

NOMBRES FIGURES

Voici 12 points  On peut les disposer :

en rectangle : 

en ligne :

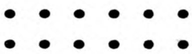
1

1. Peut-on disposer 6 points en rectangle ? Et 10, 12, 13, 15, 17, 24, 25 points ? Chaque fois que tu réponds **oui** dessine le rectangle.

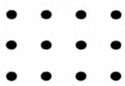
2. Choisis 5 nombres et dis, (sans les dessiner), si tu peux les disposer en rectangle. Si oui, donne le nombre de points dans la largeur et dans la longueur.

2

Peux-tu disposer 23 points en rectangle ? Explique pourquoi.
Peux-tu les disposer en ligne ?
On peut disposer 12 points en rectangle de plusieurs façons :

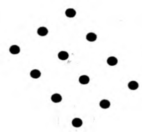


1



2

3



4

Mais nous dirons que la première et la troisième façons ne sont pas différentes, la deuxième et la quatrième non plus.

3

Donne toutes les façons différentes de disposer en rectangle :
24 points ; puis 36 points ; puis 30 points.
Trouve un nombre qui a 4 figures rectangulaires différentes.

4

Parmi les dessins que tu as fait depuis le début, certains sont des carrés.
- Ecris quelques nombres que l'on peut représenter avec un carré.

Ces nombres sont des NOMBRES CARRES. On dit aussi simplement des CARRES.

- 36 est-il un nombre carré ?
- 24, 64, 8, 42, 144, 200 sont-ils des nombres carrés ?
- Sans dessiner donne 5 nombres carrés plus grand que 100.

1

16 est un nombre carré
il y a 4 points sur chaque
côté du carré.

● ● ● ●
● ● ● ●
● ● ● ●
● ● ● ●

On écrit $16 = 4^2$ (on lit 16 égale 4 au carré).
49 est un nombre carré. Complète alors $49 = 7^{\dots}$
Comment lit-on cette écriture ?

Complète : $1^2 = \dots$; $2^2 = \dots$; $3^2 = \dots$; $\dots = 16$;
$\dots = 25$; $\dots = 36$; $7^2 = \dots$; $8^2 = \dots$;
$\dots = 81$; $10^2 = \dots$; $13^2 = \dots$; $23^2 = \dots$.

2

Tu as **remarqué** que $7^2 = 7 \times 7$ et $13^2 = 13 \times 13$.

De la même façon si on a un nombre entier naturel quelconque désigné par la lettre n : on écrira $n \times n = n^2$.

3

Avec 14 points

1. Tu peux dessiner un rectangle

● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ●

Il y a 2 points dans la largeur
7 points dans la longueur
$\Big\}$ $2 \times 7 = 14$

2 et 7 sont des diviseurs de 14.

2. Tu peux aussi les disposer en ligne (et considérer cette ligne comme un rectangle aplati).

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Ce rectangle aplati a 1 point dans la largeur
14 points dans la longueur
$\Big\}$ **$1 \times 14 = 14$**

1 et 14 sont aussi des diviseurs de 14.

Il n'y a pas d'autre représentation rectangulaire de 14.
L'ensemble des diviseurs de 14 est $\{1, 2, 7, 14\}$.

4

Donne l'ensemble des diviseurs de 21.

5

Explique pourquoi 14 est un diviseur de 42.

Nous voulons trouver les diviseurs des naturels inférieurs à 100.

1 Cherche d'abord tout seul, sur ton cahier les diviseurs de tous les naturels inférieurs à 30.

Comment fais-tu pour ne pas oublier de diviseurs de 30 ?
Compare tes résultats avec tes camarades.

2 Continue le même travail pour trouver les diviseurs des naturels de 30 à 100.

3 Classe les naturels de 1 à 100 d'après leur nombre de diviseurs en les rangeant dans un tableau de la forme suivante que tu feras sur ton cahier (prévois une page entière pour ce tableau).

nombre de diviseurs	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix	onze	douze
				6		12						

Exemple : l'ensemble des diviseurs de 6 est $\{1, 2, 3, 6\}$.
6 a quatre diviseurs : je le range dans la colonne quatre.

Explique pourquoi j'ai mis 12 dans la colonne 6.

4 Observe le tableau et écris les remarques que tu fais.

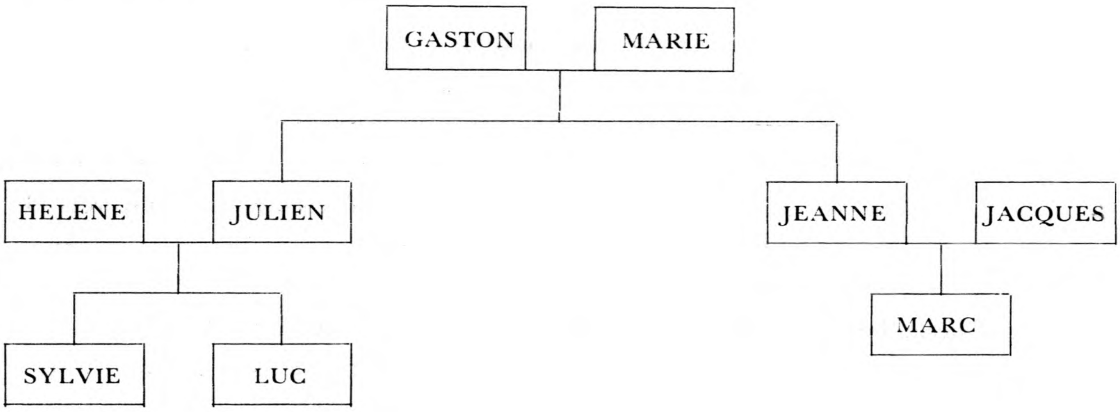
Les nombres entiers naturels qui ont exactement deux diviseurs sont appelés NOMBRES PREMIERS.

HISTOIRE DE NOMS.

1

Les enfants de Gaston et Marie.

Voici un extrait d'un arbre généalogique.



Jeanne est le prénom de la fille de Gaston et de Marie.
Jeanne peut être désignée de plusieurs façons :

- la tante de Sylvie ; - Jeanne ; - la fille de Gaston.

Donne 5 autres noms pour désigner Jeanne.

2

Comment désigneras-tu Marie pour en parler ?

- à Sylvie ?
- à Jeanne ?
- à Hélène ;
- à Gaston.

Comment désigneras-tu Jacques pour en parler ?

- à Gaston ;
- à Marc ;
- à Luc ;
- à Julien.

3

Les noms suivants sont-ils des noms corrects pour Jacques ?

- le gendre de Gaston ;
- le père de Marc ;
- l'oncle de Luc ;
- le mari de Jeanne ;
- le beau frère de Julien.

Luc, Marc et Sylvie vont à l'école du quartier. Tous les enfants de l'école les connaissent. Jacques rentre à ce moment dans la cour de l'école. Les enfants se disent entre eux : «Qui est ce Monsieur ? ».

Parmi les «noms» de Jacques cités plus haut quels sont ceux qui renseigneront le mieux des enfants ?

Tous ces noms désignent la même personne mais suivant les situations ce n'est pas toujours le même nom qui est le plus utile.

Les noms des nombres : Ecritures.

1

Voici un nombre : six.

Voici d'autres noms pour ce nombre : 6

2×3

$2 + 4$

....

- Donne-en d'autres......
- Y en-a-t'il beaucoup ? Explique.

Les différents noms d'un nombre sont appelés des écritures de ce nombre.

- Donne dix écritures pour le nombre 24.

2

Tu sais que 25 est un carré.

- Donne une écriture de 25 qui montre que c'est un carré.
- Fais le même travail pour 144 et 256.

3

Tu sais que 7 est un diviseur de 28.

- Donne une écriture de 28 qui montre que 7 est un diviseur de 28.
- Donne une écriture de 132 qui montre que 11 est un diviseur de 132.

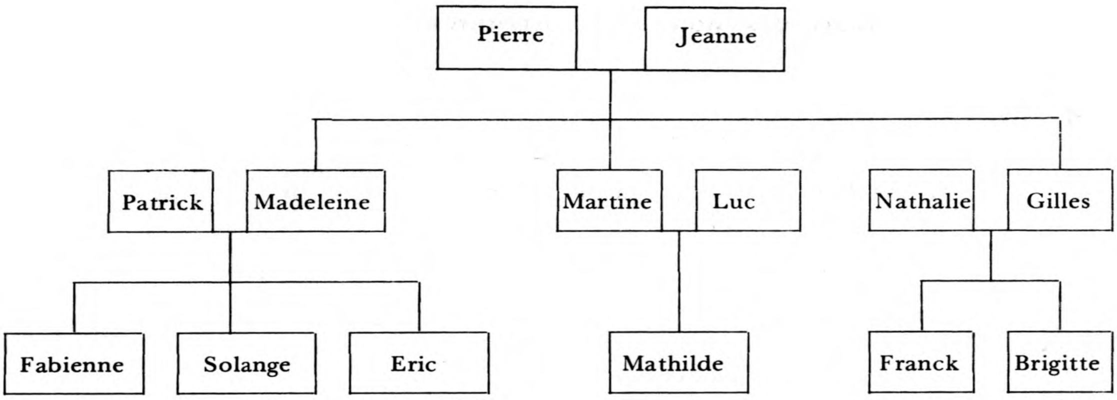
4

Donne une écriture de 100 qui montre que :

- 100 est un nombre pair.
- 4 est un diviseur de 100.
- 100 est un carré.
- 100 est un multiple de 20.
- 100 est la somme de deux nombres impairs consécutifs.
- 5 est un diviseur de 100.
- 100 est la somme de deux carrés.

Quel signe mathématique utilises-tu pour montrer que deux écritures désignent un même nombre ?

1



Je dis :

- la belle fille de Jeanne ;
- la tante de Franck ;
- le cousin de Franck ;
- le gendre de Jeanne ;
- le petit fils de Pierre ;
- la nièce de Patrick.

Certains de ces noms désignent plusieurs personnes, d'autres n'en désignent qu'une. Précise lesquels.

Pour les «noms» qui désignent plusieurs personnes **complète-les** pour qu'ils ne désignent plus qu'une seule personne.

Exemples : le gendre de Jeanne, qui a 3 enfants (c'est Patrick) ;
le gendre de Jeanne, qui a 1 enfant (c'est Luc).

2

1 - Certaines écritures mathématiques sont aussi ambigües et peuvent désigner plusieurs nombres.

Par exemple : trouve plusieurs significations possible à l'écriture $24 : 6 : 2$.

2 - Pour qu'une écriture mathématique soit correcte elle ne doit désigner qu'un seul nombre. Pour lever les ambiguités on utilise des parenthèses.

Regarde cette écriture : $36 : 12 : 6 : 2$

Mets des parenthèses pour qu'elle désigne le naturel 1 ; 9 puis 36.

3 - Complète les écritures suivantes, quand cela te semble nécessaire, pour qu'elles désignent un naturel. Donne éventuellement différentes significations.

- a) $2 + 3 \times 5 + 4$;
- b) $5 + 2 : 7 + 3$;
- c) $28 : 7 - 5 \times 2$;
- d) $7 + 6 \times 8$.

1

Tu sais que $18 = 3 \times 6$ et que 3 et 6 sont des diviseurs de 18.
On peut dire aussi que «18 est un multiple de 3» et que «18 est un multiple de 6».

18 est-il un multiple de 2 ?	Pourquoi ?
18 est-il un multiple de 9 ?	Pourquoi ?
18 est-il un multiple de 5 ?	Pourquoi ?
18 est-il un multiple de 1 ?	Pourquoi ?
18 est-il un multiple de 18 ?	Pourquoi ?
18 est-il un multiple de 0 ?	Pourquoi ?
35 est-il un multiple de 7 ?	Pourquoi ?
35 est-il un multiple de 5 ?	Pourquoi ?
35 est-il un multiple de 2 ?	Pourquoi ?
35 est-il un multiple de 3 ?	Pourquoi ?
35 est-il un multiple de 1 ?	Pourquoi ?
35 est-il un multiple de 35 ?	Pourquoi ?
35 est-il un multiple de 0 ?	Pourquoi ?

2

Ecris l'ensemble des multiples de 2 inférieurs ou égaux à 20.
Ecris l'ensemble des multiples de 3 inférieurs ou égaux à 20.
Quel est l'ensemble des multiples de 1 ?
Quel est l'ensemble des multiples de 0 ?

3

108 est un multiple de 12 car une écriture de 108 est $\underline{12} \times 9$
25 627 est un multiple de 7 car une écriture de 25 627 est $7 \times$ ....

Donne une écriture de 3 237 qui montre que c'est un multiple de 13.

4

- Est-ce que le nombre $2 \times 5 \times 3 \times 7$ est un multiple de 6 ?
- Je regarde le nombre $6 \times 38 \times 3 \times 25 \times 182$ et je dis tout de suite : «c'est un multiple de 18».

  Trouve comment j'ai fait.
- Est-ce que $3 \times 5 + 7 \times 4$ est un multiple de 21 ?
- Est-ce que 28×35 est un multiple de 10 ?
- Est-ce que 84×63 est un multiple de 14 ?
- Est-ce que 24×39 est un multiple de 26 ?

Prends une feuille où sont représentées des cases numérotées de 1 à 200.*

• Colorie d'abord 1.

• Entoure le 2 et colorie tous les autres multiples de 2. C'est-à-dire 4, 6, 8, 10, etc...

• Entoure le 3 et colorie tous les autres multiples de 3. C'est-à-dire 6, 9, 12, 15, etc... Certains étaient déjà coloriés.

Quel est le premier multiple de 3 qui n'était pas encore colorié ?

• Si tu essaies de colorier les multiples de 4 que constates-tu ? Pouvais-tu le prévoir ?

• Entoure le 5 et colorie tous les autres multiples de 5. Quel est le premier multiple de 5 qui n'était pas encore colorié ?

• Essaie de colorier les multiples de 6. Que constates-tu ? Pouvais-tu le prévoir ?

• Entoure le 7 et colorie tous les autres multiples de 7.

Quel est le premier multiple de 7 qui n'était pas encore colorié ?

• As-tu colorié les multiples de 8 ? Pouvais-tu le prévoir ?

• Le premier nombre qui n'est pas encore colorié est 11. Entoure-le et colorie tous ses autres multiples.

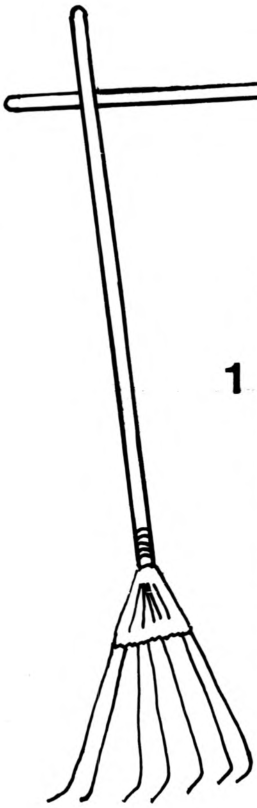
Quel est le premier multiple de 11 qui n'était pas encore colorié ? Pouvais-tu le prévoir ?

• Fais de même avec 13.

• Fais de même avec 17.

• Que peux-tu dire de tous les nombres coloriés ? De tous les nombres entourés ? et des autres ?

(*) **(Utiliser la feuille : Annexe 4 page 69).**



DES FEUILLES, TOUJOURS DES FEUILLES.

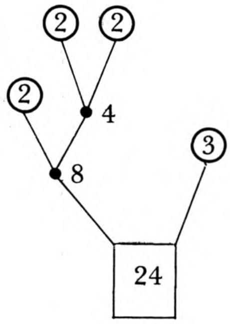
1

Pour chaque entier naturel tu peux construire un arbre, comme sur l'exemple. On dit alors que **l'on a décomposé** 24 en **facteurs premiers.**

tu sais alors que $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

ou encore $24 = 2^3 \times 3$.

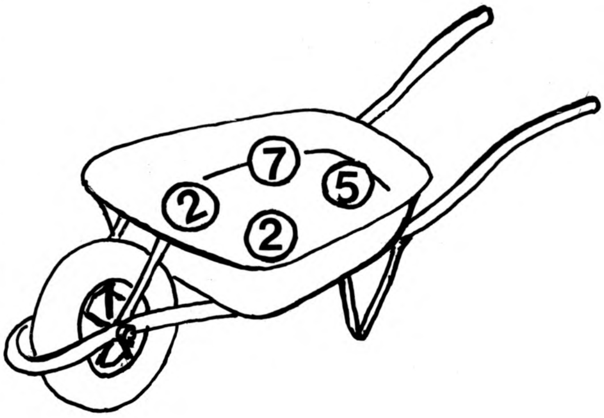
$2^3 \times 3$ **est l'écriture primaire de** 24.



Donne l'écriture primaire de :
30, 60, 63, 72, 90, 140, 180, 198, 240, 288.

Compléter un arbre.

2



Dans cette brouette il y a des feuilles.
Construis un arbre avec ces feuilles.

Si tu rajoutes la feuille 3 dans la brouette, peux-tu compléter l'arbre que tu viens de dessiner ? Essaye de le faire. Quel nouveau tronc obtiens-tu ?

- Dessine un arbre qui a 30 pour tronc.
Rajoute à cet arbre les feuilles 3 et 7

- Dessine un arbre qui a 54 pour tronc.
Rajoute à cet arbre les feuilles 2 5 et 3

Colorie les feuilles que tu rajoutes et les branches aussi.

Tu sais maintenant compléter un arbre en lui rajoutant des feuilles.

Ecriture primaire de carrés.

1

- Trouve l'écriture primaire de 6 et de 9 : 6 = ... ; 9 = ...

  Peux-tu trouver rapidement l'écriture primaire de 6×9 ?
  Explique comment tu fais.
- Trouve l'écriture primaire de 6×6.

2

- Trouve l'écriture primaire de 8. 8 = ...
  puis l'écriture primaire de 8^2. 8^2 = ...
- Trouve l'écriture primaire de 12. 12 = ...
  puis l'écriture primaire de 12^2. 12^2 = ...
- De même trouve les écritures primaires des nombres suivants :

20 = ...	30 = ...	36 = ...
20^2 = ...	30^2 = ...	36^2 = ...

- Ecris une phrase pour expliquer comment tu peux trouver à partir de l'écriture primaire d'un nombre l'écriture primaire de son carré.

3

Voici des nombres et leur écriture primaire, trouve simplement l'écriture primaire de leur carré :

$224 = 2^5 \times 7$	$224^2 =$
$270 = 2 \times 3^3 \times 5$	$270^2 =$
$750 = 2 \times 3 \times 5^3$	$750^2 =$

4

Voici des nombres : 36, 46, 50, 24, 144, 225, 200.

— trouve leur écriture primaire
— peux-tu dire en regardant cette écriture lesquels sont des carrés ?

5

Trouve l'écriture primaire de 3 600.

Dis pourquoi c'est un carré.

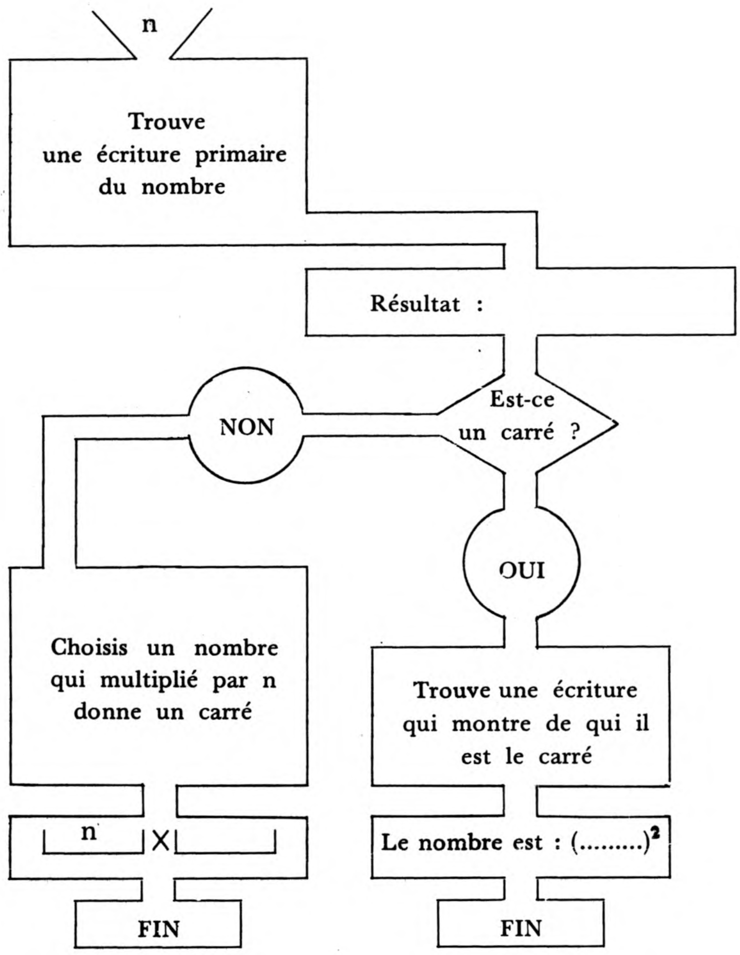
C'est le carré de quel nombre ?

6

Quel nombre désigne $(2 \times 3)^2$?

Donne au moins 5 autres écritures de ce nombre.

Regarde la machine : j'ai fait passer 196, puis 48 dans cette machine.



