Jéomatri

MATHEMATIQUES en 4ème

IREM
de GRENOBLE

OPHRYS

Nous remercions les éditions CEDIC qui nous ont aimablement autorisés à reprendre des extraits de l'ouvrage qu'elles avaient publié en 1976 : "Faisons des mathématiques avec Jeomatri".

L'illustration intérieure a été réalisée par J.C. Jaillet.

La maquette de couverture a été réalisée par D. Iglesias à partir d'un pavage du plan par des 4.

Les dessins géométriques ont été réalisés par J. Prunier.

La composition a été faite par A. Bicais et M. Bernard.

ISBN 2-7080-0465-4

SOMMAIRE

Avant de commencer.....

Pour travailler avec ce livre pendant toute cette année, tu auras besoin d'un certain nombres d'autres outils :

- une règle - une règle graduée - une équerre - - un compas - des crayons ou feutres de couleurs - - deux ou trois feuilles de papier calque - un livret de feuilles de manipulation Jeomatri de 4ème que tu trouveras en librairie et évidemment du papier et de quoi écrire.

Lorsque le texte du livre est imprimé en caractères droits, c'est que nous t'expliquons quelque chose, lorsqu'il est imprimé en caractères italiques, c'est que nous te donnons des consignes de travail. Nous t'expliquerons, dans le livre, pourquoi certaines parties sont imprimées en noir et d'autres en bleu.

Les mots nouveaux sont écrits en majuscules.
Le symbole ► dans la marge t'indique une notation.
Le symbole ◇◇◇ dans la marge attire ton attention sur une propriété importante.

A la fin de chaque chapitre (sauf les chapitres L et D) des pages bordées de bleu contiennent une récapitulation de ce que nous avons fait dans le chapitre sous le titre «Faisons le point».

Enfin, à la fin de chaque chapitre, nous t'avons parlé d'un mathématicien célèbre et de l'époque où il a vécu.

Une table de nombres premiers se trouve page 92.

L

écritures et langage

L1 Parenthèses

I – UNE PHRASE NON PONCTUEE.

Dominique écrit à ses parents pendant les vacances. Il leur raconte : «en descendant de la montagne dans un camion j'ai vu une vache».

Comment comprends-tu cette phrase ? Tes camarades comprennent-ils comme toi ? Que faudrait-il ajouter à la phrase pour que tout le monde comprenne la même chose ?

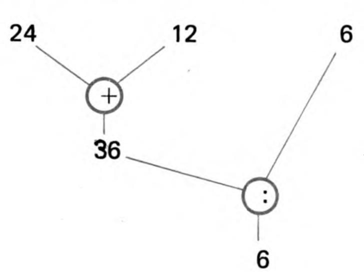
Cet exemple te montre que la ponctuation est indispensable pour la bonne compréhension d'une phrase écrite.

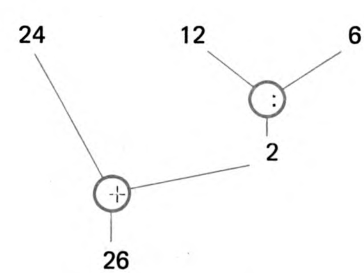
Dans l'écriture mathématique, les parenthèses sont en quelque sorte des signes de ponctuation.

II – UTILISATION DES PARENTHESES.

Calcule l'entier $24 + 12 : 6$. *Tes camarades sont-ils d'accord avec toi ?*

Certains d'entre vous ont peut-être trouvé 6 et d'autres 26. C'est que vous avez conduit le calcul suivant l'un des deux arbres suivants.





Pour supprimer cette ambiguité, on peut utiliser des parenthèses. Voici les écritures utilisées : $(24 + 12) : 6$, $24 + (12 : 6)$.

Remarque.

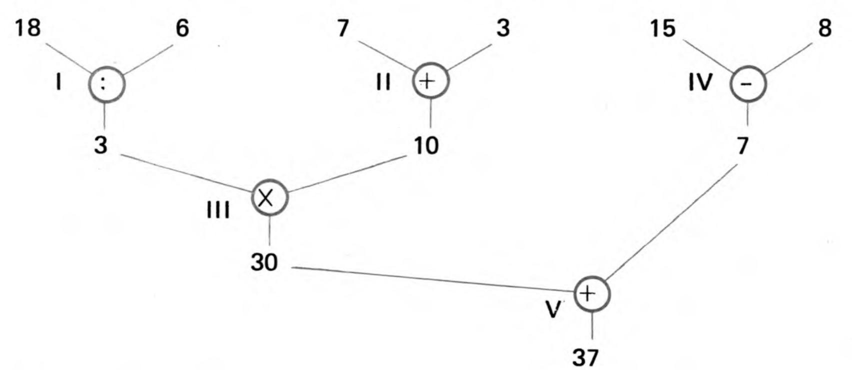
Lorsqu'on te dit : «calcule $24 + (12 : 6)$», cela signifie qu'on te demande d'écrire ce nombre sous la forme 26.

Exercice.

Calcule $(13 - 5) \times (21 : 7)$.
Tu feras un arbre comme ci-dessus pour représenter tes calculs.

III — AVEC PLUSIEURS PARENTHESES.

Etudions l'écriture suivante : $((18 : 6) \times (7 + 3)) + (15 - 8)$.
La place des différentes parenthèses nous conduit à dessiner l'arbre ci-dessous.



Cet arbre indique que
- les opérations I et II doivent être faites obligatoirement avant l'opération III,
- les opérations III et IV doivent être faites obligatoirement avant l'opération V.

Par contre,
- les opérations I, II et IV peuvent être faites dans n'importe quel ordre,
- l'opération IV peut être faite avant l'opération III.

Exercice.

1. *Calcule* $((8 - 5) \times (3 \times 5)) : (6 + 3)$; $(13 + 12) - (8 + (5 \times 3))$; $((1{,}2 \times 0{,}5) + 0{,}6) \times 2{,}4$.

2. *Calcule* $(13 \times 7) + (8 \times 15)$; $((13 \times 7) + 8) \times 15$; $(13 \times (7 + 8)) \times 15$.
Fais dans chaque cas l'arbre représentant tes calculs.

IV — REGLES DE PRIORITE.

Recopie le tableau suivant.

3		7	=	21	4	5	1	=	21	9	3	7	=	21
8	3	3	=	21	3	4	3	=	21	9	7	3	=	21

Tu dois compléter la première partie de chacune des égalités avec des symboles choisis parmi + ; - ; X ; : ; et ; ( ) *de façon à obtenir* 21.

Pour utiliser moins de parenthèses, on convient que la multiplication a la priorité sur l'addition.

Par exemple, l'écriture $6 + 2 \times 3$ a le même sens que l'écriture $6 + (2 \times 3)$.

Calcule $7 + 3 \times 5 + 12 \times 2 + 4$.

Plus généralement, on convient que la multiplication a la priorité sur l'addition et sur la soustraction et que la division a la priorité sur l'addition et la soustraction.

Ainsi l'écriture $13 \times 7 - 6$ a le même sens que l'écriture $(13 \times 7) - 6$,
l'écriture $24 + 20 : 5$ a le même sens que l'écriture $24 + (20 : 5)$,
l'écriture $72 : 9 - 5$ a le même sens que l'écriture $(72 : 9) - 5$.

Reprends le tableau que tu as fait au début de ce paragraphe. En te servant des conventions précédentes, quelles sont les parenthèses que tu peux supprimer ?

L 2 Activités numériques

I – FAISONS DES ADDITIONS.

1.1 Nous allons calculer de manière «astucieuse» la somme des entiers de 1 à 20, c'est-à-dire le nombre

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$.

Ce nombre peut s'écrire

$1 + 20 + 2 + 19 + 3 + 18 + 4 + 17 + 5 + 16 + 6 + 15 + 7 + 14 + 8 + 13 + 9 + 12 + 10 + 11$,

et aussi

$(1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + (4 + 17) + (5 + 16) + (6 + 15) + (7 + 14) + (8 + 13) + (9 + 12) + (10 + 11)$.

Quelles remarques fais-tu ? Quel est le nombre cherché ?

1.2 *Calcule mentalement*

$3 + 5\,602 + 7 + 10 + 4\,398$ *et* $13{,}69 + 5{,}6 + 0{,}4 + 1{,}31$.

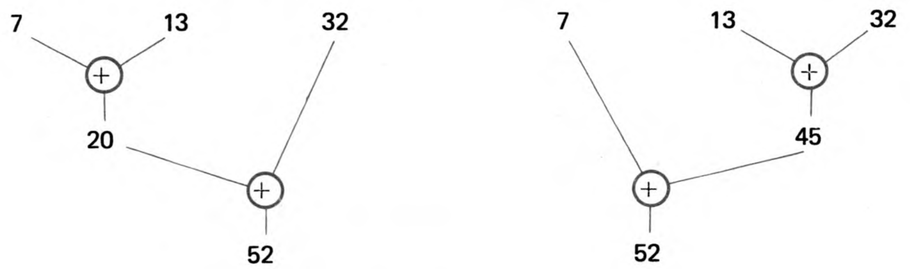
1.3 Réflexions sur les exercices précédents.

Les calculs ont été facilités parce que, lorsque tu additionnes des entiers ou des décimaux,

- tu peux changer l'ordre des termes,
- tu peux effectuer certaines sommes partielles.

Cela tient aux propriétés de l'addition que nous allons rappeler maintenant.

Tu sais que $(7+13)+32 = 7+(13+32)$.



On obtiendrait aussi une égalité en remplaçant les trois nombres 7, 13 et 32 par d'autres entiers ou décimaux quelconques : l'addition des décimaux est associative.

Puisque les écritures $(7+13)+32$ et $7+(13+32)$ représentent le même nombre, on écrit plus souvent $7+13+32$ pour désigner ce nombre.

IMPORTANT : ce qui est vrai pour l'addition est faux pour certaines autres opérations.

Par exemple, calcule $(12{,}8-5)-2$ *et* $12{,}8-(5-2)$.

Quand on écrit $12{,}8-5-2$, on convient que cela a le même sens que $(12{,}8-5)-2$.

De même, quand on écrit $13+7-6$, cela a le même sens que $(13+7)-6$.

Tu sais que $3+12{,}1 = 12{,}1+3$.

On obtiendrait aussi une égalité en remplaçant les deux nombres 3 et 12,1 par d'autres entiers ou décimaux quelconques : l'addition des décimaux est commutative.

IMPORTANT : ce qui est vrai pour l'addition est faux pour certaines autres opérations.

Par exemple, calcule $2:5$ *et* $5:2$.

II – FAISONS DES MULTIPLICATIONS.

2.1 *Effectue la multiplication* $123\,456\,789 \times 9$.
Calcule mentalement $123\,456\,789 \times 45$.

2.2 *Quel est le produit des nombres* 8 547 *et* 13 *?*
Calcule mentalement le produit des nombres 8 547 *et* 39.
Par quel nombre faut-il multiplier 8 547 *pour obtenir* 444 444 *?*

2.3 *Calcule mentalement*
$2 \times 131 \times 5$, $\quad 12{,}5 \times 2 \times 4 \times 10{,}21$,
$11{,}977\,642 \times 1{,}603\,041 \times 0$, $\quad 2 \times 5 \times 127$.

2.4 Réflexions sur les exercices précédents.

Les calculs ont été facilités parce que, lorsque tu multiplies des entiers ou des décimaux,

- tu peux changer l'ordre des facteurs,
- tu peux effectuer certains produits partiels.

Cela tient aux propriétés suivantes de la multiplication des décimaux : elle est associative et commutative, comme l'addition.

III – FAISONS DES MULTIPLICATIONS ET DES ADDITIONS.

3.1 *Calcule mentalement* 10×13, 2×13, 12×13 *et* 22×13.

3.2 *Calcule mentalement* 101×102.

3.3 *Calcule* $1,19 + 8,41 + 0,4$.
Calcule mentalement $25,602 \times 1,19 + 25,602 \times 8,41 + 25,602 \times 0,4$.

3.4 *Calcule mentalement* $14\,602 \times 7 + 5\,398 \times 7$.

3.5 On veut calculer la somme des vingt premiers nombres pairs non nuls, c'est-à-dire le nombre

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 + 32 + 34 + 36 + 38 + 40.$$

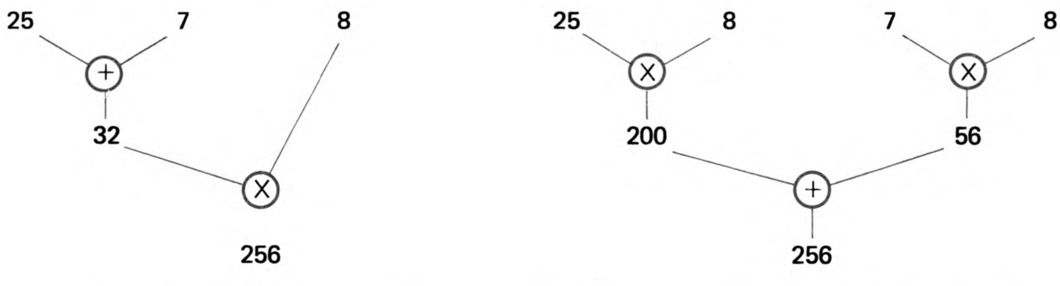
Ce nombre peut aussi s'écrire

$$2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6 + \cdots + 2 \times 19 + 2 \times 20.$$

Utilise le résultat du paragraphe 1.1 pour terminer le calcul.

3.6 Réflexions sur les exercices précédents.

Tu sais que $(25 + 7) \times 8 = (25 \times 8) + (7 \times 8)$.



On obtiendrait aussi une égalité en remplaçant les trois nombres 25, 7 et 8 par des entiers ou décimaux quelconques : la multiplication des décimaux est distributive sur l'addition.

IMPORTANT : Ce qui est vrai pour la multiplication sur l'addition est faux pour certaines autres opérations. Par exemple

calcule $3 + (5 : 2)$ *et* $(3 + 5) : (3 + 2)$;
calcule $6 \times (2 \times 5)$ *et* $(6 \times 2) \times (6 \times 5)$.

3.7 *Calcule mentalement* 201×13.

Tu as utilisé la distributivité de la multiplication sur l'addition.

IV – EXERCICES.

4.1 *Recopie le tableau suivant.*

1	2	3	4	=	0	1	2	3	4	=	10
1	2	3	4	=	1	1	2	3	4	=	11
1	2	3	4	=	2	1	2	3	4	=	13
1	2	3	4	=	3	1	2	3	4	=	14
1	2	3	4	=	4	1	2	3	4	=	20
1	2	3	4	=	5	1	2	3	4	=	21
1	2	3	4	=	6	1	2	3	4	=	24

Tu dois obtenir des égalités en complétant chaque fois le premier membre par des symboles choisis parmi $+$, $-$, $\times$, $:$, et , ( ).

4.2 ***Calcule***
$4 \times (3 + 2) - 1$; $4 \times (3 + 2) \times 1$; $4 \times (3 + 2) + 1$; $43 - 21$;
$4 \times 3 \times 2 - 1$; $4 \times (3 + 2 + 1)$; $4 \times 3 \times 2 + 1$.

4.3 ***Calcule***
$44 - 44$ $44 : 44$; $(4 : 4) + (4 : 4)$; $(4 + 4 + 4) : 4$;
$4 + 4 \times (4 - 4)$; $((4 \times 4) + 4) : 4$; $4 + ((4 + 4) : 4)$; $44 : 4 - 4$;
$(4 \times 4) - 4 - 4$; $4 + 4 + (4 : 4)$; $(44 - 4) : 4$.

4.4 ***Calcule***
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9$; $123 - 45 - 67 + 89$;
$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9$; $(56 + 34 + 8 + 2) \times (9 - 7 - 1)$;
$62 + 38 + ((1 + 7) \times (9 - 5 - 4))$; $(1 + 2 + 3) \times 4 + 5 \times 6 + 7 \times 8 - 9$.

4.5 *Recopie le tableau ci-contre.*

Il est possible de le compléter de façon que le produit des nombres inscrits dans une même ligne ou dans une même colonne soit 216.

Fais-le.

Calcule le produit des nombres placés sur chaque diagonale du tableau.

3	36	
		9
18		

4.6 *Recopie le tableau ci-contre.*

Il est possible de le compléter de façon que la somme des nombres inscrits dans une même ligne ou dans une même colonne soit 16.

Fais-le.

Calcule la somme des nombres placés sur chaque diagonale du tableau.

5,2	1,8	4,4		3,6
2,6				3
2		3,2	4,8	
	3	5,6		3,8
2,8	5,4		4,6	1,2

V – RAISONNONS UN PEU.

Considérons le nombre 308 ; en l'écrivant deux fois, nous obtenons le nombre de six chiffres 308 308.

Choisis un nombre de trois chiffres ; en l'écrivant deux fois, forme comme ci-dessus un nombre de six chiffres.

Divise le par 7. Divise le quotient obtenu par 11. Divise le nouveau quotient par 13.

Que constates-tu ?

Voici une explication pour le nombre 308 308.

$$\begin{aligned}308\,308 &= 308\,000 + 308\,,\\ &= 308 \times (1\,000 + 1)\,,\\ &= 308 \times 1\,001\,,\\ &= 308 \times (7 \times 11 \times 13)\,.\end{aligned}$$

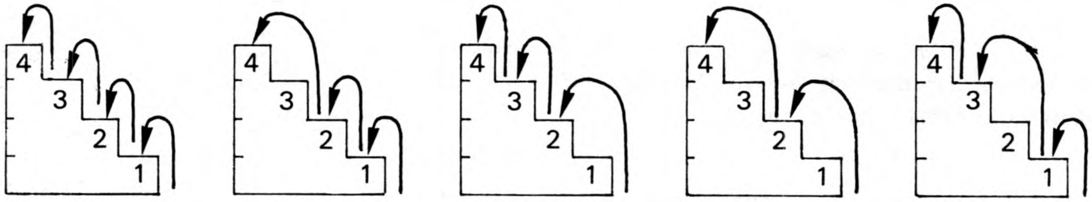
Ecris une explication analogue pour le nombre que tu avais choisi.

L 3 Emploi des lettres

I – FAISONS DES MATHEMATIQUES DANS L'ESCALIER.

1.1 Voici, schématisées, cinq façons de monter un escalier de quatre marches, en respectant la règle suivante :

on monte soit une marche, soit deux marches à la fois.



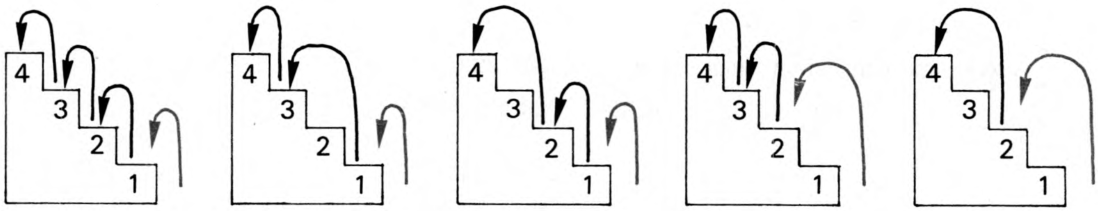
Fais des dessins illustrant toutes les façons de monter un escalier de cinq marches en respectant cette règle.

Recopie et complète le tableau suivant.

Nombre de marches de l'escalier	1	2	3	4	5	6
Nombre de façons de le monter			3	5		13

Quelle remarque fais-tu sur les nombres de la seconde ligne ?

Voici une explication pour le cas d'un escalier à quatre marches. Pour commencer, tu peux monter soit une marche, soit deux marches.



Nous pouvons donc écrire :

nombre de façons de monter un escalier de 4 marches,

= nombre de façons de monter un escalier de 3 marches,

\+ nombre de façons de monter un escalier de 2 marches.

Ces expressions sont bien longues à écrire ; aussi, nous allons coder l'expression «nombre de façons de monter un escalier» par le code N.F.M.E.

Nous coderons l'égalité précédente sous la forme

N.F.M.E.4 = N.F.M.E.3 + N.F.M.E.2.

Prolonge ton tableau vers la droite et recopie et complète les égalités suivantes

N.F.M.E.7 = N.F.M.E.6 + ... ;
.... = N.F.M.E.7 + N.F.M.E.6 ;
N.F.M.E.10 = N.F.M.E.9 + ... ;
N.F.M.E.20 = ... + ...

Propose un code plus simple et réécris les égalités précédentes, ou écris en d'autres, en utilisant ton code.

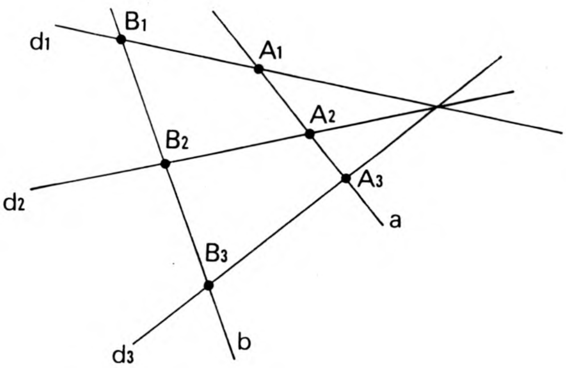
1.2 Qu'avons-nous fait ?

Nous avons voulu simplifier l'écriture, et nous avons utilisé des lettres pour coder des nombres. Ce n'est pas la première fois que tu utilises des lettres pour coder des objets : nombres, ensembles, etc...

Par exemple, tu sais qu'on désigne par la lettre $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Sur le dessin ci-contre, on a voulu donner un nom aux droites et à certains points.

Dans la notation A_1, le nombre 1 est appelé un indice. Il est écrit en bas et à droite de la lettre A.



Certains de ces codages sont utilisés par tout le monde. C'est le cas de $\mathbb{N}$.

II – LETTRES ET DEMONSTRATIONS.

2.1 Exercice.

Choisis trois entiers naturels consécutifs. Calcule leur somme. Divise cette somme par 3. Quel reste trouves-tu ? Et tes camarades ?

Chacun d'entre vous constate que la somme des 3 entiers qu'il a choisis est divisible par 3. On peut penser que c'est TOUJOURS VRAI. Pour en être sûr, il faut une PREUVE.

Pour obtenir trois entiers consécutifs, il est commode de choisir le premier des trois ; puisqu'il faut raisonner à partir d'un naturel qui n'est pas fixé à l'avance, nous allons employer une lettre.

Désignons par n l'entier que nous choisissons.

Le successeur de 3 est 4, c'est-à-dire $3+1$. De même, le successeur de n est $n+1$.

Quel est le successeur de $n+1$ *?*

La somme des trois entiers est $n+(n+1)+(n+2)$, c'est-à-dire $n+n+n+1+2$, c'est-à-dire encore $3 \times n+3$, ou encore $3 \times (n+1)$.

C'est bien un multiple de 3.

Nous venons de faire une DEMONSTRATION.

Penses-tu que le nombre $1\,977+1\,978+1\,979$ *est un multiple de* 3 *? Pourquoi ?*

Le nombre $3+7+11$ *est-il un multiple de* 3 *?*

Est-ce que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5 *?*

2.2 Réflexions sur l'exercice précédent.

Dans l'exercice précédent, nous avons utilisé la lettre n. Nous aurions pu utiliser n'importe quelle autre lettre, ou même un autre signe, par exemple , Δ, ou $\square$.

En utilisant ce dernier signe, on écrit :

$$\square+(\square+1)+(\square+2)=3 \times \square+3 .$$

Dans la «boîte» $\square$, on peut mettre n'importe quel entier naturel.

Ce que nous avons fait pour étudier un problème de calcul peut être fait pour étudier un problème de géométrie. C'est ce que nous faisons en particulier dans le chapitre suivant.

Si tu veux transmettre à un camarade, l'information

«l'addition dans $\mathbb{D}$ est commutative»

sous forme d'une égalité, tu ne peux pas lui dire seulement : $3+12{,}1=12{,}1+3$. *Pourquoi ?*

Pour écrire cette propriété dans [L2, paragraphe 1.3, page 6], nous avons dû ajouter la phrase :

«on obtiendrait aussi une égalité en remplaçant les nombres 3 et 12,1 par deux nombres décimaux quelconques».

C'est une manière bien longue de dire les choses.

III – OU ON UTILISE DES BOITES.

Voici une écriture plus brève de la propriété ci-dessus : dans l'ensemble $\mathbb{D}$,

$$\square + \bigcirc = \bigcirc + \square .$$

Nous avons utilisé des boîtes rondes et des boîtes carrées. Cette écriture signifie que
- on peut mettre n'importe quel nombre décimal dans les boîtes carrées, mais il faut mettre le même dans les deux boîtes carrées ;
- on peut mettre n'importe quel nombre décimal dans les boîtes rondes, mais il faut mettre le même dans les deux boîtes rondes.

Penses-tu qu'on puisse mettre un même nombre décimal dans les boîtes rondes et dans les boîtes carrées ? Essaie.

Exercices.

1. *Donne une autre écriture de la propriété suivante.*
Dans l'ensemble $\mathbb{D}$,

$$\triangle + \diamondsuit = \diamondsuit + \triangle .$$

2. *Ecris, en utilisant des boîtes, les deux propriétés suivantes.*
La multiplication dans $\mathbb{D}$ est associative.
Dans l'ensemble $\mathbb{N}$, la multiplication est distributive sur l'addition.

IV – OU ON UTILISE DES LETTRES.

Voici une autre écriture de la propriété énoncée au paragraphe II :
quels que soient les nombres décimaux a et b,

$$a + b = b + a .$$

Dans cette écriture, nous avons utilisé des lettres. Cette écriture signifie que
- on peut mettre n'importe quel nombre décimal à la place des lettres a, mais il faut mettre le même à la place des deux lettres a ;
- on peut mettre n'importe quel nombre décimal à la place des lettres b, mais il faut mettre le même à la place des deux lettres b.

Penses-tu qu'on puisse mettre un même nombre décimal à la place des lettres a *et* b ?

Exercices.

1. *Donne une autre écriture de la propriété suivante.*
Quels que soient les décimaux h et w,

$$h + w = w + h .$$

2. *Ecris, en utilisant des lettres, les trois propriétés suivantes.*
L'addition dans $\mathbb{N}$ est associative.
Dans l'ensemble $\mathbb{D}$, la multiplication est ditributive sur l'addition.
Dans l'ensemble $\mathbb{D}$, le nombre 1 est élément neutre pour la multiplication.

3. *Existe-t-il des nombres décimaux* x *et* y *tels que* $x + y \neq y + x$ *?*

V – EXERCICES.

5.1 Considérons un nombre décimal quelconque. Appelons le a. On a l'habitude d'écrire plus brièvement :

soit a un nombre décimal.

Ecris plus simplement $(a + 13{,}2) - (4{,}5 - 3)$.

Tu as trouvé que $(a + 13{,}2) - (4{,}5 - 3) = a + 11{,}7$.

Penses-tu que $(1{,}234\,567\,89 + 13{,}2) - (4{,}5 - 3) = 1{,}234\,567\,89 + 11{,}7$ *?*

Soit x un décimal.

Ecris plus simplement $(x + 13{,}2) - (4{,}5 - 3)$.

5.2 Soit a et b deux nombres décimaux.

Ecris plus simplement $(b + 14{,}7 - 3) - (2{,}4 + 1) + (a + 1{,}1)$.

5.3 Notations.

Nous emploierons souvent des écritures comme $2a$ ou encore ab. Elles signifient $2 \times a$ et $a \times b$.

De même, les écritures $5(a + b)$ et $(a + 2)(b + 3)$ signifient $5 \times (a + b)$ et $(a + 2) \times (b + 3)$.

5.4 Soit a un décimal. Nous allons simplifier l'écriture $3a + a$.

Remarque que $a = 1 \times a$.

$$\begin{aligned} 3a + a &= 3 \times a + 1 \times a, \\ &= (3 + 1) \times a, \\ &= 4 \times a, \\ &= 4a. \end{aligned}$$

Donc $$3a + a = 4a.$$

5.5 Soit u un décimal.

Simplifie les écritures $u + u + u$ *et* $3(u + 2{,}1) + 2(u + 1)$.

5.6 Soit u et v deux décimaux.

Simplifie l'écriture $3u + 2v + 42 + 5v + 7u$.

VI – INTUITION ET DEMONSTRATION.

6.1 Dans le paragraphe II, nous avons démontré que
- la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3,
- la somme de cinq entiers consécutifs est divisible par 5.

Penses-tu que la somme de quatre entiers consécutifs soit divisible par 4 ? Justifie ta réponse.

6.2 Voici quelque chose de très curieux.

Soit x un entier naturel.

Rappelle ce que signifie l'écriture x^2.

Tu vois pourquoi on ne remplace jamais l'écriture $x \times 2$ par x2.

Recopie et complète le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2										
$x^2 + x + 17$										

Tous les nombres que tu trouves à la dernière ligne sont des nombres premiers. Tu peux le vérifier en utilisant la table des nombres premiers de la page 92.

On a démontré que

quel que soit le naturel x, inférieur à 10, le nombre $x^2 + x + 17$ est un nombre premier.

On a envie d'affirmer que

quel que soit le naturel x, le nombre $x^2 + x + 17$ est un nombre premier ; pourtant on ne l'a pas démontré.

Pourquoi ?

Dans l'écriture $x^2 + x + 17$, remplace x par 16. On constate que

$$16^2 + 16 + 17 = 289 .$$

Le nombre 289 *est-il premier ? Qu'en conclus-tu ?*

VII – VRAI OU FAUX.

On appelle A l'ensemble $\{3 ; 1 ; 2 ; 1{,}12\}$.

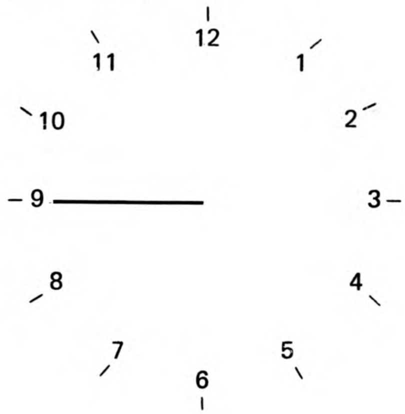
Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie chacune de tes réponses.

1. Il existe un élément de A qui est un entier impair.
2. Soit x un élément de A ; l'élément x est un entier.
3. Etant donnés deux éléments a et b de a,
$$a + b \geqslant 3 .$$
4. Quel que soit l'élément y de A,
$$y \times 0 = 0 .$$
5. Il existe un élément u de A tel que $u + 1 = 2$.
6. Tout élément de A est décimal.
7. Quels que soient les éléments ℓ, m et n de A,
$$\ell \leqslant m + n .$$

L4 L'horloge

I – EN REGARDANT UNE HORLOGE.

1.1 Imaginons une horloge simplifiée dont le cadran ne comporte qu'une seule aiguille : elle indique les heures.



Ici l'horloge indique 9 heures.

Quelle heure l'aiguille indiquera-t-elle dans deux heures ? Dans huit heures ?

Aux nombres 9 et 2 nous associerons le nombre 11, et nous écrirons : $9 \oplus 2 = 11$;

aux nombres 9 et 8 nous associerons le nombre 5, et nous écrirons : $9 \oplus 8 = 5$.

Recopie et complète :

$11 \oplus 2 =$ ...... ; $12 \oplus 6 =$ ....

Sur la table ci-contre nous avons inscrit ces quatre résultats.

Regarde comment nous avons fait ; recopie et complète cette table en procédant de la même manière.

$\oplus$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9		11						5				
10												
11		1										
12						6						

Tu constates que tu as pu écrire un nombre du cadran dans chaque case de cette table. Appelons H l'ensemble des nombres du cadran :

$$H = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}.$$

A deux éléments quelconques de H, nous avons associé un élément de H ; on dit qu'on a défini une OPERATION dans H.

1.2 *Recopie et complète les égalités suivantes.*

$1 \oplus 12 = ...$; $12 \oplus 1 = ...$; $5 \oplus 12 = ...$; $12 \oplus 5 = ...$.

Que remarques-tu ? En est-il de même pour chaque élément de H *?*

On dit que 12 est ELEMENT NEUTRE pour l'opération $\oplus$ dans H.

Comment cette propriété apparaît-elle sur la table ?

Y a-t-il dans H *un autre élément qui se comporte comme* 12 *pour l'opération* $\oplus$ *?*

1.3 *Tu as vu que* 12 *joue un rôle particulier. Prenons maintenant le nombre* 5 *; peux-tu compléter les égalités suivantes ?*

$5 \oplus .... = 12$, $.... \oplus 5 = 12$.

Tu as trouvé une seule solution, le nombre 7. Tu remarques que $5 \oplus 7$ et $7 \oplus 5$ sont deux écritures de l'élément neutre 12. On dit que 7 est le SYMETRIQUE de 5 pour l'opération $\oplus$ dans H.

Vérifie que tout élément de H *a un symétrique dans* H *pour l'opération* $\oplus$.

Recopie et complète le tableau suivant.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
symétrique de x					7		5					

La notation sym(x) désigne dans la question suivante le symétrique de x.