Exemples

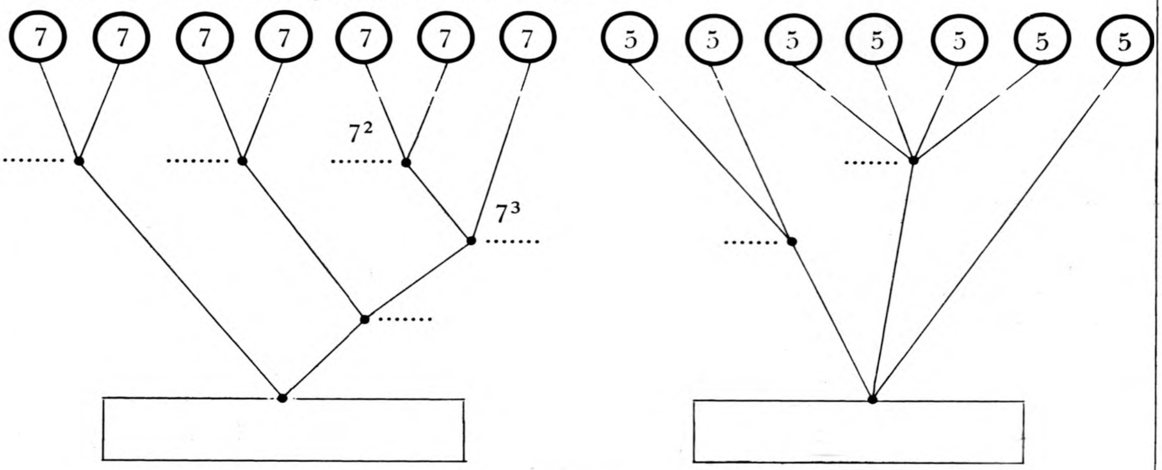
n = 196	n = 48
$196 = 2^2 \times 7^2$	$48 = 2^4 \times 3$
	NON
OUI	$(2^4 \times 3) \times 3$
$196 = (2 \times 7)^2$	$48 \times 3 = 2^4 \times 3^2$ $144 = (2^2 \times 3)^2$

Voici une liste de nombres : 50 ; 64 ; 25 ; 32 ; 124 ; 92 ; 441.

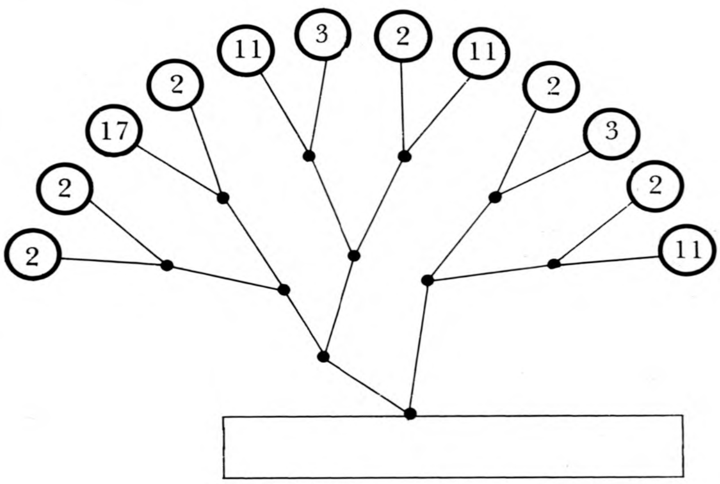
A ton tour, fais les passer dans la machine.

Avec des puissances.

1 Ecris à l'aide des puissances de 7 puis de 5



2



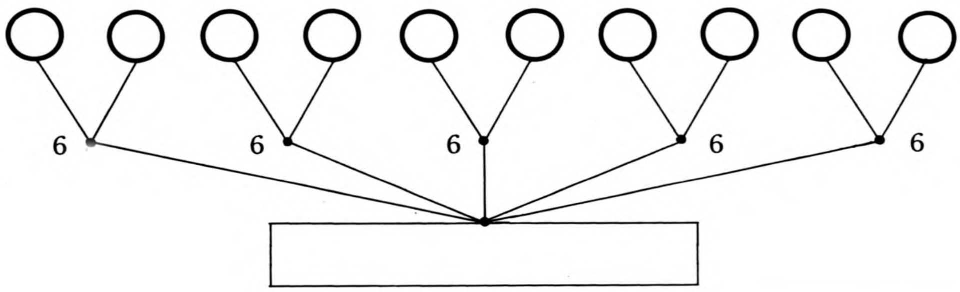
Sans calcul donne une écriture primaire du tronc.

3 Trouve une écriture qui montre que 2^7 est divisible par 8 : ....

Trouve un multiple de 2^7 : ....

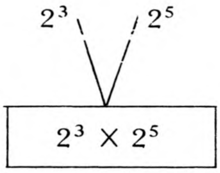
4 Cherche une écriture primaire de 6^5.

Basil a un moyen rapide de le faire.
Il dit $6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ et il dessine.



1

Trouve l'arbre de $2^3 \times 2^5$.



Complète $2^3 \times 2^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2

Simplifie les écritures :

$7^2 \times 7^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2^4 \times 2^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2^6 \times 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2^3 \times 3^7 \times 3^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2^4 \times 2^7 \times 2^9 \times 3^2 \times 3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3 \times 3 \times 2^4 \times 2 \times 3^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$7^2 \times 7 \times 3 \times 2 \times 3^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2^8 \times 3^9 \times 2 \times 7 \times 3^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3

Complète les égalités suivantes.

$2^2 \times 5 \times 7 = 2 \times 7 \times \ldots\ldots\ldots\ldots$
$= 5 \times 7 \times \ldots\ldots\ldots\ldots$
$= 2 \times 5 \times \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2^2 \times 3^5 \times 7 = \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 3^5 \times 7$
$= \ldots\ldots\ldots \times 3^3 \times 7$
$= \ldots\ldots\ldots \times 2^2 \times 3^2 \times 7$
$= \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 3 \times 7$

4

Sans calculer 30^4 trouve l'écriture primaire de ce nombre.
Fais de même pour 16^5 puis pour 63^3 puis pour 210^4.

En vrac....

- Quelle est l'écriture primaire de $15^3 \times 6^4$? de $4^3 \times 14^2$?
- $a = 2^2 \times 3^3 \times 15 \times 42$.
  a est-il multiple de 2^2 ?.... de 2^3 ?.... de 2^7 ?... de 5^2 ?...
- Avec le moins de calculs possibles donne une écriture qui montre que les nombres ci-dessous sont divisibles par 126.
  (Il peut être intéressant d'avoir l'écriture primaire de 126).

$b = 35 \times 27 \times 4$ $\qquad$ $d = 14^3 \times 15^2$

$c = 20 \times 210 \times 3$ $\qquad$ $e = 30 \times 49$.

- Parmi b, c, d, e lesquels sont des multiples de 75 ?

COMMENTAIRES POUR L'UTILISATION DES FICHES

Page 1.

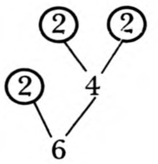
L'activité «des arbres et des nombres» est intéressante car elle permet aux enfants d'aborder facilement la décomposition d'un nombre en produits de facteurs (premiers ou non) et donne une approche des nombres premiers.

Il semble nécessaire dans le cadre **1** de laisser chercher tous les arbres possibles par les enfants puis de faire un **bilan collectif** à partir de ce qu'ils ont trouvé pour mettre en place les conventions présentées dans le cadre **2.**

En particulier :

1) Eléminer les arbres avec des additions (mauvaise interprétation de la consigne de départ).

exemple :



2) Ne pas mettre 1 :

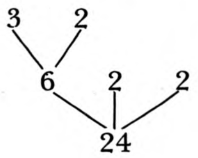
On peut analyser l'intérêt de cette convention avec les enfants et l'utiliser pour définir un nombre premier.

3) Conventions d'écritures et de langage :

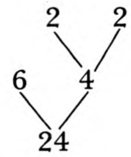
Un nombre reconnu comme premier est **entouré** et on définit les mots **arbre adulte** et **feuille.**

4) Possibilité d'écrire une décomposition **directe** en produit de 3 facteurs (ou plus) : ce qui est utilisé plus loin avec l'étude des puissances. (page 14).

exemple :



au lieu de



Page 5.

Cette activité, par son objectif de familiarisation des élèves avec les nombres de 1 à 100 est un moment important du Cours d'arithmétique : elle s'étend au moins sur une séance, vraisemblablement plus (et peut éventuellement être terminée à la maison).

● La première partie (étude des nombres de 1 à 30) est conduite de façon empirique par les élèves qui, se rendent compte en confrontant leurs résultats avec leurs camarades, que des diviseurs sont «oubliés». Une mise au point collective à ce moment permet de dégager une méthode exhaustive de recherche des diviseurs ; par exemple les regrouper par deux et conduire l'investigation par ordre croissant.

Exemple : pour 30

1	2	3	5
30	15	10	6

pour 36

1	2	3	4	6
36	18	12	9	6

Des remarques utiles sont souvent faites à ce niveau :

- Si 2 n'est pas un diviseur, inutile de chercher un diviseur pair.
- Les carrés et eux seuls ont un nombre impair de diviseurs.
- La recherche s'arrête quand les «deux suites se croisent»

• Munis de cette méthode, les élèves feront le travail pour les nombres de 31 à 100 : on peut concevoir pour cette partie de répartir les nombres entre plusieurs groupes dans la classe, ou de faire terminer l'étude à la maison.

Dans tous les cas, il nous semble nécessaire de ne pas craindre de «perdre du temps». Une bonne connaissance des nombres de 1 à 100 est utile dans le calcul algébrique : on l'obtiendra dans cette familiarisation par activité répétitive en même temps que s'installera mieux la notion de diviseur.

Pour les quelques élèves qui ont des difficultés en calcul, une petite machine pourra les aider, tant sur le plan de la motivation que de la recherche.

• **Cadre 3.**
Les résultats peuvent être rassemblés dans un tableau affiché dans la classe. Ce travail permettra une nouvelle rencontre avec les nombres premiers déjà vu comme «feuilles» des arbres : ce sont les nombres de la colonne «2 diviseurs» (à noter que 1 est bien à part, et qu'il est nécessaire de ne pas le considérer comme un nombre premier pour l'unicité de la décomposition).

— On retrouvera que dans les colonnes «impaires» ne figurent que des carrés.

— On pourra peut-être, après la décomposition en facteurs premiers, prolonger l'analyse pour voir apparaître le lien entre exposants de la décomposition et nombres diviseurs, en observant la décomposition des nombres figurant dans une même colonne.

[Si la décomposition en facteurs premier de N est $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$ il a $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$ diviseurs].

Page 9.

Cadre 1 : Dans ce paragraphe il est possible de «pousser» les enfants vers des écritures du type :

18 est multiple de 2 ? *oui.* Pourquoi ? *car 2 X 9 est une écriture de 18.*

ou encore

20 est-il un multiple de 9 ? *non.* Pourquoi ? *car 2 X 9 est plus petit que 20, et 3 X 9 est plus grand que 20.*

Cadre 3 : L'utilisation de grands nombres oblige à préciser la définition de a est multiple de b sans pour autant faire appel à une écriture littérale.

Cadre 4 : Ce paragraphe est difficile pour des enfants mais de tels exercices sont indispensables pour la maîtrise de la notion de multiple.

Page 12.

Cette activité cherche à faire découvrir à travers des exemples comment trouver l'écriture primaire d'un carré.
On cherche aussi à reconnaître un carré en observant son écriture primaire.
Bien entendu les résultats observés seront ensuite admis pour pouvoir être utilisés.

Nous avons voulu que cette fiche débouche sur une réflexion à propos d'écritures du type $(2 \times 3)^2$: que désigne-t-elle ? Comment peut-on écrire autrement $(2 \times 3)^2$? Cette réflexion devrait être menée collectivement à partir des différentes écritures proposées par les enfants dans le cadre **6**.

Page 13.

Cette fiche est difficile et n'est pas indispensable, elle prolonge le travail de la page 12. Il est souhaitable de la traiter collectivement en expliquant aux élèves, sur des exemples simples, que l'on recherche parmi les multiples non-nuls d'un nombre, le plus petit qui soit un carré.

par exemple : pour les nombres suivants nous avons entouré dans leur liste de multiples le plus petit qui soit un carré.

pour 12	12 ,	24 ,	36 ,	48 ,	.....		
pour 9	9 ,	18 ,	27 ,	.....			
pour 6	6 ,	12 ,	18 ,	24 ,	30 ,	36 ,	.....

Ensuite on peut utiliser la fiche pour montrer comment l'écriture primaire permet de résoudre plus facilement ce problème pour les grands nombres.

Vous trouverez dans l'annexe :

- le tableau des nombres premiers jusqu'à 1 000.
- la liste des diviseurs des entiers de 1 à 100.
- le tableau demandé aux élèves page 5.
- un tableau où sont représentés les entiers de 1 à 200 nécessaire pour la page 10.

A PROPOS DE MULTIPLES ET DIVISEURS COMMUNS

MULTIPLES.

Tous les éléments qui permettent d'approcher cette notion sont dans les fiches précédentes. Pour notre part nous avons travaillé dans nos classes de la manière suivante :

1 — On apprend à reconnaître des diviseurs d'un nombre écrit de différentes façons :

par exemple : $2 \times 3 \times 5$ est-il multiple de 2, de 3 et de 5 ?

$2^3 \times 41$ est-il multiple de 4 ?

$3^2 \times 2^2 \times 5$ est-il multiple de 12 ? etc...

(voir pages 9 et 15).

2 — Deux nombres sont donnés (plusieurs dans un deuxième temps) ; on cherche des multiples communs à ces deux nombres. On répète cette étude avec d'autres couples d'entiers :

— nombres premiers entre eux

— nombres ayant des diviseurs communs

— un nombre est multiple de l'autre.

Du bilan collectif de ces recherches il ressort :

1) un multiple commun étant trouvé, tous ses multiples sont des multiples communs.

2) Pour avoir tous les multiples communs, il suffit d'avoir le plus petit.

3) Il y a autant de multiples communs que l'on veut.

Le travail proposé dans les fiches sur l'écriture des nombres permet aux élèves d'élaborer une stratégie pour obtenir le ppcm. En général ils partent de l'écriture primaire de l'un des nombres et la complètent pour obtenir un multiple de l'autre.

DIVISEURS.

La notion de diviseurs communs nous semble moins indispensable. On peut si on le juge utile faire une recherche du genre de la précédente qui conduit aux remarques suivantes :

1) il y a toujours un diviseur commun

2) il y a un nombre fini de diviseurs communs et il y en a un plus grand que tous les autres.

3) le plus grand des diviseurs communs est un multiple de tous les autres.

On peut comme pour les multiples faire un travail sur l'écriture des diviseurs, des diviseurs communs et en particulier du pgcd.

Un travail prolongé sur ppcm et surtout pgcd nous semble de toute façon inutile.

ARITHMETIQUE EN VRAC

Ce document présente quelques activités complémentaires d'arithmétique que nous proposons après «Nombres figurés» et «Arbres».

La présentation de ces activités est diverse ; elles sont de deux types.

• D'une part des exercices c'est-à-dire des activités courtes ne nécessitant qu'un temps limité, pouvant être éventuellement proposées comme travail à la maison. Ces exercices sont de difficultés diverses et présentés sans souci de classement.

• D'autre part nous proposons une série importante de «Thèmes» qui peuvent aussi être abordés à propos de l'arithmétique en 5ème. Certains de ces thèmes sont seulement suggérés, d'autres sont plus détaillés. Ces thèmes nécessitent un certain temps en classe et une préparation avant d'être proposés aux élèves. Parmi ces thèmes certains nous semblent devoir retenir particulièrement l'attention : ce sont ceux qui abordent les questions arithmétiques à partir de la géométrie.

Dans ces activités la recherche effective des enfants est fondamentale. Il faut les laisser «bricoler» de façon à ce que les difficultés et les succés qu'ils rencontrent aident à l'élaboration d'une ou de plusieurs solutions collectives et discutées.

Enfin, il nous semble souhaitable, bien que non indispensable, que les enfants aient à leur disposition dans la classe des petites machines à calculer.

POT POURRI D'EXERCICES

Cache-cache naturel.

Qui suis-je ?

- Je m'écris avec trois chiffres.
- Je suis plus petit que 200.
- Je suis un multiple de 12 et de 9.
- Je ne suis pas un carré.
- Mon chiffre des dizaines est plus grand que mon chiffre des unités.

Qui suis-je ?

- Je m'écris avec quatre chiffres.
- Tous mes chiffres sont impairs.
- Tous mes chiffres sont différents.
- Mon chiffre des milliers n'a qu'un diviseur.
- Je ne suis pas divisible par 5.
- Mon chiffre des dizaines est plus petit que mon chiffre des unités et que mon chiffre des centaines.
- La somme de mon premier et de mon dernier chiffre est égale à la somme de mes chiffres du milieu.
- Je suis plus petit que 40^2.

Qui suis-je ?

- J'ai deux chiffres.
- La somme de mes chiffres est 9.
- Je suis un multiple de 5 et de 6.

X

Qui suis-je ?

- J'ai deux chiffres.
- Je suis pair.
- Je suis un multiple de 7.
- La somme de mes chiffres est divisible par 7.

X

Qui suis-je ?

- Je suis un naturel premier de deux chiffres.
- Si tu m'appelles n je te dis que :
  «n + 1 est un multiple de 9 et de 12».

X

Qui suis-je ?

- Je m'appelle n.
- $n + 1$ est un multiple de 4 et de 7.
- $n - 1$ est un multiple de 5.
- $n < 200$.

Toute une famille

Qui sommes-nous ?

- Nous avons trois chiffres chacun.
- Notre chiffre des centaines est un nombre premier.
- Nous sommes multiples de 7 et de 9.

X

Qui sommes-nous ?

- Nous avons trois chiffres chacun.
- Nous sommes plus petits que 200.
- Si je m'appelle n, $n + 1$ est un multiple de 9 et de 12.

En vrac.

X

La hauteur de la tour Eiffel est 300 m ; elle a deux escaliers :

- l'escalier nord a des marches de 20 cm de hauteur ;
- l'escalier sud à 1 875 marches, toutes de même hauteur.

Combien les escaliers ont-ils de marches situées au même niveau ?
A quelle hauteur au-dessus du sol se trouvent les marches situées au même niveau ?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Voici un tableau.
Observe comment il est construit.
La somme des naturels de la 1ère ligne est 45.
Comment trouver la somme des naturels de la ligne suivante sans ajouter les naturels de cette ligne.
Quelle est la somme de tous les naturels du tableau ?

Peux-tu trouver un entier naturel n tel que :

n est un multiple de 7.

n + 1 est un multiple de 5.

Y en a-t-il plusieurs ? Combien ?

Que peux-tu dire de plus si tu sais que $n \leqslant 50$?

Que peux-tu dire de plus si tu sais que $30 \leqslant n \leqslant 50$?

La lettre n désigne un entier naturel.

A l'entier naturel n je peux faire correspondre un autre entier désigné par $n^2 - n + 41$

par exemple : $n \longmapsto n^2 - n + 41$

$0 \longmapsto 41$ Car $0^2 - 0 + 41 = 41$

$1 \longmapsto 41$ Car $1^2 - 1 + 41 = 41$

Ce que j'ai fait pour 0 et 1 fais-le pour 3, 4, 5 et 6.

Est-ce que tous les nombres que tu as trouvés sont premiers ?

Complète alors $41 \longmapsto$ .....

Que remarques-tu ?

Quels sont les deux nombres entiers ne se terminant pas par un zéro, qui, multipliés l'un par l'autre donnent 1 000 000 000 ?

Trouve deux autres nombres ne se terminant pas par zéro dont le produit est : 1 000 000 000 000 000 000.

Trouve un entier naturel qui ajouté à 100 donne un carré et qui ajouté à 164 donne aussi un carré.

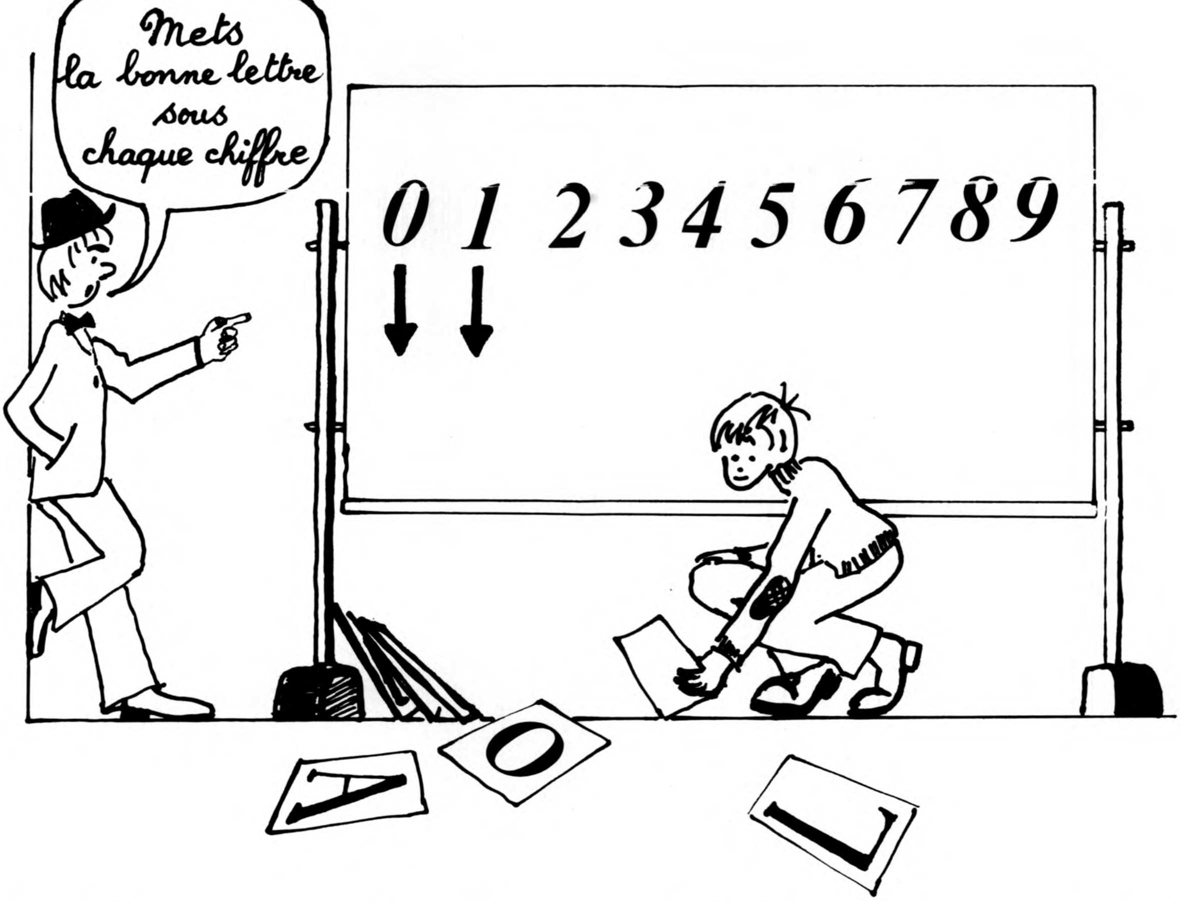
$$\begin{array}{r} 100 \\ +\ldots\ldots \\ \hline \ldots\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 164 \\ +\ldots\ldots \\ \hline \ldots\ldots \end{array}$$

Dans 1 000 jours, quel jour de la semaine serons-nous ?

Dans exactement 1 000 heures est-ce que tu dormiras ?

Il y a 1 million d'heures étais-tu né ?

Qui gouvernait la France il y a 100 000 jours ?



$$\begin{array}{r} FACE \\ +\ NO \\ \hline FANS \end{array} \qquad \begin{array}{r} OR \\ \times\ OR \\ \hline OFF \end{array} \qquad \begin{array}{r} OFF \\ -\ ON \\ \hline ONO \end{array} \qquad \begin{array}{r} OO \\ \times\ OO \\ \hline ORO \end{array}$$

$$\begin{array}{r} AREA \\ -\ LAKE \\ \hline ACE \end{array} \qquad \begin{array}{r} AR \\ \times\ OC \\ \hline ARC \end{array} \qquad \begin{array}{r} FARE \\ -\ FOOL \\ \hline LON \end{array} \qquad LA : K = E$$

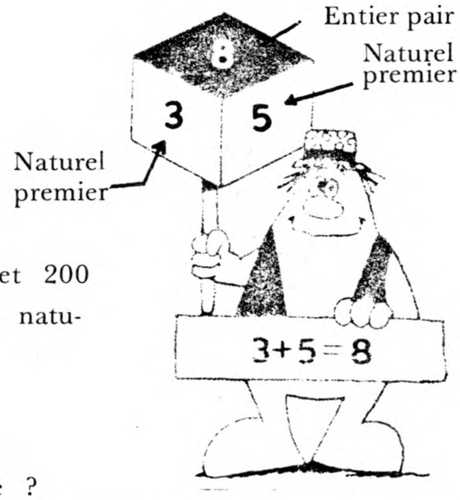
$$RO + RF = FL$$

chaque lettre représente
un chiffre et un seul
trouve lequel !

CONJECTURE DE GOLDBACH

Chaque naturel pair écrit ci-dessous est la somme de deux naturels premiers.

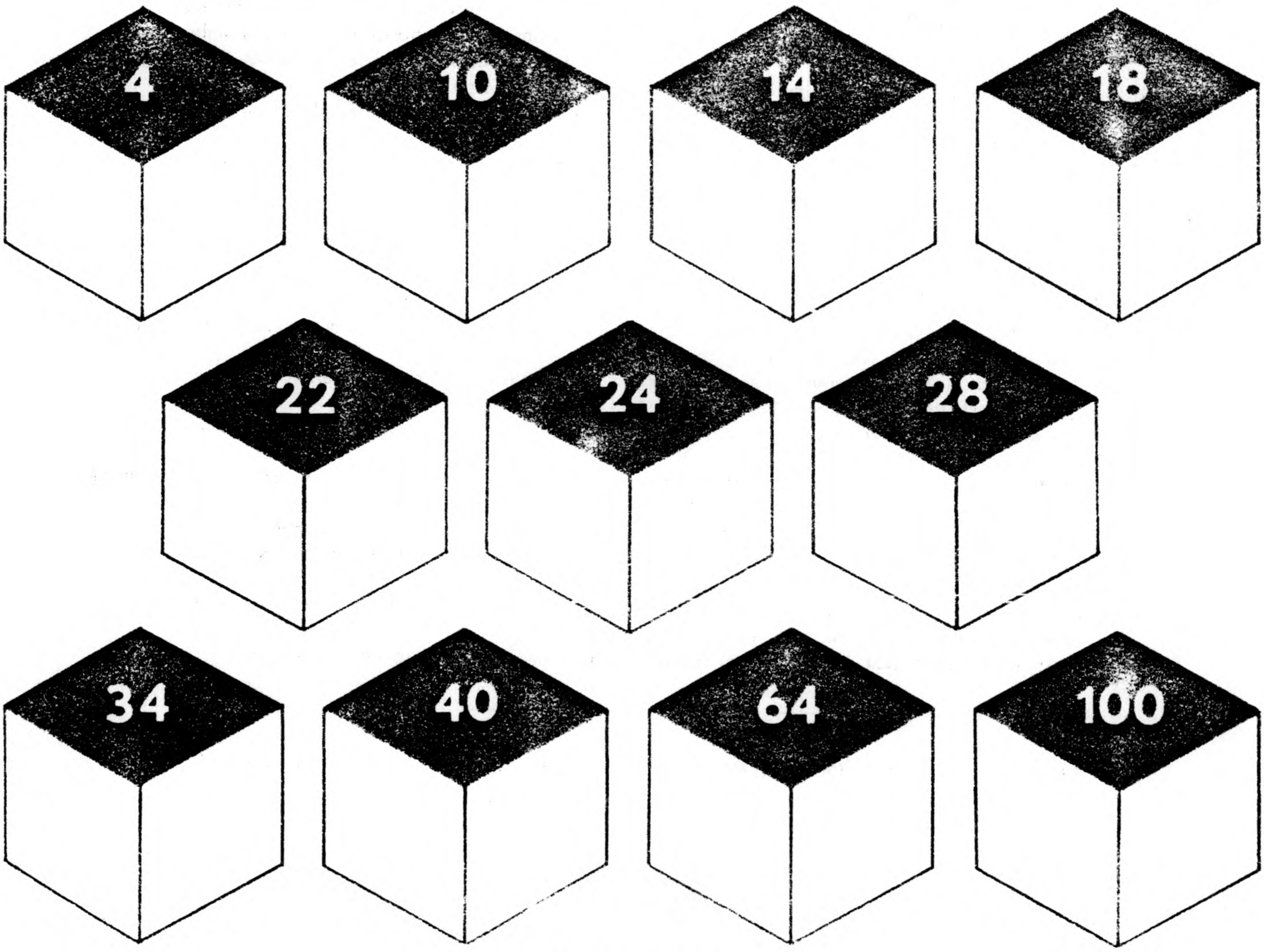
Sur chaque cube, écris les deux **naturels premiers** comme dans l'exemple. ⟶



Prends 5 naturels pairs entre 100 et 200 et écris-les comme somme de deux naturels premiers.

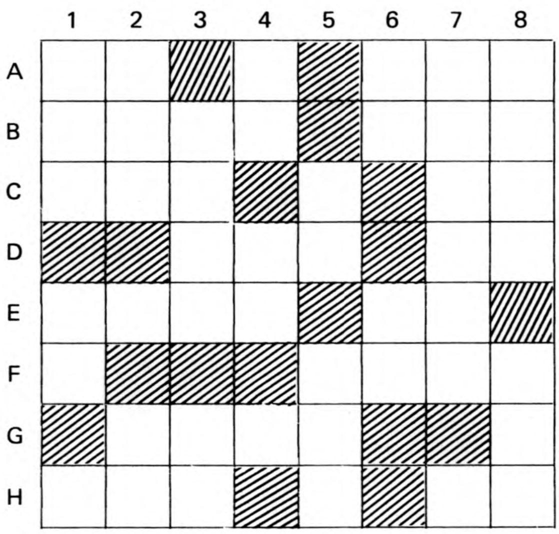
Exemple : $158 = 139 + 19$

Y a-t-il plusieurs façons de le faire ?



«d'après Aftermath»

DES NOMBRES CROISES



Horizontalement.

A – Un nombre premier compris entre 20 et 30 * C'est le nombre des droites de symétries d'un hexagone régulier * Un carré inférieur à 200.

B – Ce nombre multiplié par 7 est égal à 18 291 * C'est le double du nombre qui est juste au-dessus.

C – C'est la somme du premier nombre du 4 vertical et du premier nombre du H horizontal * Le seul nombre premier pair * La somme de ses chiffres est égale à la somme des chiffres du dernier nombre du H horizontal.

D – Il a les mêmes chiffres que le premier nombre du C horizontal * Ce nombre désigne un départment de la région Rhône-Alpes.

E – $2 \times 5^2 \times 7 \times 11$ * Le plus petit entier naturel ayant 8 diviseurs.

F – Le plus petit entier naturel * Ce nombre peut se lire dans un sens ou dans l'autre et il est divisible par 869.

G – Le plus petit entier plus grand que 1 000 et produit de 3 nombres premiers distincts * C'est un diviseur de tous les nombres pairs.

H – La somme du premier et du dernier chiffre est égale à 5 * C'est un cube * La différence de ses chiffres est égale à 0.

Verticalement.

1 – Un nombre où il n'y a qu'un seul chiffre * Le plus petit entier naturel produit de 3 nombres premiers * Elément neutre pour la multiplication.

2 – Le carré d'un nombre premier supérieur à 25 * Le plus petit cube différent de 1 * Lu à l'envers c'est un multiple de 17.

3 – Ce nombre se trouvait sur beaucoup de lettres il y a environ deux cents ans * Il a deux chiffres mais il est égal à 4.

4 – Un multiple de 3 qui est aussi un multiple de 7 * Si on lui ajoute 5 ou si on lui retranche 4 on obtient un carré * Dernier chiffre d'un multiple de 10.

5 – Un multiple de 7 * La somme de ses deux derniers chiffres donne le premier chiffre.

6 – Le plus petit entier naturel qui a 6 diviseurs * C'est un carré, mais c'est aussi la somme de deux carrés.

7 – $5 \times 7^2 \times 1\,001$ * Le plus petit entier naturel qui n'est ni un carré, ni une somme de deux carrés, ni une somme de trois carrés.

8 – C'est un nombre pair élevé à une puissance quatrième * Un carré lu à l'envers.

Et maintenant invente toi-même un nombre croisé sur une grille 5×5 ou plus grande si tu veux.

THEMES

A PARTIR DE NOMBRES FIGURES

Ce thème est un prolongement du travail sur nombres figurés (page 3) et aborde deux questions différentes :

A : Somme des n premiers entiers

B : Somme des n premiers nombres impairs.

C'est bien entendu une approche intuitive des résultats proposés.

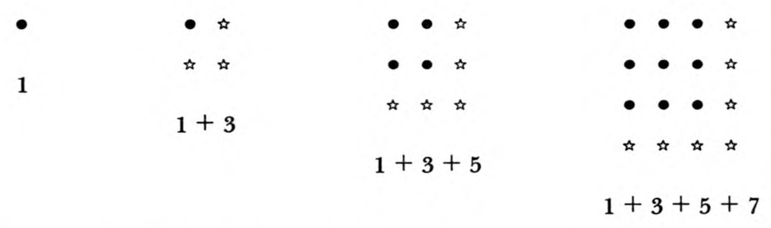
A : NOMBRES TRIANGULAIRES.

Une représentation sous forme triangulaire permet d'arriver de manière figurée à la formule $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour la somme des n premiers entiers (suivant la classe le professeur jugera si à la suite du cadre **2** de la page 34 il est possible d'arriver jusqu'à une expression littérale). Page 35 et 36 sont présentées deux situations où on peut réinvestir ce travail.

B : SOMME DES n PREMIERS IMPAIRS.

Cette activité propose de découvrir de deux façons différentes la formule $S_{2n+1} = n^2$ où S_{2n+1} est la somme des n premiers nombres impairs.

Le travail proposé dans le cadre **2** de la page 37 peut permettre de faire comprendre aux enfants la nécessité de désigner un nombre impair par l'écriture $2n + 1$: il s'agit de «compléter un carré» en rajoutant chaque fois un nombre impair de points.



Chaque nouvelle étape étant $n + n + 1$ qui peut s'écrire $2n + 1$.

A – NOMBRES TRIANGULAIRES.

1

Voici des nombres dont les représentations sont des triangles et qui sont appelés nombres triangulaires.

Complète et dessine.

Le premier nombre triangulaire est 1   • $1 = 1$

Le deuxième nombre triangulaire est 3

•
• •

$1 + 2 = 3$

Le troisième nombre triangulaire est 6

•
• •
• • •

$1 + 2 + 3 = 6$

Le quatrième nombre triangulaire est ...

•
• •
• • •
• • • •

$1 + 2 + 3 + 4 =$

Le cinquième .... = ...

Le sixième .... = ...

2

1. Le troisième nombre triangulaire est 6.

Voici deux figures triangulaires de 6 points :

```
•          x x x
• •          x x
• • •          x
```

On peut les disposer ainsi :

```
• x x x
• • x x
• • • x
```

On obtient un rectangle de largeur 3 et de longueur 4. Il y a 12 points (3×4) et 12 est le double de 6.

2. Recommençons le même travail pour le 4ème nombre triangulaire :
- dessine deux fois ce nombre pour obtenir un rectangle.
- Quelle est la largeur de ce rectangle ?
- Quelle est la longueur de ce rectangle ?

} Combien y a-t-il de points dans ce rectangle ?

- Quel est le 4ème nombre triangulaire ?

3. Fais le même travail avec le 5ème nombre triangulaire.

4. Sans dessiner la figure trouve combien il y a de points quand le dixième nombre triangulaire est dessiné deux fois. Peux-tu trouvers le dixième nombre triangulaire ?

5. Quel est le 100ème nombre triangulaire ?

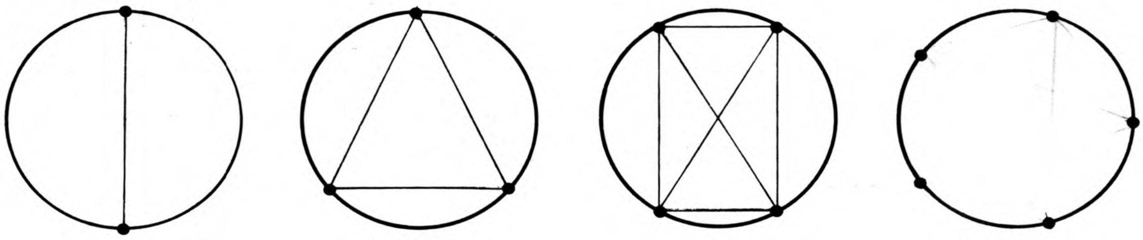
6. Sans effectuer l'addition calcule la somme des 50 premiers naturels

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50 =$$

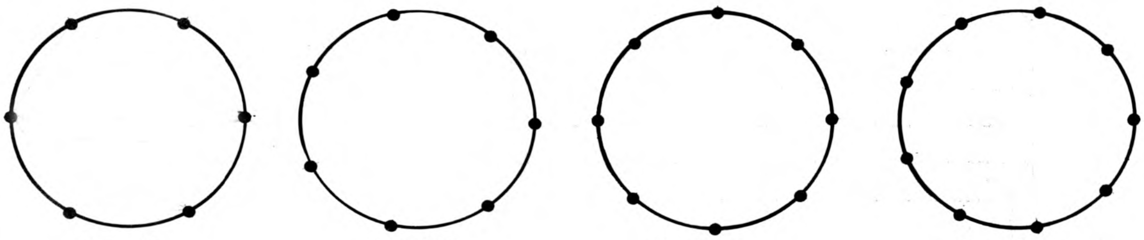
Voici quelques situations ou peuvent être utilisés les nombres triangulaires.

1

Voici 8 dessins, il s'agit de compter le nombre de segment joignant de toutes les façons possibles les points dessinés sur chaque cercle.



2 points	3 points	4 points	5 points
1 segment	3 segments	6 segments	....

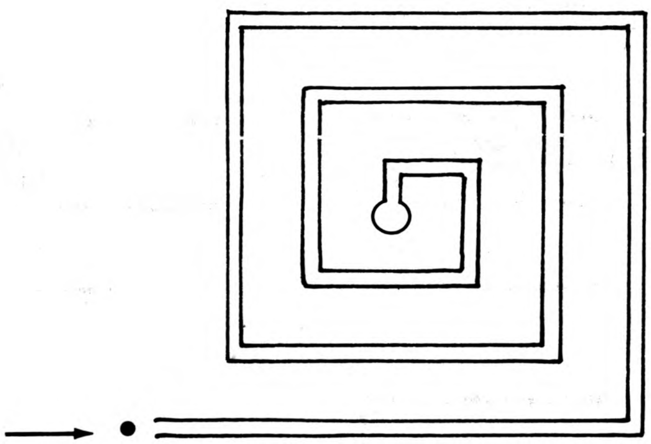


6 points	7 points	8 points	9 points
....	....	....	....

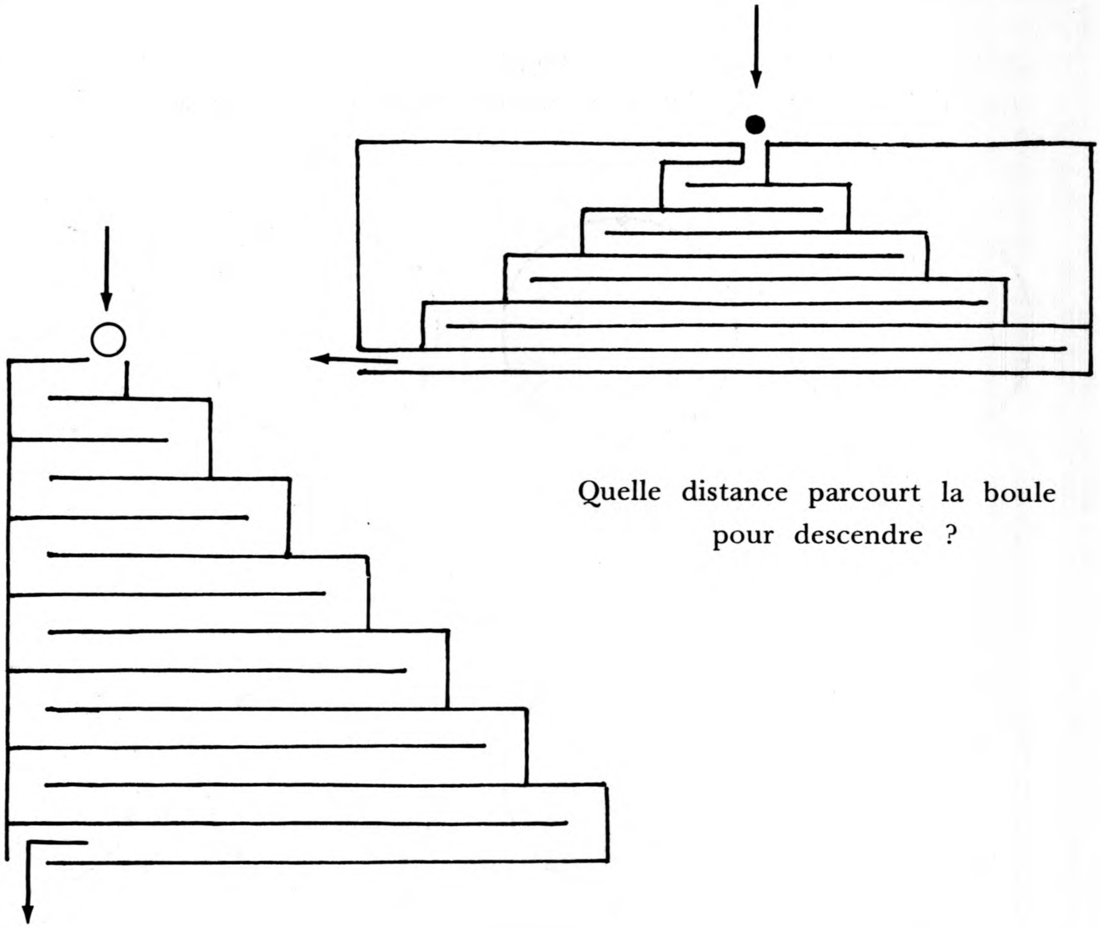
Sans dessiner trouve combien de segments joignent 10 points.
Même question pour 20 points, 50 points, 100 points.

2

LABYRINTHES.



On fait rentrer la boule jusqu'au centre : Quelle distance a-t-elle parcouru ?