Compare $\text{sym}(2 \oplus 3)$ *et* $\text{sym}(2) \oplus \text{sym}(3)$. *Que remarques-tu ?*

1.4

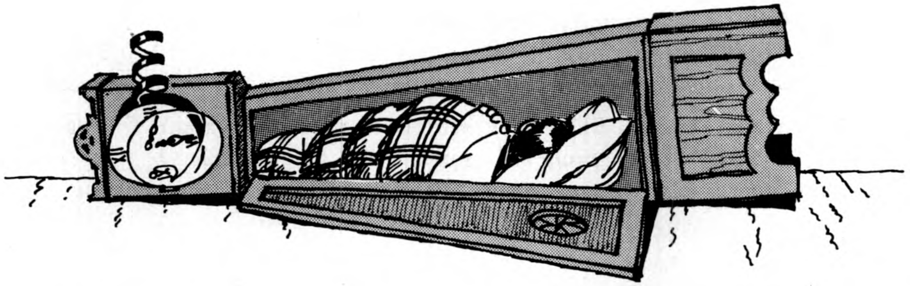
Tu remarques que $7 \oplus 3 = 10$ et $3 \oplus 7 = 10$.

Regarde comment ces deux résultats sont inscrits dans la table ci-contre ; observe qu'on a inscrit les éléments de H *dans le même ordre dans la ligne du haut et dans la colonne de de gauche.*

$\oplus$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3							10					
4												
5												
6												
7			10									
8												
9												
10												
11												
12												

C'est pourquoi si tu pliais la feuille de papier autour du trait ponctué, les cases qui correspondent à $7 \oplus 3$ et $3 \oplus 7$ viendraient l'une sur l'autre. Tu vois, de plus, que dans ces deux cases on a inscrit le même résultat.

Penses-tu que les deux cases qui correspondent à $2 \oplus 9$ *et* $9 \oplus 2$ *viendraient elles aussi, l'une sur l'autre ? Contiennent-elles le même résultat ?*



La droite ponctuée est appelée DIAGONALE PRINCIPALE de la table. On dit que la TABLE est SYMETRIQUE par rapport à sa diagonale principale si, dans le pliage autour de cette droite, deux cases qui viennent l'une sur l'autre contiennent le même nombre.

Vérifie que ta table est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

Nous pouvons conclure que, si a et b désignent des éléments de H,

$$a \oplus b = b \oplus a\ .$$

On dit que l'opération $\oplus$ est COMMUTATIVE dans H.

1.5 On peut écrire les égalités suivantes :

$$(3 \oplus 12) \oplus 8 = 3 \oplus 8 \quad \text{et} \quad 3 \oplus (12 \oplus 8) = 3 \oplus 8\ ;$$

donc $(3 \oplus 12) \oplus 8 = 3 \oplus (12 \oplus 8)$. De même,

$$(5 \oplus 5) \oplus 9 = 10 \oplus 9 \quad \text{et} \quad 5 \oplus (5 \oplus 9) = 5 \oplus 2\ ,$$

$$(5 \oplus 5) \oplus 9 = 7 \quad \text{et} \quad 5 \oplus (5 \oplus 9) = 7\ ,$$

donc $(5 \oplus 5) \oplus 9 = 5 \oplus (5 \oplus 9)$.

Crois-tu que, si a, b *et* c *désignent des éléments de* H,

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\ ?$$

Combien faudrait-il faire de vérifications pour en être sûr ? Compare avec tes camarades.

Nous admettrons que, quels que soient les éléments a, b et c de H,

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\ .$$

On dit que l'opération $\oplus$ est ASSOCIATIVE.

1.6 Bilan.

Nous avons défini dans l'ensemble H une opération notée $\oplus$; elle possède les propriétés suivantes :
- elle est associative ;
- il y a un élément neutre pour l'opération $\oplus$ (c'est 12) ;
- tout élément de H a un symétrique pour l'opération $\oplus$.

Nous résumerons ces propriétés en disant que le couple $(H, \oplus)$ est un GROUPE. Comme de plus l'opération $\oplus$ est commutative, nous dirons que $(H, \oplus)$ est un GROUPE COMMUTATIF.

II – QUELQUES PROPRIETES DU GROUPE (H, $\oplus$).

2.1 Egalités et équations.

Examinons les phrases suivantes.

1. $5 \oplus 8 = 1$: elle est vraie.
2. $3 \oplus 6 = 10$: elle est fausse.
3. $\square \oplus 3 = 2$: elle est vraie si à la place de $\square$ on met 11.

Vérifie sur la table que 11 *est le seul élément de* H *qui convient.*

L'énoncé 3 pose une question : «quel nombre ou quels nombres peut-on écrire à la place du symbole $\square$ pour que la phrase obtenue soit vraie».

On appelle cette question une EQUATION. On dit que 11 est une SOLUTION de cette équation. Tu as constaté que c'est la seule.

Les équations suivantes ont-elles une solution ? En ont-elles plusieurs ?

4. $8 \oplus \square = 5$; 5. $\square \oplus \square = 10$;
6. $\square \oplus \square = 3$; 7. $12 \oplus \Delta = \Delta$.

En général, au lieu de symboles comme $\square$, Δ, ... on emploie des lettres. Lorsqu'on dit : «résous l'équation en x dans H suivante : $8 \oplus x = 5$», cela signifie : «trouve l'ensemble des solutions de cette équation». Tu as vu que cette équation a une et une seule solution qui est 9. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\{9\}$.

Il se peut que l'ensemble des solutions d'une équation soit vide ; c'est le cas de l'équation 6 ci-dessus.

2.2 Une méthode de résolution.

En utilisant la table, tu as résolu l'équation $8 \oplus x = 5$ en x dans H. Cela signifie que tu as cherché et trouvé tous les éléments de l'ensemble H qui avec 8 donnent 5.

La méthode que tu viens d'employer est très commode ici, car la table est petite. Il n'en serait pas de même si la table était très grande, ou même s'il n'était pas possible de faire une table comme, par exemple, pour l'addition dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons étudier une autre manière de procéder et nous allons en profiter pour construire un raisonnement.

Etudions l'équation en x dans H suivante : $x \oplus 7 = 3$. Supposons qu'il existe des éléments de H qui, avec 7, donnent 3. Comme nous ne les connaissons pas, désignons par a l'un d'entre eux.

Nous pouvons alors affirmer que $a \oplus 7 = 3$. Nous allons en déduire une égalité où a sera seul dans le premier membre.

Puisque $a \oplus 7 = 3$, on peut affirmer que $(a \oplus 7) \oplus 5 = 3 \oplus 5$. Nous allons transformer le premier membre de l'égalité ; tu sais que l'opération $\oplus$ est associative, c'est pourquoi $(a \oplus 7) \oplus 5 = a \oplus (7 \oplus 5)$.

Comme $7 \oplus 5 = 12$, nous savons que $a \oplus (7 \oplus 5) = a \oplus 12$.
Comme 12 est élément neutre, $a \oplus 12 = a$.

Récapitulons les égalités que nous avons établies :

$$(a \oplus 7) \oplus 5 = a \oplus (7 \oplus 5) \quad ;$$
$$a \oplus (7 \oplus 5) = a \oplus 12 \quad ;$$
$$a \oplus 12 = a .$$

Nous pouvons donc affirmer que $(a \oplus 7) \oplus 5 = a$.

A ton avis, pourquoi avons-nous utilisé 5 *?*

D'autre part : $3 \oplus 5 = 8$; récapitulons de nouveau :

$$(a \oplus 7) \oplus 5 = 3 \oplus 5 \quad ;$$
$$(a \oplus 7) \oplus 5 = a \quad ;$$
$$3 \oplus 5 = 8 \quad ;$$

donc $$a = 8 .$$

Où en sommes nous ? Nous avons supposé qu'il y a des éléments de H qui avec 7 donnent 3 ; nous avons décidé de nous intéresser à l'un d'eux : nous l'avons appelé a. Nous avons démontré que $a = 8$.

Que se serait-il passé si on s'était intéressé à un élément de H*, qu'on aurait appelé* b*, tel que* $b \oplus 7 = 3$ *?*

Nous avons démontré que si l'équation en x dans H, $x \oplus 7 = 3$, a une solution, cette solution ne peut être que 8.

Nous n'avons rien démontré d'autre : en particulier, nous n'avons pas démontré que 8 est solution. Il nous reste à démontrer qu'il en est bien ainsi, c'est-à-dire que $8 \oplus 7 = 3$.

Fais-le. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation en ℓ *dans* H

$$8 \oplus \ell = 5 \ ?$$

2.3 Voici un énoncé : $7 \oplus \square = 7 \oplus \Delta$

Choisis deux nombres dans H *; mets le premier à la place de* $\square$*, et le deuxième à la place de* Δ*. La phrase obtenue est-elle vraie ?*

$\oplus$	a	b
1		
2		
7	$7 \oplus a$	$7 \oplus b$

Nous allons expliquer ce que nous avons observé. Tu as remarqué que, sur la table, la ligne du 7 contient une fois et une seule chaque élément de H.

Il ne peut donc pas exister deux nombres différents a et b tels que :

$$7 \oplus a = 7 \oplus b .$$

Voici une autre démonstration de cette propriété.

Supposons qu'il existe deux éléments u et v de H tels que $7 \oplus u = 7 \oplus v$. Il en résulte que

$$5 \oplus (7 \oplus u) = 5 \oplus (7 \oplus v) \quad \text{(on a utilisé 5 qui est le symétrique de 7) ;}$$
$$(5 \oplus 7) \oplus u = (5 \oplus 7) \oplus v \ ;$$
$$12 \oplus u = 12 \oplus v \ ;$$
$$u = v \, .$$

Ceci démontre que, si u et v sont des éléments de H et si $7 \oplus u = 7 \oplus v$, alors $u = v$.

Autrement dit, dans H, si $7 \oplus \square = 7 \oplus \Delta$ alors $\square = \Delta$.

Penses-tu que ceci soit vrai si tu remplaces 7 par n'importe quel élément de H *?*

III – CONSTRUCTION D'UNE REGLE A CALCUL.

Nous te proposons maintenant la description d'un petit appareil que tu pourras construire si tu le désires. Il effectue l'opération $\oplus$ dans H et peut donc remplacer la table.

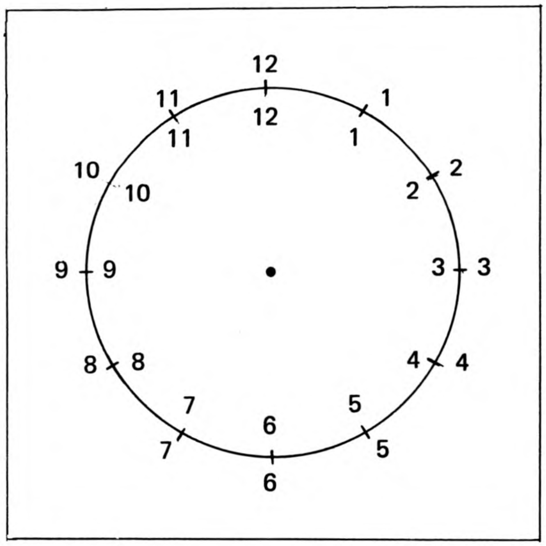
Sur une feuille en carton, tu dessines un carré de 10 cm de côté et tu marques son centre.

En plaçant la pointe du compas en ce point, tu traces un cercle de 4 cm de rayon ; à l'aide du rapporteur, tu disposes régulièrement sur ce cercle les douze éléments de H.

Tu découpes un disque en carton de 4 cm de rayon et tu disposes régulièrement sur le pourtour les éléments de H, dans le même ordre que précédemment.

Tu perces le carton carré et le disque mobile en leurs centres et tu les relies par une attache parisienne (ou par une punaise piquée sur un morceau de bois ou un bouchon).

Par exemple, pour effectuer l'opération $9 \oplus 8$, tu peux procéder ainsi : tu amènes le 12 du disque mobile en face du 9 du carré ; la réponse est le nombre qui se trouve écrit sur le carré en face du 8 du disque mobile.



IV – UNE AUTRE OPERATION DANS H.

4.1 Tu sais que $2 \times 10 = 20$. Tu sais que le nombre du cadran qui correspond à 20 heures est 8 ; car 20 heures cela fait un tour de cadran et il reste 8 heures.

A 2 et 10 on peut ainsi faire correspondre un nombre du cadran, le nombre 8. On écrira : $2 \otimes 10 = 8$.

Tu sais que $9 \times 7 = 63$. Cela fait 5 tours de cadran et il reste 3 ; nous écrirons : $9 \otimes 7 = 3$.

Tu sais que $6 \times 8 = 48$. Cela fait 4 tours de cadran et il reste 0 ; le nombre qui correspond à 0 sur le cadran est 12 ; nous écrirons : $6 \otimes 8 = 12$.

Calcule les nombres $8 \otimes 2$, $7 \otimes 5$ et $3 \otimes 8$.

Sur la table ci-contre, nous avons placé ces six résultats.

Regarde comment nous avons fait. Recopie cette table et complète la.

Tu constates que tu as pu inscrire un élément de H dans chaque case de la table. Le procédé employé définit une opération dans H ; nous l'avons notée $\otimes$.

Nous admettrons que cette opération est associative.

$\otimes$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2										8		
3								12				
4												
5												
6								12				
7					11							
8		4										
9							3					
10												
11												
12												

4.2 Tu as vu que 12 est élément neutre pour l'opération $\oplus$ dans H.

Y a-t-il, dans H, *un élément neutre pour l'opération* $\otimes$ *?*

4.3 Nous avons dit que 4 est le symétrique de 8 pour l'opération $\oplus$ dans H, car $4 \oplus 8 = 12$ et $8 \oplus 4 = 12$, et 12 est l'élément neutre de l'opération $\oplus$ dans H.

Tu vas maintenant chercher si 8 a un symétrique pour l'opération $\otimes$ dans H. Autrement dit, tu vas chercher s'il existe un élément x de H tel que $8 \otimes x = 1$ et $x \otimes 8 = 1$, puisque 1 est l'élément neutre de l'opération $\otimes$ dans H.

Quelle est ta réponse ? Quels sont les éléments de H *qui ont un symétrique pour l'opération* $\otimes$ *dans* H *?*

Penses-tu que $(H, \otimes)$ *soit un groupe ?*

4.4 Des résultats curieux.

Résous l'équation en x *dans* H *suivante :* $8 \otimes x = 4$. *Trouves-tu une solution et une seule ?*

Fais le même travail pour les équations en y *dans* H *suivantes :* $9 \otimes y = 3$; $10 \otimes y = 5$; $11 \otimes y = 2$.

Les équations ci-dessus sont toutes faites sur le même modèle et tu constates pourtant qu'elles ont soit plusieurs solutions, soit pas de solution, soit une seule solution.

Ecris une équation en z *dans* H, *du même modèle, qui a six solutions.*

4.5 Bizarre.

On a démontré dans le paragraphe 2.3 que, si x et y sont des éléments de H et si $7 \oplus x = 7 \oplus y$, alors $x = y$.

Démontre que si x *et* y *désignent des éléments de* H *et*
si $7 \otimes x = 7 \otimes y$, *alors* $x = y$.

Vérifie maintenant que $8 \otimes 2 = 8 \otimes 5$; *pourtant* 2 *n'est pas égal à* 5 *!*

La phrase suivante est-elle vraie ?

Soit x et y des éléments de H ; si $8 \otimes x = 8 \otimes y$ alors $x = y$.

4.6 Surprenant.

Nous allons étudier l'équation en x dans H suivante : $3 \otimes x = 9$. On pourrait, comme pour les équations du paragraphe 4.4, chercher directement dans la table l'ensemble des solutions de cette équation.

Mais pour mieux comprendre ce que nous avons fait au paragraphe 2.2, nous allons suivre une démarche un peu analogue à celle que nous avions suivie alors.

Supposons qu'il existe des solutions. Comme nous ne les connaissons pas, désignons par a l'une d'entre elles.

Puisque $3 \otimes a = 9$ nous pouvons affirmer que $6 \otimes (3 \otimes a) = 6 \otimes 9$.
Nous avons admis que l'opération $\otimes$ est associative, c'est pourquoi

$$6 \otimes (3 \otimes a) = (6 \otimes 3) \otimes a .$$

Déduis en que $6 \otimes a = 6$.

Nous avons montré que si $3 \otimes a = 9$ alors $6 \otimes a = 6$. Donc toute solution de l'équation $3 \otimes x = 9$ est aussi solution de l'équation $6 \otimes x = 6$.

Tu as vu que l'ensemble des solutions de l'équation $6 \otimes x = 6$ est

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}.$$

Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $3 \otimes x = 9$ *?*

un peu d'histoire

François VIETE.

Nous avons tellement l'habitude de nos symboles mathématiques qu'il nous semble qu'ils ont toujours existé ; naturellement il n'en est rien.

Par exemple Diophante utilisait ⋔ (la lettre grecque *psi* renversée) pour la soustraction. C'est en 1637 qu'on rencontre pour la première fois notre croix de multiplication $\times$; au siècle d'avant, on pouvait trouver M, ou encore le mot latin *in* (qui signifie dans). Le signe $=$ a été introduit au 16ème siècle, mais pendant tout le 17ème siècle l'égalité a été le plus souvent notée par le signe ∝ qu'avait proposé Descartes. Voici un dernier exemple : ce que nous écrivons maintenant $(3a + 2b)y$ a aussi été écrit $\left.\begin{matrix}3a\\ +\,2b\end{matrix}\right\}y$, ou encore $\overline{3a + 2b}\ y$.

C'est essentiellement aux 15ème et 16ème siècle que nos symboles et usages d'écriture actuels ont été mis au point. François Viète fut l'un de ceux qui contribuèrent à cette création. En particulier il introduisit une nouvelle manière d'utiliser les lettres en algèbre ; par exemple, au lieu de considérer une expression comme $2x + 3y$, il s'intéresse à une écriture telle que $ax + by$; les lettres a et b désignent alors des nombres fixes, mais quelconques.

Mais François Viète ne se limita pas aux mathématiques. Né en 1540 en Vendée, il fit des études de droit, et devint avocat, puis membre du parlement de Bretagne ; quand Henri IV devient roi en 1589, François Viète devient l'un de ses conseillers privés. Lorsque Henri IV arrive sur le trône, la France a connu une longue période de guerres : guerres civiles, de religion, conflit avec l'Espagne ; ce n'est qu'en 1598 que la France retrouve la paix : l'édit de Nantes accordait aux protestants certaines libertés, un traité marque la fin de la guerre avec l'Espagne.

François Viète est mort à Paris en 1603.

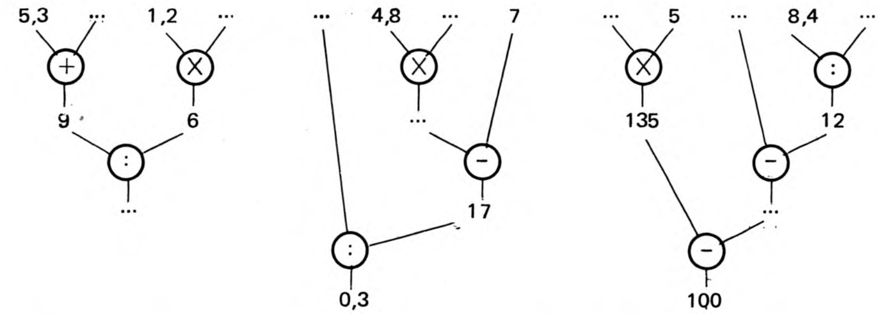
exercices et problèmes

1. *Calcule* $(840 : 24) - (9 \times 2)$; $((840 : 24) - 9) \times 2$; $(840 : (24 - 9)) \times 2$; $840 : ((24 - 9) \times 2)$; $840 : (24 - (9 \times 2))$.

Fais, dans chaque cas, un arbre qui représente tes calculs.

2. *Calcule* $(1{,}9 - 1{,}4) \times ((126 : 2) + (34 - 17))$; $((3 \times 7) \times (22 - 18)) : ((9 \times 11) - (10 + 5))$; $((43 - 7) \times (99 : 33)) - (143 : 13)$; $(2 \times 1{,}11) - ((3{,}7 \times 1{,}5) - (9{,}99 : 3))$.

3. *Recopie et complète les arbres suivants.*



4. *Calcule* $((26 + 15) \times 0) \times 10$; $(26 + (15 \times 0)) \times 10$; $26 + ((15 \times 0) \times 10)$.

5. *Calcule* $0{,}3 + 0{,}6 \times 7{,}4$; $(0{,}3 + 0{,}6) \times 7{,}4$; $0{,}3 \times (0{,}6 + 7{,}4)$; $0{,}3 \times 0{,}6 + 7{,}4$; $144 : 18 - 6$; $144 : (18 - 6)$; $(144 - 18) : 6$; $144 - 18 : 6$; $140 \times 7 + 36 \times 2$; $140 \times 7 - 36 : 2$; $140 : 7 - 36 : 2$; $140 : 7 + 36 \times 2$.

6. *Calcule* $5 + 4 \times 3 + 2$; $(5 + 4) \times (3 + 2)$; $(5 + 4) \times 3 + 2$; $5 + 4 \times (3 + 2)$; $5 \times 4 + 3 \times 2$; $5 \times (4 + 3) \times 2$; $(5 \times 4 + 3) \times 2$; $5 \times (4 + 3 \times 2)$.

7. *Calcule* $31 - 3 + 19 - 6 + 13 - 9$; $31 - 3 + 19 - (6 + 13) - 9$; $31 - 3 + 19 - (6 + 13 - 9)$; $31 - (3 + 19) - 6 + 13 - 9$.

8. *Calcule* $18 - 6 : 2 - 5 \times 3$; $15 \times 10 - 13 \times 11 + 17 \times 4 - 20$; $16{,}2 + 1{,}3 \times 7 - (3{,}2 \times 2 + 1{,}08 : 1{,}2)$; $(229 + 90) : 11 - 10 - 48 : 6 + 13 \times (46 - 31)$.

9. *Calcule* $(43 - 2) \times 1$; $43 - 2 + 1$; $43 \times (2 - 1)$; $43 + 2 - 1$; $43 + 2 \times 1$; $43 + 2 + 1$.

10. *Calcule* $3 \times (3 - 3) \times 3$; $(3 + 3 - 3) : 3$; $(3 \times 3 - 3) : 3$; $(3 \times 3 + 3) : 3$; $3 + 3 - 3 : 3$; $(3 \times (3 + 3)) : 3$; $3 + 3 + 3 : 3$; $3 \times 3 - 3 : 3$; $3 - 3 + 3 \times 3$; $3 \times 3 + 3 : 3$.

11. *Calcule mentalement* $(213 + 478) + 22$; $663 + (4\,086 + 37)$; $1\,433 + 18 + 1\,254 + 3\,567 + 1\,246$; $0{,}02 + 0{,}004\,99 + 0{,}08 + 0{,}51 + 0{,}005\,01 + 0{,}49$.

12. *En t'inspirant de la méthode utilisée en* [L2, *page* 5], *calcule la somme des naturels de* 1 *à* 15.

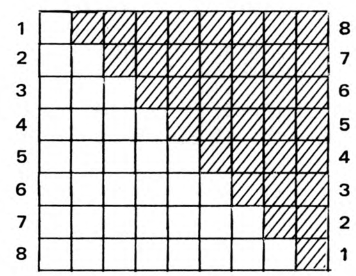
13. *Observe le tableau ci-contre.*

Le nombre de cases blanches est égal à la somme des naturels de 1 à 8 ; le nombre de cases hachurées est aussi égal à la somme des naturels de 1 à 8.

Quel est le nombre de cases de ce tableau ?
Quelle est la somme des naturels de 1 à 8 ?

Tu pourrais utiliser un procédé analogue pour calculer la somme des naturels de 1 à 39. Pour cela, il te faudrait dessiner un tableau rectangulaire.

Quel serait le nombre de cases de ce tableau ?
Quelle est la somme des naturels de 1 à 39 ?



14. *Calcule mentalement* $5 \times 977 \times 2$; $4 \times 25 \times 8\,073$; $125 \times 1{,}234 \times 8$; $2 \times 1{,}5 \times 11 \times 0{,}5 \times 4$; $2 \times 12{,}5 \times 25 \times 2 \times 8$; $3 \times 8 \times 37$.

15. *Calcule* 37×3 ; 101×11 ; 271×41 ; $15\,873 \times 7$.

Calcule mentalement 37×15 ; 101×55 ; 271×205 ; $15\,873 \times 35$.

Recopie et complète les égalités suivantes.
$37 \times ... = 333$; $101 \times ... = 3\,333$; $271 \times ... = 33\,333$; $15\,873 \times ... = 333\,333$.

16. *Calcule* 27×213.

Calcule mentalement $2{,}7 \times 21{,}3$; $0{,}27 \times 0{,}213$; $270 \times 21{,}3$; $0{,}27 \times 0{,}002\,13$; $27\,000\,000 \times 0{,}213$; $27\,000 \times 213\,000\,000$.

17. *Calcule mentalement* 35×11 ; 35×101 ; $35 \times 1\,001$; 35×9 ; 35×99 ; 35×999 ; 12×24 ; 102×24 ; $1\,002 \times 24$; 8×24 ; 98×24 ; 998×24.

18. *Calcule mentalement* $27 \times 1\,111 + 33 \times 1\,111$; $536 \times 18 + 464 \times 18$; $3{,}28 \times 11{,}3 + 3{,}28 \times 65{,}7 + 3{,}28 \times 23$.

19. *Calcule mentalement* 2×999.

On peut utiliser ce résultat pour calculer la somme $1\,800 + 180 + 18$; ce nombre peut s'écrire $2 \times 900 + 2 \times 90 + 2 \times 9$.

Termine le calcul.
Calcule par un procédé analogue $3\,600 + 360 + 36$ *et* $6\,300 + 630 + 63$.

20. Voici comment on peut procéder pour calculer le nombre $9 \times 123 + 4$. Remarquons tout d'abord que 123 peut s'écrire $111 + 11 + 1$ et que 4 peut s'écrire $1 + 1 + 1 + 1$.

Nous pouvons donc écrire :
$9 \times 123 + 4 = 9 \times (111 + 11 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1)$;
$9 \times 123 + 4 = (9 \times 111) + (9 \times 11) + (9 \times 1) + 1 + 1 + 1 + 1$;
$9 \times 123 + 4 = (9 \times 111 + 1) + (9 \times 11 + 1) + (9 \times 1 + 1) + 1$.

Termine le calcul.
Recopie et complète les égalités suivantes.

$9 \times 1 + 2 = ...$	$9 \times 1\,234 + 5 = ...$	$9 \times 1\,234\,567 + 8 = ...$
$9 \times 12 + 3 = ...$	$9 \times 12\,345 + 6 = ...$	$9 \times 12\,345\,678 + 9 = ...$
$9 \times 123 + 4 = ...$	$9 \times 123\,456 + 7 = ...$	

Tu as sans doute trouvé que $9 \times 12\,345\,678 + 9 = 111\,111\,111$.
Utilise ce résultat pour calculer $9 \times 12\,345\,679$.

21. Le nombre 1 439 peut s'écrire $1\,400 + 35 + 4$.

Utilise cette remarque pour trouver mentalement le quotient et le reste dans la division euclidienne de 1 439 *par* 7.

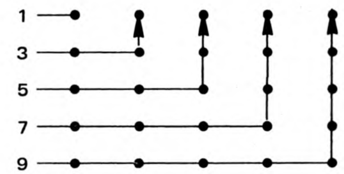
Utilise un procédé analogue pour trouver mentalement le quotient et le reste dans la division euclidienne de 763 *par* 7, *de* 275 *par* 13 *et de* 176 *par* 12.

22. *Calcule la somme des vingt-et-un premiers nombres impairs, c'est-à-dire le nombre*
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$.

23. *Combien de naturels différents sont représentés par les écritures suivantes ?*

Voici une information qui peut t'aider : il n'y a jamais plus de deux écritures qui représentent le même naturel ; il n'est pas utile d'effectuer tous les calculs pour répondre.
$(11+15) \times 2$; $11 \times 2 + 15 \times 2$; $11 \times (15 \times 2)$; $(11 \times 15) \times (11 \times 2)$; $3 \times 11 \times 5 \times 2$;
$11 \times 11 \times 30$; $11 + (5 \times 2)$; $(11+5) \times (11+2)$; $11 \times 15 + 11 \times 2$; $11 \times (15+2)$.

24. *Observe le dessin ci-contre.*



Le nombre de points marqués en noir est égal à $1 + 3 + 5 + 7 + 9$, c'est-à-dire à la somme des cinq premiers naturels impairs.

Combien y a-t-il de points marqués en noir sur chaque ligne et sur chaque colonne ? Quelle est la somme des cinq premiers naturels impairs ?

Tu pourrais utiliser un procédé analogue pour calculer la somme des vingt premiers naturels impairs. Pour cela, il te faudrait faire un dessin comme ci-dessus.

Quel serait le nombre de points marqués en noir sur chaque ligne et sur chaque colonne ? Quelle est la somme des vingt premiers naturels impairs ?

25. *Reproduis les tableaux suivants.*

(9 ×	) :		= 15
×	×	×	
(×	) :		= 3
+	+	+	
(×	) :		= 14
=	=	=	
16	38	10	

9 +	−		= 5
+	+	+	
+	−		= 1
−	−	−	
+	−		= 9
=	=	=	
8	2	13	

Pour chacun de ces tableaux, il est possible de compléter les cases vides en utilisant une fois et une seule chaque naturel de 1 à 8.
Fais-le.

26. *Recopie le tableau ci-contre.*

5		35	
47	32	17	14
	11		
38			23

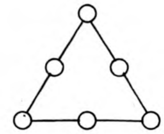
Il est possible de le compléter de façon à obtenir le même nombre en effectuant la somme des naturels de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale.
Fais-le

Tu obtiens ainsi un «carré magique».
On appelle *carré magique* un tableau carré de nombres telle que la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soit égale au même nombre.

27. *Lis le problème* **26** *pour savoir ce qu'on appelle un carré magique.*

Il est possible de placer les entiers de 1 à 9 dans un tableau carré de neuf cases de façon à obtenir un carré magique.
Fais-le.

28. *Reproduis la figure ci-contre.*



Il est possible de placer les entiers de 1 à 6 dans les disques de façon à obtenir le même nombre en effectuant la somme des naturels inscrits sur chaque côté du triangle.

Fais-le.

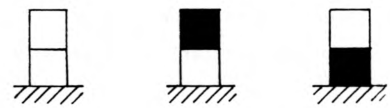
29. Considérons le nombre 5 239 ; en l'écrivant deux fois, nous obtenons le nombre de huit chiffres 52 395 239.

Divise-le par 73. *Divise le quotient obtenu par* 137. *Que constates-tu ?*

Explique ce résultat. Pour cela, calcule le produit 73 × 137 *et relis* [L2, *paragraphe* **V**, *page* 9].

Penses-tu qu'on aurait constaté un résultat analogue en faisant les mêmes opérations à partir d'un autre nombre de quatre chiffres que 5 239 *?*

30. On se propose de construire des tours avec des cubes blancs et des cubes noirs empilés ; mais on n'a pas le droit de placer deux cubes noirs directement l'un au-dessous de l'autre.



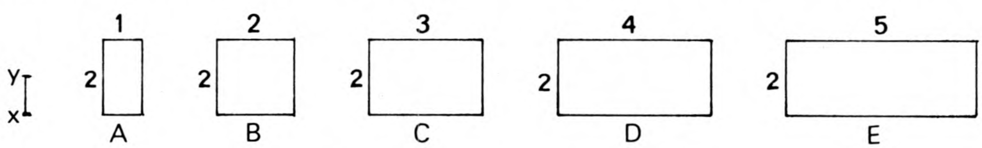
Par exemple, il existe trois tours de hauteur 2.

Dessine toutes les tours de hauteur 1, *puis toutes celles de hauteur* 3, *puis toutes celles de hauteur* 4.

Combien y a-t-il de tours de hauteur 5 *? Explique pourquoi.*

Ce problème ne te rappelle-t-il pas un problème que tu as déjà étudié ?

31. Voici cinq rectangles A, B, C, D et E. On a indiqué les mesures de la largeur et de la longueur de chacun de ces rectangles ; l'unité de longueur choisie est la longueur du segment XY.



On décide de paver chacun de ces rectangles avec des rectangles de longueur 2 et de largeur 1. Voici par exemple deux pavages différents du rectangle E.

Il n'y a qu'un seul pavage possible pour le rectangle A. Il y a deux pavages possibles pour le rectangle B.

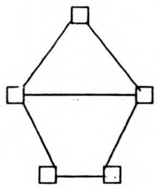
Dessine-les.

Dessine tous les pavages possibles pour le rectangle C, *puis tous les pavages possibles pour le rectangle* D, *puis tous les pavages possibles pour le rectangle* E.

Combien y a-t-il de pavages possibles pour un rectangle de longueur 6 *et de largeur* 2 *? Explique pourquoi.*

Ce problème ne te rappelle-t-il pas un problème que tu as déjà étudié ?

32. *Reproduis les schémas suivants.*



Scéma n°1

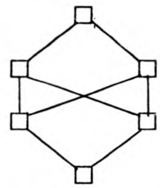


Schéma n°2

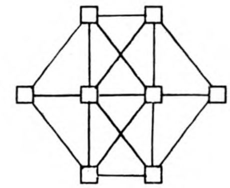


Schéma n°3

1. Il est possible de placer les naturels de 1 à 5 dans les cases du schéma numéro 1 de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux naturels consécutifs reliés par un trait.
Fais-le.

2. Il est possible de placer les naturels de 1 à 6 dans les cases du schéma numéro 2 de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux naturels consécutifs reliés par un trait.
Fais-le.