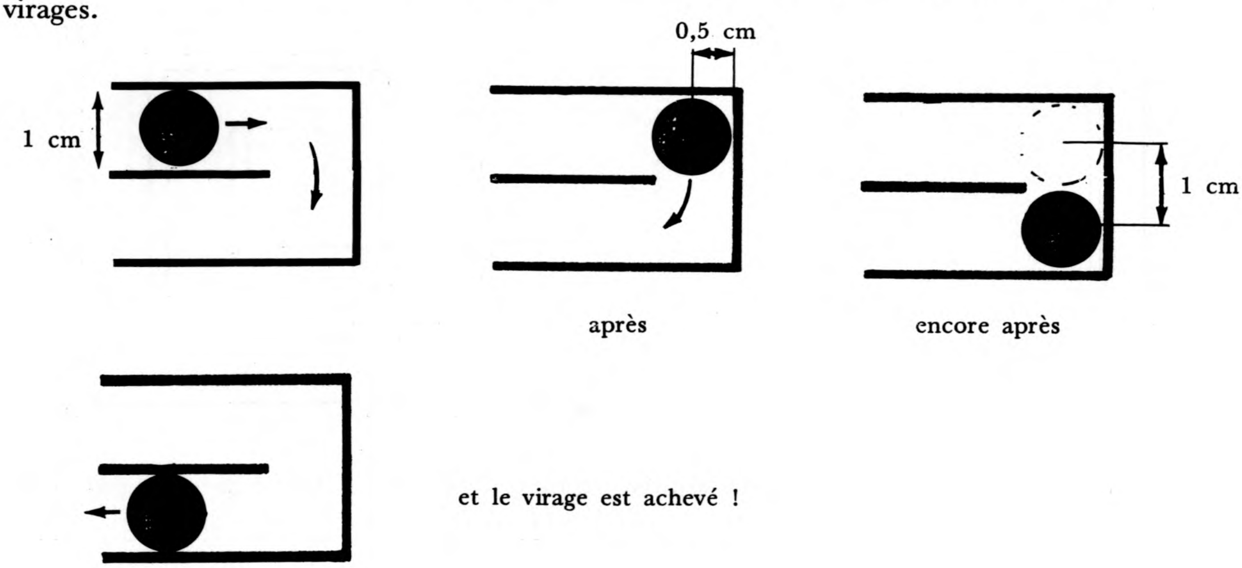


Commentaires.

On peut dans cette activité utiliser la formule donnant la somme des n premiers entiers.

Le premier dessin (page 35) permet une utilisation directe de la formule.

Les deux autres nécessitent une réflexion sur ce qui se passe dans les virages.



B – SOMME DES n PREMIERS NOMBRES IMPAIRS.

1

Regarde et complète.

$$
\begin{array}{ll}
1 & = 1 \\
1 + 3 & = 4 \\
1 + 3 + 5 & = 9 \\
\underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{\text{il y a ... nombres}} & = 16 \quad \text{16 est le carré de ....}
\end{array}
$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9}_{\text{il y a ... nombres}} = ... \quad \text{25 est le carré de ....}$$

Vois-tu ce qui se passe ?

2

Voici un dessin représentant 2^2 :

• •
• •

- Ajoute des points à ce dessin pour représenter 3^2.
Combien en as-tu ajouté ?

- Ajoute de nouveau des points pour représenter 4^2.
Combien en as-tu ajouté ?

- Continue pour représenter 5^2 puis 6^2. Combien ajoutes-tu de points chaque fois ?

Compare ce que tu viens de faire avec le cadre 1.

Peux-tu dire sans calculer 15^2 et 16^2 combien il faut ajouter de points au dessin représentant 15^2 pour obtenir un dessin représentant 16^2.

3

Essaye de trouver sans ajouter les nombres la somme des 8 premiers nombres impairs :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = ...$$

Explique comment tu fais.

4

Quelle est la somme des 10 premiers nombres impairs ?
Quelle est la somme des 20 premiers nombres impairs ?
Quelle est la somme des nombres impairs de 1 à 99 ?
Quelle est la somme des nombres impairs de 1 à 999 ?

JEU DES MULTIPLES

Pour 2 à 5 joueurs.

Fabrication du jeu.

45 cartes dont 4 «jokers» et 41 cartes portant chacune un nombre de cette liste :
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 80, 81, 90, 100.

Règle du jeu.

- Un joueur distribue une à une, six cartes à chacun des joueurs.
- Le paquet de cartes restantes est posé sur la table ; il servira de «pioche» (on ne voit que le dos des cartes).
- Le premier joueur est tiré au sort ; il pose une carte de son jeu sur la table : par exemple **60.** Puis **il demande au joueur suivant** de fournir une carte portant un **multiple de l'un des diviseurs de 60** (le diviseur est choisi entre 1 et 11).

Exemple.

- Carte jouée : **60.**
- Les diviseurs de 60 entre 1 et 11 sont les seuls à considérer : 2, 3, 4, 5 ou 6. Le premier joueur demande par exemple «un multiple de 4».
- Si le joueur suivant fournit, le jeu continue ainsi. S'il ne peut pas fournir, alors il pioche une carte et la joue si possible, sinon il passe et le suivant doit fournir une carte à sa place.
- Un joueur commettant une erreur pioche une carte et passe son tour.
- Le gagnant est le joueur qui le premier n'a plus de cartes (ou bien celui qui garde en main le moins de cartes).

TABLEAUX

On donne aux enfants un tableau comme celui-ci en leur demandant quelles observations ils peuvent faire à partir de ce tableau.

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103	104

Les remarques des enfants sont nombreuses et variées :

— «Dans les colonnes ça va de 7 en 7». «La première donne les multiples de 7».

— Les obliques vont de 6 en 6 ... ou de 8 en 8 ... (multiples de 7 plus un et multiples de 7 moins un).

— Disposition de certains multiples (on peut faire colorier les multiples de 13 par exemple).

— La disposition des nombres se terminant par un chiffre donné, ; 7 par exemple.

On donne ensuite un tableau différent comme ci-dessous par exemple et on recommence le même travail.

On prolonge en cherchant des dispositions de tableaux permettant de visualiser rapidement les multiples d'un nombre en colonne ou en oblique.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109

CALENDRIER

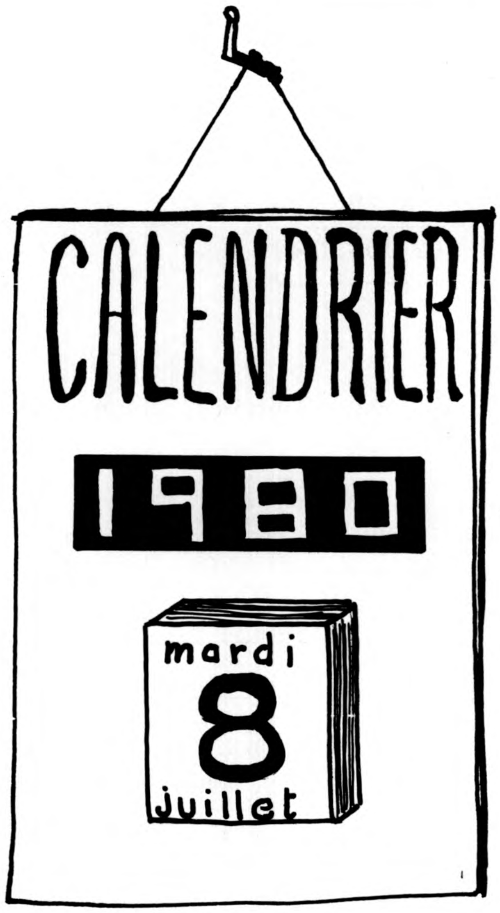
On peut observer que l'Agenda de 1973 est le même que celui de 1979.

Est-ce que cela sera vrai des agendas de 1974 et 1980 ?

On peut dresser une liste des agendas qui sont les mêmes de 1960 à 1999 par exemple. Attention aux années bissextiles !

On peut demander à chaque enfant de trouver quel jour de la semaine il est né (ou de le vérifier s'il le sait).

En 2000, quel jour de la semaine sera ton anniversaire ? Et Noël ? Etc...



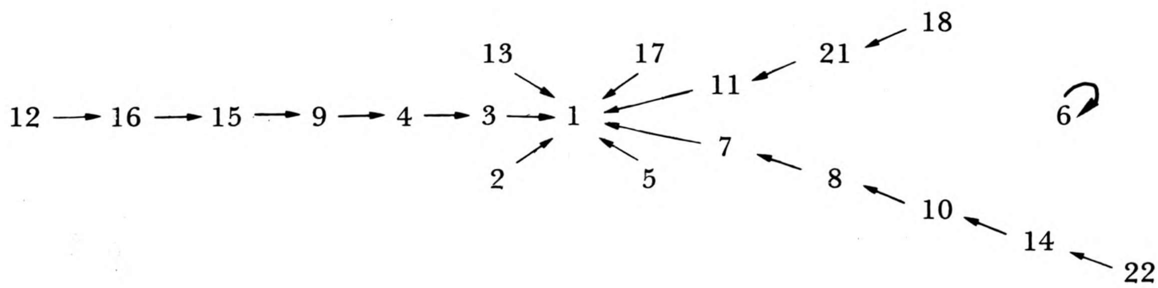
SOMME DES DIVISEURS – NOMBRES PARFAITS

Le travail proposé aux enfants est le suivant.

	Exemple
– *Choisir un entier naturel*	12
– *Faire la somme de tous ses diviseurs autres que lui-même*	$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$
– *Recommencer avec le résultat obtenu*	les diviseurs de 16 autres que 16 sont 1, 2, 4 et 8
– *etc... en essayant systématiquement tous les entiers inférieurs à 40 ou 50 ou plus.*	$1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Remarques.

1) Voici une représentation possible pour tous les entiers inférieurs à 20.



2) La place des nombres premiers dans cette représentation ?

3) 6 est «tout seul» on l'appelle un nombre parfait.

4) Cette activité conduit à rechercher une représentation commode des résultats.

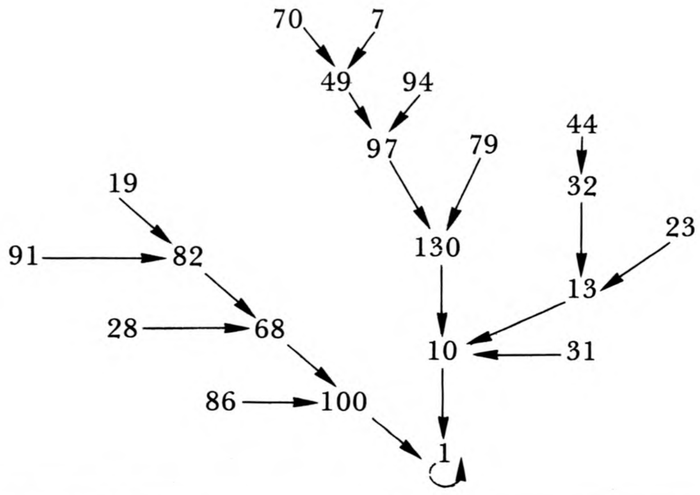
5) Il est intéressant de faire cette activité après le travail présenté page 5 sur la recherche des diviseurs des naturels jusqu'à 100.

SOMME DES CARRES DES CHIFFRES

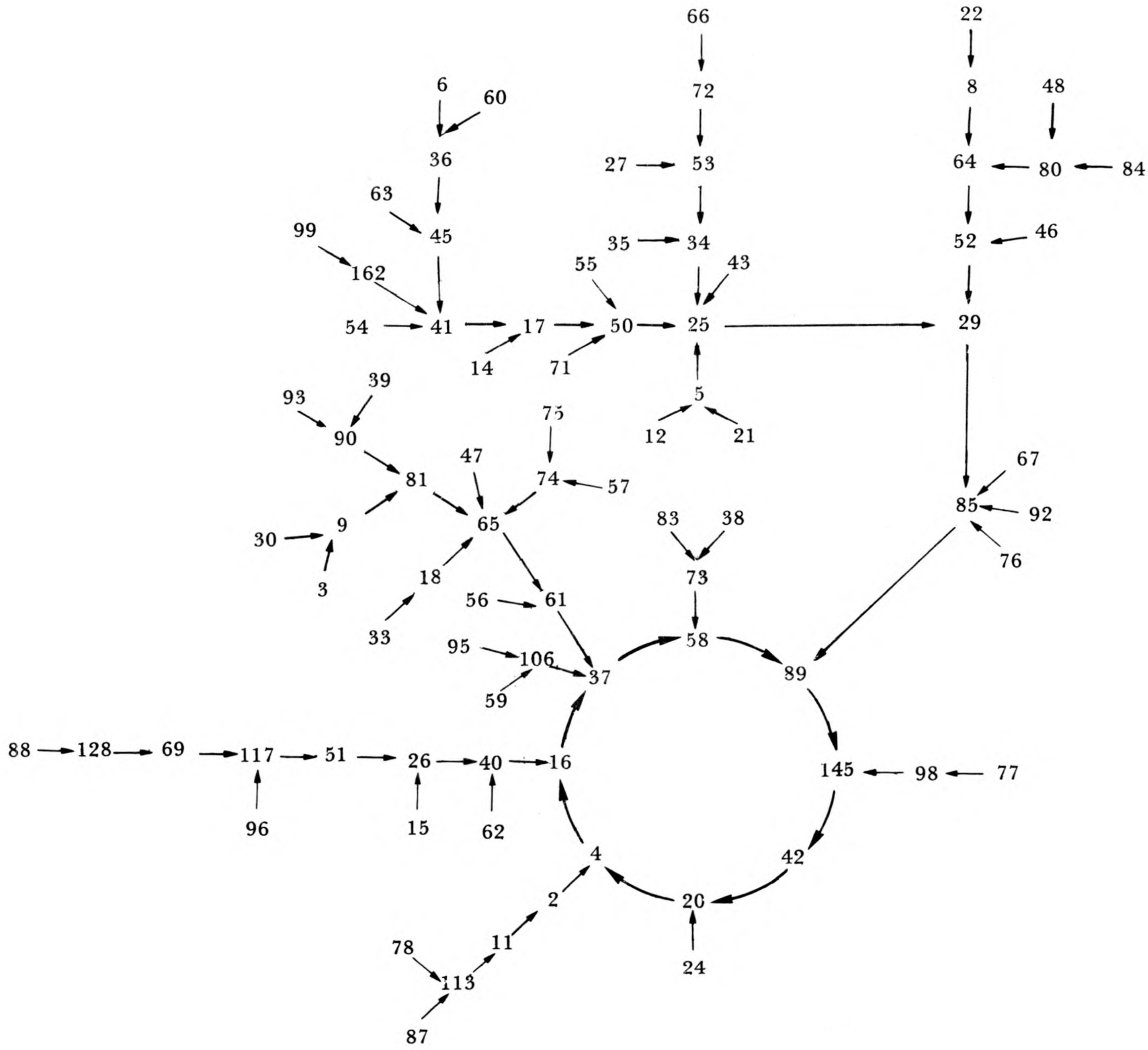
- Choisir un entier naturel n (par exemple 57).
- Calculer la somme des carrés de ses chiffres ($5^2 + 7^2 = 74$).
- Recommencer avec l'entier obtenu ($7^2 + 4^2 = 65$).
- Et ainsi de suite...
- Est-ce que l'on retrouve le même entier au bout d'un certain nombre d'addition de carrés ?
- Quelles suites obtient-on à partir de tous les entiers inférieurs à 100 ?
  On peut envisager une représentation sous forme de dessin.

Par exemple.

Voici une partie des entiers inférieurs à 100.



Sur la page ci-contre, voici les autres entiers inférieurs à 100.


66
22
72
8
48
6
60
36
27
53
64
80
84
63
45
35
34
52
46
99
55
43
162
54
41
17
50
25
29
14
71
39
5
93
75
90
12
21
47
74
57
67
81
85
92
9
65
83
38
30
73
76
18
3
56
61
58
33
95
89
106
37
59
88
128
69
117
51
26
40
16
145
98
77
96
15
62
4
42
2
20
78
11
24
113
87

MILLE UN

Choisir un nombre de trois chiffres abc.

1 – Ecrire le nombre de six chiffres obtenu en écrivant deux fois le nombre choisi abc abc.

Diviser le nombre de six chiffres par 13 (la division tombe juste !), puis le résultat par 11, puis le nouveau résultat par 7.

Remarques.

2 – Donner, sans effectuer d'opérations, le résultat de $[(abc \times 7) \times 11] \times 13$.

3 – Multiplier de nombre par 1 001.

Remarques.

Commentaires :

$$abc\,abc = abc \times 1\,001 = abc \times (1\,000 + 1)$$

$$= abc \times 1\,000 + ab\,c$$

On peut présenter aussi cela sous la forme

$$\begin{array}{r} abc \\ \times\ 1\,001 \\ \hline abc \\ 000 \\ 000 \\ abc \\ \hline abc\,abc \end{array}$$

$7 \times 11 \times 3 = 1\,001.$

Prolongements possibles.

– On veut diviser abc par 77. Comment prévoir que la division tombe juste ?

– Sans poser la division, trouver le résultat de la division de abc abc par 91.

LE DERNIER DES CHIFFRES

Recherche 1.

- Note toutes les remarques que tu as envie de faire à propos du nombre $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$. On dit que ce nombre est une puissance de 5.

- Tu sais que ce nombre s'écrit aussi 5^6. Fais attention 5^6 ne veut pas dire 5×6 ou 56 !

- Quel est le chiffre des unités du nombre 5^6 ? As-tu besoin de le calculer pour connaître son chiffre des unités ?

- Quel est le chiffre des unités de 5^{10} ? Celui de 5^{99} ? de 5^{1000} ?

Recherche 2.

- Quel est le chiffre des unités du nombre 17 ? Celui du nombre 17^2 ? Et celui de 17^3 ? Et de 17^4 ? Et de 17^5 ?

Continue jusqu'à ce que tu puisses faire une remarque à propos du chiffre des unités de ces nombres.

- As-tu besoin de calculer chacun des nombres précédents pour connaître leur chiffre des unités ?

- Quel est le chiffre des unités de 17^{10} ? Peux-tu calculer cette puissance de 17 avec ta calculatrice ?

- Quelle est la plus grande puissance de 17 que tu peux calculer avec ta calculatrice : note ce nombre sur ton cahier.

- Quelle est le chiffre des unités des nombres suivants :

567 ; 567^2 ; 567^3 ; 567^4 ; 567^5 ; 567^6 ; 567^7 ? 567^{12} ; 567^{13} ; 567^{14} ; 567^{15} ; 567^{20} ?...

- Ecris sur ton cahier ce que tu dirais à ton camarade pour lui expliquer comment tu trouves le chiffre des unités de 567^{35}.

- Cherche un moyen pour trouver rapidement le chiffre des unités de la puissance d'un nombre qui se termine par 7.

Recherche 3.

Il s'agit maintenant pour toi de découvrir un moyen simple et rapide pour trouver le chiffre des unités de nombres comme 12^5 ou 52^{23} ou 32^5, c'est-à-dire des puissances de nombres se terminant par 2.

Pour chercher ce moyen, tu peux commencer par choisir un nombre se terminant par 2, puis tu peux chercher le chiffre des unités du carré, du cube etc...

Explique bien chaque étape de ta recherche et note bien les remarques que tu peux faire.

Recherche 4.

Refais le même travail pour les nombres qui se terminent par 4, puis pour les nombres qui se terminent par 6 ; 8 ; 9 ; 0 ou 1.

Résume tes résultats sur une feuille de ton cahier.

FANTAISIE ARITHMETICO – GEOMETRIQUE

1 **Arithmétique : les nombres carrés.**

- Sensibilisation aux carrés et calcul mental.

- Observation d'une table de carrés (chiffre des unités et leur répartition 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, ... symétrico-périodique, **explication** de ce résultat).

- Ce qui se passe quand on multiplie un nombre décimal par lui-même. Impossibilité de trouver un nombre décimal dont le carré soit entier.

- Remplir des colonnes de tableaux à compléter dans lequel la colonne à trouver sera $n^2 - 1$ ou $n^2 - 4$ etc ...

Exemple.

a	a + 2	a(a + 2)
7		
13		

← on les écrira aussi $(a+1)^2 - 1$.

De nombreux exercices de ce type sont nécessaires pour familiariser les enfants avec l'écriture algébrique et la notion de variable, sans qu'il soit question d'utiliser le calcul algébrique.

- Choisir deux carrés, on fait leur différence ; la mettre sous forme de produit.

Exemple. $64 - 25 = 39 = 3 \times 13$ ...

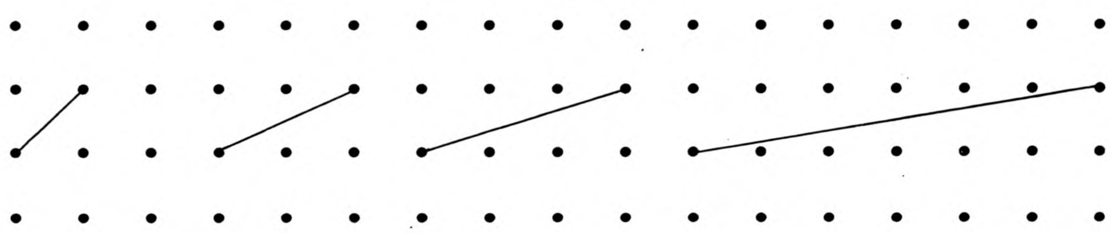
2 **Géométrie : Construction de carrés dont les sommets appartiennent à un réseau carré.**

- On commence par la construction (simple) de carrés dont les côtés sont parallèles aux deux directions principales du quadrillage.

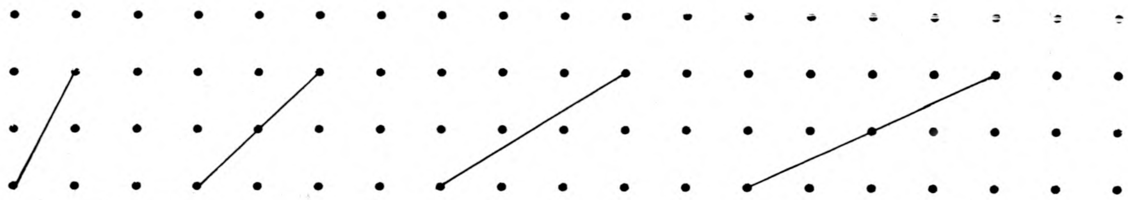
Les aires de ces carrés (comptées en carreaux élémentaires) sont des nombres carrés.

- Ensuite construction de carrés dont un côté (oblique) est donné.

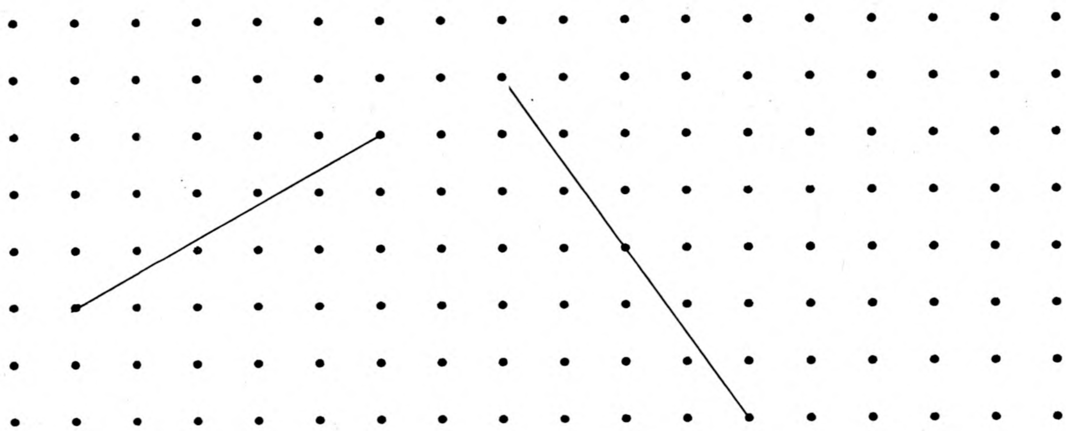
On commence d'abord par les carrés de cette série.



Puis on passe aux carrés à compléter de cette autre série.



Pour terminer par des carrés plus «quelconques».



Cette activité de construction de carrés est difficile ; au début les élèves placent les nouveaux points à peu près au hasard. Il est surtout difficile de placer un nouveau segment orthogonal à un segment donné. Peu à peu on procède par décomptes dans le quadrillage (coordonnées relatives).

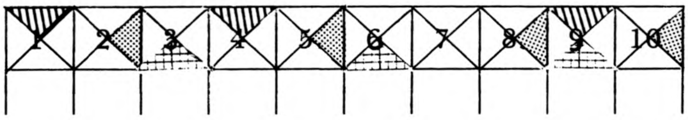
Une activité préléminaire pourrait être la construction de segments équipollents à sommets appartenant au quadrillage. Ce ne serait déjà pas évident au début.

- A partir des carrés dessinés, les calculs d'aires peuvent être entrepris (les aires sont calculées par compensation : moitié de rectangles (4 fois) plus un carré «bien placé» au milieu). On remarque que les aires sont des carrés plus 1 ou des carrés plus 4 etc... (cela ne va pas plus loin pour l'instant).

3

Arithmétique.

On dispose d'une table des 200 premiers nombres de 1 à 200. Chaque case étant partagée en 4 de la manière suivante.



Les enfants colorient en rouge une case des nombres carrés. (Par exemple ci-dessus 1, 4 et 9 sont hachurés etc...).

Ensuite ils colorient en vert une case des nombres qui sont somme de deux carrés. (Par exemple ci-dessus 2, 5, 8, 10 en pointillés etc...).

On colorie ensuite en bleu les sommes de 3 carrés. (Par exemple ci-dessus 3, 6 et 9 sont quadrillés etc...).

Il n'est pas du tout évident pour les enfants qu'il suffit d'ajouter un carré aux nombres coloriés en vert. Il reste des nombres non coloriés.

- Sont-ils somme de 4 carrés ? [Oui : théorème de Lagrange].
- Quels sont ces nombres ? Les élèves arrivent à remarquer qu'ils sont disposés de manière régulière dans le tableau. Ce sont des multiples de 8 plus 7 [en fait tous les nombres de la forme $4^a(8m + 7)$ sont somme de 3 carrés au moins].

En plus de ces nombres se trouvent $28 = 4 \times 7$ puis 4×15 ; 4×23 ; etc... ; 16×7...

Ces remarques sont faites assez correctement en général.

Quand toutes les couleurs sont mises, on peut afficher dans la classe le tableau colorié ou un tableau plus grand (400 ou 1 000 premiers nombres). On peut aussi prévoir un tableau comportant 8 colonnes. Pour mieux mettre en évidence les nombres qui sont somme de 4 carrés au moins (et au plus !).

4

Arithmétique et géométrie.

a) On construit un certain nombre de carrés «obliques» ou non sur quadrillage (les sommets étant points du quadrillage). On calcule les aires et on remarque que les nombres correspondants sont verts ou rouges (Pythagore n'est pas loin !).

b) «Réciproque». On prend un nombre rouge ou vert et on essaie de construire le carré d'aire égale à ce nombre (et là : Pythagore est vraiment tout près !!).

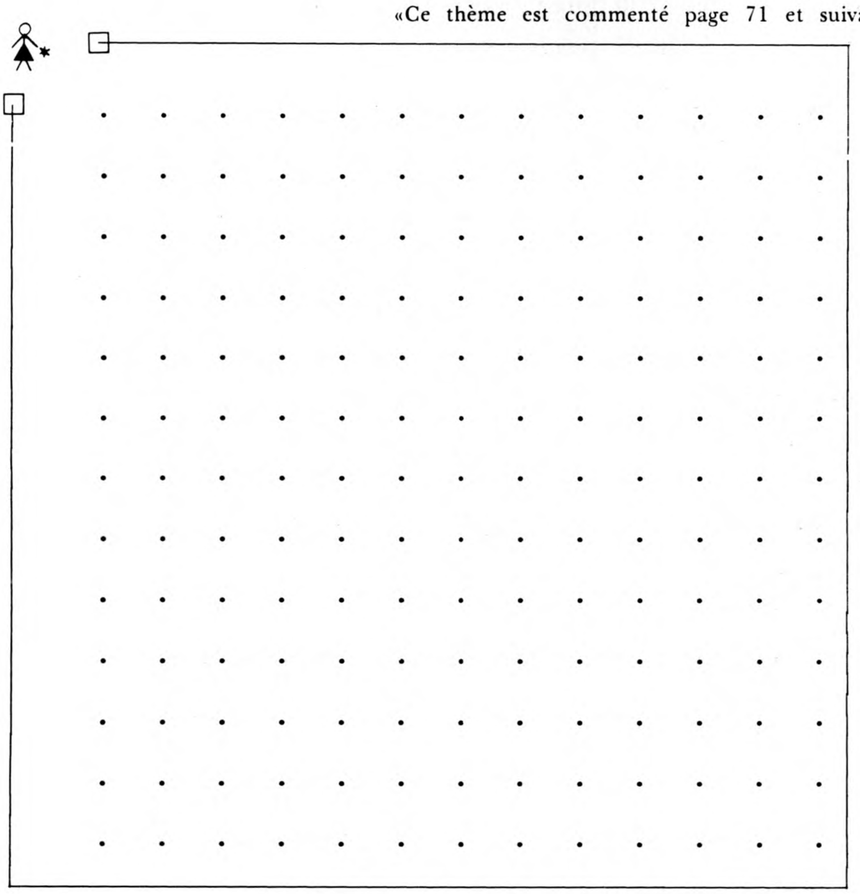
Remarque.

Cette activité est longue mais passionne les enfants si elle débouche sur une activité de groupe (confection d'une fiche, d'un panneau expliquant pourquoi l'aire d'un carré sur quadrillage est un nombre carré ou une somme de deux carrés etc...).

THEME 10

ARBRES VUS – ARBRES CACHES

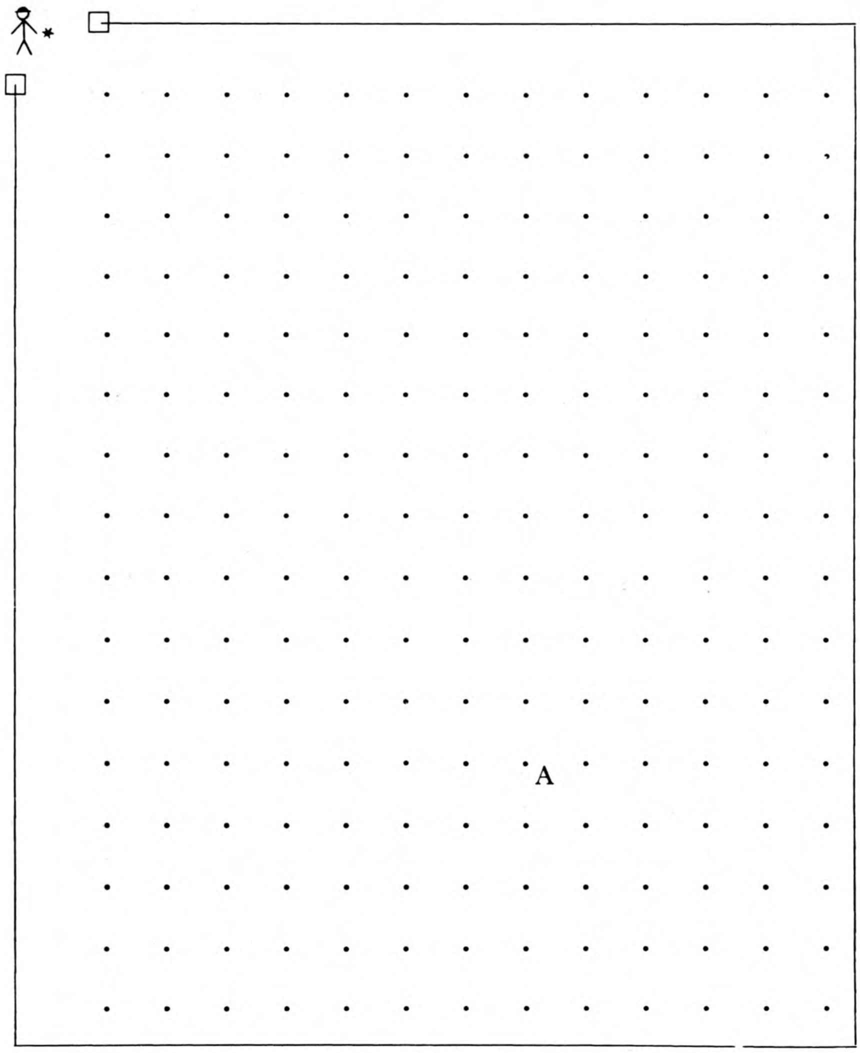
«Ce thème est commenté page 71 et suivantes»



← Ceci est la représentation d'une plantation entourée par un mur. Les points représentent les arbres.

1. Tu es placé à l'entrée du parc à l'endroit marqué d'une étoile.

- *Entoure en rouge les arbres que tu peux voir de cet endroit.*
- *Entoure en noir les arbres qui sont cachés (par d'autres arbres).*



2. Pour reconnaître les arbres de la plantation on code leur position. Par exemple A a pour code (12 ; 8) car il est sur la 12ème ligne et la huitième colonne à partir de l'entrée.

Trace un segment qui joint le point A *au point d'où tu regardes (point marqué d'une étoile). Note le code de tous les points qui sont sur ce segment. Fais des remarques.*

Choisis un autre arbre caché. Trace le segment qui joint la croix à ce point. Note les codes des points.

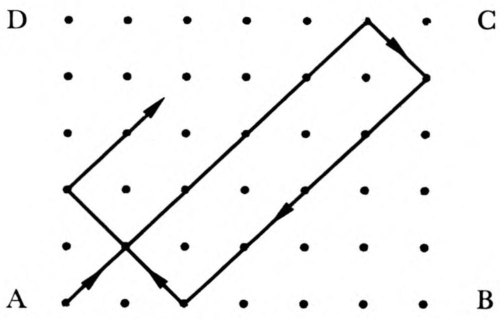
3. *Que peux-tu dire des codes des arbres que tu as entourés de rouge à la question* 1.

4. *L'arbre de code (*18 ; 12) *est-il visible de l'entrée ? Et celui de code* (9 ; 51) *? Et* (30 ; 49) *?*

LE BILLARD

(D'après «Points de départ» Editions Cédic).

I. Voici un rectangle de cinq carreaux sur six carreaux, de sommets A, B, C et D.
AD est la largeur du rectangle.
AB est la longueur du rectangle.



Une boule part de A. Elle **traverse chaque carreau** suivant une diagonale. Quand elle touche un bord du rectangle elle rebondit en suivant une autre diagonale.

Le trajet de la boule est commencé : continue-le jusqu'à ce que la boule touche un sommet. Quel est ce sommet ?

Si on choisit comme unité la diagonale d'un petit carreau, quelle est la longueur de la ligne tracée ?

II. Dessine des rectangles de dimensions différentes. Le sommet de départ est toujours A. Représente, sur chaque rectangle dessiné, le trajet de la boule. Indique, chaque fois, le sommet atteint et la longueur du trajet dans le tableau ci-dessous.

Largeur du rectangle. Unité ⟶	5												
Longueur du rectangle. Unité ⟶	6												
Sommet atteint.	B												
Longueur du trajet. Unité ⟶	30												

Ecris sur ton cahier toutes les remarques que tu peux faire à partir du tableau obtenu.

III. Indications sur une voie possible pour la poursuite de la recherche.

1. Etude de cas particulier.

* Les rectangle de largeur 1 : peux-t-on prévoir la longueur du trajet ? Le sommet atteint ?

* Les rectangles de largeur 2 : mêmes questions.

Longueur du trajet et sommet atteint pour les rectangle (2, 158) ? (2, 159). (2, 160).

* Mêmes questions pour le rectangle de (8, 56).

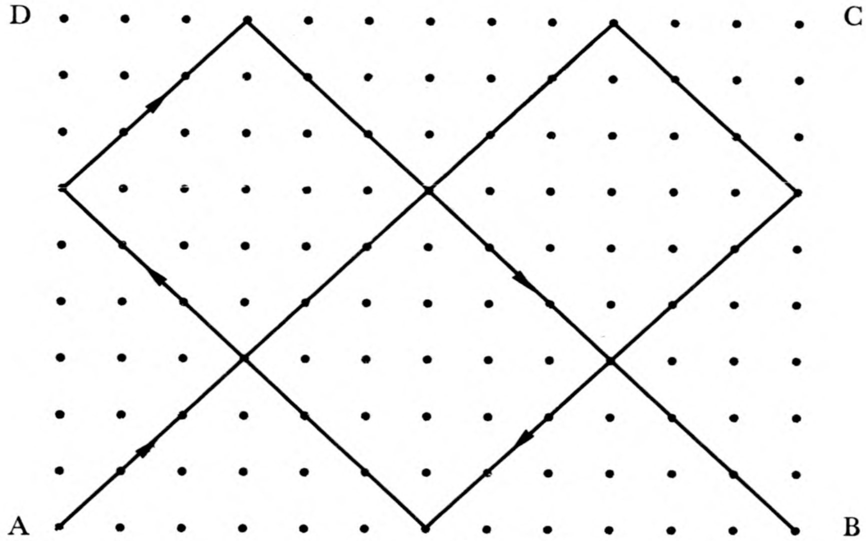
* Etude des rectangles (2, 3), (4, 6), (6, 9).

2. Longueur du trajet entre 2 contacts avec des faces opposées.

Suivons le trajet de la balle.

* Longueur de ce trajet entre deux contacts avec les longueurs du rectangle ?

* Longueur de ce trajet entre deux contacts avec les largeurs du rectangle ?



3. ℓ largeur du rectangle, L longueur du rectangle.

* La première fois où la balle partant de A touche le côté CB le chemin parcouru est ? La première fois où elle touche AD, le chemin parcouru depuis A est ? La deuxième fois où elle touche CB le chemin parcouru **depuis A** est ? Etc...

	1ère fois	2ème fois	3ème fois	4ème fois	5ème fois	6ème fois	etc...
BC	L						
AD	2L						

* De même.

	1ère fois	2ème fois	3ème fois	4ème fois	5ème fois	6ème fois	etc...
DC	ℓ						
AB	2ℓ						

Lorsque la balle touche un sommet elle touche en même temps une longueur et une largeur du rectangle. Quel est alors le chemin parcouru depuis A ?

IV. Prolongements possibles.

1. Que dire du nombre de segments dont est constitué un trajet ? (Si ℓ et L sont premiers entre-eux, le nombre de segment est $\ell + L - 1$, sinon on s'y ramène).

2. Lien entre ce problème du billard et le problème de la diagonale du rectangle, donné dans le thème suivant ?

THEME 12

DIAGONALES

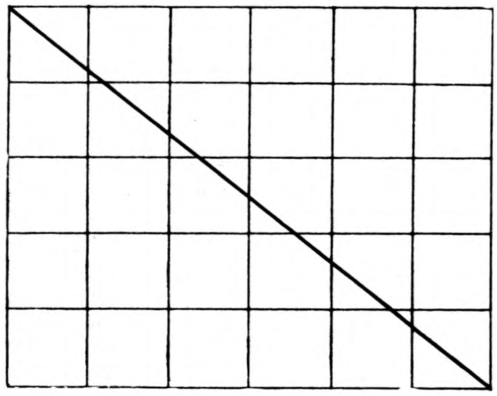
J'ai tracé un rectangle de 5 carreaux sur 6 carreaux, et une diagonale.

Combien de carreaux sont traversés par la diagonale ?

Recommence avec d'autres rectangles.

Peux-tu prévoir le nombre de carreaux traversés si tu connais la longueur et la largeur du rectangle ?

(voir quelques indications page 79).



THEME 13

CERCLES ET POLYGONES

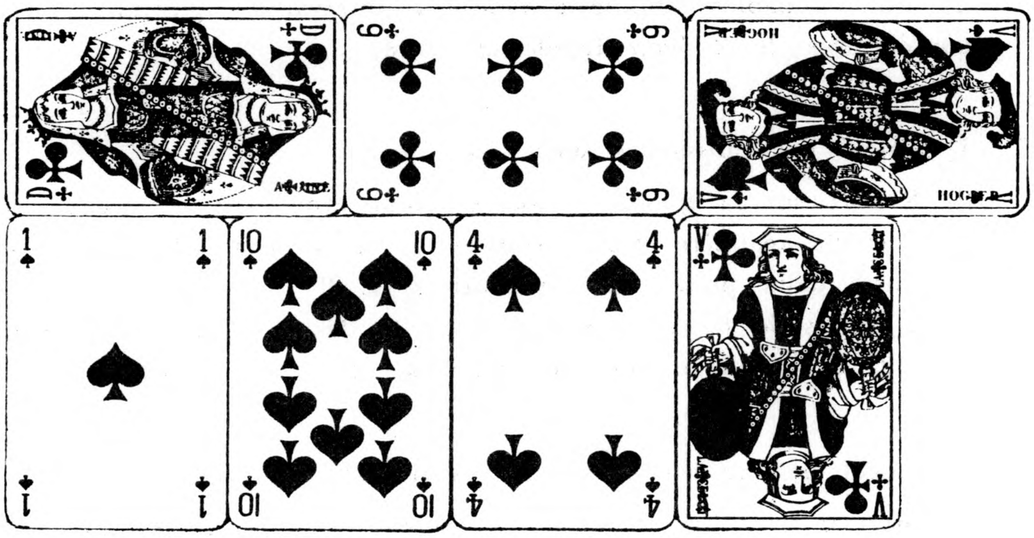
Sur le pourtour d'un disque tu places 12 points régulièrement espacés. Tu joins les points de deux en deux jusqu'à ce que tu reviennes au point de départ. Tu as tracé ainsi combien de segments ?

Que se passe-t-il si tu joins les points de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 etc...

Combien de tours fais-tu pour revenir à ton point de départ dans un cercle ou tu as tracé 36 points et où tu les joins de 15 en 15 ?

LES CARTES A JOUER

Tu as un jeu de 32 cartes, chaque carte mesure 5 cm sur 8 cm. Peux-tu, **en utilisant les 52 cartes,** rangées comme l'indique la figure, fabriquer un rectangle ?



Peux-tu faire de même avec un jeu de 10 cartes mesurant 8 cm sur 12 cm.

En rangeant des rectangles de 1 848 cm sur 5 148 cm de la même façon que tes cartes ci-dessus, combien de rectangles faut-il utiliser pour faire un grand rectangle ?

Quelles dimensions de boîte est-ce que je peux prendre pour ranger des pastilles rectangulaires de 1,5 cm sur 2 cm, les dimensions de la boîte devant être comprises entre 10 cm et 20 cm ?

PUISSANCES DE NATURELS

Prévoir 4 feuilles de papier millimétré par élève.

I 1) Calculs de 25 premières puissances de 2.

2) Sur du papier millimétré report à intervalles réguliers de 1 cm des puissances consécutives de 2 (voir feuille ci-contre)

II 1) Calcul des puissances successives de 10.

2) Report sur la feuille de papier millimétré sur une échelle en vis à vis de l'échelle **régulière** des puissances de 2. Il s'agit d'intercaler ces puissances de 10 entre deux puissances consécutives de 2 (on fait une approximation linéaire). D'où une série de remarques : l'échelle des puissances de 10 est-elle aussi régulière ? on prolonge alors les échelles, celle de 2 allant jusqu'à 2^{16}.

III 1) Calcul des puissances successives de 81.

Report sur une échelle de ces puissances en les intercalant entre celles de 2.

Remarques.

2) Calcul des puissances successives de 9.

Report.

Remarques : comparaison avec l'échelle des puissances de 81 ($9^2 = 81$).

3) Calcul des puissances successives de 3.