3. Il est possible de placer les naturels de 1 à 8 dans les cases du schéma numéro 3 de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux naturels consécutifs reliés par un trait.
Fais-le.

33. Soit u un nombre décimal.
Ecris plus simplement $(5{,}7 + u) + (18{,}6 - 15{,}4) - (1{,}76 + 2{,}14)$.
Calcule mentalement $(5{,}7 + 18{,}925\,741) + (18{,}6 - 15{,}4) - (1{,}76 + 2{,}14)$.

34. Soit x et y deux nombres décimaux.
Ecris plus simplement $x + 16{,}8 - (5{,}2 - 3{,}4) + y - 40$.
Calcule mentalement $28{,}723 + 16{,}8 - (5{,}2 - 3{,}4) + 21{,}277 - 40$.

35. Soit m un nombre décimal.
Ecris plus simplement $(3m + 17) + (2m + 28) + m$; $3(m + 17) + 2(m + 28) + m$.

36. Soit a et b deux nombres décimaux.
Ecris plus simplement $4b + 12 + 5a + 15 + 9a + 20b + 18$; $3(a + 0{,}7) + 2(1{,}9 + b) + 4(3 + a) + 8b - 11{,}5$.

37. Soit x et y deux nombres décimaux.
Ecris plus simplement $3x + 15 + 2y + 7x + 11y + x - 13$; $x(2 + y) + y(3 + x) + 4(x + y)$; $3(x + y) + 2(x + 3) + 5(4 + y) - 20$; $3xy + 14 + x + 2y + 11 + xy + 3x + y - 25$.

38. Dans l'ensemble ID, on définit l'opération $\perp$ de la façon suivante : si a et b sont des nombres décimaux,

$$a \perp b = a^2 + b^2.$$

Calcule $(0{,}1 \perp 0{,}5) \perp 0{,}7$ *et* $0{,}1 \perp (0{,}5 \perp 0{,}7)$; $(-12 \perp 10) \perp 12$ *et* $-12 \perp (10 \perp 12)$; $(0{,}2 \perp (-0{,}4)) \perp 0{,}8$ *et* $0{,}2 \perp (-0{,}4 \perp 0{,}8)$; $(1{,}1 \perp (-0{,}5)) \perp 1{,}1$ *et* $1{,}1 \perp (-0{,}5 \perp 1{,}1)$; $(-0{,}9 \perp (-0{,}3)) \perp (-0{,}1)$ *et* $-0{,}9 \perp (-0{,}3 \perp (-0{,}1))$.

Penses-tu que l'opération $\perp$ *est associative ?*

39. La somme de deux naturels pairs ou de deux naturels impairs est un naturel pair ; la somme d'un naturel pair et d'un naturel impair est un naturel impair. Ces propriétés nous donnent l'idée de définir une opération dans l'ensemble des deux mots «pair» et «impair». Nous coderons le mot «pair» par la lettre p et le mot «impair» par la lettre i. Nous appellerons K l'ensemble $\{p, i\}$. Voici la table de cette opération.

$\square$	p	i
p	p	i
i	i	p

Nous avons noté $\square$ cette opération. Ainsi, par exemple,

$$i \square p = i \quad \text{et} \quad i \square i = p.$$

1. *Montre que l'opération* $\square$ *est associative dans* K.
2. L'ensemble K possède un élément neutre pour la loi $\square$.
   Lequel ?
3. *Montre que chaque élément de* K *admet un symétrique pour l'opération* $\square$.

Tu peux donc conclure que $(K, \square)$ est un groupe.
Est-il commutatif ?

40. On considère trois objets distincts que l'on note e, a et b. Désignons par U l'ensemble de ces éléments.

La table ci-contre est la table d'une opération dans U que nous avons notée $*$.

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

1. L'ensemble U possède un élément neutre pour la loi $*$.
   Lequel ?
2. *Montre que l'opération* $*$ *est associative dans* U.
3. *Montre que chaque élément de* U *a un symétrique pour l'opération* $*$.

Tu peux donc conclure que $(U, *)$ est un groupe.
Est-il commutatif ?

41. Tu sais que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif. Nous pouvons nous demander s'il existe des parties de $\mathbb{Z}$ qui, munies de l'addition, possèdent aussi cette qualité.

1. Désignons par P l'ensemble des entiers relatifs pairs ; si $x \in P$, alors il existe un entier relatif k tel que $x = 2k$.
La somme de deux éléments de P *est-elle un élément de* P *? Le nombre* 0 *est-il élément de* P *? L'opposé d'un élément de* P *est-il un élément de* P *?*
Justifie l'affirmation suivante :

$(P, +)$ est un groupe commutatif.

2. Tu sais que $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$.
Est-ce que la somme de deux éléments de $\mathbb{N}$ *est un élément de* $\mathbb{N}$ *? Peut-on dire que* $(\mathbb{N}, +)$ *est un groupe ?*

3. *Examine la même question pour l'ensemble des entiers relatifs impairs.*

4. *Examine la même question pour l'ensemble* $\{-1, 0, 1\}$.

5. Désignons par T l'ensemble des entiers relatifs multiples de 3 ; si $y \in T$, alors il existe un entier relatif m tel que $y = 3m$.
Justifie l'affirmation suivante :

$(T, +)$ est un groupe commutatif.

6. *Essaie d'imaginer une partie* A *de* $\mathbb{Z}$ *telle que* $(A, +)$ *soit un groupe commutatif.*

droites et points

DP 1 Des instruments des dessins et des droites

I – DES MOTS.

A l'école primaire, ou même en 6ème et 5ème, tu as utilisé des mots comme

PLAN , DROITE , POINT .

Ces mots désignent des objets de l'espace dans lequel nous vivons.

Essayons d'abord de voir si ces mots ont le même sens pour nous tous. Voici donc trois questions pour lesquelles nous allons enregistrer l'ensemble des réponses de la classe.

1. *A quels objets penses-tu lorsqu'on dit «PLAN» ?*
2. *Même question pour le mot «DROITE».*
3. *Même question pour le mot «POINT».*

Dans tout ce qui suit, nous allons adopter les conventions suivantes, qui nous permettront de dessiner.

1.1 PLAN : ce sera une feuille de papier sur laquelle nous dessinerons. Mais nous allons faire un effort d'imagination : nous supposerons que cette feuille peut se prolonger dans n'importe quelle direction (par exemple en juxtaposant des feuilles de papier).

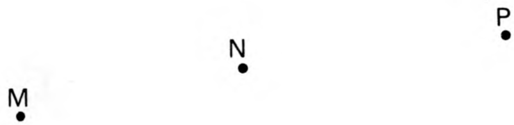
1.2 DROITE : ce sera un trait qu'on peut dessiner avec un crayon bien taillé le long du bord d'une règle. Là encore, faisons un effort d'imagination et supposons que ce trait peut se prolonger à chaque bout.

1.3 POINT : ce sera la trace d'un crayon bien taillé sur notre feuille de papier.

II – DES INSTRUMENTS POUR DESSINER ET ENCORE DU VOCABULAIRE.

2.1 *Marque deux points sur une feuille de papier. Appelle les* A *et* B. *Avec ta règle, dessine une droite qui passe par ces deux points. Appelle la* d. *Peux-tu tracer une autre droite qui passe par* A *et* B *? Marque sur la droite* d *d'autres points.*

Si plusieurs points sont sur une même droite, on dit qu'ils sont ALIGNES. Voici trois points M, N et P.



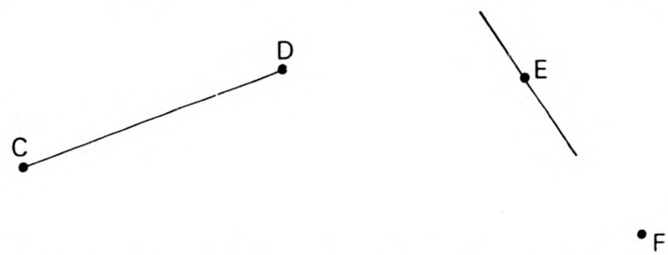
Utilise ta règle pour vérifier si les points M, N *et* P *sont alignés.*

Remarque.

Si une droite passe par deux points A et B, on peut appeler cette droite la droite AB.

Le dessin ci-dessous représente-t-il la droite AB *?*

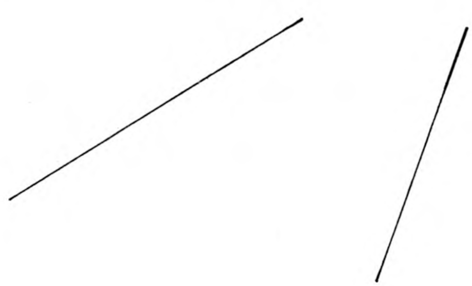
Mêmes questions pour les deux dessins suivants et les droites CD *et* EF.



2.2 *Marque un point sur une feuille de papier. Appelle le* A. *Avec ta règle dessine plusieurs droites qui passent par* A.

Si plusieurs droites passent par un même point, on dit qu'elles sont CONCOURANTES.

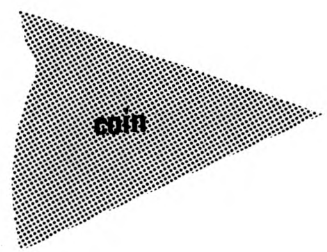
Les deux droites dessinées ci-dessous sont-elles concourantes ?

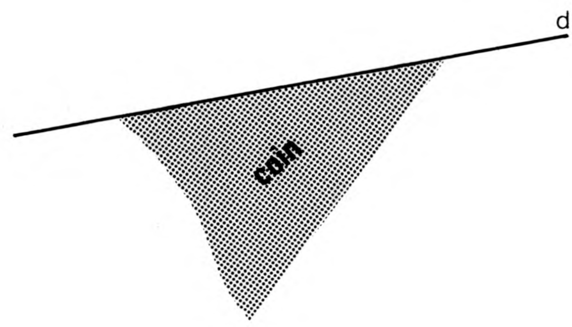


Si deux droites sont concourantes, on dit aussi qu'elles sont SECANTES.

2.3 *Découpe un coin dans une feuille de papier fort.*

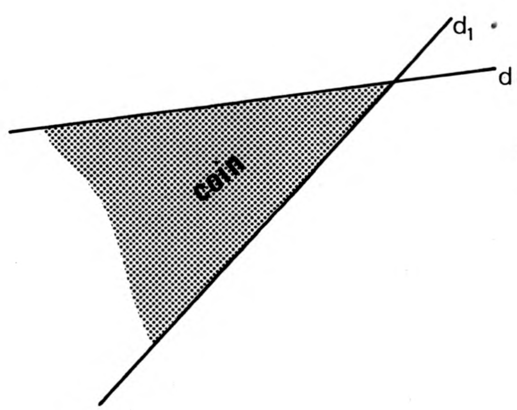
Dessine une droite d. *Place le coin comme l'indique la figure.*

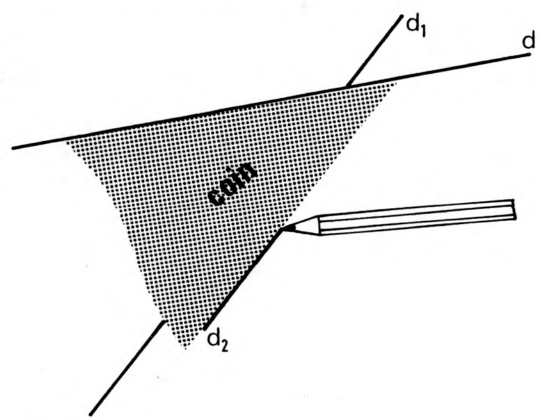




Trace la droite d_1 *le long de l'autre bord du coin.*

Fais glisser le coin le long de la droite d *en utilisant une règle. Trace une autre droite* d_2 *de la même façon que* d_1.

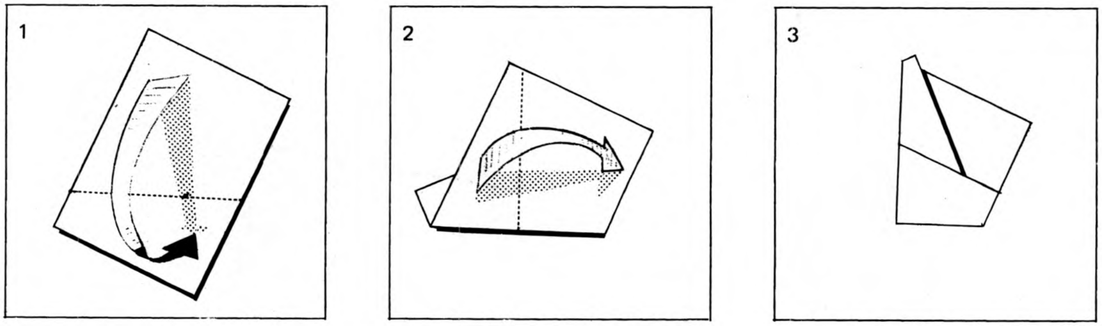




Peux-tu dire que les droites d_1 *et* d_2 *sont concourantes ?*

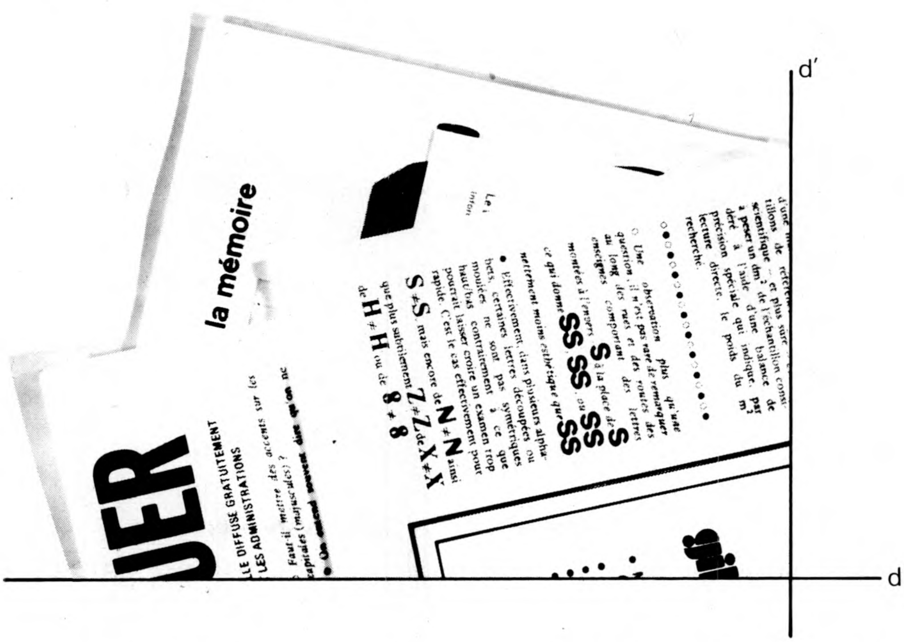
Si deux droites ne sont pas concourantes, on dit qu'elle sont PARALLELES.

2.4 *Prends une feuille de papier et plie la deux fois de suite comme il est indiqué sur les figures ci-dessous.*



Tu as fabriqué un nouveau coin.

Place ce coin sur une feuille de papier et dessine deux droites d *et* d′ *le long des bords en t'aidant de ta règle.*



On dit que les droites d et d′ sont PERPENDICULAIRES. Le coin que tu as fabriqué est une EQUERRE. Tu pourras également utiliser l'équerre que tu as achetée à la papeterie.

2.5 *Dessine deux droites* a *et* b *sécantes. En utilisant ton équerre, dessine une droite perpendiculaire à* a. *Appelle la* a'. *Dessine une droite perpendiculaire à* b. *Appelle la* b'.

Les droites a' *et* b' *sont-elles parallèles ?*

2.6 *Dessine une droite* d *et un point* A *qui ne soit pas sur* d.

A l'aide du coin ou de l'équerre, trace une droite d_1 *qui passe par* A *et qui soit parallèle à* d.

Est-il possible de dessiner une droite

- *qui passe par* A,
- *qui soit parallèle à* d,
- *et qui soit différente de* d_1 *?*

2.7 *Dessine d'autres droites parallèles à* d. *Choisis l'une de ces droites et appelle la* d_2. *Dessine des droites parallèles à* d_2.

Ces droites sont-elles parallèles à d *?*

Sur cette figure, tu as dessiné plusieurs droites parallèles à d. *Est-il possible d'en tracer d'autres ?*

L'ensemble formé de la droite d et des droites parallèles à la droite d est appelé DIRECTION de la droite d.

Quelle est la direction de la droite d_2 *?*

2.8 *Sur la figure que tu viens de faire, dessine une droite qui n'appartienne pas à la direction de la droite* d. *Appelle la* e.

Trace d'autres droites appartenant à la direction de la droite e.

Trace une droite qui n'appartienne ni à la direction de e, *ni à celle de* d. *Appelle la* f. *Trace des droites appartenant à la direction de* f.

Peux-tu tracer une droite qui appartienne à la fois à la direction de e *et à la direction de* d *?*

Peux-tu tracer une droite qui n'appartienne à aucune direction ?

2.9 *Prends la feuille de manipulation* 1a.

Nous y avons dessiné plusieurs droites.

Choisis une de ces droites. Marque la en rouge ainsi que toutes les droites qui appartiennent à sa direction. Fais de même avec d'autres couleurs pour les autres droites. Combien de couleurs as-tu utilisées ?

Choisis un point que tu appeleras A. *Dessine les droites qui passent par* A *et qui sont parallèles à l'une des droites de la figure. Combien en as-tu dessiné ?*

III – D'AUTRES INSTRUMENTS ET TOUJOURS DU VOCABULAIRE.

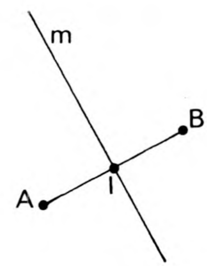
3.1 *Dessine une droite* d *et marque sur cette droite deux points* A *et* B.

On appelle SEGMENT AB l'ensemble des points de d qui se trouvent entre A et B. Les points A et B font partie de cet ensemble.

A l'aide de ta règle graduée, marque le milieu du segment AB. *Appelle le* I.
En utilisant ton équerre, trace la perpendiculaire à d *qui passe par* I.

On dit que cette droite est la MEDIATRICE du segment AB.

Appelle la m.



3.2 *Dessine deux points* A *et* B.
Utilise ton compas pour dessiner un point qui soit à la même distance de A *et de* B.
Dessine d'autres points qui soient à égale distance de A *et de* B.
Vérifie à l'aide de ta règle que tous les points que tu viens de dessiner sont alignés. Sur quelle droite ? Compare avec ce qu'ont trouvé tes camarades.

Nous constatons que tous les points qu'on a choisis à égale distance de A et B sont sur la médiatrice du segment AB.

Penses-tu que cette propriété soit vraie pour tous les points qui sont à égale distance de A *et de* B *?*

3.3 *Dessine deux points* A *et* B.
Trace, comme au paragraphe 3.1, *la médiatrice du segment* AB. *Appelle la* m.
Choisis un point M *de la droite* m *et mesure avec ta règle graduée les segments* AM *et* BM. *Que constates-tu ?*
Pouvais-tu utiliser ton compas pour faire cette vérification ? Comment ?
Recommence avec d'autres points de la droite m. *As-tu le même résultat ? Et tes camarades ?*

Nous constatons que tous les points qu'on a choisis sur la médiatrice du segment AB sont à égale distance des points A et B.

Penses-tu que cette propriété soit vraie pour tous les points qui sont sur la médiatrice du segment AB *?*

3.4 *Dessine trois points* A, B *et* C *non alignés.*

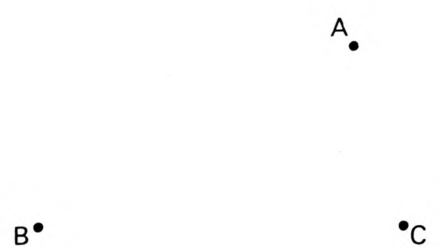
Nous dirons que l'ensemble des trois points A, B et C est un TRIANGLE et on peut appeler ce triangle le triangle ABC.

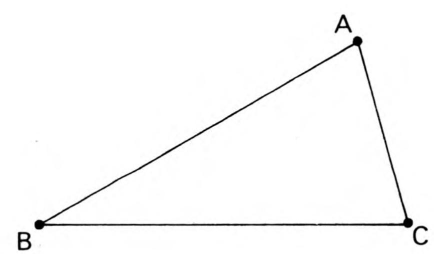
Trace les trois droites AB, BC *et* CA.
Marque
- *le point* A' *milieu du segment* BC,
- *le point* B' *milieu du segment* CA,
- *le point* C' *milieu du segment* AB.

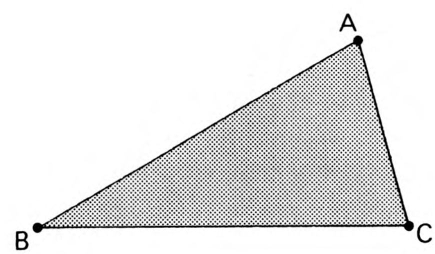
Trace les droites AA', BB' *et* CC'. *Que constates-tu ? Et tes camarades ?*

Remarque.

Dans la vie courante, on appelle souvent triangle
- soit la ligne brisée formée des segments AB, BC et CA,
- soit le morceau de plan limité par cette ligne brisée.







DP2 Des curiosités en vrac

I – OU ON CONTINUE A DESSINER ET A OBSERVER.

1.1 *Dessine trois points* A, B *et* C *non alignés. Trace les droites* AB, BC *et* CA. *Marque le point* C' *milieu du segment* AB *et le point* B' *milieu du segment* AC. *Trace la droite* $B'C'$.

Qu'observes-tu pour les droites BC *et* $B'C'$ *?*

Mesure les segments BC *et* $B'C'$ *à l'aide de ta règle graduée. Que constates-tu ? Pouvais-tu utiliser ton compas pour faire cette observation ? Comment ?*

1.2 *Dessine trois points* A, B *et* C *non alignés. Trace les droites* AB, BC *et* CA. *Marque le point* C' *milieu du segment* AB. *Trace la droite* d *qui passe par* C' *et qui est parallèle à la droite* BC.

La droite d et la droite AC sont sécantes. Appelle D leur point commun.

Qu'observes-tu pour les points A, C *et* D *(tu pourras utiliser ton compas pour faire cette observation).*

Compare les longueurs des segments BC *et* DC'.

1.3 *Dessine quatre points* A, B, C *et* D *qui ne soient pas tous sur une même droite.*

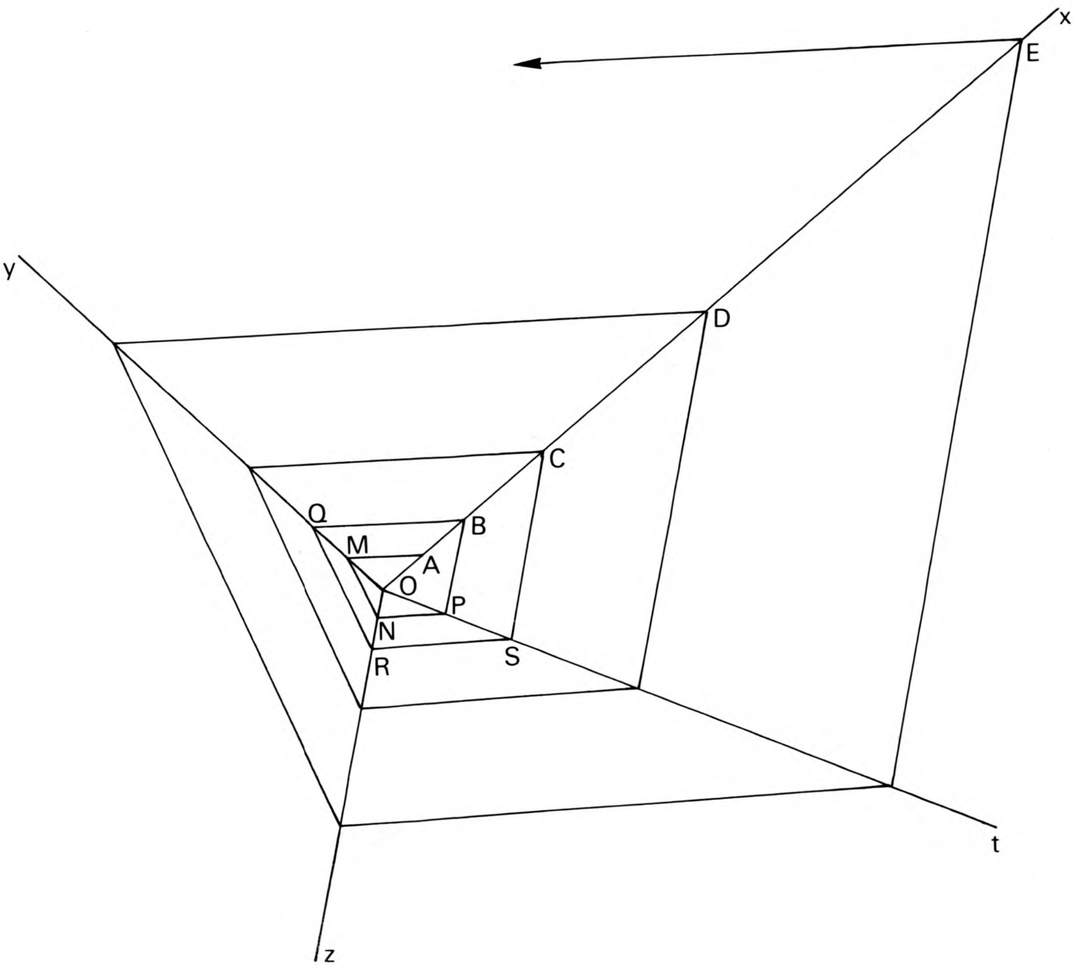
Marque le milieu du segment AB *et appelle le* M.
Marque le milieu du segment BC *et appelle le* N.
Marque le milieu du segment CD *et appelle le* P.
Marque le milieu du segment DA *et appelle le* Q.

Trace les droites MQ, QP, PN *et* NM. *Qu'observes-tu ? Compare avec les observations de tes camarades.*

1.4 Sur la figure ci-contre, on a voulu imiter l'araignée.
On a dessiné quatre demi-droites Ox, Oy, Oz et Ot.
On a ensuite tracé le contour AMNPB.
Puis on a fait un nouveau tour en joignant les rayons successifs par des droites parallèles à celles du premier tour et ainsi de suite.
Sur le rayon Ox, on obtient ainsi les points A, B, C, D, E,....

Avec ta règle graduée, mesure les segments OA, OB, OC, OD *et* OE. *Que constates-tu ?*

Constates-tu la même chose sur les autres rayons ?



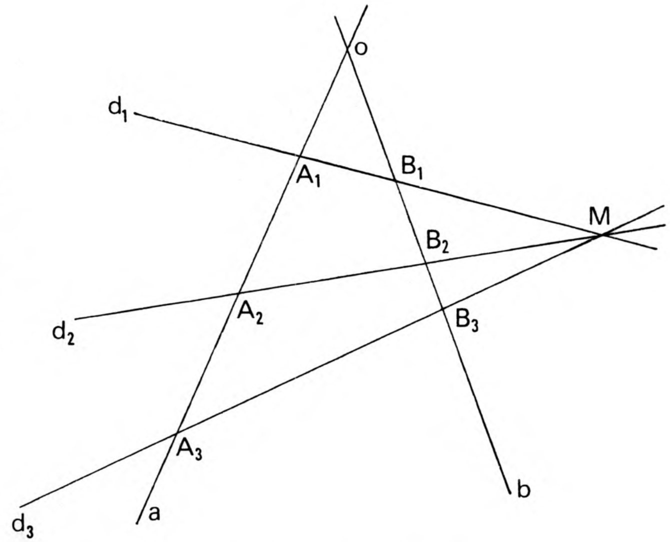
1.5 *Prends la feuille de manipulation* 2a.

Appelle M *le point commun aux droites* AD *et* CF.
Appelle N *le point commun aux droites* AE *et* BF.
Appelle P *le point commun aux droites* BD *et* CE.

Que constates-tu pour les points M, N *et* P *?*

Tu pourrais refaire cette manipulation avec un dessin où les deux droites et les six points sont placés différemment.

1.6



Reproduis la figure ci-contre en l'agrandissant.

Appelle J *le point commun aux deux droites* A_1B_2 *et* A_2B_1.

Appelle K *le point commun aux deux droites* A_2B_3 *et* A_3B_2.

Appelle L *le point commun aux deux droites* A_3B_1 *et* A_1B_3.

Qu'observes-tu ?

Tu peux maintenant tracer une autre droite qui passe par M *et qui coupe les droites* a *et* b. *Tu pourras ainsi obtenir d'autres points comme tu as fait pour* J, K, *et* L. *Combien ? Qu'observes-tu ?*

Et si on traçait une cinquième droite ?

Tu peux refaire le même exercice mais en traçant d'abord deux droites a *et* b *parallèles.*

II – OU ON ESSAIE AUSSI DE FAIRE DES DEMONSTRATIONS.

2.1 *Dessine un triangle* MNP.

Dessine les médiatrices des segments MN, NP *et* PM *comme tu as appris à le faire en* [DP1, paragraphe 3.1, page 36].

Qu'observes-tu ? Et tes camarades ?

Il est raisonnable de penser que cette propriété est vraie pour tous les triangles. Nous allons établir qu'elle est une conséquence des trois propriétés suivantes.

1. Si a et b sont deux droites concourantes, a′ une droite perpendiculaire à a et b′ une droite perpendiculaire à b, alors a′ et b′ sont concourantes. [DP1, paragraphe 2.5, page 35].

2. Tous les points à égale distance de deux points A et B sont sur la médiatrice du segment AB. [DP1, paragraphe 3.2, page 36].

3. Tous les points de la médiatrice d'un segment AB sont à égale distance des deux points A et B. [DP1, paragraphe 3.3, page 37].

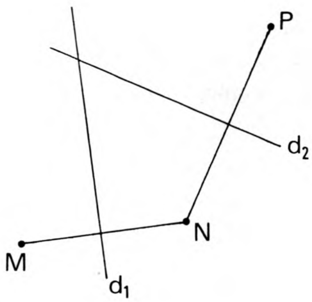
Ces propriétés, nous allons les admettre ici ; elles correspondent à des observations faites en [DP1].

Etudions notre problème.

Données.

Nous allons considérer trois points non alignés quelconques ; nous les appellerons M, N et P. On a l'habitude d'écrire plus brièvement :
«soit trois points non alignés M, N et P».

Appelons d_1 la médiatrice du segment MN et d_2 la médiatrice du segment NP.

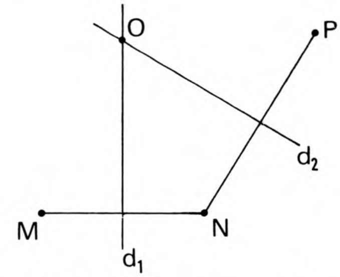


Raisonnement.

Puisque les points M, N et P ne sont pas alignés, les droites MN et NP sont concourantes.

La droite d_1 est perpendiculaire à la droite MN et la droite d_2 est perpendiculaire à la droite NP, donc d_1 et d_2 sont concourantes (propriété 1.).

Appelons O leur point commun.



Le point O appartient à d_1, médiatrice du segment MN, donc il est à égale distance de M et de N (propriété 3.).

Le point O appartient à d_2, médiatrice du segment NP, donc il est à égale distance de N et de P (propriété 3.).

Les distances de O à M et à P sont toutes deux égales à la distance de O à N ; elles sont donc égales (transitivité de l'égalité). Le point O appartient à la médiatrice du segment MP (propriété 2.).

Notons d_3 cette médiatrice.

Les droites d_1, d_2, d_3 passent par O : elles sont concourantes.

Conclusion.

Dans un triangle MNP, les médiatrices des segments NP, PN et MN sont concourantes.

Nous venons de faire une DEMONSTRATION.

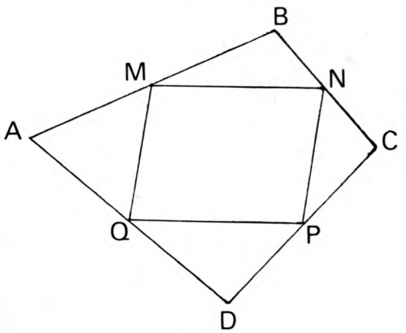
2.3 Dans les deux paragraphes précédents, nous t'avons donné des exemples de démonstrations. Tu as d'ailleurs participé à la seconde. Tu vas essayer d'en faire une autre.

Pour cela, reprends une figure que tu as dessinée au paragraphe 1.3.

Données.

Les quatre points A, B, C et D ne sont pas tous sur une même droite ;

le point M est le milieu du segment AB ;
le point N est le milieu du segment BC ;
le point P est le milieu du segment CD ;
le point Q est le milieu du segment DA.



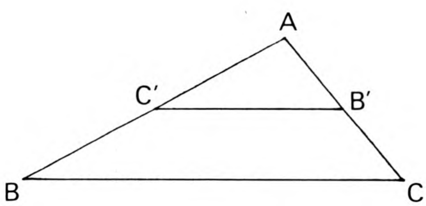
Tu avais constaté que les droites MN et QP sont parallèles et que les droites NP et QM sont parallèles.

C'est cette propriété que tu vas démontrer.

Pour cela, on suppose vraies les deux propriétés suivantes.

1. Soit {A, B, C} un triangle, C′ le milieu du segment AB et B′ le milieu du segment AC : les droites BC et B′C′ sont parallèles [DP2, paragraphe 1.1, page 38].

2. Soit a, b et c trois droites ; si a et b sont parallèles et b et c sont parallèles, alors a et c sont parallèles [DP1, paragraphe 2.7, page 35].

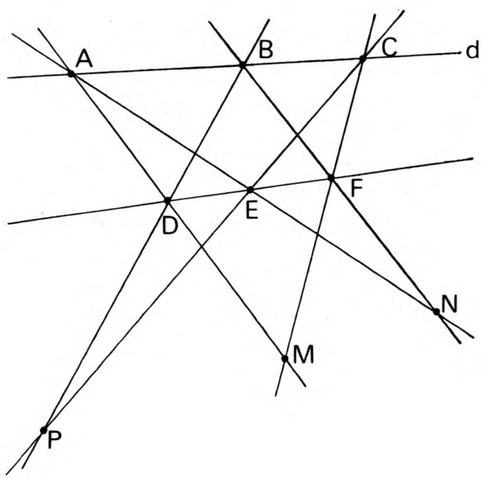


Raisonnement.

Explique pourquoi la droite MN *est parallèle à la droite* AC ;
explique pourquoi la droite QP *est parallèle à la droite* AC ;
explique pourquoi les droites MN *et* QP *sont parallèles ;*
démontre que les droites NP *et* MQ *sont parallèles.*

Nous pouvons penser que toutes les fois que l'on fera un tel dessin, on trouvera le même résultat.

Enfin, nous avons observé des choses plus spectaculaires et inattendues.
Par exemple, dans [DP2], nous avons observé cette figure.



Nous avons constaté que les points M, N et P sont alignés.

Ce résultat était imprévisible. Si on dessinait autrement les droites d et d', ou si on plaçait autrement les points sur les droites, pourrions-nous faire la même observation ? Nous ne pouvons pas en être sûrs.

Nous avons vu aussi qu'en supposant que certaines propriétés sont vraies, on pouvait établir que d'autres sont vraies. C'est cela que nous avons appelé une démonstration.

Par exemple, c'est ce que nous avons fait dans l'exercice sur les médiatrices [DP2, paragraphe 2.1, page 41]. Cela signifie que toutes les fois qu'on dessinera trois points non alignés, on pourra observer ce résultat. On n'a plus besoin de faire effectivement le dessin pour en être certain.

1.2 Plan, droites, points mathématiques.

Pour résoudre ces difficultés, les mathématiciens ont construit une théorie. Dans cette théorie, on étudie non plus des dessins, mais des objets mathématiques. Ces objets sont définis par des propriétés simples, qu'on ne démontre pas.

Les premiers objets ainsi définis sont appelés :

PLAN MATHEMATIQUE, DROITE MATHEMATIQUE, POINT MATHEMATIQUE

ou, plus simplement,

PLAN , DROITE , POINT .

Le plan est un ensemble de points.
Une droite est un sous-ensemble du plan. C'est donc un ensemble de points.

Lorsque plusieurs points appartiennent à une même droite, on dit qu'ils sont ALIGNES.

Les propriétés simples choisies pour définir ces objets sont les suivantes.

1. Si on se donne deux points quelconques **A** et **B**, il existe une droite unique qui passe par **A** et **B**.

Cette propriété ne te surprends pas : elle correspond à une des observations que tu as faite dans [DP1].

2. Dans le plan, il existe au moins trois points qui ne sont pas alignés.

Cette propriété correspond aussi à une observation que tu as faite.

3. Si on se donne une droite **d** et un point **A** qui n'appartient pas à **d**, il existe une droite unique
qui passe par **A**,
qui n'a pas de point commun avec **d.**

Nous avons déjà parlé de cette propriété.

1.3 Remarque.

Il ne faut pas confondre :
la théorie mathématique, dans laquelle nous ferons des démonstrations ;
les dessins sur lesquels on fait des observations.

C'est pourquoi, à l'avenir, lorsqu'il s'agira de dessins, nous dirons : UN PLAN MATERIEL, UNE DROITE MATERIELLE, UN POINT MATERIEL, et le texte sera écrit en bleu. C'est ce que nous avons fait dans [DP1] et [DP2].

Lorsqu'il s'agira de théorie, nous dirons : LE PLAN, UNE DROITE, UN POINT, et le texte sera écrit en noir.

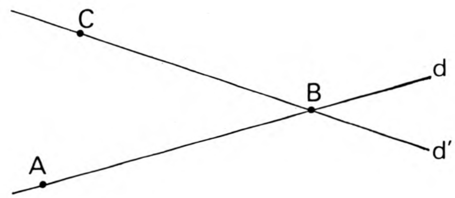
1.4 Intersection de deux droites du plan.

Donnons nous deux droites d et d' ayant au moins deux points communs A et B. Puisque par deux points, il ne passe qu'une seule droite, d et d' sont confondues et on peut écrire : $d = d'$.

Donnons nous trois points non alignés A, B et C. Appelons d la droite qui passe par A et B et d' la droite qui passe par B et C. Le point C n'appartient pas à d et appartient à d', donc d et d' ne sont pas confondues.

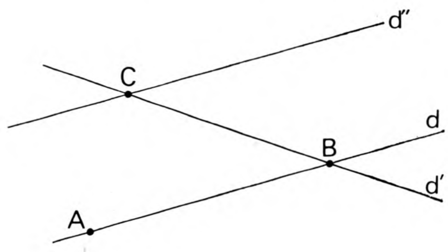
Les droites d et d' n'ont donc pas deux (ou plus de deux) points communs ; or elles en ont un, le point B : leur intersection est le singleton $\{B\}$ et on peut écrire : $d \cap d' = \{B\}$.

Voici une figure qui illustre cette situation.



Si deux droites ont un et un seul point commun, on dit qu'elles sont SECANTES, ou encore CONCOURANTES.

Enfin, par le point C, passe une droite d'' qui n'a pas de point commun avec d et on peut écrire que $d \cap d'' = \phi$.



Si a et a' sont deux droites quelconques
- ou bien leur intersection est vide,
- ou bien leur intersection est un singleton,
- ou bien leur intersection contient au moins deux points. Nous avons vu que dans ce cas, elles sont confondues.

Définition.

Si deux droites ne sont pas sécantes, on dit qu'elles sont PARALLELES.

Tu remarqueras que si l'on écrit : les droites a et b sont parallèles, cela signifie que
ou bien $a \cap b = \phi$,
ou bien $a = b$. Tu sais que lorsqu'on écrit «$a = b$», cela signifie que a et b désignent la même droite.

Dans un plan matériel, nous ne nous sommes pas intéressé au cas des droites confondues : nous avons dit que deux droites matérielles sont parallèles si leur intersection est vide.

Le mot parallèle n'a donc pas tout à fait le même sens dans la théorie et dans le langage courant.

Notation.

Si les droites d et d' sont parallèles, on écrit que $d \mathbin{/\mkern-5mu/} d'$.

Remarque.

On peut remplacer l'énoncé de la troisième propriété choisie par l'énoncé suivant.

3'. Si on se donne une droite **d** et un point **A**, il existe une droite **d'** unique
qui passe par **A**,
qui est parallèle à **d**.

Si A n'appartient pas à d, les droites d et d' n'ont pas de point commun et on retrouve la propriété **3.** Si A appartient à d, alors $d' = d$.

1.5 Axiomes.

Les propriétés choisies plus haut et non démontrées s'appellent des AXIOMES ; ce sont des propriétés des points et des droites du plan mathématique.

Nous noterons souvent **D** l'ensemble des droites du plan.

II – PARALLELISME.

2.1 Directions.

Soit une droite d. L'ensemble de toutes les droites parallèles à d s'appelle une DIRECTION. On dit que c'est la direction de la droite d.

Est-ce que la droite d *appartient à la direction de* d *?*

Une direction est un ensemble de droites, c'est donc une partie de l'ensemble **D** des droites du plan.

D'après le paragraphe précédent, il existe des droites parallèles à d, donc une direction n'est jamais vide.

Les manipulations que nous avons faites sur les droites parallèles dans [DP1] nous conduisent à choisir comme nouvel axiome la propriété suivante.

4. Toute droite du plan appartient à une direction et à une seule.

On dit que les directions forment une PARTITION de l'ensemble **D**.

Soit a et b deux droites.

Supposons que les droites a et b soient parallèles : la droite b appartient à la direction de a, ainsi que la droite a ; donc les droites a et b appartiennent à la même direction.

Supposons maintenant, que les droites a et b appartiennent à la même direction. La droite a appartient à la direction de a, donc la droite b qui appartient à une seule direction, appartient à la direction de a : elle est parallèle à la droite a.

Nous venons de démontrer qu'il revient au même de dire que les droites a et b sont parallèles ou de dire qu'elles appartiennent à la même direction.

2.2 Transitivité du parallèlisme.

Comme les directions forment une partition de l'ensemble des droites du plan, nous pouvons énoncer la propriété suivante.

Soit a, b et c des droites.

Si a est parallèle à b et si b est parallèle à c, alors a est parallèle à c.

Autrement dit : le parallèlisme est une relation transitive.

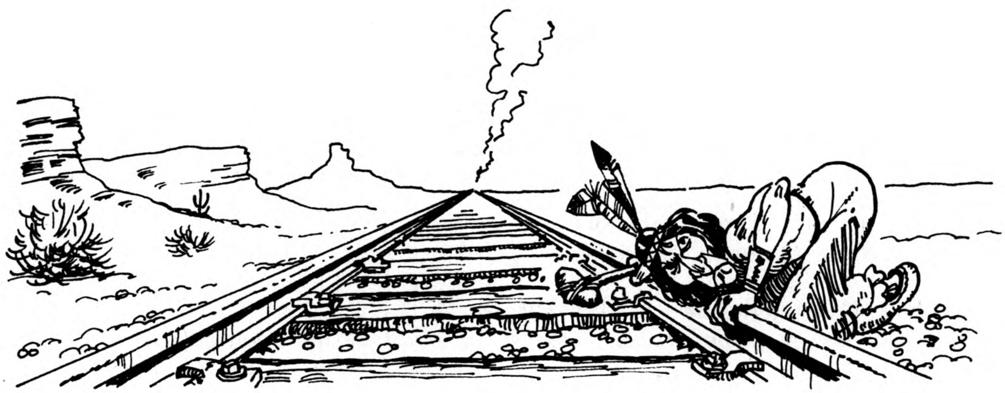
Rappelons pourquoi : soit trois droites a, b et c telles que

a et b sont parallèles,

b et c sont parallèles.

Les droites a et c appartiennent à la direction de la droite b, donc elles sont parallèles.

Remarque bien que pour connaître une direction, il suffit de connaître n'importe lequel de ses éléments, c'est-à-dire n'importe quelle droite appartenant à cette direction.



2.3 Une propriété.

Soit d et d' deux droites parallèles et d'' une droite sécante à d.
Les droites d et d' appartiennent à la même direction.
La droite d'' n'appartient pas à cette direction.

Pourquoi ?

Donc les droites d' et d'' sont sécantes.

Nous avons démontré la propriété suivante.
Si deux droites sont parallèles, toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.

2.4 Remarque.

Soit T un point et δ une direction (le signe δ est une lettre de l'alphabet grec ; cette lettre se lit «delta»).

Choisissons une droite d' qui appartienne à la direction δ.

Nous savons qu'il existe une droite d unique qui passe par T et qui est parallèle à d'. Cette droite d appartient à la direction δ.

Nous venons de démontrer la propriété suivante.

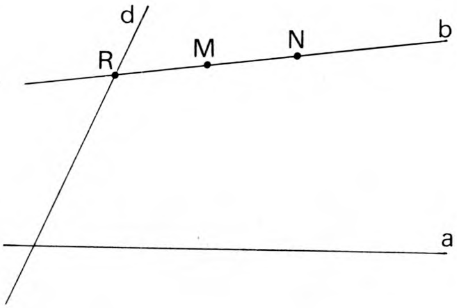
Soit T un point et δ une direction. Il existe une droite d unique qui passe par T et qui appartient à la direction δ.

DP 4 Projections

I – DESSINONS.

1.1 *Dessine des droites matérielles comme ci-contre :*

les droites a *et* d *ne sont pas parallèles ;*
les droites b *et* d *ne sont pas parallèles.*



Marque un point M *sur* b.

Trace la droite m *parallèle à* d *et qui passe par* M *; cette droite coupe la droite* a *: appelle* M′ *le point commun aux droites* a *et* m.

Tu as ainsi associé au point M de la droite b un point M′ de la droite a.

Soit N un point de b différent de M.

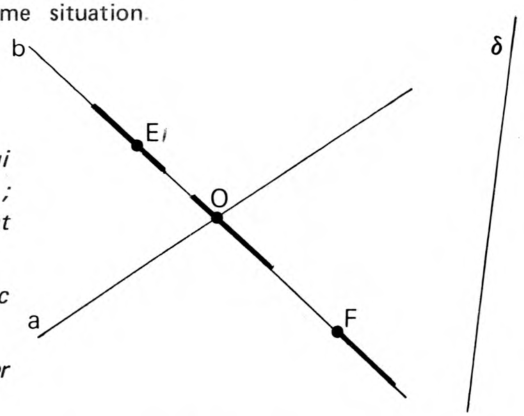
Par le même procédé, associe au point N *un point* N′ *de la droite* a.

Fais de même pour le point R, *pour d'autres points de la droite* b.

Penses-tu que ce soit possible pour n'importe quel point de la droite b *?*

1.2 Voici une autre figure illustrant la même situation.

Les droites a et d ne sont pas parallèles ;
les droites b et d ne sont pas parallèles.



Reproduis cette figure.

Trace la droite e *parallèle à* d *qui passe par* E *; cette droite coupe* a *en un point ; appelle* E′ *ce point. Tu as ainsi associé au point* E *de la droite* b *un point* E′ *de la droite* a.

Recommence avec le point F *et avec d'autres points de la droite* b.

Peux-tu, par le même procédé, associer au point O *un point de la droite* a *?*

1.3 Sur la figure du paragraphe 1.2, on a tracé en trait fort trois parties de la droite b.

Fais de même sur ton dessin.

Si on appliquait le même procédé à tous les points de chacune de ces parties, on obtiendrait trois parties de la droite a.

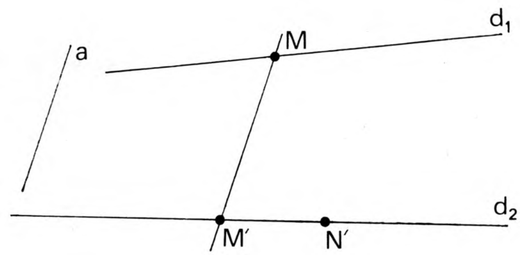
Colorie en rouge ces trois parties de la droite a.

II – DEFINITION D'UNE PROJECTION.

2.1 Soit δ une direction et d_1 et d_2 deux droites qui n'appartiennent pas à δ.

La figure ci-contre illustre cette situation.

La direction δ est représentée par l'un de ses éléments, la droite a.



Nous allons maintenant démontrer une propriété de tous les points de la droite d_1. Pour cela, nous allons nous intéresser à un point quelconque de cette droite : cela veut dire qu'il n'a rien de plus que n'importe quel autre point de d_1.

Pour raisonner sur un point, il est plus commode de lui donner un nom : nous allons l'appeler M. Nous aurions aussi bien pu l'appeler N, ou G, ou x, ou.... Cette lettre M joue le rôle d'une boîte □ dans laquelle n'importe quel point de la droite d_1 peut venir se placer.

Pour expliquer tout cela, nous nous contenterons désormais d'écrire :

«soit M un point de d_1».

Maintenant raisonnons sur M.

Il existe une droite unique qui passe par M et qui appartient à la direction δ.

Pourquoi ?

Appelons M' le point obtenu.

Comme on l'a expliqué plus haut, M désigne un point quelconque (sans propriété particulière) de d_1. Aussi, ce procédé s'applique à n'importe quel point de d_1.

Ce procédé met en relation la droite d_1 et la droite d_2. Cette relation a la propriété suivante :

à tout point de la droite d_1 correspond un point et un seul de la droite d_2.

Autrement dit, cette relation est une application de la droite d_1 vers la droite d_2. Appelons p cette application. On dit que

la droite d_1 est la source de l'application p,
la droite d_2 est le but de l'application p,
le point M' est l'image du point M par l'application p,
le point M est un antécédent du point M' par l'application p.

Nous pouvons désigner le point M' par la notation p(M).

Attention !!! Ne confonds pas p, qui est une application, et p(M), qui est un point de la droite d_2.

Pour dire que p est une application de d_1 vers d_2, on écrit souvent :

$$p : d_1 \longrightarrow d_2 .$$

Nous donnons à cette application p le nom de PROJECTION DE DIRECTION δ DE LA DROITE d_1 SUR LA DROITE d_2.

Le point p(M) s'appelle le PROJETE de M.

Remarque.

Ce que nous avons fait ici s'applique évidemment toutes les fois que nous avons affaire à une direction et à deux droites qui n'appartiennent pas à cette direction : dans notre raisonnement, nous aurions aussi bien pu remplacer δ, d_1 et d_2 par les boîtes ○, △ et ◇.

Est-il possible de mettre la même chose dans deux de ces boîtes ?

2.2 Exercice.

Soit δ une direction, d une droite qui appartient à δ et a et b deux droites sécantes qui n'appartiennent pas à δ.

On appelle O le point commun à a et à b, p la projection de direction δ de la droite b sur la droite a.

Soit A, B et C trois points de la droite b, p(A), p(B), p(C) et p(O) les points de la droite a, images par p des points A, B, C et O.

Fais une figure illustrant cette situation.

III – PROPRIETES.

3.1 Projection réciproque.

Considère de nouveau la situation du paragraphe 2.1. *Refais une figure.*

Soit N' un point de la droite d_2.

Comment trouves-tu un antécédent de N' *par* p *? Combien en trouves-tu ? Pourquoi ?*

Le procédé de raisonnement appliqué ici – intérêt porté à un point quelconque de d_2 – assure que ceci est valable pour n'importe quel point de d_2.

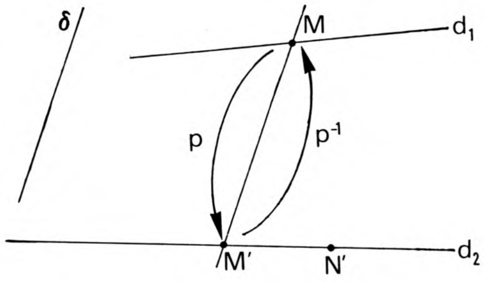
Relis, à ce sujet, le début du paragraphe 2.1.

Tu viens d'établir que chaque point de d_2 a un antécédent et un seul par p.
Tu as donc défini une nouvelle application
dont la source est la droite d_2,
dont le but est la droite d_1.

Cette application est la projection de direction δ de la droite d_2 sur la droite d_1.

C'est l'APPLICATION RECIPROQUE de p et nous la noterons p^{-1} :

$p : d_1 \longrightarrow d_2$; $p^{-1} : d_2 \longrightarrow d_1$.



Recopie les phrases suivantes en les complétant.

La droite d_1 est la source de l'application ...... et le but de l'application ......

La droite ...... est le but de l'application p et ...... de l'application p^{-1}.

Par l'application p, le point ...... est l'antécédent du point M′, et le point M′ est ...... du point M.

Par l'application p^{-1}, le point M est l'image du point ...... et le point M′ est ...... du point M.

Note bien que pour l'application p, tout élément du but a un antécédent et un seul. Autrement dit, p est une application bijective, ou encore une bijection.

L'application p^{-1} est aussi bijective.

3.2 Points invariants.

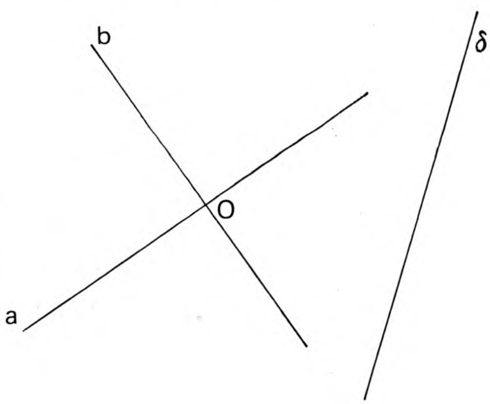
Reprenons la situation du paragraphe 2.2.

Les droites a et b sont sécantes et leur point commun est O.

On a désigné par p la projection de direction δ de la droite b sur la droite a.

Quelle est l'image du point O *par* p *?*

On dit qu'un tel point est INVARIANT.



Tu remarques que pour qu'un point soit invariant, il est nécessaire qu'il appartienne en même temps à la source et au but de l'application.

Y a-t-il d'autres points invariants par l'application p *? Pourquoi ?*

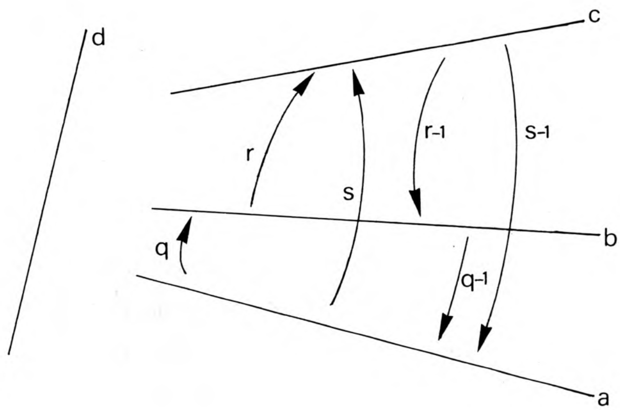
Si on avait choisi les droites a *et* b *parallèles est distinctes, y aurait-il des points invariants ? Pourquoi ?*

Parmi les écritures suivantes, quelles sont celles qui ne désignent pas une application ? Explique pourquoi.

$s \circ q^{-1}$; $s \circ r$; $r^{-1} \circ q$; $r^{-1} \circ s$; $q^{-1} \circ s^{-1}$; $q^{-1} \circ r^{-1}$; $s \circ s^{-1}$; $s^{-1} \circ s$.

Pour celles qui désignent une application, donne une autre écriture de cette application.

Cette figure peut t'aider dans ta recherche.



4.2 Soit $\{A, B, C\}$ un triangle et M un point de la droite AB.
On appelle N le projeté de M sur la droite AC suivant la direction de la droite BC.

Fais une figure illustrant cette situation.
Tu vas maintenant compléter cette figure en utilisant les informations suivantes :

on appelle Q le projeté de N sur la droite BC suivant la direction de la droite AB ;
on appelle R le projeté de Q sur la droite AB suivant la direction de la droite AC ;
on appelle S le projeté de R sur la droite AC suivant la direction de la droite BC ;
on appelle T le projeté de S sur la droite BC suivant la direction de la droite AB ;
on appelle U le projeté de T sur la droite AB suivant la direction de la droite AC.

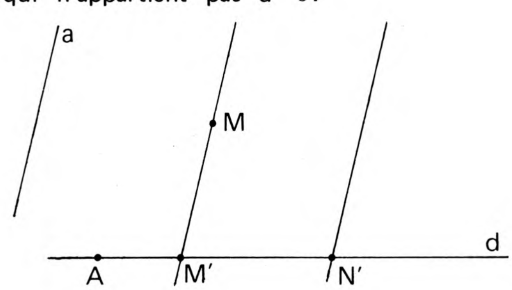
Qu'observes-tu ? Et tes camarades ?

4.3 Dans ce paragraphe, nous allons étudier ce que devient l'application projection si on prend comme source le plan tout entier.

Soit une direction δ et une droite d qui n'appartient pas à δ.

La figure ci-contre illustre cette situation : la direction δ est représentée par l'une de ses droites, a.

Pour tout point M du plan, il existe une droite unique qui passe par M et qui appartient à la direction δ. Cette droite coupe la droite d en un point M$'$.



1.2 Quelques observations.

Dessine une droite. Appelle la d. *Dessine plusieurs droites orthogonales à la droite* d. *Qu'observes-tu ? Et tes camarades ?*

Dessine deux droites orthogonales. Appelle les a *et* b. *Trace plusieurs droites parallèles à la droite* a *et plusieurs droites parallèles à la droite* b. *Qu'observes-tu ? Et tes camarades ?*

Dessine deux droites qui ne soient ni parallèles, ni orthogonales. Appelle les e *et* f. *Dessine une droite parallèle à* e. *Est-elle parallèle à* f *? Perpendiculaire à* f *? Dessine une droite perpendiculaire à* e. *Est-elle parallèle à* f *? Perpendiculaire à* f *?*

Dessine une droite. Appelle la c *et marque un point* A *qui ne soit pas sur* c. *Trace une droite qui passe par* A *et qui soit orthogonale à* d.
Penses-tu qu'on puisse en trouver plusieurs ?
Recommence le même travail avec un point qui ne soit pas sur d.

1.3 Réflexions sur les exercices précédents.

Ce que nous venons de faire nous conduit à penser que l'orthogonalité est une propriété des directions. En effet,

tu as dessiné plusieurs droites orthogonales à une même droite et tu as constaté que ces droites étaient parallèles ; elles appartiennent donc à une même direction ;

tu as dessiné deux droites orthogonales a et b et tu as constaté que toutes les droites que tu as tracées parallèles à b étaient orthogonales à toutes les droites que tu as tracées parallèles à a.

Dans la dernière manipulation, tu n'as sans doute trouvé qu'une seule droite passant par A et orthogonale à la droite c. Or tu sais qu'il n'existe qu'une seule droite qui passe par un point et qui appartient à une direction donnée.

Nous dirons que deux DIRECTIONS sont ORTHOGONALES si une droite de l'une est orthogonale à une droite de l'autre.

Les manipulations que tu as faites te font comprendre qu'alors toute droite de l'une est orthogonale à toute droite de l'autre.

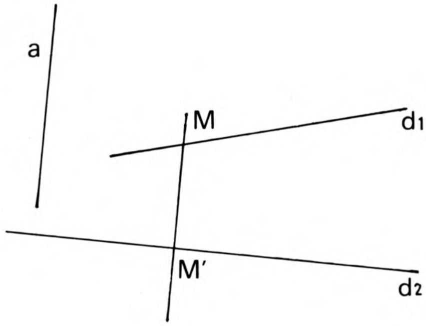
1.4 Projection orthogonale.

Dans [DP4], nous avons étudié une projection de direction δ d'une droite d_1 sur une droite d_2.

Sur la figure, la direction δ est représentée par un de ses éléments, la droite a.

Si la direction δ est orthogonale à la direction de la droite d_2, on dit que cette projection est une PROJECTION ORTHOGONALE.

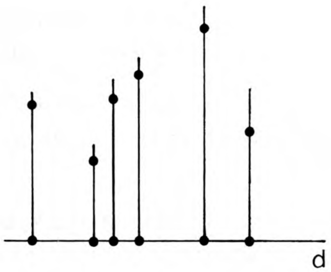
Les droites a et d_2 sont alors perpendiculaires. C'est le cas de la figure ci-contre.



Si M est un point de d_1 et M' son image, les droites MM' et d_2 sont perpendiculaires. Le point M' est appelé PROJETE ORTHOGONAL du point M.

Remarque.

Soit d une droite. On peut aussi définir la projection orthogonale du plan tout entier sur la droite d.



II – TRIANGLE RECTANGLE.

2.1 Un triangle particulier.

Dessine trois points A, B *et* C *de façon que les droites* AB *et* AC *soient perpendiculaires.*

On dit que le triangle ABC est un TRIANGLE RECTANGLE en A.

Le segment BC est appelé l'HYPOTENUSE de ce triangle.

Appelle O *le milieu du segment* BC. *Trace le cercle de centre* O *qui passe par* A. *Qu'observes-tu ? Et tes camarades ?*

Trace un cercle. Appelle O *son centre. Trace une droite* d *qui passe par* O. *Elle coupe le cercle en deux points que tu appelleras* M *et* N.

On dit que la droite d est un DIAMETRE du cercle, mais on dit aussi que le segment MN est un DIAMETRE du cercle.

Choisis un point P *sur le cercle. Qu'observes-tu pour le triangle* MNP *? Recommence avec d'autres points du cercle.*

Dessine un triangle AHM *rectangle en* H. *Compare les longueurs des trois segments* AH, HM *et* AM. *Qu'observes-tu ? Et tes camarades ?*

2.2 Distance d'un point à une droite.

Dessine une droite d *et un point* A *qui ne soit pas sur* d. *Marque plusieurs points sur la droite* d.

Mesure la distance en millimètres de A à ces points.

Cherche un point de la droite d *qui soit plus proche de* A *que tous les autres points de la droite* d. *Appelle* H *le point que tu as trouvé.*

Que remarques-tu pour les droites AH *et* d *?*

Rapproche cette observation de celle que tu as faite à la fin du paragraphe précédent.

La distance en millimètres de A à H est appelée la DISTANCE en millimètres DU POINT A A LA DROITE d.

faisons le point

I — PLAN MATHEMATIQUE.

Dans ce chapitre, nous avons fait des dessins, des observations dans un plan matériel. Certaines de ces observations nous ont aidé à construire le début d'une théorie. Les premiers objets de cette théorie sont

le plan,
les points qui sont les éléments du plan,
les droites qui sont des ensembles de points, c'est-à-dire des parties du plan.

Nous avons défini ces objets à l'aide de quelques unes de leurs propriétés (axiomes). Voici les trois premiers.

1. Deux points distincts appartiennent à une droite et une seule.
2. Il existe au moins trois points non alignés.
3. Etant donnés une droite d et un point A qui n'appartient pas à d, il existe une droite unique qui passe par A et qui n'a pas de point commun avec d.

Nous en avons déduit la propriété suivante.
Si a et a' sont deux droites quelconques,

- ou bien leur intersection ne contient qu'un seul point : on dit qu'elles sont sécantes ou concourantes ;
- ou bien leur intersection est vide ;
- ou bien leur intersection contient au moins deux points. Les deux droites sont alors confondues.

Dans les deux derniers cas, on dit que les droites sont parallèles.

II — PARALLELISME.

Soit d une droite ; nous avons appelé direction de la droite d l'ensemble de toutes les droites parallèles à d, et nous avons introduit un quatrième axiome.

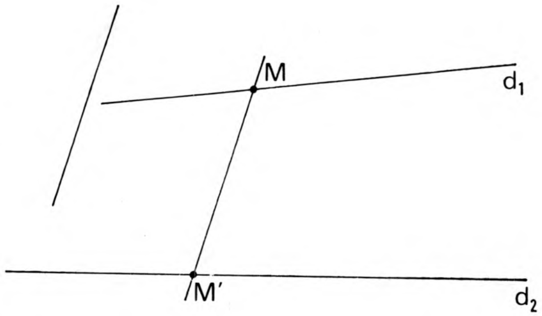
4. Toute droite du plan appartient à une direction et à une seule.

Nous en avons déduit les propriétés suivantes.

- Etant donnés une droite d et un point A, il existe une droite unique qui passe par A et qui appartient à la direction de d (c'est-à-dire qui est parallèle à d).
- Si deux droites sont parallèles, toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.
- Soit trois droites d, d' et d'' ; si $d \parallel d'$ et $d' \parallel d''$, alors $d \parallel d''$.

Enfin, pour connaître une direction, il suffit de connaître n'importe quelle droite appartenant à cette direction.

III – PROJECTIONS.



Soit δ une direction et d_1 et d_2 deux droites qui n'appartiennent pas à δ.

La droite de la direction δ qui passe par M coupe la droite d_2 en un point unique.

On définit ainsi une application de source d_1 et de but d_2.

Cette application est appelée : projection de direction δ de la droite d_1 sur la droite d_2.

L'image d'un point de d_1 par cette application est appelé projeté de ce point.

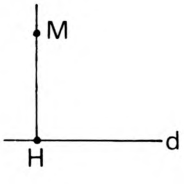
Tout point de d_2 a un antécédent et un seul pour cette application : on dit que la projection de direction δ de la droite d_1 sur la droite d_2 est une bijection.

Son application réciproque est la projection de direction δ de la droite d_2 sur la droite d_1.

IV – ORTHOGONALITE.

Dans [DP5], nous avons fait quelques observations sur les droites perpendiculaires.

- Nous avons vu que l'orthogonalité, dans un plan matériel, est une propriété des directions ; deux directions sont orthogonales si une droite de l'une est orthogonale à une droite de l'autre.
- Soit δ une direction et d_1 et d_2 deux droites qui n'appartiennent pas à δ ; si la direction de d_2 est orthogonale à δ, on dit que la projection δ de d_1 sur d_2 est une projection orthogonale.



- Soit d une droite et M un point. La perpendiculaire à d qui passe par M coupe d en un point H. On appelle distance du point M à la droite d la distance du point M au point H (cette distance dépend de l'unité de longueur choisie).

- Soit $\{A, B, C\}$ un triangle ; si les droites AB et AC sont perpendiculaires, on dit que le triangle est rectangle en A.

Dans notre théorie, nous n'avons pas, pour le moment, introduit des propriétés qui correspondent à ces observations ; nous ne le ferons qu'en classe de troisième.

un peu d'histoire

EUCLIDE.

L'axiome 3 est souvent appelé «postulat d'Euclide».

Euclide était un mathématicien grec qui vécut au 3ème siècle avant J.C. On sait très peu de choses sur sa vie, sinon qu'il enseignait les mathématiques à Alexandrie en Egypte.