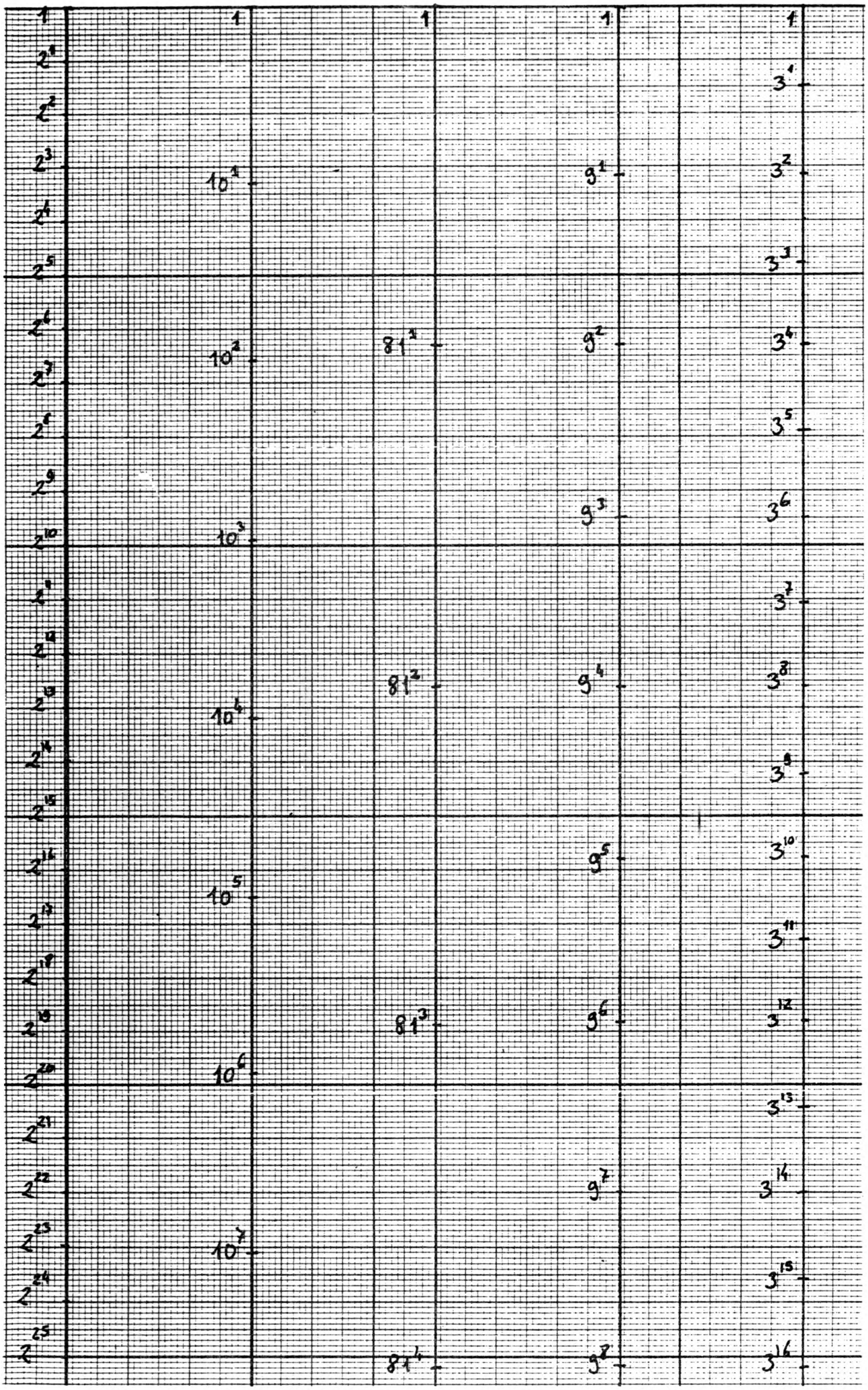
Report.

Remarques ($9 = 3^2$; $81 = 3^4$)

IV Même travail avec les puissances de 125 ; 25 ; 5.

Il nous semble préférable de présenter oralement cette activité afin qu'elle demeure la plus ouverte possible ; et une fois la notation avec exposants connue des élèves.

Remarquer le lien étroit de cette activité avec les logarithmes (la guitare en est une bonne illustration).


1
2^{1}
2^{2}
2^{3}
2^{4}
2^{5}
2^{6}
2^{7}
2^{8}
2^{9}
2^{10}
2^{11}
2^{12}
2^{13}
2^{14}
2^{15}
2^{16}
2^{17}
2^{18}
2^{19}
2^{20}
2^{21}
2^{22}
2^{23}
2^{24}
2^{25}
1
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
10^{7}
1
81^{1}
81^{2}
81^{3}
81^{4}
1
9^{1}
9^{2}
9^{3}
9^{4}
9^{5}
9^{6}
9^{7}
9^{8}
1
3^{1}
3^{2}
3^{3}
3^{4}
3^{5}
3^{6}
3^{7}
3^{8}
3^{9}
3^{10}
3^{11}
3^{12}
3^{13}
3^{14}
3^{15}
3^{16}

ANNEXES

NOMBRES PREMIERS PLUS PETITS QUE 1000

2	109	269	439	617	811
3	113	271	443	619	821
5	127	277	449	631	823
7	131	281	457	641	827
11	137	283	461	643	829
13	139	293	463	647	839
17	149	307	467	653	853
19	151	311	479	659	857
23	157	313	487	661	859
29	163	317	491	673	863
31	167	331	499	677	877
37	173	337	503	683	881
41	179	347	509	691	883
43	181	349	521	701	887
47	191	353	523	709	907
53	193	359	541	719	911
59	197	367	547	727	919
61	199	373	557	733	929
67	211	379	563	739	937
71	223	383	569	743	941
73	227	389	571	751	947
79	229	397	577	757	953
83	233	401	587	761	867
89	239	409	593	769	971
97	241	419	599	773	977
101	251	421	601	787	983
103	257	431	607	797	991
107	263	433	613	809	997

DIVISEURS DES NATURELS DE 1 à 100.

Naturel	Liste des diviseurs	Nombre de diviseurs	Naturel	Liste des diviseurs	Nombre de diviseurs
1	{1}	1	**29**	{29, 1}	2
2	{2, 1}	2	**30**	{30, 1, 15, 2, 10, 3, 6, 5}	8
3	{3, 1}	2	**31**	{31, 1}	2
4	{4, 1, 2}	3	**32**	{32, 1, 16, 2, 8, 4}	6
5	{5, 1}	2	**33**	{33, 1, 11, 3}	4
6	{6, 1, 3, 2}	4	**34**	{34, 1, 17, 2}	4
7	{7, 1}	2	**35**	{35, 1, 7, 5}	4
8	{8, 1, 4, 2}	4	**36**	{36, 1, 18, 2, 12, 3, 9, 4, 6}	9
9	{9, 1, 3}	3	**37**	{37, 1}	2
10	{10, 1, 5, 2}	4	**38**	{38, 1, 19, 2}	4
11	{11, 1}	2	**39**	{39, 1, 13, 3}	4
12	{12, 1, 6, 2, 4, 3}	6	**40**	{40, 1, 20, 2, 10, 4, 8, 5}	8
13	{13, 1}	2	**41**	{41, 1}	2
14	{14, 1, 7, 2}	4	**42**	{42, 1, 21, 2, 14, 3, 7, 6}	8
15	{15, 1, 5, 3}	4	**43**	{43, 1}	2
16	{16, 1, 8, 2, 4}	5	**44**	{44, 1, 22, 2, 11, 4}	6
17	{17, 1}	2	**45**	{45, 1, 15, 3, 9, 5}	6
18	{18, 1, 9, 2, 6, 3}	6	**46**	{46, 1, 23, 2}	4
19	{19, 1}	2	**47**	{47, 1}	2
20	{20, 1, 10, 2, 5, 4}	6	**48**	{48, 1, 24, 2, 16, 3, 12, 4, 8, 6}	10
21	{21, 1, 7, 3}	4	**49**	{49, 1, 7}	3
22	{22, 1, 11, 2}	4	**50**	{50. 1. 25, 2. 10, 5}	6
23	{23, 1}	2	**51**	{51, 1, 17, 3}	4
24	{24, 1, 12, 2, 8, 3, 6, 4}	8	**52**	{52, 1, 26, 2, 13, 4}	6
25	{25, 1, 5}	3	**53**	{53, 1}	2
26	{26, 1, 13, 2}	4	**54**	{54, 1, 27, 2, 18, 3, 9, 6}	8
27	{27, 1, 9, 3}	4	**55**	{55, 1, 11, 5}	4
28	{28, 1, 14, 2, 7, 4}	6	**56**	{56, 1, 28, 2, 14, 4, 8, 7}	8

Naturel	Liste des diviseurs	Nombre de diviseurs	Naturel	Liste des diviseurs	Nombre de diviseurs
57	{57, 1, 19, 3}	4	**79**	{79, 1}	2
58	{58, 1, 29, 2}	4	**80**	{80, 1, 40, 2, 20, 4, 16, 5, 10, 8}	10
59	{59, 1}	2	**81**	{81, 1, 27, 3, 9}	5
60	{60, 1, 30, 2, 20, 3, 15, 4, 12, 5, 10, 6}	12	**82**	{82, 1, 41, 2}	4
61	{61, 1}	2	**83**	{83, 1}	2
62	{62, 1, 31, 2}	4	**84**	{84, 1, 42, 2, 28, 3, 21, 4, 14, 6, 12, 7}	12
63	{63, 1, 21, 3, 9, 7}	6	**85**	{85, 1, 17, 5}	4
64	{64, 1, 32, 2, 16, 4, 8}	7	**86**	{86, 1, 43, 2}	4
65	{65, 1, 13, 5}	4	**87**	{87, 1, 29, 3}	4
66	{66, 1, 33, 2, 22, 3, 11, 6}	8	**88**	{88, 1, 44, 2, 22, 4, 11, 8}	8
67	{67, 1}	2	**89**	{89, 1 }	2
68	{68, 1, 34, 2, 17, 4}	6	**90**	{90, 1, 45, 2, 30, 3, 18, 5, 15, 6, 10, 9}	12
69	{69, 1, 23, 3}	4	**91**	{91, 1, 13, 7}	4
70	{70, 1, 35, 2, 14, 5, 10, 7}	8	**92**	{92, 1, 46, 2, 23, 4}	6
71	{71, 1}	2	**93**	{93, 1, 31, 3}	4
72	{72, 1, 36, 2, 24, 3, 18, 4, 12, 6, 9, 8}	12	**94**	{94, 1, 47, 2}	4
73	{73, 1}	2	**95**	{95, 1, 19, 5}	4
74	{74, 1, 37, 2}	4	**96**	{96, 1, 48, 2, 32, 3, 24, 4, 16, 6, 12, 8}	12
75	{75, 1, 25, 3, 15, 5}	6	**97**	{97, 1}	2
76	{76, 1, 38, 2, 19, 4}	6	**98**	{98, 1, 49, 2, 14, 7}	6
77	{77, 1, 11, 7}	4	**99**	{99, 1, 33, 3, 11, 9}	6
78	{78, 1, 39, 2, 26, 3, 13, 6}	8	**100**	{100, 1, 50, 2, 25, 4, 20, 5, 10}	9

Annexe 3 :

CLASSEMENT DES NATURELS DE 1 à 100 PAR NOMBRE DE DIVISEURS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	4	6	16	12	64	24	36	48		60
	3	9	8	81	18		30	100	80		72
	5	25	10		20		40				84
	7	49	14		28		42				90
	11		15		32		54				96
	13		21		44		56				
	17		22		45		66				
	19		26		50		70				
	23		27		52		78				
	29		33		63		88				
	31		34		68						
	37		35		75						
	41		38		76						
	43		39		92						
	47		46		98						
	53		51		99						
	59		55								
	61		57								
	67		58								
	71		62								
	73		65								
	79		69								
	83		74								
	89		77								
	97		82								
			85								
			86								
			87								
			91								
			93								
			94								
			95								

Annexe 4 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

POINTS VUS ET POINTS CACHES

Au cours de l'année 74 – 75, nous avons proposé dans quelques classes de sixième et de cinquième ainsi qu'à des stagiaires IREM, certains thèmes du livre «Points de départ» de C.S. Banwell, Kd Sanders et Dg Tahta - Editions Cédic.

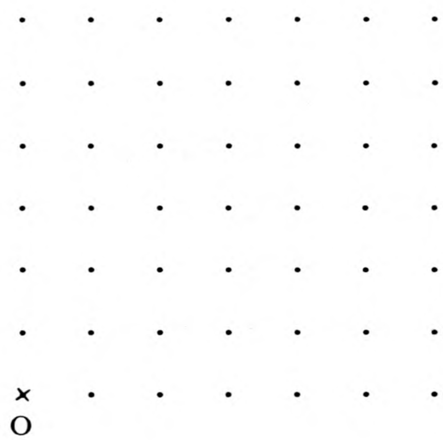
Signalons que ce livre propose un très grand nombre de «points de départ» pour des activités dans les classes de premier cycle. Les auteurs n'ont voulu que suggérer des thèmes d'activité et les types possibles d'exploitation.

Pour mieux convaincre de la richesse de certains thèmes proposés, il nous a paru intéressant de montrer comment une situation présentée sous forme de jeu, peut être exploitée dans diverses directions et à plusieurs niveaux.

I – QUAND UN ARBRE CACHE LA FORET.

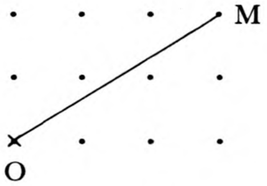
Une forêt est planté suivant les nœuds d'un quadrillage à maille carrée.

Quels sont les arbres vus et les arbres cachés pour un observateur placé en O ?

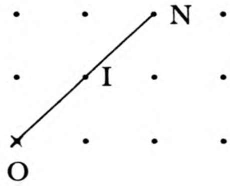


Pour illustrer cette situation il vaut mieux utiliser une feuille de papier pointé. En fait, on ne va pas s'intéresser à la situation réelle mais au modèle constitué par les points géométriques de la feuille de papier pointé. Si on utilise un papier quadrillé, les nœuds du quadrillage seront considérés comme les seuls «points» de la feuille.

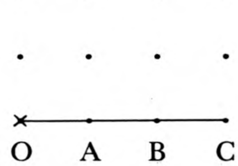
Cette situation peut paraître banale à première vue : étant donné un point M, il s'agit de reconnaître si le segment OM contient au moins un point autre que O et M ou s'il n'en contient aucun. Dans le premier cas nous dirons que M est un point caché ; dans le deuxième cas, M est un point vu.



M est un point vu



N est un point caché par le point I



B et C sont cachés par le point A

Il est souhaitable que le papier pointé ou le quadrillage soit suffisamment étendu.

Pourquoi, avant de lire la suite, ne consacreriez-vous pas quelques instants à une recherche personnelle de ce petit problème, par exemple sur la feuille pointée ci-jointe, ne serait-ce que pour vous familiariser avec la situation ?

II – PREMIERES OBSERVATIONS.

En présentant cette activité dans les classes et aux cours des stages IREM, nous avons pu faire quelques observations.

Généralement, durant un quart d'heure environ, aucune stratégie particulière de recherche n'est adoptée. Les élèves cherchent à résoudre le problème pour un point (souvent très éloigné de O) en utilisant leur règle ; ils passent ensuite à un autre point sans aucun lien particulier avec le premier. Puis les premières remarques apparaissent :

– sur la diagonale, tous les points, sauf les deux premiers, sont des points cachés ;

– de même sur la ligne, notée par la suite 0, ainsi que sur la colonne 0.

– Sur la ligne notée 1 et sur la colonne 1, tous les points sont vus.

– Il existe une symétrie par rapport à la diagonale.

Mais disons tout de suite que, dans une classe de sixième ou cinquième, sans intervervention, la recherche a de fortes chances de ne pas se développer.

III – REPERAGE.

Afin de contrôler leurs résultats, les élèves acceptent assez bien l'idée de repérage. L'utilisation d'un quadrillage à la place d'une feuille de papier pointée peut faciliter ce travail. Pourtant il est nécessaire d'intervenir ici pour imposer les coordonnées (0 ; 0) pour le point O, si on ne veut pas perdre toutes les observations pouvant apparaître par la suite (voir paragraphe V). Il y a là une difficulté non négligeable. La première ligne de points situés en bas de la feuille est, en fait, appelée ligne 0 ; le deuxième ligne est appelée ligne 1 etc... Il en est de même pour les colonnes.

IV – QUELQUES ORIENTATIONS POSSIBLES DE RECHERCHE PERMETTANT DES OBSERVATIONS INTERESSANTES.

Dans un premier temps donc, cette recherche ne conduit qu'à des vérifications plus ou moins précises d'alignement de points à l'aide d'une règle.

Les élèves ressentent pourtant la nécessité d'aller au delà de ces simples vérifications car avec ce procédé il est impossible de répondre avec certitude si un point assez éloigné de O est un point vu ou caché.

En vérifiant tout d'abord à l'aide de la règle, des élèves pensent que le point (1 ; 24) par exemple est caché. Or il est facile d'être sûr qu'il n'en est rien puisqu'entre la ligne 0 sur laquelle se trouve O et la ligne 1 sur laquelle se trouve le point (1 ; 24) il n'y a aucun point. Par conséquent, tous les points de la ligne 1 aussi éloignés soient-ils, sont des points vus. Ce premier résultat incite à la recherche d'un procédé autre que l'utilisation de la règle, permettant de savoir avec certitude si un point M de coordonnées entières (m ; m') est caché ou non.

Il nous paraît intéressant de relancer la recherche et d'amener les élèves à faire des observations intéressantes. S'il semble exclu que des élèves de 6ème ou 5ème découvrent sans aucune aide un tel procédé, il est cependant possible de donner les moyens d'approcher du résultat sans toutefois l'expliquer complètement.

En particulier, on peut orienter la recherche dans l'une des directions suivantes :

— Mise en évidence des points vus et des points cachés situés sur une même ligne.

(par exemple : ligne 1, aucun point n'est caché ; ligne 2 les points d'abscisse un nombre pair sont cachés ; ligne 3 les points d'abscisse un multiple de 3 sont cachés...).

— Recherche du nombre de nœuds situés sur la diagonale d'un rectangle de dimension (m ; n) tracé sur un quadrillage.

— Recherche des points cachés situés sur une même demi-droite d'origine O.

V – RECHERCHE DES POINTS CACHES SITUES SUR UNE MEME LIGNE.

Afin de débloquer la situation, dans deux classes de sixième en particulier, j'ai orienté le travail sur la recherche des points cachés d'une même ligne 0.

Quels sont les points cachés de la ligne 0 ?
Ceux de la ligne 1 ? de la ligne 2 ? de la ligne 3 ?...

Les élèves observent facilement que :

ligne 2 : les points cachés sont tous les points d'abscisse un nombre pair.

ligne 3 : les points cachés sont tous les points d'abscisse un multiple de 3.

ligne 4 : après une discussion qui a montré notamment le danger d'une généralisation trop hative, les élèves ont trouvé que les points cachés ont pour abscisse un multiple de 2 et non de 4 comme ils avaient tendance à le penser.

ligne 5 : la recherche nécessite plus de minutie. Il est possible pourtant d'observer que les abscisses des points cachés sont les multiples de 5.

ligne 6 : cette ligne pose un problème délicat aux élèves. Avant d'avoir cherché, ils pensent que les points cachés sont les points qui ont pour abscisse un multiple de 2 car, disent-ils, 6 est un multiple de 2. Bien vite ils se rendent compte que ce ne sont pas les seuls ; il y a aussi tous les points qui ont pour abscisse un multiple de 3. Beaucoup constatent d'ailleurs que la superposition des lignes 2 et 3 donne la ligne 6

ligne 7 : les points cachés ont pour abscisse un multiple de 7. 7 est un nombre premier. Des élèves de sixième qui ne connaissent pas les nombres premiers ont dit que 7 ne figurait que dans la table du 7.

ligne 8 : les points cachés de la ligne 8 ont pour abscisse un multiple de 2 ou de 4 ou de 8. Mais puisque les multiples de 4 et de 8 sont aussi des multiples de 2, il est normal que la ligne 8 soit semblable à la ligne 2.

Il n'est pas contradictoire de considérer aussi la ligne 8 comme le résultat de la superposition des lignes 2 et 4 car ces deux lignes sont semblables.

Peu à peu la notion de diviseur s'installe. Il est alors très difficile de faire face à toutes les remarques formulées par l'ensemble de la classe.

On peut à l'occasion de la ligne 8, essayer de préciser quelles sont les lignes semblables à la ligne 2.

Le lecteur peut vérifier que les lignes n et p sont semblables si et seulement si n et p ont mêmes diviseurs premiers.

ligne 9 : la méthode se confirme. On retrouve ici les remarques faites à propos des lignes 4 et 8.

ligne 10 : elle peut être considérée comme résultant de la superposition des lignes 2 et 5.

ligne 12 : cette ligne pose encore des difficultés à certains.

Si on considère que $12 = 3 \times 4$, la ligne 12 résulte de la superposition des lignes 3 et 4 c'est-à-dire des lignes 3 et 2. La ligne 12 est donc semblable à la ligne 6.

Si on considère que $12 = 6 \times 2$, il suffit de faire remarquer que la ligne 6 contient déjà tous les points cachés de la ligne 2 (l'ensemble des multiples de 2 et de 3 contient évidemment tous les multiples de 2).