Pour situer cette époque lointaine, disons que :

- c'est dans la deuxième moitié du siècle précédent (le 4ème) qu'Alexandre le Grand établit son empire sur une région qui correspond à peu près actuellement à la Grèce, l'Egypte, la Turquie, la Syrie, le Liban, Israël, la Jordanie, l'Irak, l'Afganistan et une partie du Pakistan.

  Il fonda la ville d'Alexandrie en 332 avant J.C.

- Ce n'est qu'au cours du siècle suivant (le 2ème) que Rome conquit la Grèce (146 avant J.C.). En attendant, pendant le 3ème siècle, Rome est en guerre avec Carthage et Hannibal franchit les Alpes et envahit l'Italie en 218 avant J.C.

- Le troisième siècle est donc l'époque de la civilisation hellénistique.

  A Alexandrie fut créée une institution qu'on peut considérer comme la première université. Euclide fut l'un des nombreux savants qui y travaillèrent.

Euclide a écrit un livre de mathématiques qui est très célèbre, *les éléments*. Le livre I des *éléments* comporte des définitions, puis des «demandes» ce que nous avons traduit par axiomes, puis des théorèmes démontrés. Euclide a été l'un des tous premiers à faire, de façon systématique, des démonstrations.

L'axiome 3 est énoncé dans *les éléments* sous une forme différente de celle que nous avons donnée. Euclide a compris que cette propriété ne pouvait pas se démontrer à l'aide des résultats antérieurs. Il fallait donc, ou bien l'admettre, ou bien renoncer à construire une théorie cohérente.

Ce n'est qu'au 19ème siècle que des mathématiciens construisirent d'autres théories, à partir d'autres axiomes. Les propriétés de ces théories ne correspondent pas à des observations du type de celles que nous avons faites dans ce chapitre. Certaines de ces théories sont utilisées dans d'autres domaines.

Parmi ces mathématiciens, citons le hongrois Bolyai, le russe Lobatchevsky et l'allemand Riemann.

exercices et problèmes

1. *Observe la figure ci-contre.*

On a marqué trois points non alignés A, B et C. Les triangles ACB', BCA' et ABC' sont équilatéraux.

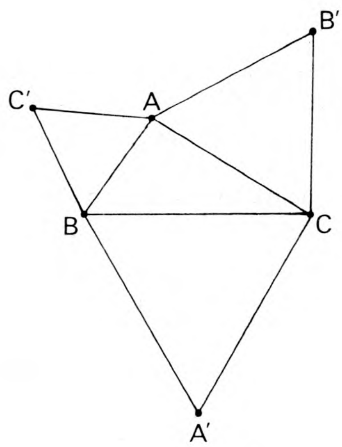
On dit que le triangle ACB' est équilatéral pour exprimer que les trois segments AC, CB' et $B'A$ ont la même longueur.

Dessine une figure analogue en utilisant ton compas. Trace sur ton dessin les droites AA', BB' *et* CC'. *Que constates-tu ?*

Compare les longueurs des segments AA', BB' *et* CC'.

On appelle O_1 le point de concours des médiatrices du triangle ABC', O_2 le point de concours des médiatrices du triangle ACB' et O_3 le point de concours des médiatrices du triangle BCA'.

Marque les points O_1, O_2 *et* O_3 *sur ton dessin. Que peux-tu dire du triangle* $O_1O_2O_3$ *?*



2. *Dessine un cercle. Marque six points* A, B, C, D, E *et* F *sur ce cercle de façon que*
les droites AB *et* DE *se coupent en un point que tu appelleras* M,
les droites BC *et* EF *se coupent en un point que tu appelleras* N,
les droites CD *et* FA *se coupent en un point que tu appelleras* P.
Que constates-tu pour les points M, N *et* P *?*

Ce que tu viens de constater correspond à une propriété que l'on peut démontrer dans la théorie. Elle a été démontrée par Blaise Pascal (1623 ; 1662).

3. *Dessine trois droites concourantes* a, c *et* e *et appelle* A *leur point commun.*

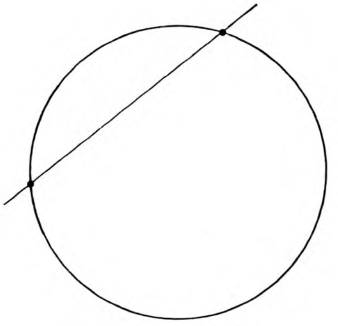
Marque un point B *qui n'est sur aucune des droites* a, c *et* e.

Dessine trois droites passant par B *que tu appelleras* b, d *et* f *de façon que*
les droites a *et* b *se coupent en un point que tu appelleras* M,
les droites b *et* c *se coupent en un point que tu appelleras* N,
les droites c *et* d *se coupent en un point que tu appelleras* P,
les droites d *et* e *se coupent en un point que tu appelleras* Q,
les droites e *et* f *se coupent en un point que tu appelleras* R,
les droites f *et* a *se coupent en un point que tu appelleras* S.

Trace les droites MQ, NR *et* PS. *Qu'observes-tu ?*

4. *Trace quatre points distincts. En les joignant deux à deux, combien obtiens-tu de droites ? Tu pourras envisager trois cas.*

5. *Observe la figure ci-contre. On a dessiné un cercle et on a marqué deux points sur ce cercle. Puis on a tracé la droite qui passe par ces deux points. La droite ainsi tracée détermine deux régions dans le cercle.*



Dessine un cercle et marque trois points sur ce cercle. Trace toutes les droites qui passent par deux de ces trois points. Compte les régions déterminées dans le cercle par ces droites.

Recommence avec quatre points.

Recommence avec cinq points ; marque les cinq points sur le cercle de façon que parmi les droites que tu traces, il n'y ait jamais trois droites concourantes à l'intérieur du cercle.

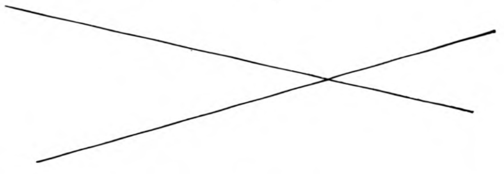
Penses-tu pouvoir deviner le nombre des régions pour six points ?

Fais la figure avec six points ; marque les six points sur le cercle de façon que parmi les droites que tu traces, il n'y ait jamais trois droites concourantes à l'intérieur du cercle. Compte les régions.

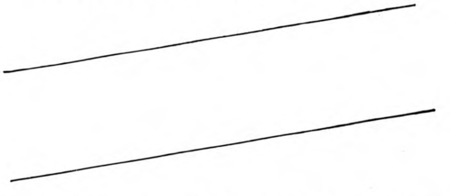
Le nombre de ces régions est-il le nombre que tu avais prévu ?

6. **1.** Quand tu traces deux droites distinctes, ces droites déterminent des régions dans le plan. On doit envisager deux cas de figure.

Les droites sont sécantes.



Les droites sont parallèles.



Dans chacun de ces deux cas de figure, compte les régions déterminées dans le plan par les deux droites.

2. *Trace trois droites distinctes. Dans chacun des cas de figure, compte les régions déterminées dans le plan par ces droites.*

3. *Recommence avec quatre droites distinctes.*

7. Soit A, B et C trois points distincts et d une droite du plan mathématique. Soit δ une direction qui ne contient pas d ; appelons f la projection de direction δ du plan sur la droite d.

1. ***Est-il possible de choisir la direction*** δ ***pour que*** A ***et*** B ***aient la même image par*** f***, c'est-à-dire pour que*** $f(A) = f(B)$ ***?***

2. ***Est-il possible de choisir la direction*** δ ***pour que*** $f(A) = f(B) = f(C)$ ***?***

8. On considère une direction δ et deux droites distinctes a et b qui n'appartiennent pas à δ. On désigne par f la projection de direction δ du plan sur la droite a et par g la projection de direction δ du plan sur la droite b.

Quel est l'ensemble des points M ***du plan tels que*** $f(M) = g(M)$ ***? Tu pourras envisager deux cas.***

9. Soit a, b, c, d, e et f six droites. Appelons H l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$. Dans l'ensemble H, on considère les relations «... est parallèle à...» et «... est perpendiculaire à...». Nous avons commencé à remplir la table de chacune de ces relations.

Le 1 de la ligne b et de la colonne c indique que b est parallèle à c ; le 0 de la ligne f et de la colonne a indique que f est sécante à c.

	a	b	c	d	e	f
a						
b			1			
c						
d						
e						
f	0					

«... est parallèle à...»

Le 1 de la ligne a et de la colonne b indique que a est perpendiculaire à b ; le 0 de la ligne f et de la colonne d indique que f n'est pas perpendiculaire à d.

	a	b	c	d	e	f
a		1				
b						
c						
d			1		1	
e						
f				0		

«... est perpendiculaire à...»

Recopie ces tables et complète-les. Fais une figure illustrant cette situation.

10. *Dessine quatre points* A, B, C *et* D *de façon que les droites* AB *et* BC *soient perpendiculaires ainsi que les droites* AD *et* DC.

Les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

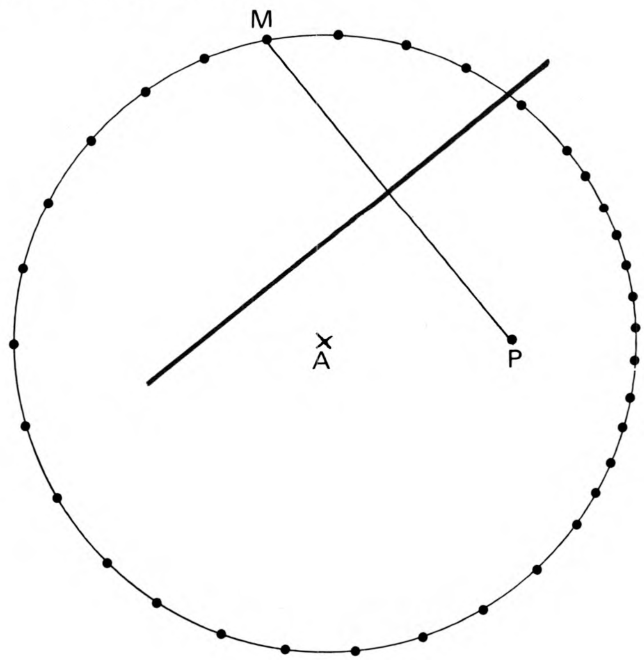
Où est situé le centre de ce cercle ? Trace ce cercle.

11.

Reproduis le dessin ci-contre.

On a tracé un cercle de centre A ; on a marqué un point P à l'intérieur du cercle, et des points sur ce cercle. On a appelé M un des points marqués sur le cercle et on a tracé en bleu la médiatrice du segment MP.

Sur ton dessin, trace de même, en couleur, la médiatrice de chacun des segments dont l'une des extrémités est le point P *et l'autre extrémité un point marqué sur le cercle.*



12. *Dessine un cercle et marque quatre points* A, B, C *et* M *sur ce cercle.*

On appelle A' le projeté orthogonal de M sur la droite BC,
B' le projeté orthogonal de M sur la droite CA,
et C' le projeté orthogonal de M sur la droite AB.

Marque les points A', B' *et* C' *sur ton dessin. Que constates-tu pour ces trois points ?*

13. 1. *Dessine trois points non alignés* A, B *et* C.

On appelle A' le projeté orthogonal de A sur la droite BC,
B' le projeté orthogonal de B sur la droite AC,
et C' le projeté orthogonal de C sur la droite AB.
Les droites AA', BB' et CC' sont appelés les hauteurs du triangle ABC.

Trace ces trois droites sur ton dessin. Que constates-tu ?

2. Soit a la droite parallèle à BC qui passe par A,
b la droite parallèle à AC qui passe par B,
et c la droite parallèle à AB qui passe par C.

Trace les droites a, b *et* c *sur ton dessin.*

Les droites b et c se coupent en un point que tu appelleras R ;
les droites c et a se coupent en un point que tu appelleras S ;
les droites a et b se coupent en un point que tu appelleras T.

Marque les points R, S *et* T *sur ton dessin.*

Vérifie que A *est le milieu du segment* ST.

Que peux-tu dire des directions des droites AA' *et* ST *?*

La droite AA' est donc la médiatrice du segment ST.
Tu vérifierais de même que la droite BB' est la médiatrice du segment TR et que la droite CC' est la médiatrice du segment RS.
Les droites AA', BB' et CC' sont donc les trois médiatrices d'un triangle : le triangle RST.

Relis [DP2 ; *paragraphe* 2.1]. *Ce que tu as constaté à la question* 1. *est-il surprenant ?*

14. Appelons E l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et F l'ensemble $\{7, 9\}$.
Voici la table d'une application de l'ensemble E vers l'ensemble F.

E	1	2	3
F	7	7	9

1. Tu vas chercher toutes les applications de E vers F.
Pour chaque application tu peux soit faire une table, soit faire un schéma avec des flèches.

Combien en trouves-tu ?

2. *Recommence le même travail pour les applications de* F *vers* E. *Combien en trouves-tu ?*

15. Soit E l'ensemble des naturels inférieurs ou égaux à 10.
Soit f l'application de E dans E qui à tout élément n de E fait correspondre le reste de la division de n par 6.

Fais une table, ou un schéma avec des flèches, de cette application.

16. Soit A l'ensemble $\{13, 22, 39\}$ et B l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 5\}$.
Définissons les deux applications f et g :

$f : A \longrightarrow B$
$y \longmapsto$ chiffre des dizaines de y

$g : A \longrightarrow B$
$y \longmapsto$ reste de la division de y par 4

Fais une table de chacune des applications f *et* g. *Que constates-tu ? Que peux-tu dire des applications* f *et* g *?*

17. Notons E l'ensemble $\{1, 2, 4, 8, 5, 16\}$. Soit a un élément de E : si a est pair, on lui associe $a : 2$; si a est impair, on lui associe $3a + 1$.

Vérifie qu'on a ainsi défini une application de E *vers* E. *Fais une table de cette application. Cette application est-elle bijective ?*

18. Soit c l'application ainsi définie :

$$c : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\;. \\ x \longmapsto x^2$$

1. *Calcule* c(0), c(–3), c(–11), c(–7), c(–4), c(12), c(1) *et* c(1 000).

2. *Y a-t-il des entiers relatifs qui n'ont pas d'antécédent pour* c *?*
Y a-t-il des entiers relatifs qui ont plusieurs antécédents pour c *?*
Y a-t-il des entiers relatifs qui ont un antécédent et un seul pour c *?*
L'application c *est-elle une bijection ?*

19. Soit d et u les applications ainsi définies :

$$d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad ; \quad u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\Delta \longmapsto 2 \times \Delta \qquad \square \longmapsto \square + 4$$

Les applications d *et* u *sont-elles des bijections ? Justifie tes réponses.*

20. Appelons A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ et B l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

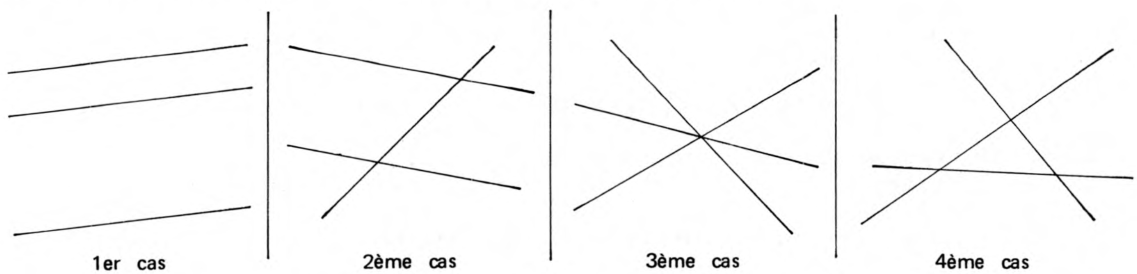
1. On désigne par s l'application suivante :

$$A \longrightarrow B \quad . \\ z \longmapsto z - 2$$

Fais une table de l'application s. *L'application* s *est-elle une bijection ?*

2. Soit x un élément de A. Si x est inférieur ou égal à 2, on lui associe $x - 1$; si x est supérieur à 2, on lui associe $x - 4$.
On définit ainsi une application t de A vers B.
Fais une table de l'application t. *L'application* t *est-elle une bijection ?*

21. Lorsqu'on trace trois droites, on peut avoir les cas de figure suivants.



Pour chacun de ces cas de figure, compte les régions déterminées dans le plan par les trois droites.

Tu vois que le nombre maximum de régions que tu peux obtenir avec trois droites est 7 ; tu trouves ces sept régions dans le quatrième cas de figure.

De même tu pourrais vérifier que le nombre maximum de régions que tu peux obtenir avec deux droites est 4.

Refais une figure avec trois droites dans le cas où l'on obtient 7 régions.

Regarde ce qui se passe quand tu traces une quatrième droite. Quel est le nombre maximun de régions qu'on peut obtenir avec quatre droites ?

Quel est le nombre maximum de régions qu'on peut obtenir avec cinq droites ?

Essaye de trouver une méthode qui te permette de trouver le nombre maximum de régions qu'on peut obtenir avec dix droites.

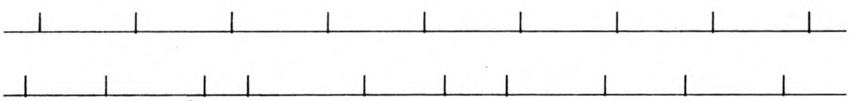
D — entiers et décimaux

D1 Echelles et nombres

I — ECHELLES.

1.1 Echelles régulières.

Nous avons dessiné, ci-dessous, deux droites matérielles. Sur chacune d'elles, nous avons placé des points.



On peut imaginer qu'on peut prolonger chaque trait à gauche et à droite et que l'on peut rajouter des points de chaque côté.

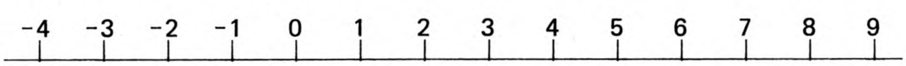
On dit qu'on a dessiné deux échelles, que la première de ces échelles est REGULIERE et que l'autre ne l'est pas.

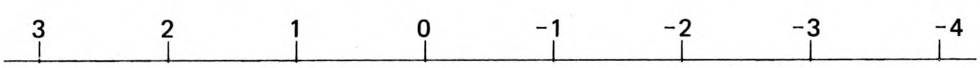
Nous appellerons
- BARREAUX les points marqués sur ces échelles,
- ECHELONS les segments matériels compris entre deux barreaux successifs.

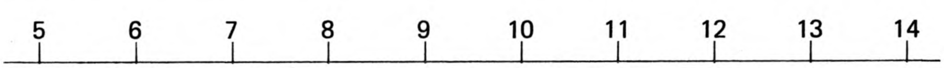
Dans une échelle régulière, tous les échelons sont superposables ; ils ont la même longueur.

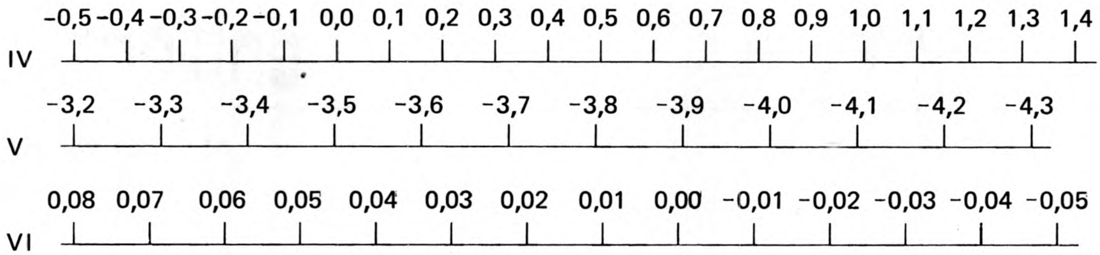
1.2 Echelles régulières graduées.

Voici des échelles régulières.

I


II


III




On dit que les échelles I, II et III sont graduées par $\mathbb{Z}$.
Tu sais que $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.

On dit que les échelles IV et V sont graduées par l'ensemble des nombres décimaux qui peuvent s'écrire avec un seul chiffre après la virgule. Nous noterons cet ensemble $\mathbb{D}_1$.

On dit que l'échelle VI est graduée par l'ensemble des nombres décimaux qui peuvent s'écrire avec deux chiffres après la virgule. Nous noterons cet ensemble $\mathbb{D}_2$.

On définit de façon analogue $\mathbb{D}_3$, $\mathbb{D}_4$,...

Voici des exemples de décimaux qui sont des éléments de $\mathbb{D}_1$ et de décimaux qui ne sont pas des éléments de $\mathbb{D}_1$.

$0{,}1 \in \mathbb{D}_1$; $23{,}4 \in \mathbb{D}_1$; $33 \in \mathbb{D}_1$; (en effet 33 peut s'écrire 33,0) ; $-4{,}8 \in \mathbb{D}_1$; $44{,}73 \notin \mathbb{D}_1$; $4{,}05 \notin \mathbb{D}_1$; $1\,372{,}1 \in \mathbb{D}_1$; $0 \in \mathbb{D}_1$; $23{,}40 \in \mathbb{D}_1$ (en effet 23,40 peut s'écrire 23,4).

Exercices.

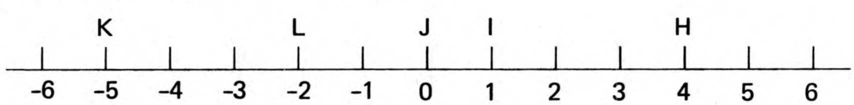
Indique, parmi les nombres suivants, ceux qui sont éléments de $\mathbb{D}_1$.
7,8 ; 0,13 ; 81,90 ; -43 ; 102,0 ; -81,304 ; -7,10 ; 8,91 ; 0,07 ; 13 245.

Indique, parmi les nombres suivants, ceux qui sont éléments de $\mathbb{D}_2$.
0,01 ; 40,3 ; 75,321 ; -42,300 ; -8,7 ; -8,930 7 .

Donne un élément de $\mathbb{D}_5$ *qui ne soit pas dans* $\mathbb{D}_4$.

1.3 Abscisse d'un barreau.

Voici une échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$.

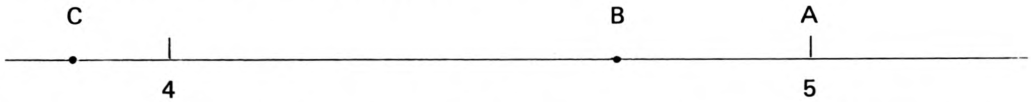


Tu vois qu'au barreau H est associé le nombre 4. On dit que 4 est l'ABSCISSE du barreau H.

Quelles sont les abscisses des barreaux I, J, K *et* L *?*

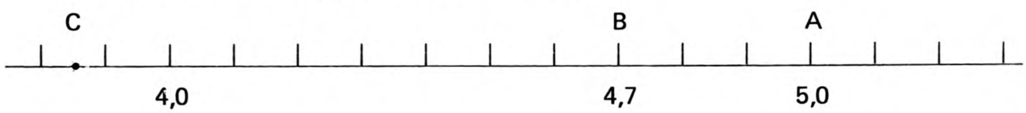
1.4 Des échelles de plus en plus fines.

Voici une échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$.



Sur la droite matérielle qui porte cette échelle, nous avons marqué 3 points A, B et C. Le point A est un barreau : son abscisse est 5. Par contre, les points B et C ne sont pas des barreaux.

Reproduisons le dessin et ajoutons des barreaux.



Les anciens barreaux et les nouveaux forment une échelle régulière telle que entre deux anciens barreaux, il y ait dix nouveaux échelons.

Cette nouvelle échelle est graduée par $\mathbb{D}_1$.

Le point A est évidemment un barreau de cette nouvelle échelle : son abscisse est 5,0. Le point B est le barreau d'abscisse 4,7. Par contre, le point C n'est pas non plus un barreau de cette nouvelle échelle.

On a envie de continuer et de dessiner, de la même façon, une nouvelle échelle graduée par $\mathbb{D}_2$; c'est ce que nous avons fait.

Le point C semble être situé entre les barreaux d'abscisses 3,85 et 3,86 mais tu vois que la figure est très difficile à lire.

Il serait matériellement impossible de diviser en dix les nouveaux échelons obtenus. On peut cependant imaginer une échelle plus fine graduée par $\mathbb{D}_3$, ou $\mathbb{D}_4$, ou ..... mais il est bien entendu impossible de dessiner de telles échelles.

On peut enfin se demander, si en utilisant tous les décimaux, on peut donner une abscisse à tout point d'une droite matérielle. Nous examinerons ce problème plus tard.

II – UN PEU DE REVISION : L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}$.

2.1 L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, contient
- les entiers naturels, donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; les entiers naturels non nuls sont souvent appelés entiers positifs ;
- les entiers négatifs.

Dans ta classe de 5ème, tu as peut-être utilisé des notations comme

2^+, $(+2)$, $+2$, ou encore d'autres notations.

Nous utiliserons la notation 2, car les entiers positifs sont des entiers naturels.

Pour les entiers négatifs, tu as pu rencontrer les notations suivantes :

3^-, (-3), -3.

Nous utiliserons la notation -3.

2.2 Tu sais déjà qu'on peut ranger les entiers relatifs. Par exemple :

2 est plus grand que 1. On écrit : $2 > 1$, ce qui se lit aussi «2 est supérieur à 1».

-3 est plus petit que -2. On écrit : $-3 < -2$, ce qui se lit aussi «-3 est inférieur à -2».

Lorsqu'on gradue une échelle régulière par $\mathbb{Z}$, l'ordre de $\mathbb{Z}$ correspond à l'ordre des barreaux. Regarde à ce propos les dessins I et II du paragraphe 1.2.

Soit x un entier relatif.

La phrase $x \leqslant 3$ se lit «x est inférieur ou égal à 3» et elle signifie que l'une des deux phrases suivantes est vraie :

x est inférieur à 3 ;

x est égal à 3.

On peut aussi écrire : $3 \geqslant x$.

Exercices.

1. *Range les entiers suivants du plus petit au plus grand.*
   -12 ; 0 ; -15 ; 25 ; 3 ; -5.
2. *Range les entiers suivants du plus grand au plus petit.*
   -152 ; 129 ; 0 ; -151 ; -125 ; 219.

Soit x un entier relatif. Tu constates que

x est positif si $x > 0$; x est négatif si $x < 0$;

tout nombre négatif est inférieur à tout nombre positif.

Nous utiliserons parfois une notation telle que «$-2 \leqslant u \leqslant 4$». Elle est synonyme de «$-2 \leqslant u$ et $u \leqslant 4$».

Exercice.

Donne la liste des entiers relatifs x *tels que* $3 \leqslant x \leqslant 7$.

Donne la liste des entiers relatifs y *tels que* $3 < y < 7$.

III – EXERCICES.

1. *Range les décimaux suivants du plus petit au plus grand.*
   35,47 ; 41,003 7 ; 41,1 ; 40,931 ; 35,471 ; 35,5 .
2. *Range les décimaux suivants du plus grand au plus petit.*
   0,25 ; -3,12 ; 0 ; -4 ; 3,74 ; -2,73 ; 1 ; 0,74 ; -3,119 .

D2 Addition et multiplication dans $\mathbb{D}$

I – DES REVISIONS.

1.1 Exercices.

Calcule	*Calcule*
$3+2$; $3+(-2)$; $-3+2$; $-3+(-2)$; $4+(-4)$; $-5+0$; $1+(-3)$; $-7+2$; $-7+(-3)$; $6+(-5)$; $-11+4$; $13+(-11)$.	3×2 ; $3\times(-2)$; -3×2 ; $-3\times(-2)$; $4\times(-4)$; -5×0 ; $1\times(-3)$; $3\times(-4)$; -3×4 ; $-3\times(-4)$; -1×5 ; $-1\times(-6)$; $2\times(-7)$.

Pour faire ces calculs, tu peux t'aider de la machine à additionner et de la machine à multiplier qui se trouvent sur les feuilles de manipulation 1b et 2b.

1.2 Remarque sur l'utilisation des parenthèses.

Nous avons mis des parenthèses autour des nombres négatifs dans certaines des écritures ci-dessus. En effet, l'habitude fait qu'on n'écrit pas $6+-2$ ou 4×-4 mais $6+(-2)$ ou $4\times(-4)$.

De même, on n'écrit pas $11--7$ mais $11-(-7)$.

On peut dire que la parenthèse joue ici à peu près le même rôle que le *t* dans l'expression *y a-t-il.*

1.3 Eléments neutres.

Soit a un nombre décimal.

Quel est le nombre $a+0$ *? Quel est le nombre* $a\times 1$ *?*

Tu savais déjà que 0 est élément neutre pour l'addition et 1 élément neutre pour la multiplication.

Quel est le nombre -13×0 *? Quel est le nombre* $-13+1$ *?*

1.4 Nombres opposés.

Calcule $5 + (-5)$ *et* $-7 + 7$. *Quel est l'opposé de* 5 *? De* -5 *? De* 7 *? De* -7 *?*

Tu sais que tout nombre décimal a un opposé. Soit d un nombre décimal : l'opposé de d est noté $-d$.

Quel est l'opposé de $-d$ *? Que peux-tu dire de* $-(-d)$ *?*

Recopie et complète le tableau suivant.

d	2	-5,1				15
-d			17	0	-11	

Arthur et Zoé se disputent : Arthur affirme que $-a$ est un nombre négatif, Zoé soutient que $-a$ n'est pas forcément négatif.

Qui a raison ? Pourquoi ?

1.5 Signe d'un produit.

Nous avons dessiné ci-contre une table de multiplication. Nous avons placé les nombres $-4 \times (-5)$; 4×3 ; -3×4 et $2 \times (-5)$.

Recopie et complète cette table.

					5					
		-12			4					
					3				12	
					2					
					1					
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
					-1					
					-2					
					-3					
					-4					
	20				-5		-10			

Une manière de parler.

On a l'habitude de dire que les nombres positifs ont le signe plus et que les nombres négatifs ont le signe moins.

Ainsi, on dit que le signe de 8 est plus et le signe de -8 est moins.

On n'attribue pas de signe à zéro.

Quel est le signe de $-(-7)$; $4 + (-5)$; $6 + (-6) + 7$ *?*

Soit a un nombre décimal.

Peux-tu dire quelque chose du signe de $-a$ *?*

Quel est le signe du produit de deux nombres relatifs non nuls quand ils sont de même signe ? Quand ils ne sont pas de même signe ?

Quel est le signe de chacun des deux produits suivants

$-1\,224 \times 1\,515 \times (-1\,789) \times 2\,000 \times (-1\,978)$,

$1\,715 \times (-753) \times 800 \times (-500) \times 1\,936$ *?*

1.6 Encore des exercices.

Calcule les nombres suivants

$-15+20$; $-12+(-27)$; $-32+29$; $25+(-26)$; $-3{,}2+2{,}9$; $0{,}25+(-0{,}26)$; $-1{,}2+(-0{,}27)$; $10+(-8)+(-16)$; $5+(-12)+(-5)$; $1{,}7+(-3{,}8)+(-0{,}7)$; $3+(-8)+(-18)+17$; $-34+17+(-66)+83$; $0{,}01+0{,}001$; $125+0{,}008$; $12{,}7+3{,}485+0{,}3$; $-7+(-3{,}4)$; $-2{,}5+1{,}5$; $-6{,}4+13{,}4$; $-11{,}4+(-0{,}6)$; $7{,}2+3{,}7+(-7{,}2)$; $-2{,}55+(-1{,}53)+12{,}3+3{,}55$.

Calcule mentalement

$-39\times 2\times(-5)$; $-5\times(-18)\times(-2)$; $3\times(-1)\times 9$; $-3\times(-4)\times(-1)\times 0$; $158\times(-4)\times 25$; $5\times(-3)\times 7\times(-5)\times 2$.

Calcule

$0{,}2\times 0{,}03\times 3{,}4$; $11{,}2\times 0{,}07\times 6$; $-0{,}5\times 2\times(-0{,}7)$; $-9{,}1\times(-3)\times(-4{,}2)$; $5\times 0{,}02\times(-18{,}4)$.

Calcule

4×25 ; 8×125 ; 16×625 .

Utilise ces résultats pour calculer mentalement

$0{,}04\times 25$; $8\times 0{,}125$; $1{,}6\times(-0{,}625)$;
$0{,}04\times 2{,}5$; $-0{,}08\times 12{,}5$; $16\times 0{,}625$;
$-0{,}004\times(-2{,}5)$; $0{,}08\times 0{,}125$; $0{,}16\times 6{,}25$.

II – PROPRIETES DE L'ADDITION ET DE LA MULTIPLICATION.

2.1 Résumé de propriétés déjà connues.

L'addition des décimaux est une opération associative.

Le nombre 0 est élément neutre pour l'addition.

Tout décimal a un opposé.

On résume ces trois propriétés en disant que

$(\mathbb{D}, +)$ est un groupe.

Comme l'addition est aussi commutative, on dit que ce groupe est commutatif.

La multiplication des décimaux est une opération associative.

Le nombre 1 est élément neutre pour la multiplication.

Pour le moment, nous ne cherchons pas à savoir si $(\mathbb{D}, \times)$ est un groupe.

Nous étudierons cette question plus tard.

La multiplication est aussi commutative.

La multiplication des décimaux est distributive sur l'addition.