Signalons ici une remarque faite en sixième. Nous cherchions si le point de coordonnées (1975 ; 3) était caché ou non. Impossible de se servir d'une règle. Un élève a alors proposé «C'est un point vu». Lorsque je lui ai demandé pourquoi, il a répondu à peu près ceci : «Sur la ligne 3, il y a plus de points vus que de points cachés. Sur la feuille, il y a 12 points vus et 7 points cachés (sur la ligne 3). Je décide donc que le point cherché est un point vu». Cette remarque a été longuement discutée par l'ensemble de la classe. Elle a été vivement rejetée par certains. Avec un tel raisonnement disaient-ils, sur la ligne 3, il ne devrait pas y avoir d'autres points cachés que les 7 marqués sur la feuille, les autres points étant tous considérés comme des points vus. Puis peu à peu, les élèves ont été d'accord pour penser que s'ils n'avaient pas de renseignements sur un point situé sur la ligne 3, en particulier s'ils ne connaissaient pas l'abscisse de ce point, en répondant que ce point était vu, ils avaient moins de chances de donner une mauvaise réponse. Il a fallu préciser cette expression «avoir moins de chances de donner une mauvaise réponse» : en particulier que cela voulait dire que, si on répondait toujours point vu pour une série de points choisis au hasard sur la ligne 3, il y avait plus de réponses exactes que de réponses fausses. On a précisé aussi la proportion du nombre des points vus parmi les 10 premiers points puis parmi les 100 premiers points, les 1000 premiers points, etc... de la ligne 3.

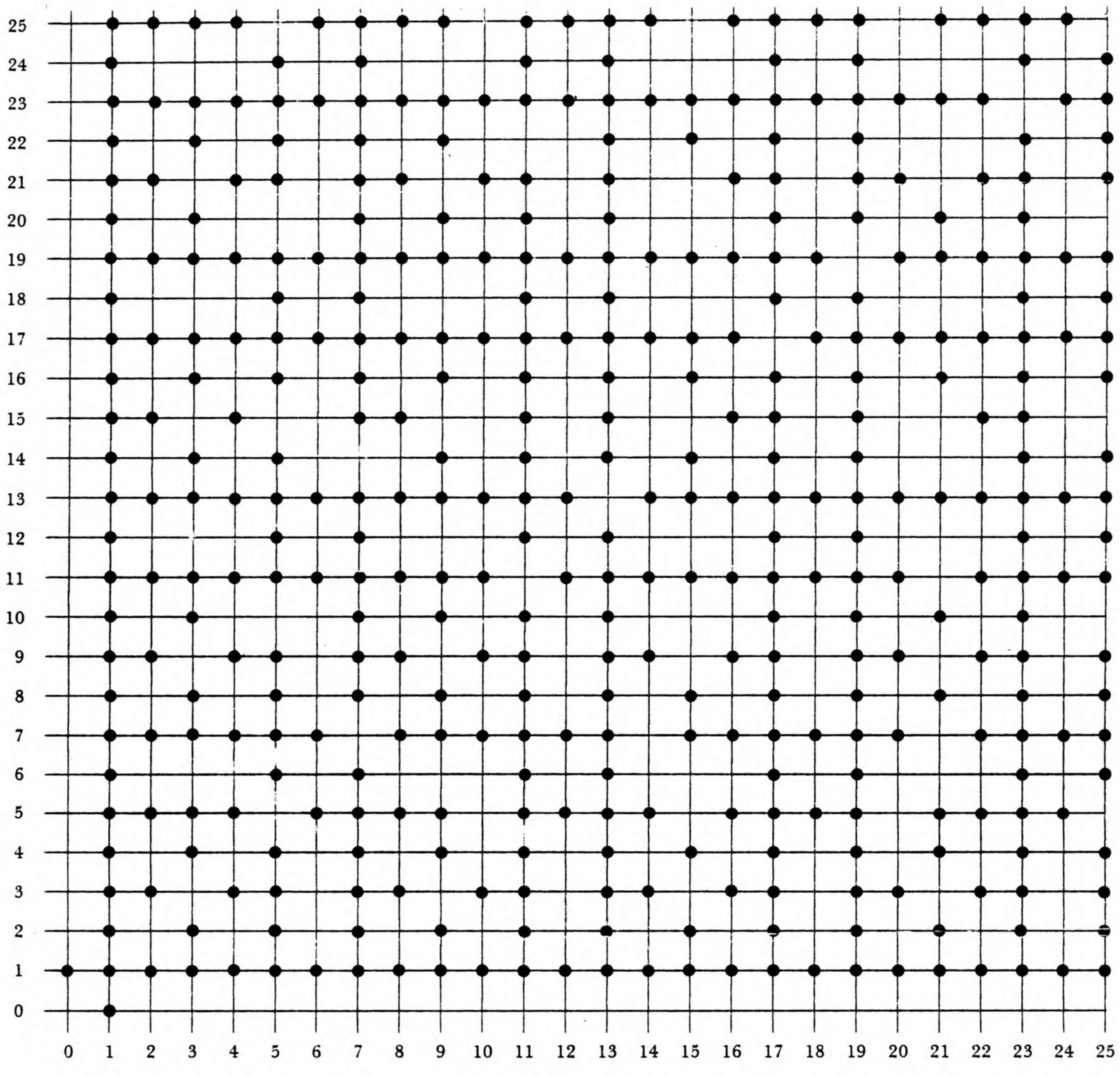
J'ai enfin posé à la classe les questions suivantes : si on choisissait sur la ligne 3, 1000 points au hasard, combien y aurait-il parmi eux de points vus, de points cachés ? De même si on choisissait 1000 nombres au hasard parmi les nombres de 1 à 10000, combien y aurait-il parmi eux de multiples de 3 ? L'idée que la proportion précédente soit à peu près respectée a paru naturelle à la plupart. Mais il aurait fallu préciser cela en faisant faire effectivement les différents tirages.

Les observations faites précédemment sur les abscisses des points cachés des premières lignes laissent facilement apparaître un procédé arithmétique simple permettant de reconnaître si le point de coordonnées (m, m') est caché ou non : Si m et m' sont des nombres étrangers (c'est-à-dire sans diviseur commun autre que 1) alors les coordonnées (m, m') sont celles d'un point vu.

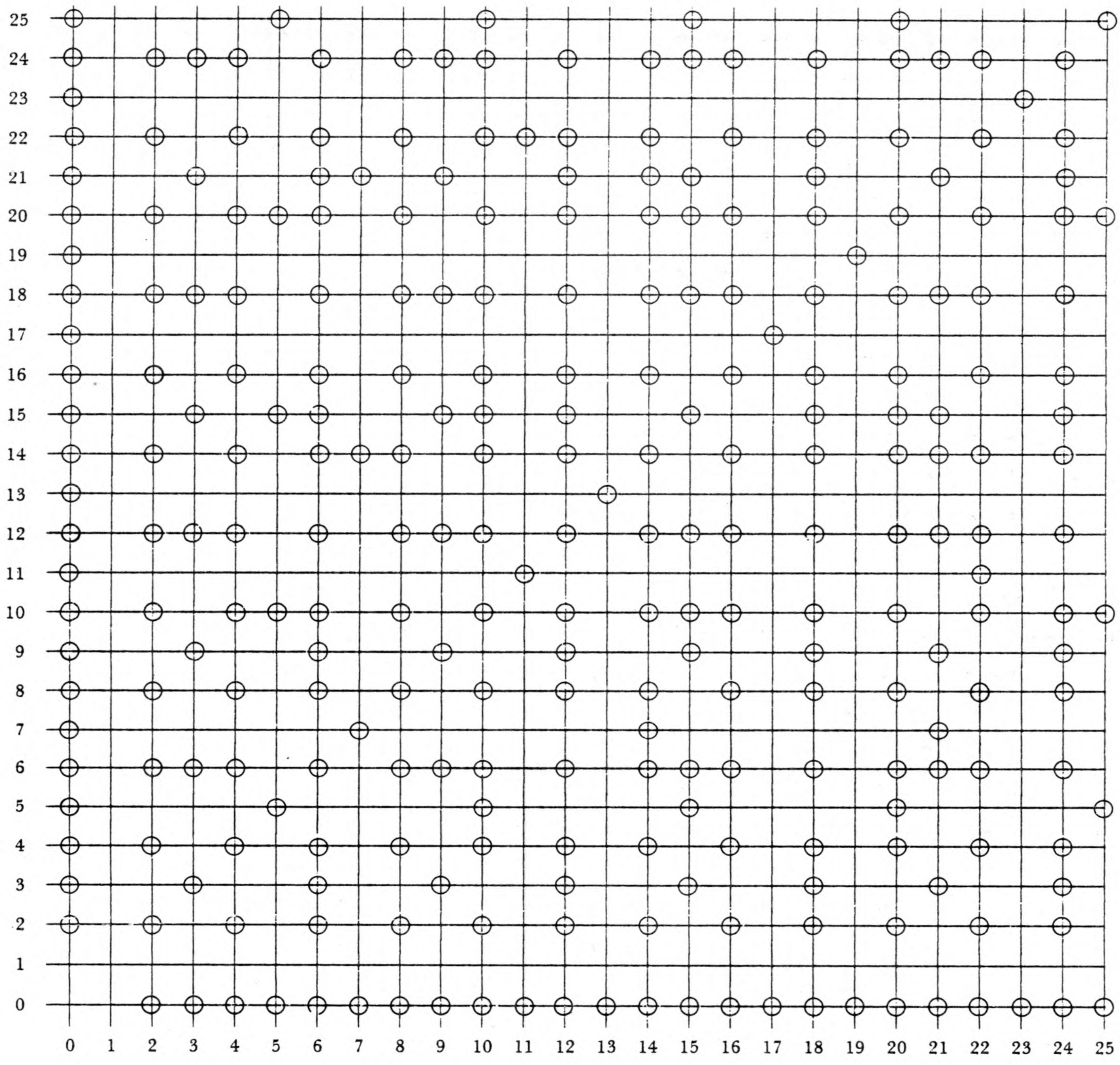
Il a été possible de faire découvrir ce procédé aux élèves de sixième. Un élève choisit un point, puis il détermine le numéro de la ligne contenant ce point ainsi que l'abscisse de ce point. En faisant référence aux abscisses des points cachés de la ligne considérée, il peut répondre s'il s'agit d'un point caché ou vu. Après une série d'exemples, la notion de diviseur commun apparaît. Certains élèves ont choisi la caractérisation suivante : un point est caché si ses coordonnées se trouvent dans une même table de multiplication. (par exemple : 12 et 8 sont tous les deux dans la table de 4, le point (12 ; 8) est caché).

Cette caractérisation des coordonnées des points cachés et des points vus constitue une généralisation qui est loin d'être évidente pour tous les élèves de 6ème ou de 5ème. Mais n'est-ce pas fondamental de pouvoir donner l'occasion, à ce niveau, de substituer à une vérification matérielle délicate ou même impossible, un raisonnement qui lui permet d'aboutir plus sûrement au résultat. Ce thème nous paraît à ce titre entre autres particulièrement intéressant.

POINTS VUS


25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

POINTS CACHES

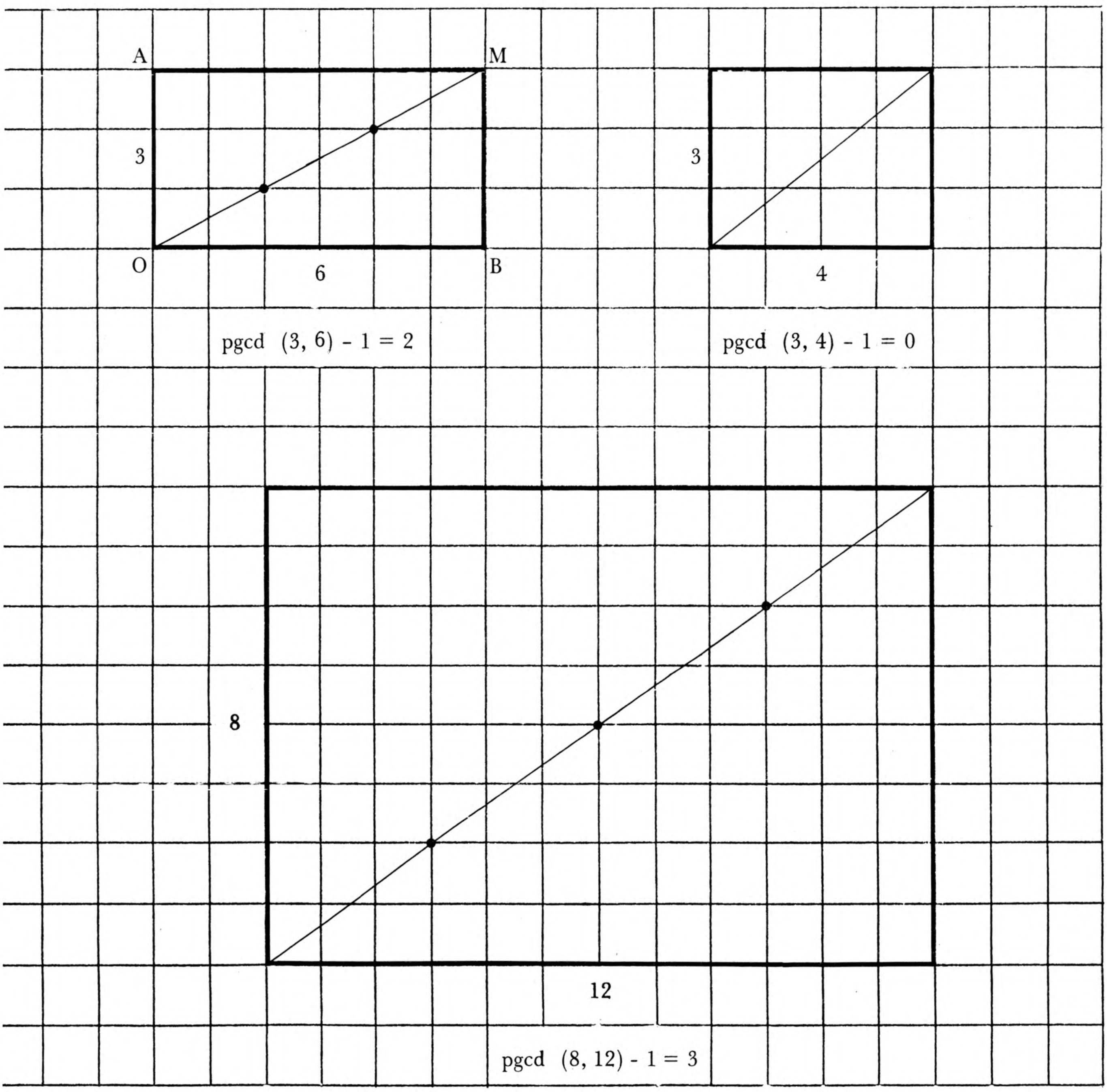


VI – OU L'ON RETROUVE LES RESULTATS PRECEDENTS EN S'INTERESSANT A LA DIAGONALE D'UN RECTANGLE, TRACE SUR UN QUADRILLAGE.*

Dans une classe de cinquième, j'ai donné en même temps que ce thème de points vus et de points cachés le problème suivant :

Dans un rectangle de dimensions m et m' tracé sur un quadrillage, quel est le nombre de carreaux traversés par une diagonale et le nombre de nœuds du quadrillage situés sur cette diagonale autres que les sommets ? Peut-on prévoir les résultats connaissant les dimensions du rectangle ?

Le lecteur pourra vérifier que si O, A, B et M sont les points de coordonnées respectives (0 ; 0), (x ; 0), (0 ; y) et (x ; y) et si n est le nombre de nœuds appartenant au segment OM on a : n = pgcd(x ; y) - 1.



* Voir le thème 12 page 54.

A partir d'exemples, les élèves ont situé le problème ; puis ils ont essayé de l'analyser et de dégager un certain nombre de propriétés.

La première constatation faite en classe a été la suivante : s'il existe des nœuds sur la diagonale à l'intérieur du rectangle, ils sont régulièrement espacés. On peut dessiner des rectangles de mêmes dimensions «le long de cette diagonale». (Ces propriétés sont des propriétés affines du quadrillage). En conséquence, si on ne peut pas placer de rectangles identiques le long de la diagonale, alors il n'existe pas de nœuds sur la diagonale autres que les sommets.

Les élèves ont donc essayé de chercher dans quelles conditions il était possible de dessiner des rectangles le long de la diagonale.

Voici un exemple de travail pouvant être réalisé .

Sur le quadrillage mettant en évidence les points cachés, nous avons dessiné le rectangle OAMB, A étant le point de coordonnées (16 ; 0), M de coordonnées (16 ; 24) et B de coordonnées (0 ; 24).

Le long de la diagonale OM il est possible de construire un certain nombre de rectangles de mêmes dimensions suivant le quadrillage :

- on peut dessiner par exemple 4 rectangles de dimensions 4 sur 6,
- on peut dessiner aussi 8 rectangles de dimensions 2 sur 3.

Considérons les 4 rectangles de dimension 4 sur 6. Les 4 largeurs occupent toute la largeur du rectangle OAMB. Les 4 longueurs occupent toute la longueur du rectangle

$$4 \times 4 = 16 \qquad\qquad 4 \times 6 = 24$$

4 est un diviseur commun à 16 et à 24.

De même pour les 8 rectangles de dimension 2 sur 3 :

$$8 \times 2 = 16 \qquad\qquad 8 \times 3 = 24$$

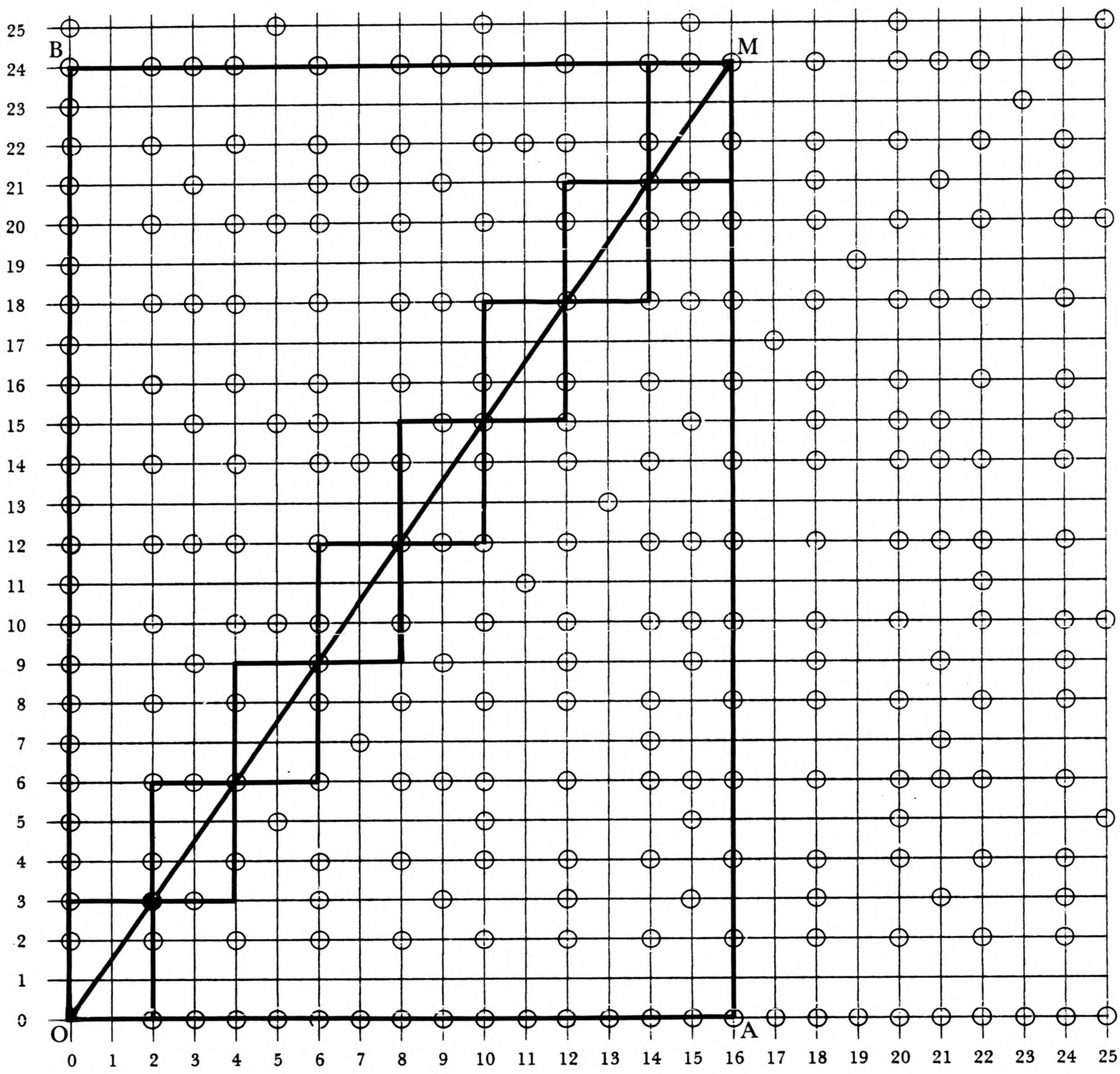
8 est le plus grand nombre de rectangles de mêmes dimensions qu'il est possible de dessiner le long de la diagonale OM. 8 est le pgcd de 16 et 24.

Chaque fois qu'il est possible de dessiner des rectangles de mêmes dimensions le long de la diagonale d'un rectangle OAMB, M étant le point de coordonnées (x, y), le nombre de rectangles trouvés est un diviseur commun à x et y.

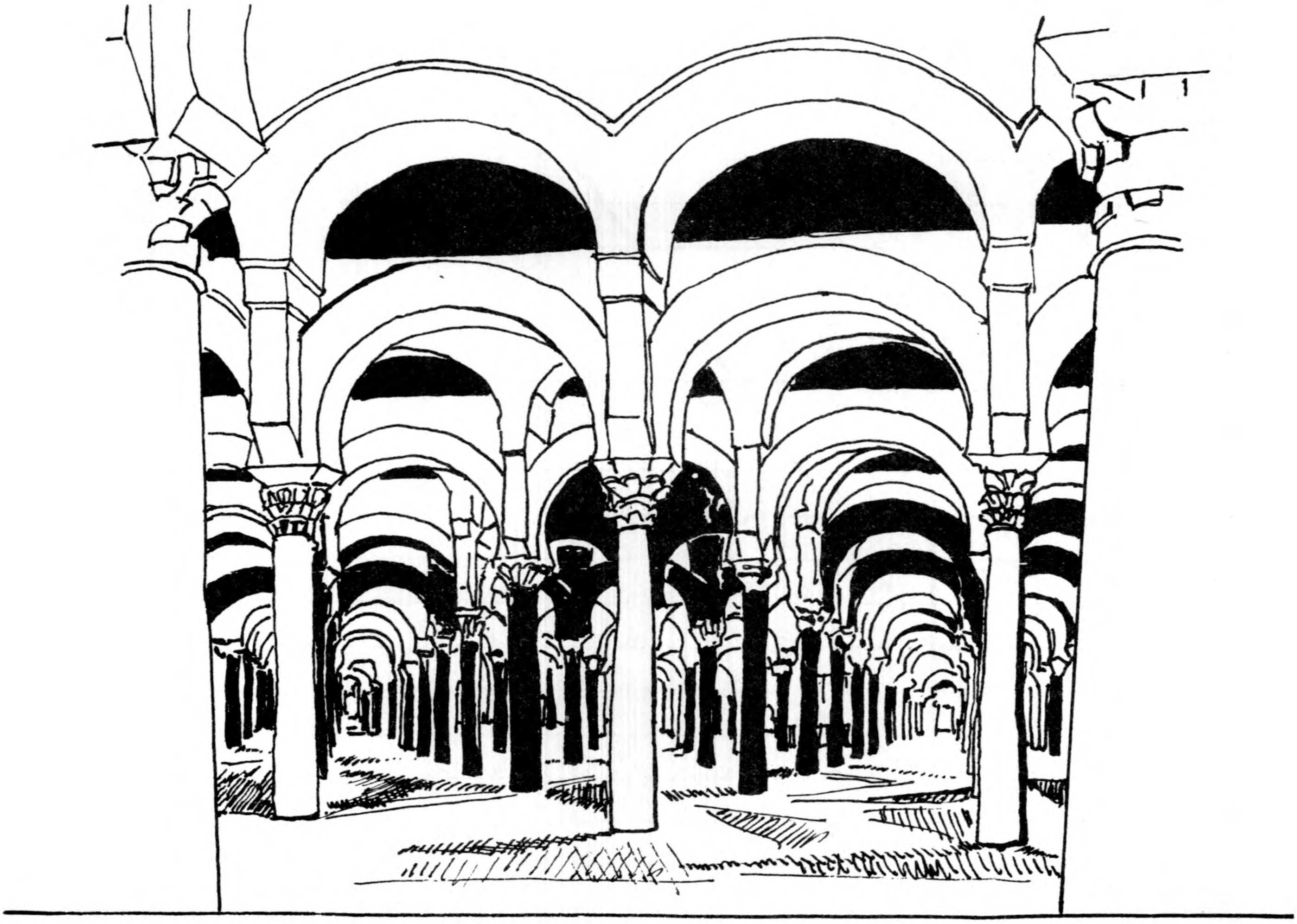
Nous avons là, en particulier une méthode géométrique de recherche des diviseurs communs à deux nombres et du pgcd de deux nombres.

Lorsque j'ai demandé à la classe de revenir au thème des points vus et cachés, pour certains le transfert des résultats obtenus précédemment ne s'est pas effectué immédiatement. Il a fallu dessiner, à partir d'un point A de coordonnées (m ; m') sur le quadrillage, le rectangle de diagonale OA ;

RECHERCHE DU PGCD DE 2 NOMBRES



pgcd (24, 16) = 8



alors seulement l'ensemble de la classe s'est bien rendu compte que A est un point vu s'il n'existe pas de nœuds autres que les sommets sur la diagonale.

Cette deuxième approche est peut être plus intéressante en cinquième car elle fait intervenir assez naturellement le pgcd de 2 nombres. Elle peut être complétée par certaines remarques sur les points cachés d'une même ligne.

VII – RECHERCHE DES POINTS CACHES SITUES SUR UNE MEME DEMI-DROITE D'ORIGINE O.

Une stratégie possible pour la recherche des points cachés est très naturellement de chercher à s'occuper de l'ensemble des points d'une même demi-droite d'origine O, le premier étant un point vu, tous les autres étant cachés par le premier.

Au niveau de la classe de quatrième il est très facile tout en s'appuyant sur cette façon de procéder, de démontrer les résultats du paragraphe VI à l'aide des vecteurs.

Soit M un point de coordonnées entières (x, y), distinct de O. Pour que M soit un point caché, il faut et il suffit qu'il existe un point M_0, de coordonnées entières (x_0, y_0) avec $x_0 \neq x$, distinct de O et tel que $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM}$ soient colinéaires.

Cette condition est équivalente à l'existence d'un entier k, non nul, différent de 1 et tel que

$$x = ky_0 \qquad \text{et} \qquad y = ky_0$$

autrement dit, pour que M, de coordonnées entières (x, y), soit un point caché, il faut et il suffit que x et y admettent un diviseur commun différent de 1.

Cette démonstration n'est pas la seule possible, bien entendu.

Nous venons de voir comment à des niveaux divers on peut aboutir à la caractérisation des coordonnées des points cachés et des points vus. Il y a d'autres approches possibles de ce thème :

En particulier, au lieu d'être un sujet de recherche il peut servir à illustrer une notion : nous venons de voir comment les points cachés illustrent la condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient colinéaires.

Nous allons voir comment il peut être utilisé pour d'autres notions comme relation, classe d'équivalence, application linéaire.

VIII – RELATION – RELATION D'EQUIVALENCE.

Soit l'ensemble {0, 1 ..., 25}. Considérons dans cet ensemble la relation «... a un diviseur commun différent de 1 avec...».

Une des représentations cartésiennes possibles de cette relation est semblable à celle des points vus d'une «forêt» de dimension 25 sur 25.

Il est possible d'utiliser les points cachés en particulier pour illustrer la relation «... avoir mêmes diviseurs premiers que ...». Cette relation est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence est constituée de l'ensemble des numéros des lignes qui sont identiques.

A partir des points cachés d'une «forêt» de dimensions 25 sur 25 (voir page 85), on peut faire apparaître une partition de l'ensemble des lignes.

On regroupe dans une même partie toutes les lignes identiques à une ligne donnée. Cette partition permet de définir une relation d'équivalence dans l'ensemble des lignes $\{l_1, ..., l_{25}\}$ ainsi qu'une relation d'équivalence dans l'ensemble des numéros de lignes {1, ..., 25}. Cette dernière relation à même graphe que la relation «... avoir mêmes diviseurs premiers que ...».

Les lignes l_6, l_{12} et l_{24} sont identiques,
6, 12 et 24 ont mêmes diviseurs premiers 3 et 2.

de même les lignes l_2, l_4, l_8 et l_{16} sont identiques.
2, 4, 8 et 16 ont même diviseur premier 2.

Les éléments de la partition de l'ensemble des lignes sont :

$\{l_1\}$; $\{l_2, l_4, l_8, l_{16}\}$; $\{l_3, l_9\}$; $\{l_5, l_{25}\}$; $\{l_6, l_{12}, l_{18}, l_{24}\}$; $\{l_7\}$;

$\{l_{10}, l_{20}\}$; $\{l_{11}\}$; $\{l_{13}\}$; $\{l_{14}\}$; $\{l_{15}\}$; $\{l_{17}\}$; $\{l_{19}\}$; $\{l_{21}\}$; $\{l_{22}\}$;

$\{l_{23}\}$.

Notons C_1 ; C_2 ... ; C_{25} les classes des lignes l_1, l_2 ..., l_{25}. Il est possible de mettre en évidence dans l'ensemble quotient une loi de composition induite par la multiplication des entiers.

$C_2 = \{l_2 ; l_4 ; l_8, l_{16}\}$

$C_3 = \{l_3 ; l_9\}$

Les lignes $l_{2\times 3}$, $l_{2\times 9}$, $l_{4\times 3}$ et $l_{8\times 3}$ sont identiques. De même en prolongeant le tableau, on trouverait que les lignes $l_{4\times 9}$, $l_{8\times 9}$, $l_{16\times 3}$, $l_{16\times 9}$ sont identiques à la ligne l_6. Ces lignes appartiennent donc toutes à C_6.

D'où, si on note $\times$ la loi induite, on a :

$$C_2 \times C_3 = C_6$$

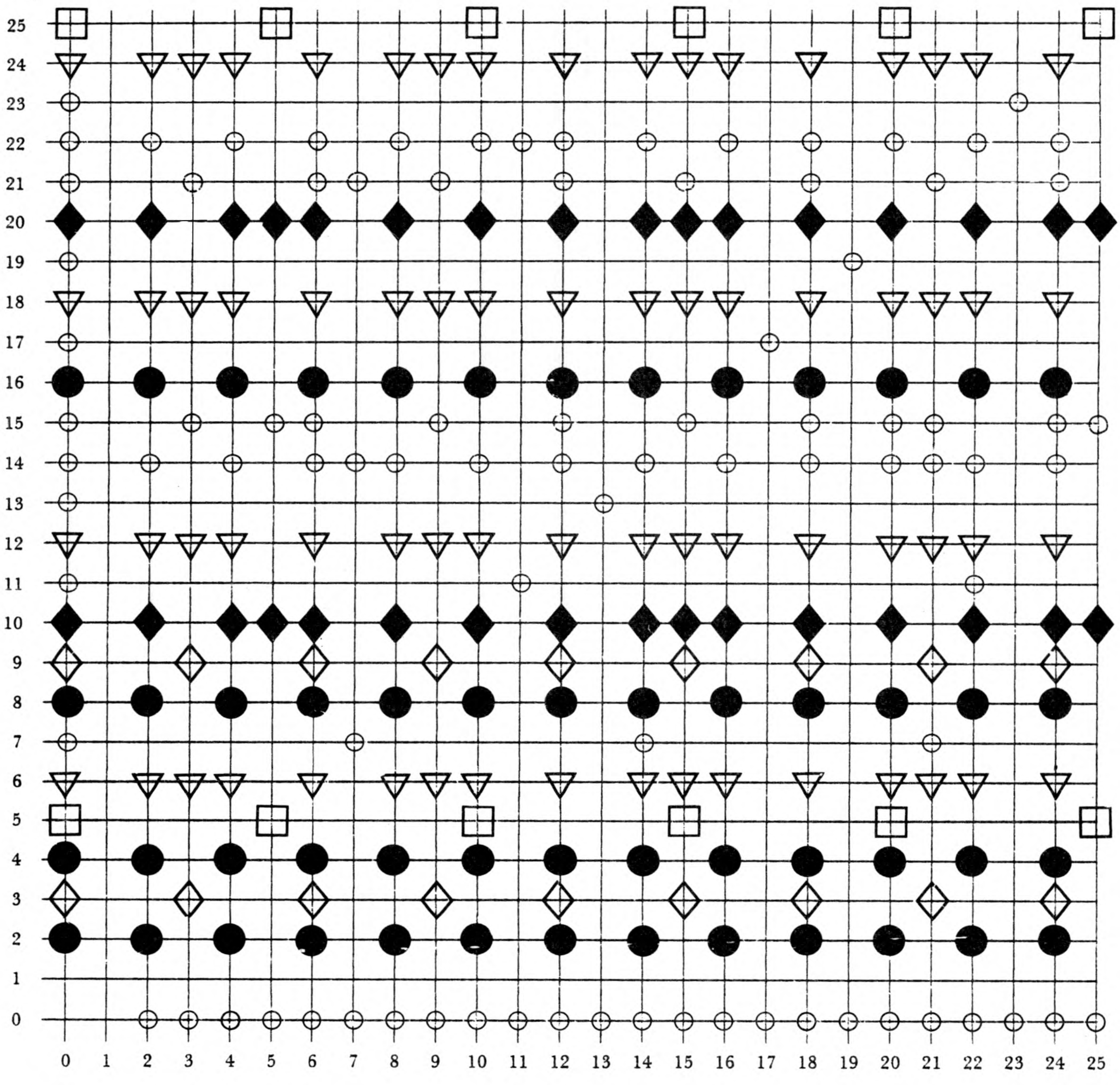
De même

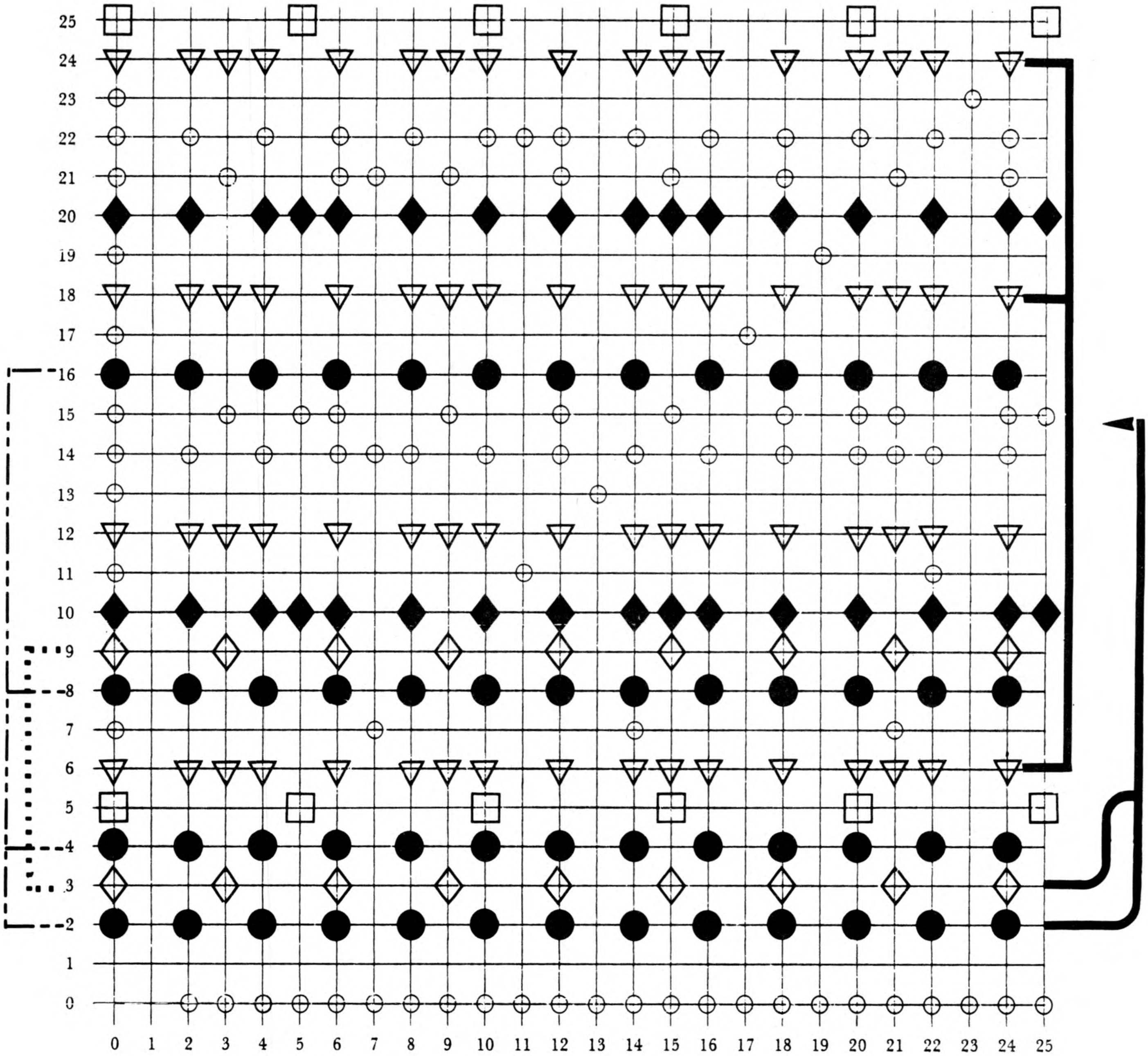
$$C_2 \times C_5 = C_{10} \qquad \text{etc...}$$

Cette loi correspond à la règle découverte par les élèves paragraphe V : Pour déterminer les points cachés de la ligne 6 il suffit de superposer les lignes 2 et 3.

«AVOIR MEMES DIVISEURS PREMIERS»

Classe d'équivalence





$$C_2 \times C_3 = C_6$$

IX – REPRESENTATION GRAPHIQUE D'APPLICATIONS LINEAIRES.

Page 88, sur un quadrillage où figure l'ensemble des points cachés, nous avons fait apparaître les représentations graphiques de quelques applications linéaires du type :

$$x \longmapsto a \cdot x \quad (a \in Q_+) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0.$$

Il est possible que les élèves envisagent alors l'extension de la représentation aux valeurs négatives de x. Il est intéressant, dans ce cas, de remarquer comment les symétries permettent de déterminer sans difficulté l'ensemble des points cachés lorsque le point O est au centre de la feuille pointée.

Il est aussi possible d'observer que les lignes parallèles à la première bissectrice, sont identiques aux lignes l_1, l_2 ..., l_{25}.

En effet une ligne de points parallèle à la 1ère bissectrice a pour équation : $y = x + a$. Un point de cette droite est caché si x et $x + a$ ne sont pas étrangers.

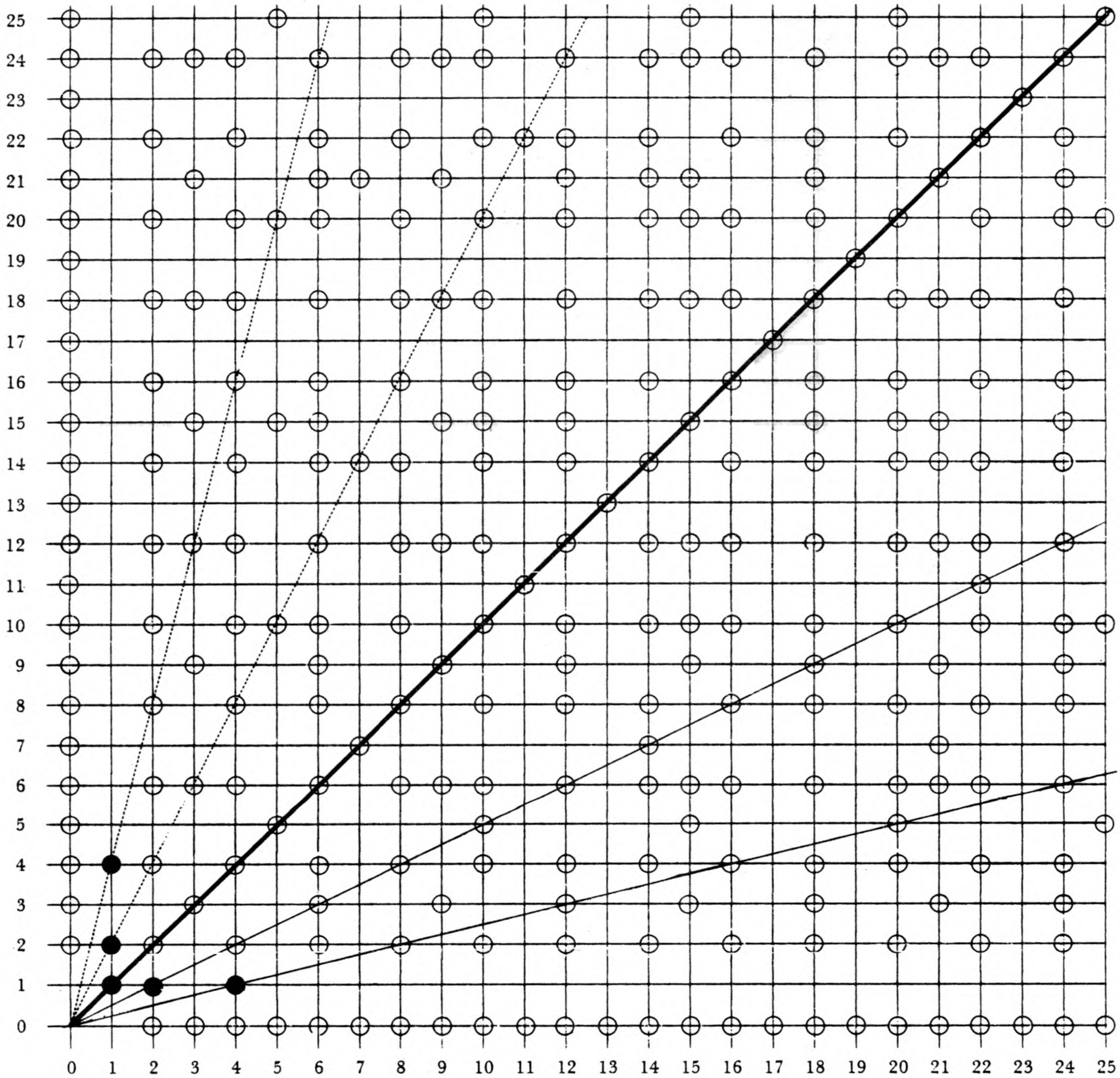
C'est-à-dire si x et a ne sont pas étrangers. Sur la droite d'équation $y = x + a$ les points cachés sont donc les points dont l'abscisse x a un diviseur commun autre que 1 avec a.

Mais puisque sur la ligne l_a les points cachés sont les points dont l'abscisse x a un diviseur commun autre que 1 avec a, la disposition des points cachés sur la droite d'équation $y = x + a$ est la même que celle sur la ligne l_a.

$y = 4x$

$y = 2x$

$y = 1x$



$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{4}x.$$