2.2 Opposé d'une somme.

Recopie et complète le tableau suivant.

nombre a	3,2	-2	-5,41	-2
nombre b	5,3	7	0	-12
somme de a et de b				
opposé de la somme de a et de b				
opposé de a				
opposé de b				
somme des opposés de a et de b				

Tu vois que pour les nombres choisis, l'opposé de leur somme est égale à la somme de leurs opposés.

Autrement dit : si a et b sont des nombres choisis ci-dessus,

$$-(a+b) = -a + (-b)\ .$$

En utilisant les propriétés du groupe $(\mathbb{D}, +)$, on pourrait démontrer que cette propriété est générale, c'est-à-dire que si u et v sont deux nombres décimaux

$$-(u+v) = -u + (-v)\ .$$

Exercices.

1. D'après ce que nous venons de voir, l'opposé de $7+(-3)$ est $-7+3$.

   Ecris de même l'opposé de chacun des nombres suivants
   $-10+5$; $-11+(-7)$; $12+18$.

2. Soit x et y deux nombres décimaux.

   Quel est l'opposé de chacun des nombres suivants ?
   $x+y$; $-x+y$; $x+(-y)$; $-x+(-y)$.

3. On pourrait démontrer une propriété analogue pour une somme de plus de deux nombres. Par exemple, l'opposé de $-3+5+(-7)+(-11)$ est $3+(-5)+7+11$.

   Ecris de même l'opposé de $2+(-3)+6$.

2.3 Une propriété de la multiplication.

Compare les nombres
4×9 *et* $4 \times (-9)$; -5×7 *et* 5×7 ; $-3 \times (-8)$ *et* -3×8.

Soit a et b deux décimaux. Ce que nous venons de faire conduit à penser que $a \times b$ et $a \times (-b)$ sont deux nombres opposés.

Pour nous en assurer, cherchons si la somme de ces deux nombres est zéro.

Justifie les égalités suivantes.

$$(a \times b) + (a \times (-b)) = a \times (b + (-b)),$$
$$a \times (b + (-b)) = a \times 0,$$
$$a \times 0 = 0.$$

Les deux nombres $a \times b$ et $a \times (-b)$ ont pour somme zéro. Ils sont donc opposés.

Soit a et b deux nombres décimaux.

Peut-on dire que $b \times a$ *et* $b \times (-a)$ *sont opposés ?*

Puisque la multiplication est commutative, les nombres $a \times b$ et $-a \times b$ sont opposés. L'opposé de $a \times b$ peut évidemment se noter $-(a \times b)$.

Nous avons montré que
si a et b sont des nombres décimaux,

$$a \times (-b), \quad -a \times b \quad \text{et} \quad -(a \times b)$$

sont trois écritures d'un même nombre ; ce nombre est l'opposé de $a \times b$.

Tu sais que $a \times b$ se note souvent ab. On peut donc noter son opposé $-ab$.

D 3 Soustraction dans $\mathbb{D}$

I — SURLIGNES.

1.1 Voici une échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$.

Considérons le couple de barreaux (A, B). L'abscisse de A est 1 et celle de B est 4. Si on met un pion en A, pour l'amener en B, il faut le déplacer de *3* échelons vers la *droite.* Cela illustre le fait que $1 + 3 = 4$.

Au couple (A, B), nous avons, par ce procédé, associé le nombre 3.

Pour indiquer que ce nombre est associé à (A, B), nous le noterons $\overline{AB}$. Cette notation se lit «AB surligné». Ainsi $\overline{AB} = 3$.

Le nombre $\overline{AB}$ vérifie l'égalité suivante :

abscisse de A + $\overline{AB}$ = abscisse de B.

Faisons le même travail pour le couple de barreaux (C, D). L'abscisse de C est -5 et celle de D est -3. Si on met un pion en C, pour l'amener en D, on doit le déplacer de *2* échelons vers la *droite.* Cela illustre le fait que $-5 + 2 = -3$.

Au couple (C, D), nous avons associé le nombre 2. Nous écrirons :

$\overline{CD} = 2$ et abscisse de C + $\overline{CD}$ = abscisse de D.

Fais le même travail pour les couples de barreaux (E, K), (F, E) *et* (G, H).

1.2 Considérons maintenant le couple (E, A). L'abscisse de E est 3 et celle de A est 1. Si on met un pion en E, pour l'amener en A, il faut le déplacer de *2* échelons vers la *gauche.* Cela illustre le fait que $3 + (-2) = 1$.

Au couple (E, A), nous avons associé le nombre -2. Nous écrirons :

$\overline{EA} = -2$ et abscisse de E + $\overline{EA}$ = abscisse de A.

Faisons le même travail pour le couple de barreaux (B, H). L'abscisse de B est 4 et celle de H est -2. Si on met un pion en B, pour l'amener en H, il faut le déplacer de *6* échelons vers la *gauche.* Cela illustre le fait que $4 + (-6) = -2$.

Au couple (B, H), nous avons associé le nombre -6. Nous écrirons :

$\overline{BH} = -6$ et abscisse de B + $\overline{BH}$ = abscisse de H.

Fais le même travail pour les couples de barreaux (K, B) ; (B, K) ; (A, D) *et* (D, G).

II – DIFFERENCE DE DEUX NOMBRES DECIMAUX.

2.1 Réflexion sur les exercices précédents.

Nous avons examiné quelques couples de barreaux d'une échelle et à chacun de ces couples, nous avons associé un nombre. Ainsi, si (M, N) est un des couples examinés, nous avons noté $\overline{MN}$ le nombre associé à (M, N), et

$$\text{abscisse de } M + \overline{MN} = \text{abscisse de } N.$$

On peut penser qu'il est possible de faire de même pour n'importe quel couple de barreaux de cette échelle ou de n'importe quelle échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}_1$ ou $\mathbb{D}_2$.

Plus généralement, on peut se poser la question suivante.

Soit a et b deux nombres décimaux. Existe-t-il un nombre décimal x tel que $b + x = a$?

Comme tu as déjà fait beaucoup d'opérations dans $\mathbb{D}$, tu penses certainement que la réponse est oui. Pour en être certains, nous allons faire une démonstration.

2.2 Soit a et b des décimaux.

Supposons qu'il existe un décimal x tel que $b + x = a$. Alors

$$-b + (b + x) = -b + a .$$

Justifie les égalités suivantes.

$$(-b + b) + x = -b + a \;;$$
$$0 + x = -b + a \;;$$
$$x = -b + a \;;$$
$$x = a + (-b) .$$

S'il existe un nombre x tel que

$$b + x = a ,$$

alors ce nombre ne peut êrte que $a + (-b)$.

Vérifie que b *et* $a + (-b)$ *ont bien pour somme* a.

Exemple : $b = -2$; $a = 3{,}7$.

Supposons qu'il existe un décimal x tel que $-2 + x = 3{,}7$. Alors

$$2 + (-2 + x) = 2 + 3{,}7 .$$

Justifie les égalités suivantes.

$$(2 + (-2)) + x = 2 + 3{,}7 \;;$$
$$0 + x = 2 + 3{,}7 \;;$$
$$x = 2 + 3{,}7 \;;$$
$$x = 5{,}7 .$$

S'il existe un nombre x tel que

$$-2 + x = 3{,}7 ,$$

alors ce nombre ne peut être que 5,7.

Vérifie que -2 *et* 5,7 *ont bien pour somme* 3,7.

Nous venons de démontrer la propriété suivante.

Si a et b sont des nombres décimaux, il existe un nombre décimal x et un seul tel que $b + x = a$. Ce nombre est $a + (-b)$.

Le nombre x tel que $b + x = a$ est appelé DIFFERENCE de a et b et on le note $a - b$.

Ainsi $a - b = a + (-b)$.

Exemples.

Le nombre $-3 - (-2)$ est la différence des nombres -3 et -2. C'est donc la somme de -3 et de l'opposé de -2, et $-3 - (-2) = -3 + 2$.

Le nombre $-2-1$ est la différence des nombres -2 et 1. C'est donc la somme de -2 et de l'opposé de 1 et

$$-2-1=-2+(-1)\ .$$

2.3 Retour sur les surlignés.

Soit (X, Y) un couple de barreaux d'une échelle régulière graduée. Nous savons maintenant qu'il est possible de lui associer un nombre unique que nous noterons $\overline{XY}$ tel que
$$\overline{XY} = \text{abscisse de } Y - \text{abscisse de } X.$$

Exercice.

Reprends le dessin du paragraphe 1.1 *et calcule :* $\overline{HE}$; $\overline{CK}$; $\overline{AG}$; $\overline{FK}$; $\overline{GF}$; $\overline{FG}$; $\overline{AF}$; $\overline{DC}$.

2.4 Des simplifications d'écritures.

Ce que nous avons écrit au paragraphe 2.2 permet de simplifier des écritures. Ainsi : $3{,}2+(-5{,}3)+(-2)-(-7{,}4)=3{,}2-5{,}3-2+7{,}4$.

En effet, par exemple, $3{,}2+(-5{,}3)=3{,}2-5{,}3$.

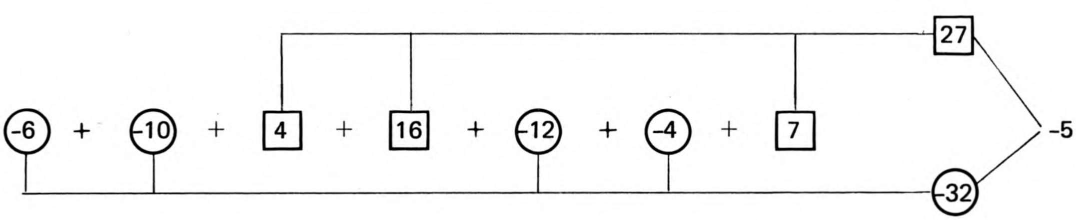
Exercice.

Calculons le nombre $-6-10+4+16-12-4+7$.

On peut d'abord remarquer que ce nombre est une somme de nombres relatifs puisqu'on peut l'écrire $-6+(-10)+4+16+(-12)+(-4)+7$.

On peut alors utiliser les propriétés de l'addition, commutativité et associativité. Voici des schémas qui indiquent trois façons de procéder.

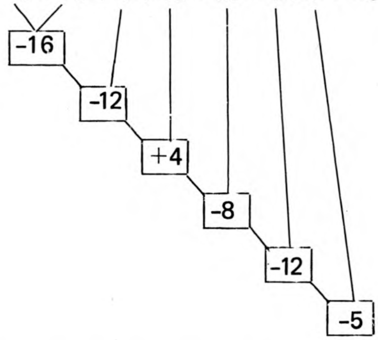
1. Regroupements des nombres positifs et des nombre négatifs.



2. Utilisation des particularités.

$$-6+-10+4+16-12+-4+7=-12+7=-5\ .$$

3. Pas à pas. $-6 - 10 + 4 + 16 - 12 - 4 + 7 = -5$.



Calcule de la manière qui te semble la plus commode

$8 - 5 - 7 + 1 - 9 + 12 - 3$; $-0{,}3 + 2{,}6 - 0{,}7 + 0{,}4 + 15{,}3$;

$13{,}697 - 21 - 5{,}6 + 12 - 2{,}697 - 0{,}4$; $-5{,}64 + 2{,}13 - 12{,}36 + 0{,}87$.

III — EXERCICES.

3.1 L'opposé du nombre $5 - 7 - 11 + 13 - 19$ est le nombre $-5 + 7 + 11 - 13 + 19$.

Pourquoi ? Ecris de même les opposés des nombres

$-7 + 3 - 5$; $-14 + 3 + 2$; $8 - 1 + 2 - 3$; $5 + 3 - 6 - 5 - 7 + 1$.

3.2 Soit u, v et w des décimaux.

Quel est l'opposé de chacun des nombres suivants ?

$u + v + w$; $u - v + w$; $u + v - w$; $-u - v + w$.

3.3 Soit x et y deux nombres décimaux. Cherchons une écriture plus simple du décimal

$$x - 5 - (y - 5) .$$

Quel est l'opposé de $y - 5$ *?*

Justifie les égalités suivantes.

$$x - 5 - (y - 5) = x - 5 + (-y + 5) \ ;$$
$$x - 5 + (-y + 5) = x - 5 + (-y) + 5 \ ;$$
$$x - 5 + (-y) + 5 = x - 5 - y + 5 \ ;$$
$$x - 5 - y + 5 = x - y \ .$$

Soit x, y et z des décimaux.

Quel est l'opposé de $-y - z$ *?*

Donne une écriture plus simple du décimal $x - y - (-y - z)$.

Donne une écriture plus simple des décimaux

$(x + y) - (y + z)$; $x + y + z - (x - y + z) - (x + y - z) - (-x + y + z)$.

D4 Le problème de la division dans $\mathbb{D}$

I – OU ON FAIT DES DIVISIONS.

1.1 Les populations des continents.

Dans le premier tableau de la feuille de manipulation 3a, on a donné en millions d'habitants la population des différents continents en 1920, en 1961 et une prévision pour l'an 2000.

A la première ligne, on a voulu savoir par combien il fallait multiplier la population de l'Asie en 1920 pour obtenir la population prévue en 2000. Pour cela, nous avons posé la division de 3 720 par 960.

Nous avons arrêté cette division lorsque nous avons trouvé la deuxième décimale. On dit que 3,87 est le QUOTIENT APPROCHE à 0,01 PRES PAR DEFAUT de 3 720 par 960.

$3\,7\,2\,\cancel{0}$	$96\cancel{0}$
$8\,4\,0$	3,87
$7\,2\,0$	
$4\,8$	

Cela signifie que, si les prévisions sont bonnes, la population de l'Asie en l'an 2000 sera approximativement la population de 1920 multipliée par 3,87.

Toi et tes camarades, faites le même calcul pour les autres continents en vous partageant le travail.

1.2 Le budget de la nation.

Tu sais peut-être que, lorsque le ministre des finances établit le budget de la nation, il prévoit plusieurs sources pour les recettes, par exemple les impôts sur le revenu, la T.V.A, etc...

Sur le deuxième tableau de la feuille de manipulation 3a, nous avons indiqué, en millards de francs, le montant de certains de ces postes budgétaires pour 1978.

A la dernière ligne, nous avons indiqué le montant total des recettes prévues : 467,3 milliards.

A la première ligne, nous avons calculé ce que représente en pourcentage l'impôt sur les revenus par rapport au total des recettes. Pour cela, nous avons cherché la part qui provient de l'impôt sur le revenu pour 1 franc de recettes. Nous avons alors été conduits à diviser 87,2 par 467,3, ou encore à diviser 872 par 4 673.

Nous avons arrêté cette division lorsque nous avons trouvé la quatrième décimale. On dit que 0,186 6 est le QUOTIENT APPROCHE à 0,000 1 PRES PAR DEFAUT de 87,2 par 467,3.

8 7 2 0	4 673
4 0 4 7 0	0,186 6
3 0 8 6 0	
2 8 2 2 0	
0 1 8 2	

Cela signifie que sur 1 franc de recettes, la part qui provient de l'impôt sur le revenu est 0,186 6 F. L'habitude est de donner cette part pour 100 francs ; elle est ici de 18,66 francs. Donc 18,66 est le pourcentage cherché.

Toi et tes camarades, faites les mêmes calculs pour les autres lignes en vous partageant le travail.

1.3 Réflexions sur les exercices précédents.

Dans les exercices précédents, nous avons fait des divisions de nombres entiers, ou de nombres décimaux, en cherchant des quotients approchés.

L'une de ces divisions, celle de 40 par 10, a donné un quotient entier et un reste nul.

Pour les autres divisions, nous nous sommes arrêtés à la deuxième décimale (1er exercice) ou à la quatrième (2ème exercice) pour des raisons pratiques, alors que le reste de la division n'était pas nul.

Nous ne nous sommes pas posé la question de savoir, si en poursuivant la division assez loin, il était possible de trouver un reste nul. Pour certaines de ces divisions, on pouvait le constater sans effort excessif.

Par exemple, recopie et termine les divisions suivantes.

$$\begin{array}{r|l} 4\,2\,\cancel{0} & 16\cancel{0} \\ \hline 1\,0\,0 & 2{,}62 \\ 4\,0 & \\ 8 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 3\,7\,2\,\cancel{0} & 96\cancel{0} \\ \hline 8\,4\,0 & 3{,}87 \\ 7\,2\,0 & \\ 4\,8 & \end{array}$$

1er exercice :

rapport entre la population de l'an 2000 et celle de 1920 pour l'URSS ;	rapport entre la population de l'an 2000 et celle de 1920 pour l'Asie.

Recopie et complète :

$420 = 160 \times$ .... ; $3\,720 = 960 \times$ ....

Soit a et b deux nombres décimaux. Si la division de a par b tombe juste, c'est qu'il existe un nombre décimal q tel que $a = b \times q$.

Tu pourrais vérifier que $7{,}82 = 2{,}3 \times 3{,}4$.

Est-ce que la division de 7,82 par 2,3 tombe juste ? Et celle de 7,82 par 3,4 ?

On peut maintenant se poser la question : est-ce que toute division de nombres décimaux tombe juste ?

Pour le moment, nous ne savons pas répondre à cette question.

II — DES DIVISIONS QUI NE TOMBENT PAS JUSTE.

2.1 Examinons la division de 4 par 3.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 1{,}3 \\ 1 & \end{array}$$

Est-ce que 1,3 est le quotient de 4 par 3 ?

Le reste partiel de cette division est 1. Pour trouver le chiffre suivant, on va écrire un 0 à droite du reste partiel, c'est-à-dire le multiplier par 10.

Quel chiffre va-t-on trouver au quotient ? Quel sera le nouveau reste partiel ? Le décimal 1,33 est-il le quotient de 4 par 3 ? Que va-t-il se passer si on continue la division ? La division de 4 par 3 tombe-t-elle juste ?

2.2 Examinons la division de 11 par 7.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

Le reste partiel est 4. Pour continuer la division, on doit ensuite diviser 40 par 7. Le reste partiel est 5. Arrêtons-nous la pour le moment.

Sans continuer la division, peux-tu dire quels sont les restes possibles pour ces divisions successives ? Pourquoi ?

Supposons qu'on ait fait 6 divisions partielles et qu'aucune d'elles n'ait donné pour reste 0.

Pourquoi est-on assuré que la division partielle suivante donnera pour reste un nombre déjà trouvé ?

Vérifions.

$$\begin{array}{r|l} 11 & \quad 7 \\ \cline{2-2} 40 & 1{,}571\,428\,5 \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 5 & \end{array}$$

Tu vois donc qu'on ne pourra pas trouver pour reste 0 si loin qu'on poursuive la division. On est assuré que la division de 11 par 7 ne tombe pas juste.

Tu vois aussi que, par exemple, le quotient approché à 0,000 000 01 par défaut de 11 par 7 est 1,571 428 57.

Remarque.

Dans l'expression précédente, l'écriture «0,000 000 01» est bien lourde. Nous la remplacerons, le plus souvent, par l'écriture «10^{-8}».

Remarque bien que 10^{-8} est une écriture du nombre décimal qui peut aussi s'écrire avec un 1 précédé de huit 0 (huit en comptant celui qui est à gauche de la virgule).

Dans l'étude faite ci-dessus de la division de 11 par 7, on a aussi trouvé que, si n est un entier naturel non nul, on peut écrire le quotient approché à 10^{-n} près par défaut de 11 par 7 sans poursuivre la division. Ainsi,

le quotient approché à 10^{-8} près par défaut de 11 par 7 est 1,571 428 57,
le quotient approché à 10^{-9} près par défaut de 11 par 7 est 1,571 428 571,
le quotient approché à 10^{-10} près par défaut de 11 par 7 est 1,571 428 571 4.

Ecris les quotients approchés à 10^{-13} *près par défaut et à* 10^{-17} *près par défaut de* 11 *par* 7.

2.3 Dans l'exemple précédent, on a vu que dans la division de 11 par 7 il n'était possible de trouver que 6 restes partiels différents et différents de 0. En fait, on les a tous trouvés.

En raisonnant de la même façon, on peut affirmer que dans la division de 1 par 37, il n'est pas possible de trouver plus de 36 restes partiels distincts et différents de 0. Mais avant d'effectuer cette division, on ne peut pas savoir si ces 36 restes partiels apparaissent effectivement.

Effectue la division de 1 *par* 37. *Tu arrêteras cette division*
soit si tu trouves comme reste 0,
soit lorsque tu penses avoir trouvé tous les restes partiels possibles.

La division de 1 *par* 37 *tombe-t-elle juste ?*

Remarque.

Les trois exemples précédents nous montrent qu'il existe des couples de nombres décimaux (a, b) tels que la division de a par b ne se termine pas. Pour ces couples, il n'existe pas de nombre décimal q tel que $a = b \times q$.

un peu d'histoire

Emmy NOETHER.

Emmy Noether est née à Erlangen en Allemagne en 1882, c'est-à-dire 1 an après Picasso et 8 ans avant le Général de Gaulle ; il y avait 11 ans que l'Allemagne avait été unifiée sous la direction de la Prusse.

Elle avait à peu près ton âge au moment des premières séances de cinéma des Frères Lumières en 1895.

Son père était professeur de mathématiques à l'université. Elle-même devint une mathématicienne célèbre aux environs de sa quarantième année. En 1900, elle est l'une des deux seules étudiantes de la faculté d'Erlangen, parmi près de 1 000 étudiants ; elle suit les cours sans passer d'examen car ce n'est qu'en 1904 que l'université d'Erlangen autorise les étudiantes à se présenter à des examens.

Par la suite, elle entreprit des recherches mathématiques et en 1916 (donc pendant la guerre de 1914-1918), elle s'installa à Göttingen. Là, un grand mathématicien, Hilbert, essaya longtemps, en vain, de la faire accepter comme professeur à l'université. Ce n'est qu'en 1922 que le conseil de l'université accepte enfin qu'une femme devienne professeur.

Tu as vu que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{D}, +, \times)$ ont des propriétés communes : $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{D}, +)$ sont des groupes commutatifs ; la multiplication de $\mathbb{Z}$ et celle de $\mathbb{D}$ sont associatives, distributives sur l'addition. On dit que ce sont des anneaux.

Etudier les anneaux en général, au lieu d'étudier $(\mathbb{Z}, +, \times)$ puis $(\mathbb{D}, +, \times)$ puis..., c'est faire de l'algèbre abstraite. C'est seulement à la fin du 19ème siècle que l'on a eu l'idée de faire des mathématiques aussi générales et aussi abstraites. Jusqu'en 1933, Emmy Noether peut contribuer de façon très importante au développement de l'algèbre abstraite.

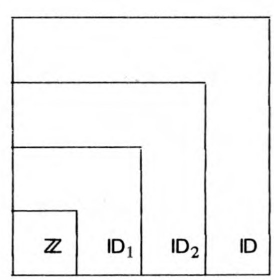
Mais Emmy Noether était juive : comme bien d'autres, en 1933 elle dut quitter l'Allemagne pour échapper aux persécutions du nazisme. Elle se réfugia aux Etats Unis où elle travailla encore deux ans, avant de mourir subitement des suites d'une opération.

exercices et problèmes

1. Voici une liste de nombres décimaux : 4,1 ; 4,01 ; 4,001 ; 4,000 1 ; –5 ; –5,9 ; –5,98.
Pour chacun de ces nombres, indique s'il appartient, ou non, à chacun des ensembles suivants :
$\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}_1$; $\mathbb{D}_2$; $\mathbb{D}_3$; $\mathbb{D}_4$; $\mathbb{D}_7$.

2.

Reproduis la figure ci-contre.
Place, sur ton dessin, les nombres suivants : −1,75 ; −3,333 ; 2,4 ; −7 ; 5,380 ; 18 ; 1,357 924 ; −4,50.



3. *Recopie ce qui suit, en remplaçant les pointillés par l'un des signes* $<$ *ou* $>$, *de façon à obtenir des phrases vraies :* $-5 \cdots -3$; $8 \cdots -6$; $-27 \cdots -28$; $-15 \cdots 13$; $0 \cdots 12$; $-100 \cdots -10$; $-11 \cdots 0$; $5{,}3 \cdots 7{,}8$; $2{,}345\,6 \cdots 2{,}347\,9$; $1{,}834\,26 \cdots 1{,}834\,2$; $-12{,}5 \cdots -15$; $15{,}73 \cdots 0$; $-7{,}81 \cdots -5{,}7$; $0 \cdots -1{,}9$; $75{,}364 \cdots 75{,}367$; $-1{,}235\,9 \cdots -1{,}278$.

4. *Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
$-7 \leqslant -5$; $-12 \leqslant 6$; $-1 \leqslant -1$; $-1 < -1$; $15 \leqslant -17$; $18 \geqslant 19$; $7 \geqslant 7$; $7 > 7$; $-12 \geqslant -13$.

5. *Range les entiers suivants du plus grand au plus petit :* 4 ; –5 ; –23 ; 0 ; –24 ; 11.

6. *Range les décimaux suivants du plus petit au plus grand.*
1,67 ; –2,44 ; 1,6 ; –2,4 ; 1 ; 0 ; –1 ; –2,41.

7. 1. *Peux-tu donner la liste des entiers relatifs* x *tels que* $-3 \leqslant x < 2$ *? Même question pour* $2 \leqslant x \leqslant 3$. *Même question pour* $2 < x < 3$.

2. *Peux-tu donner la liste des nombres décimaux* x *tels que* $-3 \leqslant x < 2$ *? Donne neuf nombres décimaux supérieurs à* 2 *et inférieurs à* 3. *En existe-t-il d'autres ?*

8. *Donne cinq nombres décimaux supérieurs à* 4,72 *et inférieurs à* 4,724 5. *Donne cinq nombres décimaux supérieurs à* 4,722 9 *et inférieurs à* 4,73. *Donne cinq nombres décimaux supérieurs à* –3,2 *et inférieurs à* –3,1.

9. 1. On appelle A l'ensemble des entiers relatifs a tels que $1 \leqslant a \leqslant 5$, et B l'ensemble des entiers relatifs b tels que $-2 \leqslant b < 3$.
Ecris la liste des éléments de chacun des ensembles suivants : A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

2. On appelle A' l'ensemble des nombres décimaux a' tels que $1 \leqslant a' \leqslant 5$, et B' l'ensemble des nombres décimaux b' tels que $-2 \leqslant b' < 3$.
Quels sont les éléments de A' *qui appartiennent à* $\mathbb{Z}$ *? Même question pour l'ensemble* B'.
Donne deux éléments de A', *puis deux éléments de* B' *qui appartiennent à* $\mathbb{D}_1$. *Donne deux éléments de* A', *puis deux éléments de* B' *qui appartiennent à* $\mathbb{D}_2$, *sans appartenir à* $\mathbb{D}_1$.

10. Appelons A l'ensemble des nombres décimaux x tels que $1 < x < 2$, et B l'ensemble des nombres décimaux y tels que $-3{,}1 < y \leqslant -2{,}9$.
Ecris la liste des éléments de l'ensemble $A \cap \mathbb{D}_1$. *Combien les ensembles* $A \cap \mathbb{D}_2$ *et* $A \cap \mathbb{D}_3$ *ont-ils d'éléments ? A quel ensemble est égal l'ensemble* $A \cap \mathbb{Z}$ *?*
Mêmes questions en remplaçant l'ensemble A *par l'ensemble* B.

11. Soit a, b, c, d et e des nombres décimaux tels que $e < a$; $c > d$; $b < d$; $b > a$.
Range ces nombres décimaux du plus petit au plus grand.

12. *Quel est l'ensemble des nombres décimaux* x *tels que* $x > -x$ *?*
Quel est l'ensemble des nombres décimaux x *tels que* $x < -x$ *?*

13. *Calcule* $-12 + (-27)$; $56 + (-19)$; $2 + (-9)$; $-8 + 45$; $-290 + 13$; $-16 + 16$; $0 + (-8{,}15)$; $125 + 1\,203$; $3{,}815 + 56{,}2$; $4{,}5 + (-3{,}7)$; $31{,}2 + (-42{,}3)$; $-1{,}5 + 10$; $-5{,}21 + (-14{,}69)$.

14. *Calcule* $150 + 180 + 20$; $-12 + 5 + (-7)$; $-16 + (-14) + 50$; $19 + (-31) + 12$; $-15 + (-35) + (-150)$; $-2 + (-11) + 15 + (-1)$; $-6 + 3 + 5 + (-4) + 10 + (-5)$.

15. *Calcule* $15{,}5 + 33{,}12 + 4{,}5$; $2{,}9 + (-0{,}6) + (-6{,}3)$; $-7 + (-1{,}1) + 9{,}6 + 3{,}15 + (-5{,}55) + (-9{,}6)$.

16. *Calcule* $3 \times (-6)$; -7×8 ; 10×1 ; $-13 \times (-4)$; $1 \times (-19)$; $-14 \times (-15)$; -9×0 ; $0{,}2 \times 2{,}5$; $-6{,}4 \times (-0{,}5)$; $-1{,}2 \times 1{,}1$; $-0{,}8 \times (-2 \times 1{,}1)$; $-0{,}8 \times (-2{,}5)$; $6{,}25 \times (-0{,}16)$.

17. *Calcule* $25 \times 7 \times (-4)$; $-2 \times (-9) \times 8$; $-11 \times (-14) \times (-10)$; $-1 \times (-1) \times (-3) \times (-3) \times (-100)$; $1{,}8 \times (-2) \times 0{,}01$; $-2{,}5 \times 8 \times (-0{,}5)$; $-0{,}6 \times 0 \times (-10) \times (-3{,}5)$; $0{,}2 \times (-20) \times 0{,}25 \times 5 \times (-0{,}05) \times 4$.

18. *Calcule* $4 - 5$; $-3 - 7$; $35 - 26$; $13 - (-8)$; $-21 - (-37)$; $-42 - (-78)$; $4{,}5 - 3{,}76$; $5{,}9 - 8$; $8{,}7 - (-4{,}3)$; $-0{,}96 - (-1{,}8)$; $-0{,}25 - (-0{,}25)$; $-0{,}8 - (-2{,}5)$.

19. *Calcule* $-2 + 3 - 10$; $4 - 1 - 4$; $5 - 3 + 7 - 6 + 14$; $-5 + 6 + 8 + 6 - 8 + 13$; $-14 + 7 + 9 - 6 - 1$; $11 - 8 - 6 + 10 - 14 - 11$; $-5 + 4 - 8 + 10 + 5 - 10 + 8 - 4$.

20. *Calcule* $-10{,}5 - 4{,}4 + 12{,}8 + 2{,}1 - (-9) + 15{,}7 - 6{,}4 - 15{,}7$; $-9{,}6 + 8{,}4 - 4{,}8 - (-0{,}3)$.

21. *Calcule* $-2 - (3 - 5)$; $-14 - (8 - (-6))$; $3 - (-5 - 10)$; $(17 - 5) + 25$; $7 - (-6 + 11)$; $(4 - 2) - 5$; $(12 - 15 - 7 + 10) + (-23 + 11) - (5 - 10 + 6 - 14) - (-8 - 9 + 11)$.

22. *Calcule* $(-18 + 3 - 8) + (-25 + 12) - (6 - 8 + 9 - 18) - (-7 - 25 + 12)$;
$(0{,}9 - 1{,}3 - 0{,}4 + 0{,}7) + (-2 + 0{,}8) - (0{,}2 - 0{,}7 + 0{,}3 - 1{,}1)$;
$(0{,}3 - 0{,}8 + 1{,}3) - (0{,}6 - 0{,}8) - (1{,}7 - 0{,}5 - 0{,}6) + (0{,}8 + 1{,}7 - 1{,}3)$.

23. Les lettres x, y et z désignent des entiers relatifs.
Calcule $x - y + z$, $x - (y + z)$ *et* $x - y - z$ *si*
1. $x = -1$, $y = -2$ et $z = 2$; 2. $x = -4$, $y = 7$ et $z = 4$; 3. $x = 9$, $y = 0$ et $z = -1$; 4. $x = 9$, $y = -1$ et $z = 0$.

24. *Calcule* $-3 \times (-20 + 7)$; $7 \times (-10 + 12)$; $-4 \times (-2 + 7)$; $(1 - 4) \times (-6)$; $(-5 - 2) \times 11$.

25. *Calcule* $(-3) \times (7 + 3) \times (-8)$; $5 \times (-3 - 7) \times 5$; $(-2 + 3{,}8) \times (-5)$; $5 \times (2{,}4 - 3{,}2)$; $0{,}2 \times (-1{,}7 - 2{,}3)$; $3{,}2 + 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}2$.

26. *Calcule* : $2 \times (4{,}87 + 0{,}13)$; $10 \times (2{,}1 + (4{,}3))$; $4 \times (0{,}25 - 1{,}5)$; $(8 - 4) \times (0{,}25 - 1{,}5)$; $-1{,}789 \times (519 + 481)$; $7{,}3 \times 3{,}227 + 2{,}7 \times 3{,}227$; $2{,}9 \times 1{,}7 - 0{,}9 \times 1{,}7$; $25 \times 2 + 25 \times 10$; $0{,}4 \times 26 - 0{,}4$; $4 \times 2\,359 - 18 + 6 \times (2\,359 + 3)$.

27. Les lettres a, b et c désignent des nombres décimaux.
Calcule $ab + c$ *et* $a(b + c)$ *si*
1. $a = 3$; $b = -1$ et $c = -2$; 2. $a = 0$; $b = -7$ et $c = 5$; 3. $a = -1$; $b = -12$ et $c = 12$; 4. $a = 0{,}5$; $b = -0{,}2$ et $c = 0{,}3$; 5. $a = 4$; $b = -2{,}1$ et $c = -0{,}9$; 6. $a = 1$; $b = 4$; $c = -1$.

28. *Recopie et complète le tableau suivant (les lettres* a, b *et* c *désignent des entiers relatifs).*

a	b	c	a + b	b + 2c	a + b + c	abc
-3	-1	2				
1	0	7				
-5	2	-1				

29. *Recopie et complète le tableau suivant (les lettres* x, y *et* z *désignent des nombres décimaux).*

x	y	z	xy	x + y	y - z	-x - y	-xy
-0,5	2	- 4					
4		0		3,8			
- 4					0		6

30.

+		-18	3	5	
				-7	
	15	0			
2			5		
				-5	
	4				
40					-30

-	13	-10			1
	48				
37			-37		
			35		
		7		48	
3					2

Dans la table de gauche à l'intersection de la ligne du 2 et de la colonne du 3, nous avons écrit 5, parce que $2 + 3 = 5$.

Recopie et complète cette table. Fais le même travail pour la table de droite.

31. *Recopie la table ci-contre.*

Il est possible de le compléter de façon à obtenir le même nombre en effectuant la somme des entiers relatifs de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale.

Fais-le.

-10	3	-4	9	2
				-11
-6		0	-12	
	-1	-8		-7
-2	-9			10

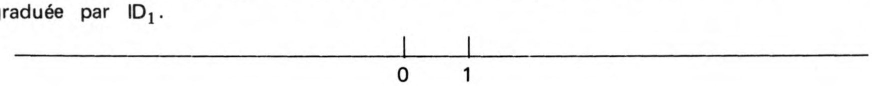
32. *Calcule :* $1 \times 2 - 3 - 4 + 5$; $1 - 2 + 3 + 4 - 5$; $1 \times (-2 + 3 - 4 + 5)$; $-1 + 2 + 3 + 4 - 5$; $-1 \times (2 + 3) + 4 + 5$; $-1 + 2 + 3 - 4 + 5$; $1 \times 2 \times 3 \times (-4 + 5)$; $1 + (2 \times 3) \times (-4 + 5)$; $1 + 2 \times 3 - 4 + 5$; $-1 - 2 + 3 + 4 + 5$; $(1 + 2) \times 3 - 4 + 5$; $1 - 2 + 3 + 4 + 5$; $1 + 2 + 3 + 4 + 5$; $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

33. Soit f l'application ainsi définie :

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$
$$x \longmapsto 4x^2 - 7x + 6$$

Calcule f(0), f(-0,25), f(1), f(-1), f(2) *et* f(11). *L'application* f *est-elle une bijection ?*

34. Sur la droite matérielle dessinée ci-dessous, on a marqué les barreaux d'abscisses 0 et 1 d'une échelle régulière graduée par $\mathbb{D}_1$.



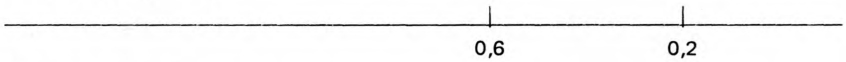
Recopie ce dessin.

Soit A, B, C, D et E les barreaux de cette échelle définis dans le tableau ci-contre.

Place ces barreaux sur ton dessin. Calcule $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ *et* $\overline{ED}$.

barreaux	A	B	C	D	E
abscisses	2	-1,5	4,2	-3	-4,5

35. Sur la droite matérielle dessinée ci-dessous, on a marqué les barreaux d'abscisses 0,2 et 0,6 d'une échelle régulière graduée par $\mathbb{D}_2$.



Recopie ce dessin.

Soit G, H, I, J, K, L, M, N les barreaux de cette échelle définis dans le tableau ci-contre.

Place ces barreaux sur ton dessin.

Calcule $\overline{KL}$, $\overline{NI}$, $\overline{IK}$, $\overline{IH}$, $\overline{GI}$, $\overline{MJ}$, $\overline{GH}$, $\overline{HG}$, $\overline{JG}$ *et* $\overline{HM}$.

barreaux	G	H	I	J	K	L	M	N
abscisses	-0,1	-0,04	0	0,01	-0,38	0,7	1	1,4

36. *Résous dans* $\mathbb{D}$ *les équations en* x *suivantes :* $x + 0,6 = -1,9$; $x + 2,5 = 1,8$; $-6 + x = 3,5$; $x + 1,8 = 2,5$; $x - 0,31 = -0,36$; $x - 3,9 = -0,2$; $1,5 + x = -0,8$; $-x + 75 = -13$; $-12,5 - x = 3,7$.

37. *Effectue la division de* 41 *par* 22. *Tu arrêteras cette division*
soit si tu trouves comme reste 0,
soit lorsque tu penses avoir trouvé tous les restes partiels possibles.
Ecris les quotients approchés à 10^{-1} *près, à* 10^{-2} *près, à* 10^{-3} *près, à* 10^{-5} *près, à* 10^{-14} *près par défaut de* 41 *par* 22.

38. *Effectue la division de* 1 *par* 80. *Tu arrêteras cette division*
soit si tu trouves comme reste 0,
soit lorsque tu penses avoir trouvé tous les restes partiels possibles.
Ecris les quotients approchés à 1 *près, à* 10^{-1} *près, à* 10^{-2} *près, à* 10^{-4} *près, à* 10^{-5} *près, à* 10^{-7} *près par défaut de* 1 *par* 80.

39. *Effectue la division de* 51 *par* 23. *Tu arrêteras cette division*
soit si tu trouves comme reste 0,
soit lorsque tu penses avoir trouvé tous les restes partiels possibles.

40. Soit x, y et z des nombres décimaux.
Donne une écriture plus simples des décimaux suivants.
$(x - 7) - (y - 5)$; $-(x - 1,2) - (y + 1,3)$; $x + y - (-z + 10)$.

41. Soit a, b, c et d des nombres décimaux.
Donne une écriture plus simple des nombres décimaux suivants : $(a + b) - (c + a)$; $a - (b + a)$; $(b - a) - (-c - a)$; $(a + b - c) + (d - c) - (b - c + d)$.

42. Soit a, b, c et d des nombres décimaux.
Donne une écriture plus simple des nombres décimaux suivants.
$-(a + b - c - d) + (-a + b + c - d) - (-a - b + c + d)$; $(-a - b + c + d) - (a - b - c + d) + (a + b - c - d)$; $(a + b + c + d) + (a - b - c - d) - (a + b - c - d) - (a - b + c + d)$.

43. Soit m, n et p des nombres décimaux.
Donne une autre écriture des décimaux suivants : $7(m + 2)$; $(2 + m)n$; $(m - 7) \times 5$; $m(n - 13)$; $6(-m + 3)$; $(3 - m) \times (-n)$.

44. Soit r, s, t et u des nombres décimaux.
Donne une autre écriture des décimaux suivants : $r(s + t + u)$; $(r + 5 + s + t) \times 0,2$; $-8(r - s + 2)$; $(-s + t - u) \times (-r)$.

45. Soit x et y des décimaux.

Donne une écriture plus simple des décimaux suivants : $13x+17x$; $6x-9x$; $-8x-x$; $-1{,}5x+0{,}7x$; $19x-7x-6x$; $0{,}25x-0{,}75x+0{,}5x$.

46. Soit x et y des décimaux.

Donne une écriture plus simple des décimaux suivants : $-5x+3+x+7-3x$; $1{,}7x+2{,}9x-0{,}31-4{,}7x+0{,}15+0{,}16$; $xy-5xy-12xy+9xy$; $5x+2y+23+4x+6y+47$; $-2xy-8+3xy-7$; $12x-17y+2y-6x-3y$.

47. Miles et kilomètres.

Un mile anglais correspond à 1,6 kilomètre.

Recopie et complète le tableau ci-contre.

distance en miles	1		125		4,7	
distance en kilomètres	1,6	35		280		1

Remarque.

Dans cet exercice, nous avons supposé qu'un mile anglais correspond à 1,6 kilomètre, soit 1 600 mètres. Ceci n'est pas la valeur exacte du mile anglais, et nous l'avons choisie pour simplifier l'exercice. Sur ton dictionnaire, tu peux lire une valeur approchée plus précise du mile anglais : 1 609 mètres.

48. 1. Soit t l'application $\begin{array}{l}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto x+4\end{array}$.

Calcule les images de -3 ; 2 ; 0 ; 5. *Penses-tu que deux entiers différents puissent avoir la même image ?*

Nous allons voir si tu as raison.

Supposons que a et b soient des entiers qui aient la même image :

$$a+4=b+4 \;;$$

donc

$$(a+4)+(-4)=(b+4)+(-4)\,.$$

Justifie les égalités suivantes.

$$a+(4+(-4))=b+(4+(-4)) \;;$$
$$a+0=b+0 \;;$$
$$a=b\,.$$

Avais-tu raison ?

Montre que 1 *est un antécédent de* 5. *Le nombre* 5 *peut-il avoir d'autres antécédents ?*

Soit y un nombre entier.

Montre que $y-4$ *est un antécédent de* y. *Le nombre* y *peut-il avoir d'autres antécédents ?*

Nous venons de démontrer qu'un entier relatif, c'est-à-dire un élément du but $\mathbb{Z}$, a un antécédent et un seul. L'application t est donc une bijection.

Remarque.

Tu viens de voir que pour trouver l'antécédent d'un élément de $\mathbb{Z}$, il suffit de lui soustraire 4. On vient donc de trouver une nouvelle application de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$. Appelons-la u.

$$\begin{array}{rccl} & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \\ t: & \square & \longmapsto & \square+4 \\ & \bigcirc-4 & \longleftarrow\!\!\dashv & \bigcirc \quad : u \end{array}$$

On dit que u est l'application réciproque de t.

2. Soit s l'application $\begin{array}{l}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto -x+2\end{array}$

Montre que s *est une bijection. Quelle est l'application réciproque de* s *?*

49. 1. Soit f l'application ainsi définie :

$$f : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_1$$
$$a \longmapsto a - 3{,}5$$

Calcule f(0,7) , f(−0,2) , f(−1,5) , f(1,7) *et* f(−2,1) .

2. Sur la droite matérielle dessinée ci-dessous, on a marqué les barreaux d'abscisses 0 et 0,1 d'une échelle régulière graduée par $\mathbb{D}_1$.

Recopie ce dessin.

Soit R, S, T, U, V, R′, S′, T′, U′ et V′ les barreaux de cette échelle définis dans le tableau ci-contre.

barreaux	R	S	T	U	V	R′	S′	T′	U′	V′
abscisses	0,7	−0,2	−1,5	1,7	−2,1	f(0,7)	f(−0,2)	f(−1,5)	f(1,7)	f(−2,1)

Place ces barreaux sur ton dessin. Calcule $\overline{RU}$, $\overline{R'U'}$, $\overline{RS}$, $\overline{R'S'}$, $\overline{TU}$, $\overline{T'U'}$, $\overline{TV}$ *et* $\overline{T'V'}$. *Que constates-tu ?*

3. Tu vas démontrer ce que tu as constaté.

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{D}_1$, M et N les barreaux de la droite d d'abscisses x et y, M′ et N′ les barreaux de la droite d d'abscisses f(x) et f(y).

Compare $\overline{MN}$ *et* $\overline{M'N'}$.

◆◆◆

TABLE DES NOMBRES PREMIERS DE 2 A 2 357

2	101	233	383	547	701	877	1 049	1 229	1 429	1 597	1 783	1 993	2 161
3	103	239	389	557	709	881	1 051	1 231	1 433	1 601	1 787	1 997	2 179
5	107	241	397	563	719	883	1 061	1 237	1 439	1 607	1 789	1 999	2 203
7	109	251	401	569	727	887	1 063	1 249	1 447	1 609	1 801	2 003	2 207
11	113	257	409	571	733	907	1 069	1 259	1 451	1 613	1 811	2 011	2 213
13	127	263	419	577	739	911	1 087	1 277	1 453	1 619	1 823	2 017	2 221
17	131	269	421	587	743	919	1 091	1 279	1 459	1 621	1 831	2 027	2 237
19	137	271	431	593	751	929	1 093	1 283	1 471	1 627	1 847	2 029	2 239
23	139	277	433	599	757	937	1 097	1 289	1 481	1 637	1 861	2 039	2 243
29	149	281	439	601	761	941	1 103	1 291	1 483	1 657	1 867	2 053	2 251
31	151	283	443	607	769	947	1 109	1 297	1 487	1 663	1 871	2 063	2 267
37	157	293	449	613	773	953	1 117	1 301	1 489	1 667	1 873	2 069	2 269
41	163	307	457	617	787	967	1 123	1 303	1 493	1 669	1 877	2 081	2 273
43	167	311	461	619	797	971	1 129	1 307	1 499	1 693	1 879	2 083	2 281
47	173	313	463	631	809	977	1 151	1 319	1 511	1 697	1 889	2 087	2 287
53	179	317	467	641	811	983	1 153	1 321	1 523	1 699	1 901	2 089	2 293
59	181	331	479	643	821	991	1 163	1 327	1 531	1 709	1 907	2 099	2 297
61	191	337	487	647	823	997	1 171	1 361	1 543	1 721	1 913	2 111	2 309
67	193	347	491	653	827	1 009	1 181	1 367	1 549	1 723	1 931	2 113	2 311
71	197	349	499	659	829	1 013	1 187	1 373	1 553	1 733	1 933	2 129	2 333
73	199	353	503	661	839	1 019	1 193	1 381	1 559	1 741	1 949	2 131	2 339
79	211	359	509	673	853	1 021	1 201	1 399	1 567	1 747	1 951	2 137	2 341
83	223	367	521	677	857	1 031	1 213	1 409	1 571	1 753	1 973	2 141	2 347
89	227	373	523	683	859	1 033	1 217	1 423	1 579	1 759	1 979	2 143	2 351
97	229	379	541	691	863	1 039	1 223	1 427	1 583	1 777	1 987	2 153	2 357

Il y a 1 229 nombres premiers inférieurs à 10 000 et 9 592 nombres premiers inférieurs à 100 000.

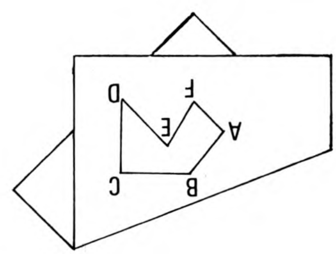
transformations matérielles

TM1 Pliage et médiatrice

I — PLIAGE.

1.1 Où on plie une feuille de calque.

Prends une feuille de calque et la feuille de manipulation 3b. *Reproduis sur le calque le dessin numéro* 1 *de cette feuille de manipulation. Plie le calque autour de la droite comme l'indique la figure.*



Reproduis sur le papier calque la figure que tu vois par transparence.

Déplie : les deux figures sont sur la même face du papier.

On pourrait ainsi transformer n'importe quel point du plan matériel.

Fais-le pour un point M *que tu choisiras toi-même en dehors de la droite d. Appelle* M* *le point obtenu.*

Peux-tu trouver un point qui soit confondu avec son transformé ?

Nous venons d'utiliser un procédé qui associe

à un point du plan matériel, un autre point ;

à une figure du plan matériel (c'est-à-dire à un ensemble de points) une autre figure.

Nous appellerons de tels procédés des TRANSFORMATIONS MATERIELLES.

Celle qui a été utilisée ici est appelée un PLIAGE AUTOUR DE LA DROITE d.

1.2 Conservation des longueurs.

Appelle A*, B*, C*, D*, E* *et* F* *les transformés des points* A, B, C, D, E *et* F.

Vérifie que les segments AB *et* A*B* *ont la même longueur. Tu donneras plusieurs procédés permettant de faire cette vérification.*

Fais la même vérification pour les segments BC *et* B*C*, *les segments* CD *et* C*D*, *etc...*

Soit R et Q deux points quelconques. Appelons R^* et Q^* leurs transformés par le pliage autour de d.

Penses-tu que les segments matériels RQ *et* R^*Q^* *aient la même longueur ?*

On traduit cette propriété, en disant qu'un pliage autour d'une droite d est une ISOMETRIE MATERIELLE (le mot isométrie a été formé à l'aide d'un préfixe grec, *isos,* qui signifie égal, et d'un autre mot grec, *métron,* qui signifie mesure).

1.3 Un point et son transformé.

Appelle H *le point d'intersection de la droite* d *et de la droite* MM^*. *Quel est le transformé du point* H *? Les segments* HM *et* HM^* *ont-ils la même longueur ?*

Vérifie que les droites d *et* MM^* *sont perpendiculaires.*

La droite d est donc la médiatrice du segment matériel MM^*.

C'est pourquoi on appelle aussi SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A LA DROITE d le pliage autour de d.

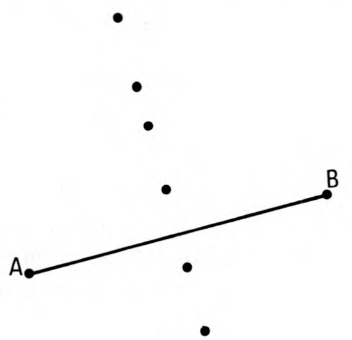
Choisis un point N *sur la droite* d. *Quel est son transformé ? Les segments* NM *et* NM^* *ont-ils même longueur ?*

Tu retrouves ici une propriété que tu as déjà observée dans [DP1, *paragraphe* 3.3, *page* 37].

II – COMPLEMENTS SUR LA MEDIATRICE.

2.1 Rappel.

Dans [DP1, paragraphe 3.2, page 36] nous avons dessiné deux points A et B et une série de points qui étaient à égale distance de A et de B. Nous avons constaté que ces points étaient alignés sur la médiatrice du segment matériel AB.



La figure ci-contre te rappelle cette manipulation.

2.2 Une construction de la médiatrice d'un segment.

Dans [DP2], nous avons admis, le temps d'une démonstration, la propriété suivante : tous les points à égale distance de deux points A et B sont sur la médiatrice du segment AB.

Admettons la à nouveau.

Nous pouvons alors résoudre le problème suivant : étant donné deux points matériels A et B, dessiner la médiatrice du segment AB en n'utilisant que la règle et le compas (donc sans utiliser ni la règle graduée ni l'équerre).

Fais-le. Tu remarqueras d'abord qu'il suffit de trouver deux points de cette médiatrice ; pourquoi ?

Remarque.

Soit A et B deux points matériels. Tu disposes maintenant de trois procédés pour dessiner la médiatrice du segment AB :

le pliage, procédé en général peu commode ;

l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée ;

le procédé que tu viens d'employer et qui utilise le compas.

2.3 Construction de la perpendiculaire à une droite qui passe par un point.

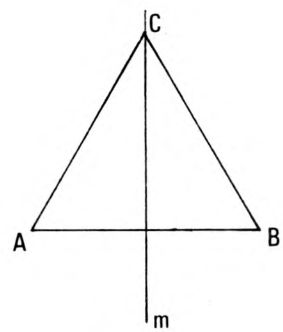
Voici l'énoncé d'un nouveau problème.

Soit d une droite matérielle et O un point de cette droite : tracer la droite qui passe par O et qui est perpendiculaire à d en n'utilisant que la règle et le compas.

Essaie de ramener ce problème au problème étudié au paragraphe précédent.

En est-il de même si le point O *est choisi en dehors de la droite* d *?*

2.4 Triangle isocèle.



Soit A et B deux points matériels, m la médiatrice du segment AB et C un point de m.

Les segments AC et BC ont la même longueur. On dit que le triangle ABC est ISOCELE, de BASE AB.

Dessine un triangle MNP *tels que les trois segments* MN, NP *et* PM *aient la même longueur.*

On dit qu'un tel triangle est EQUILATERAL.

Dessine un triangle qui soit à la fois rectangle et isocèle.

Est-ce qu'un triangle équilatéral peut être rectangle ?

III – RETOUR SUR LES PLIAGES.

3.1 Transformé d'un point.

Dessine une droite d *et un point* A *qui n'appartient pas à* d. *Appelle* A' *le transformé de* A *dans le pliage autour de* d. *Tu sais que* d *est la médiatrice du segment* AA'.

Dessine le point A', *sans plier la feuille, mais en utilisant l'équerre et la règle graduée.*

Recommence le même exercice, toujours sans plier la feuille, mais en utilisant cette fois le compas.

3.2 Transformés de points alignés.

Dessine une droite d. *Choisis deux points* A *et* B *extérieurs à la droite* d, *de façon que la droite* AB *ne soit ni parallèle, ni perpendiculaire à la droite* d.

Dessine les transformés de A *et de* B *dans le pliage autour de* d. *Appelle les* A^* *et* B^*.

Choisis un point M *de la droite* AB *et dessine son transformé* M^* *dans le pliage autour de* d. *Qu'observes-tu ? Et tes camarades ?*

Recommence le même exercice en choisissant A *et* B *de façon que les droites* AB *et* d *soient parallèles.*

Recommence une nouvelle fois en choisissant A *et* B *de façon que les droites* AB *et* d *soient perpendiculaires.*

3.3 Transformée d'une figure.

Prends la feuille de manipulation 5a*, dessin numéro* 1.

Dessine les figures transformées des figures rouges et bleues par le pliage autour de la droite d.

Prends une feuille de calque. Reproduis la figure bleue sur ce calque. Comment dois-tu procéder pour faire coïncider ce dessin avec la transformée de la figure bleue ?

Refais le même travail avec la figure rouge.

Remarque.

Voici une autre façon de dire qu'une transformation matérielle est une isométrie : soit F une figure et F^* sa transformée ; si on reproduit la figure F sur un papier calque, il est possible de faire coïncider ce dessin avec la figure F^*.

Dans le cas d'un pliage, tu viens de voir qu'il peut être nécessaire de retourner le calque.

3.4 Droite de symétrie d'une figure.

Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 5a, nous avons dessiné des lettres majuscules.

Vérifie que la transformée de la lettre A *dans le pliage autour de la droite que nous avons appelée* a *est la lettre* A *elle-même.*

On dit que la droite a est une DROITE DE SYMETRIE pour la lettre A.

Vérifie que les droites b, k, m *et* w *sont des droites de symétrie pour les lettres* B, K, M *et* W.

Vérifie que les droites h_1 *et* h_2 *sont des droites de symétrie pour la lettre* H.

Peux-tu trouver des droites de symétrie pour les autres lettres ?

Exercices.

1. *Dessine un segment. A-t-il des droites de symétrie ?*
2. *Dessine une droite. A-t-elle des droites de symétrie ?*
3. *Dessine un cercle. A-t-il des droites de symétrie ?*
4. *Dessine un triangle isocèle. A-t-il des droites de symétrie ?*
5. *Dessine un triangle équilatéral. A-t-il des droites de symétrie ?*

TM2 Translations matérielles

I — UNE NOUVELLE TRANSFORMATION.

1.1 Observons.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 6a, les points A^*, B^*, C^* et D^* sont les transformés des points A, B, C et D par une transformation appelée TRANSLATION MATERIELLE.

La figure rouge est la transformée de la figure bleue par cette même translation matérielle.

Quelle remarque peux-tu faire pour les droites AA^* *et* DD^* *? Les droites* AD *et* A^*D^* *?*

Même question pour les droites AA^* *et* BB^*, *les droites* AB *et* A^*B^*.
Même question pour les droites AA^* *et* CC^*, *les droites* AC *et* A^*C^*.

Dessine le point M^* *transformé du point* M *par cette transformation. Fais de même pour le point* N.

1.2 Conservation des longueurs.

Vérifie que les segments AB *et* A^*B^* *ont la même longueur. Fais de même pour les segments* MN *et* M^*N^*, *les segments* BN *et* B^*N^*, *etc...*

Prends une feuille de calque. Reproduis la figure bleue sur ce calque. Peux-tu faire coïncider ce dessin avec la figure rouge ? Est-il nécessaire de retourner le calque ?
Penses-tu qu'une translation matérielle soit une isométrie ?

1.3 Transformée d'une figure.

Exercice 1.

Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 6a, le point A^* est le transformé du point A dans une translation matérielle.

Dessine la figure transformée de la figure bleue par cette translation.

Exercice 2.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 6a, la figure numérotée 2 est la transformée de la figure numérotée 1 par une translation matérielle.

Dessine la figure transformée de la figure bleue par cette translation.

Exercice 3.

Sur le dessin numéro 3 de la feuille de manipulation 5a, la figure rouge numérotée 2 est la transformée de la figure rouge numérotée 1 par une translation matérielle.

Dessine la figure, dont la figure bleue numérotée 2 est la transformée par cette translation.

II – COMMENT ON TROUVE LE TRANSFORME D'UN POINT.

2.1 Deux points suffisent.

Prends la feuille de manipulation 5b.

Nous avons choisi une translation matérielle t. Sur le dessin 1, nous avons dessiné une figure $\mathcal{E}$ et sa transformée $\mathcal{E}^*$ par la translation t.

A l'aide d'un calque, dessine les transformés des points M *et* N *dans cette translation.*

Sur les dessins 2, 3 et 4, nous avons conservé la translation t, mais nous avons progesssivement supprimé des éléments de la figure $\mathcal{E}$.

A l'aide d'un calque, dessine les transformés des points P *et* Q, R *et* S, U *et* V *par la translation* t. *Tu changeras de calque à chaque dessin.*

Pour le dessin numéro 4, ton calque ne suffit plus. Tu peux tracer la droite AA^* sur le dessin et reproduire cette droite sur le calque.

Conclusion.

Etant donnée une translation matérielle t, si on connait le transformé A^* d'un point A, on est capable de dessiner le transformé d'un point M quelconque.

2.2 Translation et parallélisme.

Regarde le dessin numéro 3 *de la feuille de manipulation* 4a. *Cherche si la translation matérielle qui transforme* A *en* A^* *transforme aussi* B *en* B^*.

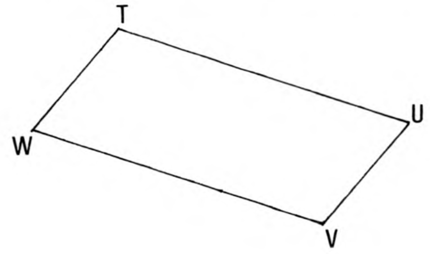
Que peux-tu dire des droites AA^* *et* BB^* *? Des droites* AB *et* A^*B^* *?*

Cherche si la translation matérielle qui transforme R *en* R′ *transforme aussi* S *en* S′.

Nous dirons que {A, A*, B*, B} est un PARALLELOGRAMME de sommets opposés A* et B.

On peut aussi dire que {A, A*, B*, B} est un parallélogramme de sommets opposés A et B*.

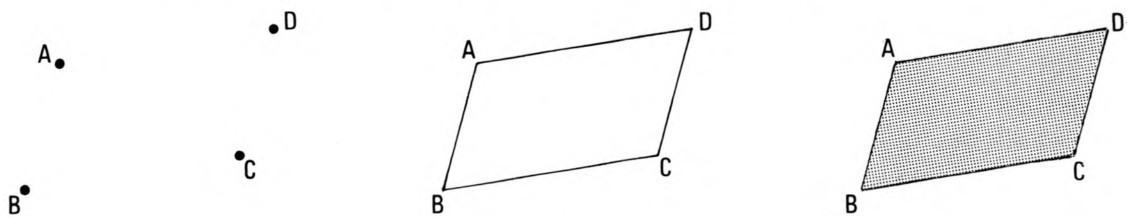
De même {T, U, V, W} est un parallélogramme de sommets opposés T et V car les droites TU et WV sont parallèles ainsi que les droites TW et UV.



Penses-tu que les segments TU *et* WV *aient la même longueur ? Et les segments* TW *et* UV *?*

Remarque.

Dans la vie courante, on appelle souvent parallélogramme
soit la ligne brisée formée des segments AB, BC, CD et DA,
soit le morceau de plan limité par cette ligne brisée.



2.3 Où les calques ne sont plus utiles.

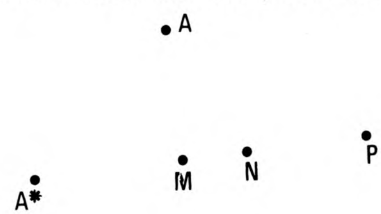
Dessine deux points A *et* A* *et appelle* t *la translation matérielle qui transforme* A *en* A*.

Choisis un point M *qui n'appartient pas à la droite* AA*. *Appelle* M* *le transformé de* M *par la translation* t. *Dessine* M* *sans te servir de calque.*

Choisis un point N *qui appartient à la droite* AA*. *Appelle* N* *son transformé par la translation* t. *Dessine* N* *sans te servir de calque.*

2.4 Transformés de points alignés.

Reproduis le dessin ci-dessous (les points A*, M, N *et* P *sont alignés).*



Désignons par t *la translation matérielle par laquelle* A^* *est le transformé de* A.

Dessine les transformés M^*, N^* *et* P^* *des points* M, N *et* P *par la translation* t. *Que constates-tu ?*

Dessine le transformé de A^*. *Où se trouve-t-il ?*

Choisis un point Q^* *aligné avec* N^* *et* P^*. *Dessine le point* Q *dont* Q^* *est le transformé par la translation* t. *Qu'observes-tu ?*

TM3 Pliages et translations

I – DEUX PLIAGES AUTOUR DE DEUX DROITES PARALLELES.

1.1 Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 4b, nous avons tracé deux droites parallèles d_1 et d_2 et trois points A, M et N.

Appelle A_1, M_1 *et* N_1 *les transformés des points* A, M *et* N *par le pliage autour de la droite* d_1. *Dessine les points* A_1, M_1 *et* N_1.

Appelle A_2, M_2 *et* N_2 *les transformés de* A_1, M_1 *et* N_1 *par le pliage autour de la droite* d_2. *Dessine les points* A_2, M_2 *et* N_2.

Choisis un point R. *Dessine le transformé de* R *par le pliage autour de la droite* d_1. *Appelle le* R_1. *Dessine le transformé de* R_1 *par le pliage autour de la droite* d_2. *Appelle le* R_2.

Vérifie que les segments AM *et* A_2M_2 *ont même longueur. Pouvais-tu prévoir ce résultat ?*

1.2 *Vérifie à l'aide de ta règle et de ton équerre que* $\{A, A_2, M_2, M\}$ *est un parallélogramme de sommets opposés* A *et* M_2.

Fais le même travail pour $\{M, N, N_2, M_2\}$.

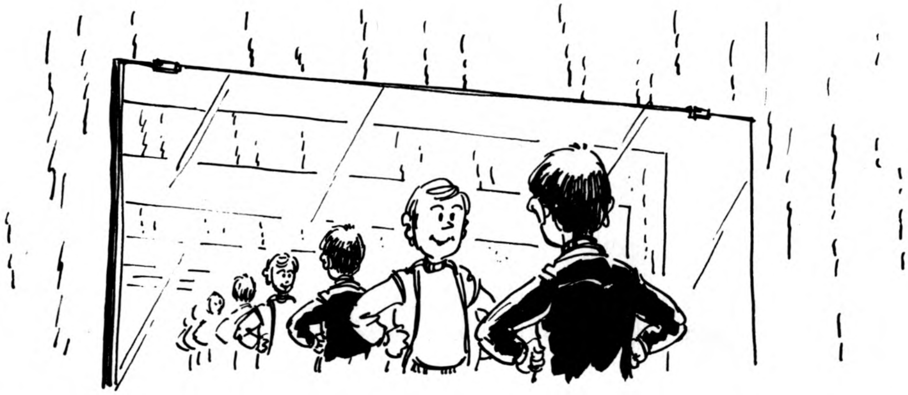
Ce que nous avons appris dans [TM2] nous permet d'affirmer que les points A_2, M_2 et N_2 sont les transformés des points A, M et N dans une même translation matérielle.

Tu sais aussi qu'une translation est définie dès qu'on connait un point et son transformé. Nous pouvons donc l'appeler translation (A, A_2) ou encore translation (M, M_2), ou encore....

Vérifie que le point R_2 *est le transformé du point* R *par cette translation.*

On observerait un résultat analogue pour tout point du plan matériel et nous pouvons donc dire : le pliage autour de d_1 suivi du pliage autour de d_2 est la translation (A, A_2).

Penses-tu qu'on aurait obtenu le même résultat si on avait fait le pliage autour de d_2 *suivi du pliage autour de* d_1 *?*



1.3 *Vérifie que les droites* AA_2, MM_2, NN_2 *et* RR_2 *sont perpendiculaires à la droite* d_1. *Appelle* H_1 *et* H_2 *les points d'intersection de la droite* AA_2 *et des droites* d_1 *et* d_2.

Compare les longueurs des segments AA_2 *et* H_1H_2. *Pouvais-tu prévoir ce résultat ?*

Que peux-tu dire de la longueur des segments AA_2, MM_2, NN_2 *et* RR_2 *?*

II – DECOMPOSITION D'UNE TRANSLATION.

Prends le dessin numéro 1 *de la feuille de manipulation* 6b. *Vérifie que la figure* 2 *est la transformée de la figure* 1 *dans une translation matérielle.*

Nous appellerons cette translation la translation (C, C_2).

Sur le dessin on a tracé une droite d_1.

Vérifie qu'elle est perpendiculaire à la droite CC_2.

Dessine la transformé de la figure 1 par le pliage autour de la droite d_1.

Appelle A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 *et* G_1 *les transformés des points* A, B, C, D, E, F *et* G.

Trace la médiatrice d_2 *du segment matériel* C_1C_2. *Vérifie qu'elle est parallèle à la droite* d_1.

Dessine la transformée de la figure $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$ *par le pliage autour de la droite* d_2. *Que constates-tu ?*

Tu viens de constater que la translation (C, C_2) est égale à la suite des deux pliages autour des droites parallèles d_1 et d_2. Nous dirons que la translation matérielle se décompose dans la suite de ces deux pliages.

On sait que chacun de ces deux pliages est une isométrie : il n'est donc pas surprenant que la translation soit une isométrie.

Dans cette exercice, nous avions tracé la droite d_1 *sur le dessin. Penses-tu qu'on aurait pu choisir une autre droite* d_1 *que celle dessinée ?*

faisons le point

I – PLIAGES ET TRANSLATIONS.

Dans ce chapitre, nous avons fait des observations sur des pliages et des translations matérielles. Pliages et translations sont des transformations matérielles.

Une transformation matérielle est un procédé qui

à un point d'un plan matériel permet d'associer un point de ce plan matériel,

à une figure d'un plan matériel permet d'associer une figure de ce plan matériel.

Pliages et translations sont des isométries. Cela signifie que

1. si M et N sont deux points et M' et N' leurs transformés, les segments matériels MN et $M'N'$ ont même longueur ;

2. si F est une figure et F' sa transformée, un calque de la figure F peut se superposer avec la figure F'.

Dans le cas des pliages, nous avons vu qu'il pouvait être nécessaire de retourner le calque.

Par un pliage ou une translation, des points alignés se transforment en points alignés.

Par un pliage, un point de la droite de pliage se transforme en lui-même. Nous n'avons pas trouvé d'autre point qui ait cette propriété.

Nous n'avons pas trouvé de point qui se transforme en lui-même par une translation.

Enfin, nous avons étudié une suite de deux pliages autour de deux droites parallèles et constaté que c'était une translation.

Inversement, nous avons étudié une translation matérielle et nous l'avons décomposée en une suite de deux pliages autour de deux droites parallèles.

II – MEDIATRICE.

Soit A et B deux points ; la médiatrice du segment AB est la droite perpendiculaire à la droite AB qui passe par le milieu du segment AB.

Soit d une droite, M un point qui n'appartient pas à d, et M' le transformé de M par le pliage autour de d. La droite d est la médiatrice du segment MM'.

Soit A et B deux points et m la médiatrice du segment matériel AB :

1. tous les points que nous avons placés sur m sont à la même distance de A et de B ;

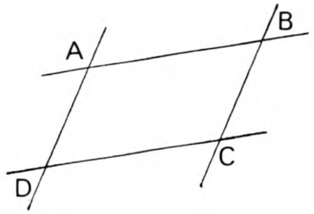
2. tous les points que nous avons placés à la même distance de A et de B sont sur m.

III – DROITE DE SYMETRIE.

Soit d une droite et F une figure. Si la transformée de F par le pliage autour de d est la figure F elle-même, on dit que d est une droite de symétrie pour F.

Nous avons trouvé deux sortes de triangles qui ont une droite de symétrie : les triangles isocèles, qui en ont une, et les triangles équilatéraux, qui en ont trois.

IV – TRANSLATION ET PARALLELOGRAMME.



Soit A, B, C et D quatre points non alignés.

On dit que $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et C si

les droites AB et DC sont parallèles et

les droites AD et BC sont parallèles.

Nous avons vu que dans ce cas, la translation matérielle qui transforme A en B transforme aussi D en C.

Cette propriété nous a permis d'affirmer que

si on connaît le transformé A' d'un point A par une translation matérielle, alors on est capable de dessiner le transformé de n'importe quel point.

un peu d'histoire

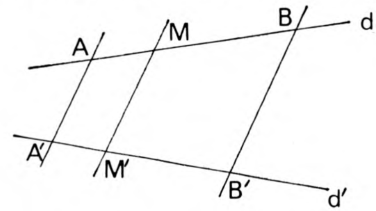
HILBERT.

David Hilbert est né en 1862 à Königsberg ; cette ville de Prusse est maintenant en U.R.S.S., et s'appelle Kaliningrad. Hilbert avait donc 8 ans au moment de la guerre de 1870 entre la France et l'Allemagne. Après ses études, il devient professeur d'université, et de 1895 à sa retraite officielle en 1930 il enseignera et cherchera à Göttingen ; cette ville se trouve à l'ouest de l'Allemagne.

Il vivra assez longtemps pour voir, après la première guerre mondiale (1914-1918) une partie de la seconde : il est mort à quatre vingt un ans, en 1943, au moment où l'Allemagne nazie commençait à subir de nombreux revers. Auparavant, il avait vu l'installation du nazisme dans son pays, et plusieurs de ses élèves avaient été persécutés et avaient dû quitter l'Allemagne.

On peut dire que la géométrie théorique a été inventée par les mathématiciens grecs de l'antiquité, et Euclide est le nom qui illustre ce fait. La plupart des propriétés qu'on trouve dans *les éléments* d'Euclide sont soit démontrées, soit admises comme axiomes ; mais certaines d'entre-elles ont échappé à ce traitement. C'est sans doute parce qu'on n'avait pas bien séparé les observations matérielles des raisonnements de la théorie, contrairement à ce que nous faisons dans ce livre.

Regardons par exemple la propriété suivante.



Soit d et d' des droites,
A, M et B des points de d,
A', M' et B' des points de d',
tels que les droites AA', MM' et BB' soient parallèles.
Si M est entre A et B, alors M' est entre A' et B'.

Euclide ne démontre pas cette propriété, il ne dit pas non plus qu'il la choisit pour axiome, et pourtant il l'utilise dans ses démonstrations.

C'est à la fin du 19ème siècle que ces questions ont été complétement clarifiées ; c'est ainsi que le livre de Hilbert, *les fondements de la géométrie,* donne en 1899 un exposé de la géométrie, où toutes les propriétés sont soit démontrées, soit choisies comme axiomes.

Mais Hilbert étudia bien d'autres questions mathématiques. Par exemple, après 1930, il a contribué fortement à la réflexion sur le raisonnement.

exercices et problèmes

1. *Reproduis le dessin ci-contre. Marque au crayon les points* A, B *et* C *ainsi que la droite* d.

Dessine la figure transformée de la figure bleue par le pliage autour de la droite d.

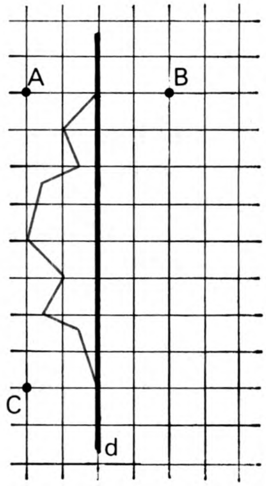
La figure bleue et celle que tu viens de tracer forment une nouvelle figure que nous appellerons $\mathcal{H}_1$.

Appelons r la translation matérielle qui transforme A en B et s la translation matérielle qui transforme A en C.

On appelle $\mathcal{H}_2$ la figure transformée de $\mathcal{H}_1$ par la translation r, $\mathcal{H}_3$ la figure transformée de $\mathcal{H}_1$ par la translation s, et $\mathcal{H}_4$ la figure transformée de $\mathcal{H}_3$ par la translation r.

Dessine les figures $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ *et* $\mathcal{H}_4$. *Dessine les figures transformées des figures* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ *et* $\mathcal{H}_4$ *par la translation* s. *Quelles symétries orthogonales observes-tu ?*

Pour obtenir un joli dessin, efface les points A, B, C *et la droite* d.



2. *Dessine un cercle et marque quatre points* A, B, C *et* M *sur ce cercle.*

On appelle M_1 le transformé de M dans le pliage autour de la droite BC,
M_2 le transformé de M dans le pliage autour de la droite AC,
et M_3 le transformé de M dans le pliage autour de la droite AB.

Que constates-tu pour les points M_1, M_2 *et* M_3 *?*

3. *Dessine deux droites sécantes* a *et* b. *Appelle* O *leur point d'intersection.*

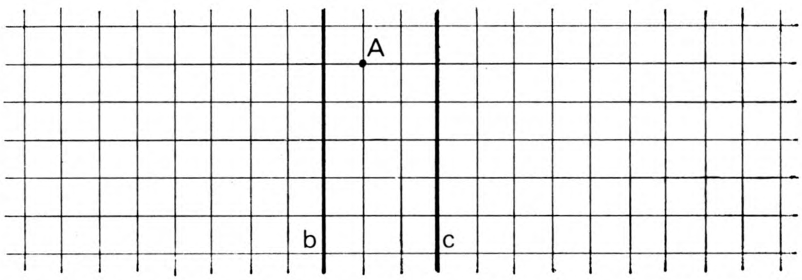
Marque un point M_0 *qui ne soit ni sur* a, *ni sur* b.

On appelle s le pliage autour de la droite a et t le pliage autour de la droite b. Soit M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8 et M_9 les points ainsi définis : $M_1 = s(M_0)$; $M_2 = t(M_1)$; $M_3 = s(M_2)$; $M_4 = t(M_3)$; $M_5 = s(M_4)$; $M_6 = t(M_5)$; $M_7 = s(M_6)$; $M_8 = t(M_7)$ et $M_9 = s(M_8)$.

Marque ces points sur ton dessin. Trace le cercle de centre O *qui passe par le point* M_0. *Que constates-tu ? Peux-tu l'expliquer ?*

Compare les longueurs des segments M_0M_2, M_1M_3, M_2M_4, M_3M_5, M_4M_6, M_5M_7, M_6M_8 *et* M_7M_9. *Peux-tu expliquer ce que tu as constaté ?*

4.



Reproduis le dessin ci-dessus (sur du papier quadrillé).

Nous avons tracé deux droites parallèles b et c et marqué un point A entre les droites b et c.

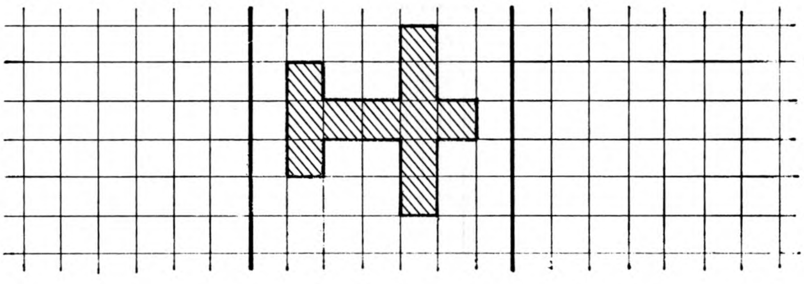
On appelle s le pliage autour de la droite b, t le pliage autour de la droite c, B l'image de A par s et C l'image de A par t.

Marque les points B *et* C *sur ton dessin.*

A partir du point B, on peut construire de nouveaux points B_1, B_2, B_3, B_4, etc... ainsi définis : $B_1 = t(B)$; $B_2 = s(B_1)$; $B_3 = t(B_2)$; $B_4 = s(B_3)$; etc...

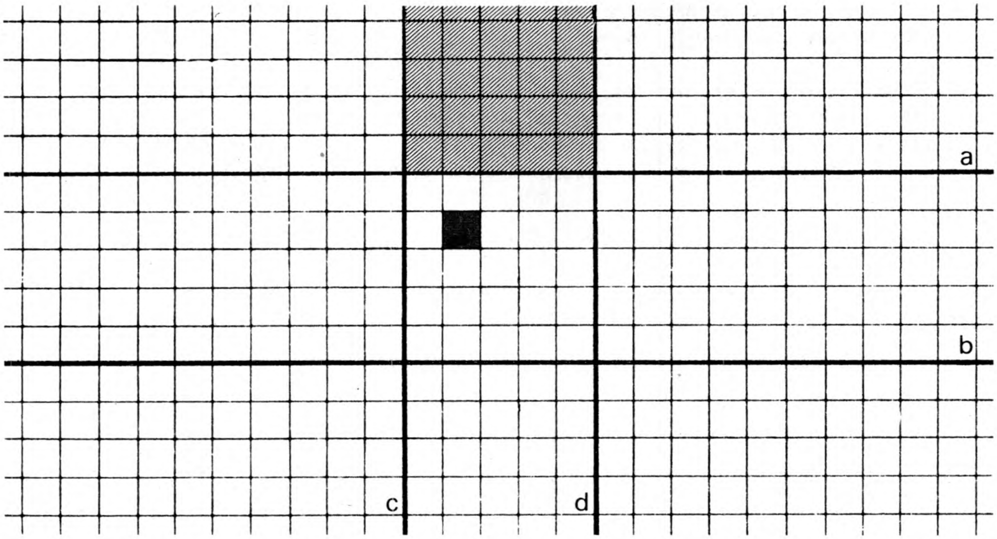
Marque ces points sur ton dessin. Fais un travail analogue à partir du point C. *Quelles translations observes-tu ?*

Recommence le même travail en partant du dessin suivant ; le point A *est remplacé par la figure située entre les deux droites.*



Tu observerais un phénomène analogue en plaçant un objet entre deux miroirs parallèles qui se font face.

5. *Reproduis le dessin ci-dessous (sur du papier quadrillé) ; ne reproduis pas les hachures.*



Colorie les transformés du carreau bleu par les pliages autour des droites a, b, c *et* d.

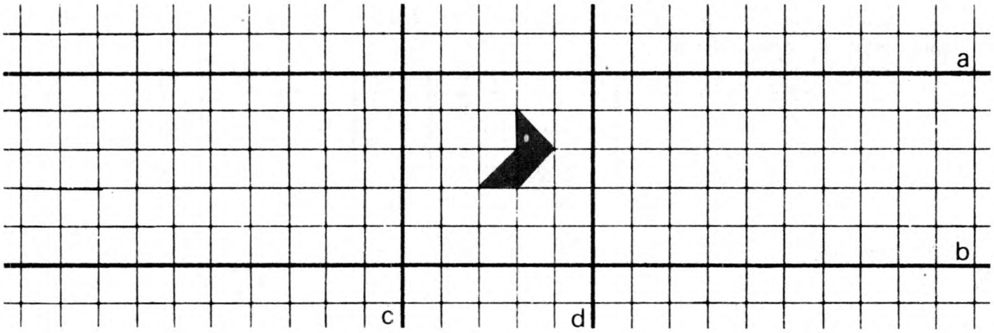
Tu as ainsi colorié quatre nouveaux carreaux. A partir de chacun de ces carreaux, tu peux colorier trois nouveaux carreaux ; par exemple à partir du carreau situé dans la région que nous avons hachurée, tu peux colorier les transformés de ce carreau par les pliages autour des droites b, c et d.

Fais-le, et procède de façon analogue pour les trois autres carreaux.

Tu obtiens finalement douze nouveaux carreaux. A partir de chacun de ces carreaux, tu peux colorier trois nouveaux carreaux.

Fais-le, et continue.

Recommence le même travail à partir du dessin suivant ; le carreau est remplacé par la figure bleue.



Tu observerais un phénomène analogue en plaçant un objet entre quatre miroirs disposés en carré.

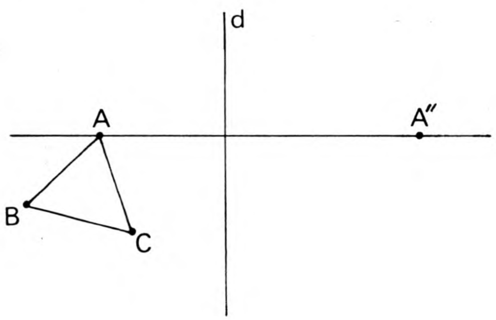
6. *Dessine un cercle. Appelle* O *son centre. Marque trois points* A, B *et* C *sur ce cercle.*
On appelle O′ le transformé de O dans le pliage autour de la droite BC,
H le transformé de A dans la translation matérielle qui transforme O en O′,
et H′ le transformé de H dans le pliage autour de la droite BC.
Marque les points O′, H *et* H′ *sur ton dessin. Que constates-tu ?*
Trace les droites AH, BC, BH, AC, CH *et* AB. *Que constates-tu ?*

7. Sur le dessin ci-contre, on a marqué quatre points A, B, C et A″ et on a tracé une droite d perpendiculaire à la droite AA″.

Reproduis ce dessin.

On appelle A′, B′ et C′ les transformés des points A, B et C dans le pliage autour de la droite d, B″ et C″ les transformés des points B′ et C′ dans la translation matérielle qui transforme A′ en A″.

Marque les points A′, B′, C′, B″ *et* C″ *sur ton dessin. Vérifie que le triangle* A″B″C″ *est le transformé du triangle* ABC *dans le pliage autour d'une droite* e *que tu traceras sur ton dessin.*



8. *Dessine une droite* d *et un point* O *tel que la distance en centimètres de* O *à la droite* d *soit égale à* 1.

1. *Trace la perpendiculaire à la droite* d *qui passe par* O *et appelle* H *le point d'intersection de cette droite et de la droite* d.

Au point H, tu vas faire correspondre le point H′ obtenu de la manière suivante :
le point H′ se trouve sur la droite OH ;
le point O se trouve entre H et H′ ;
(distance en cm de O à H) × (distance en cm de O à H′) = 10.
Quelle est la distance en centimètres de O *à* H′ *? Place le point* H′.

2. *Marque les deux points de la droite* d *qui sont à* 2 *centimètres de* O. *Appelle-les* A *et* B.

Au point A, tu vas faire correspondre le point A′ obtenu de la manière suivante :
le point A′ se trouve sur la droite OA ;
le point O se trouve entre A et A′ ;
(distance en cm de O à A) × (distance en cm de O à A′) = 10.
Quelle est la distance en centimètres de O *à* A′ *? Place le point* A′.
Transforme le point B *de la même façon.*

3. *Marque les deux points de la droite* d *qui sont à* 1,25 cm *de* O,
les deux points de la droite d *qui sont à* 4 cm *de* O,
les deux points de la droite d *qui sont à* 5 cm *de* O,
les deux points de la droite d *qui sont à* 8 cm *de* O,
les deux points de la droite d *qui sont à* 10 cm *de* O.
Transforme tous ces points de la même façon. Ces points sont-ils alignés ?

Pour les transformations matérielles que nous avons étudiées dans ce chapitre, tu as vu que des points alignés se transforment en des points alignés. Tu vois qu'il n'en est pas de même pour la transformation étudiée dans cette exercice.

Marque le milieu du segment OH′. *Appelle-le* K. *Trace le cercle de centre* K *qui passe par* O. *Que constates-tu ?*

9. Dans ce problème, si M et N sont deux points du plan matériel, nous noterons $\ell(MN)$ la longueur du segment MN.

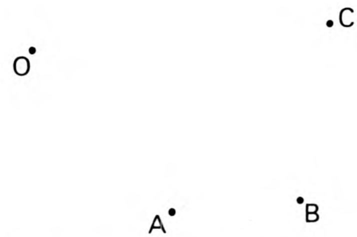
1. *Reproduis le dessin ci-contre.*

Au point A, tu vas faire correspondre le point A' obtenu de la manière suivante :

le point A' se trouve sur la demi-droite OA ;

$\ell(OA') = 3\ell(OA)$.

Place le point A'. *Transforme de la même façon les points* B *et* C. *Appelle* B' *et* C' *leurs transformés. Trace les droites* AB, $A'B'$, AC, $A'C'$, BC *et* $B'C'$. *Que constates-tu ? Compare les longueurs des segments* AB *et* $A'B'$, *des segments* AC *et* $A'C'$, *des segments* BC *et* $B'C'$.



La transformation que nous venons d'étudier s'appelle une homothétie matérielle. On dit que O est le centre de cette homothétie et que 3 est le rapport de cette homothétie.

Cette homothétie est-elle une isométrie matérielle ?

2. *Reproduis le dessin ci-contre.*

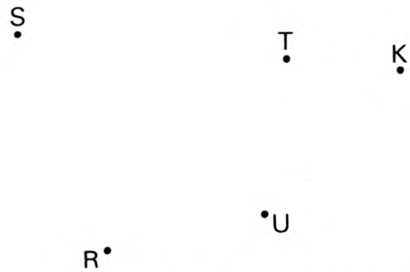
Au point R tu vas faire correspondre le point R' obtenu de la manière suivante :

le point K appartient au segment RR' ;

$\ell(KR') = 2\ell(KR)$.

Place le point R'. *Transforme de la même façon les points* S, T *et* U. *Appelle* S', T' *et* U' *leurs transformés.*

Peux-tu faire des constatations analogues à celles que tu as faites dans la première question ?



La transformation que nous venons d'étudier s'appelle encore une homothétie matérielle. On dit que K est le centre de l'homothétie. Mais ici le point K est entre chaque point et son transformé. On dit que le rapport de l'homothétie est −2.

Cette homothétie est-elle une isométrie matérielle ?

3. *Dessine quatre points* L, X, Y *et* Z *tels que* X, Y *et* Z *ne soient pas alignés.*

Dessine les transformés X', Y' *et* Z' *de* X, Y *et* Z *dans l'homothétie matérielle de centre* L *et de rapport* −1.

Compare les longueurs des segments XY *et* $X'Y'$, *des segments* YZ *et* $Y'Z'$, *et des segments* ZX *et* $Z'X'$.

Soit M et N deux points quelconques, M' et N' leurs transformés par l'homothétie de centre L et de rapport −1.

Penses-tu que les segments MN *et* $M'N'$ *aient la même longueur ?*

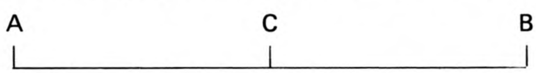
Tu vois qu'une homothétie de rapport −1 est une isométrie.

les rationnels

Q1 Fractions

I – DES DESSINS ET DES FRACTIONS.

1.1 Sur le dessin suivant, C est le milieu du segment AB.



Appelons L la longueur du segment AB, et ℓ celle du segment AC.

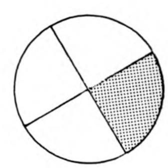
Quelle est la longueur du segment CB *?*

Nous écrivons : $L = \ell + \ell$; ou encore : $L = 2\ell$; ou : $\ell = \frac{1}{2}L$.

L'écriture $\frac{1}{2}$ se lit «un demi» et s'appelle une FRACTION.

L'écriture $\frac{1}{2}L$ se lit «un demi de L».

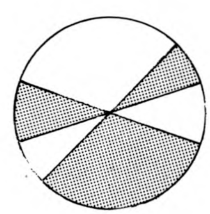
1.2 *Observe le disque ci-contre.*



L'aire de la surface hachurée est égale à un quart de l'aire du disque.

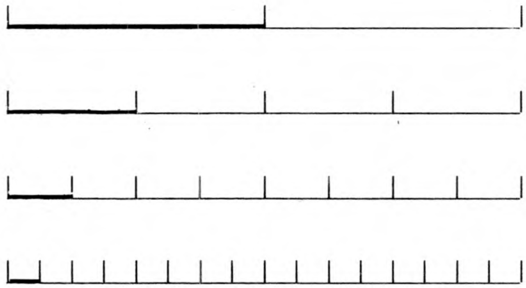
Un quart se note $\frac{1}{4}$.

1.3 *Observe le disque ci-contre.*



Indique quelle fraction de l'aire du disque représente l'aire de la surface hachurée.

1.4 Voici des segments de longueur L. A côté de chaque dessin nous avons indiqué la longueur du segment tracé en trait fort.



$\frac{1}{2}L$

$\frac{1}{4}L$

$\frac{1}{8}L$

$\frac{1}{16}L$

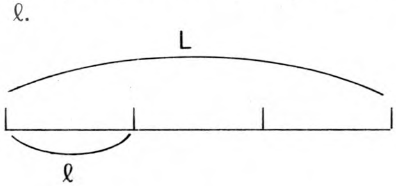
La fraction $\frac{1}{8}$ se lit «un huitième».

Comment lis-tu la fraction $\frac{1}{16}$?

Imagine qu'on continue à diviser chaque segment en deux segments de même longueur. Quelles seraient les longueurs des segments tracés en trait fort sur les deux dessins qu'on pourrait faire ensuite ?

1.5 *Observe le dessin numéro* 1 *de la feuille de manipulation* 4a. *Indique quelle fraction de l'aire du carré* A *représente chacune des aires des carrés* B, C, D, E, F *et* G. *Pour t'aider tu pourras tracer les diagonales de chaque carré.*

1.6 Sur le dessin ci-dessous, nous avons partagé un segment de longueur L en trois segments de même longueur ℓ.



Nous pouvons écrire : $L = \ell + \ell + \ell$; ou : $L = 3\ell$; ou encore : $\ell = \frac{1}{3}L$. **La fraction $\frac{1}{3}$ se lit «un tiers».**

1.7 Comme c'est curieux les mots !

La fraction $\frac{1}{2}$ se lit «un demi», $\frac{1}{3}$ se lit «un tiers», $\frac{1}{4}$ se lit «un quart» mais $\frac{1}{5}$ se lit «un cinquième», $\frac{1}{6}$ se lit «un sixième» et ainsi de suite.

Pourquoi comme ça et pas comme ça ? Voilà une des bizarreries de la langue française. En italien aussi c'est curieux :

la fraction $\frac{1}{2}$ se lit «un mezzo», c'est-à-dire «un demi» ;

la fraction $\frac{1}{3}$ se lit «un terzo», c'est-à-dire «un troisième» ;

la fraction $\frac{1}{4}$ se lit «un quarto», c'est-à-dire «un quatrième».

1.8 *Prends le dessin numéro* 2 *de la feuille de manipulation* 4a. *Observe le procédé décrit par les figures* (1), (2) *et* (3). *Sur la figure* (4) *continue jusqu'à ce que tu retrouves le premier point.*

Ce procédé permet de partager un disque en six parties de même aire.

Fais-le.

Hachure une des parties ainsi déterminées. L'aire de la surface hachurée est un sixième de l'aire du disque.

Hachure autrement une partie du disque dont l'aire est égale à $\frac{1}{3}$ *de l'aire du disque. Peux-tu le faire de plusieurs façons ?*

II – D'AUTRES FRACTIONS.

2.1 *Dessine un carré. Trace les deux diagonales. Tu as ainsi partagé le carré en quatre triangles de même aire.*

Hachure trois des quatre triangles. L'aire de la surface que tu as hachurée est égale à trois quarts de l'aire du carré.

Trois quarts se note $\frac{3}{4}$.

2.2 *Prends la feuille de manipulation* 9a, *dessin numéro* 1. *On a dessiné plusieurs figures et indiqué une fraction à côté de chacune d'elles. Pour la première figure la fraction indiquée est* $\frac{6}{7}$. *Hachure une surface dont l'aire représente les six septièmes de l'aire de la première figure. Fais un travail analogue pour les autres figures.*

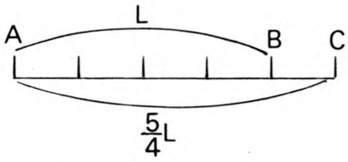
2.3 ***Quelle durée exprimée en minutes représente chacune des fractions d'heure suivantes ?***

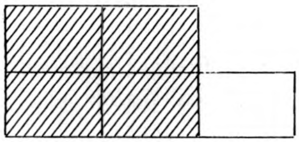
$$\frac{1}{4} \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; \frac{2}{3} \; ; \; \frac{1}{6} \; ; \; \frac{5}{6}.$$

Quelle fraction d'heure représentent six minutes ? Et douze minutes ?

2.4 ***Combien y a-t-il de quart d'heure dans une heure et quart ? Dans deux heures trois quarts ?***

Voici deux dessins dans lesquels intervient la fraction $\frac{5}{4}$.





Si on appelle L la longueur du segment AB, celle du segment AC est $\frac{5}{4}$L.

Si on appelle A l'aire du rectangle hachuré, l'aire de cette figure est $\frac{5}{4}$A.

Fais un dessin dans lequel intervient la fraction $\frac{11}{4}$*, puis un dessin dans lequel intervient la fraction* $\frac{11}{3}$.

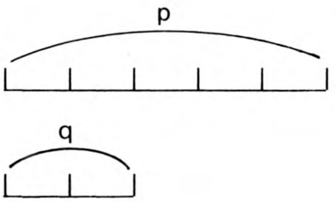
2.5 Un peu de vocabulaire.

Dans l'écriture $\frac{3}{4}$ le nombre écrit au-dessus du trait de fraction s'appelle le NUMERATEUR. Le nombre écrit au-dessous du trait de fraction s'appelle le DENOMINATEUR.

III – LES FRACTIONS SONT DES ECRITURES DE NOMBRES.

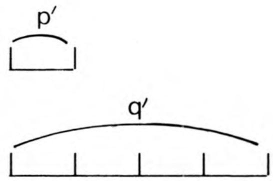
3.1 Voici deux situations comparables.

Voici deux segments de longueur p et q.



$q = \frac{2}{5} p$.

Voici deux segments de longueur p' et q'.

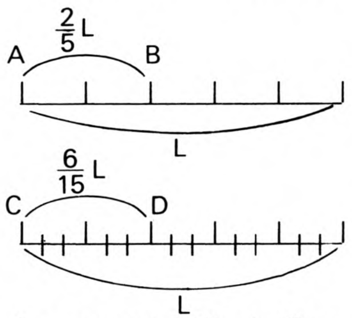


$q' = 4p'$.

Dans ces deux situations, $\frac{2}{5}$ et 4 ont des rôles analogues. De même que 4 est une écriture d'un nombre, nous dirons maintenant que $\frac{2}{5}$ est une écriture d'un nombre.

On dit que ce nombre est un NOMBRE RATIONNEL.

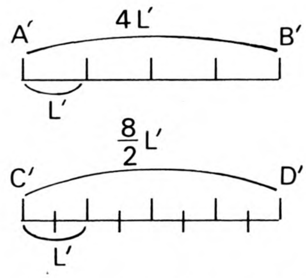
3.2 Considérons les situations suivantes.



Les segments AB et CD ont la même longueur.

Cela conduit à dire que $\frac{2}{5}$ et $\frac{6}{15}$ sont des écritures d'un même nombre.

Aussi on écrit que $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.



Les segments A′B′ et C′D′ ont la même longueur.

Cela conduit à dire que 4 et $\frac{8}{2}$ sont des écritures d'un même nombre.

Aussi : $4 = \frac{8}{2}$.

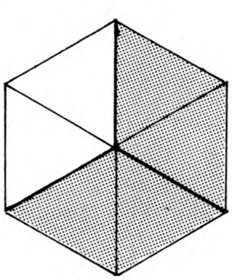
Nous dirons également que $\frac{6}{15}$ et 4 sont des nombres rationnels.

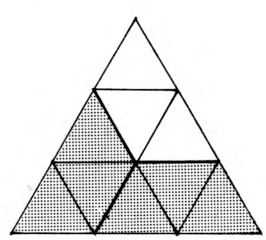
3.3

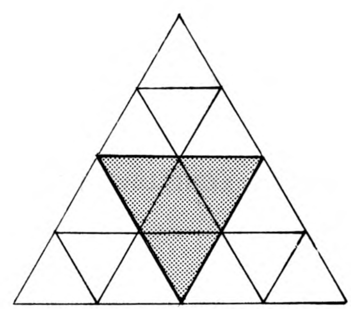
Aide toi des dessins ci-contre pour trouver d'autres écritures du nombre $\frac{1}{2}$.

3.4 *Donne d'autres écritures de $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{16}$.*

Tu pourras t'aider des dessins ci-dessous.





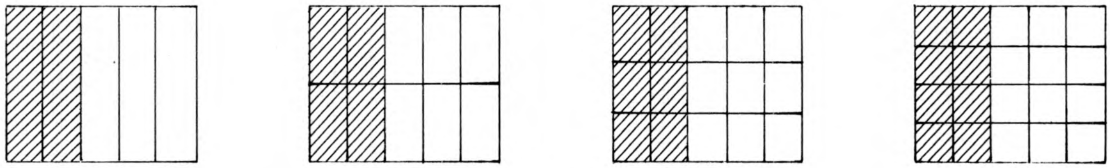


3.5 *Exprime en heure les durées suivantes : quatre quarts d'heure, deux demi-heure, trois tiers d'heure. Donne d'autres écritures du nombre* 1.

Exprime en heure les durées suivantes : quatre demi-heure, huit quarts d'heure, six tiers d'heure. Donne d'autres écritures du nombre 2.

3.6 *Donne d'autres écritures de* $\frac{2}{5}$.

Tu pourras t'aider des dessins ci-dessous.



Trouve encore deux autres écritures de $\frac{2}{5}$.

3.7 *Recopie et complète :* $\frac{4}{7} = \frac{\ldots}{\ldots}$; $\frac{4}{7} = \frac{\ldots}{21}$; $\frac{4}{7} = \frac{\ldots}{28}$; $\frac{6}{5} = \frac{12}{\ldots}$; $\frac{6}{5} = \frac{18}{\ldots}$; $\frac{6}{5} = \frac{24}{\ldots}$.

Donne encore d'autres écritures de $\frac{4}{7}$ *et de* $\frac{6}{5}$.

A-t-on le droit d'écrire que $\frac{12}{15} = \frac{8}{10}$ *?*

Trouve d'autres écritures de chacun des nombres suivants.

$\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{12}{4}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{16}{10}$; $\frac{17}{9}$; $\frac{30}{25}$.

3.8 On peut dire que dans le mot «avatar», une lettre sur deux est un a.

Pourquoi ? Peut-on dire la même chose pour le mot «alpaga» ?

L'alpaga est un ruminant voisin du lama, domestiqué en Amérique du sud pour sa longue fourrure laineuse.

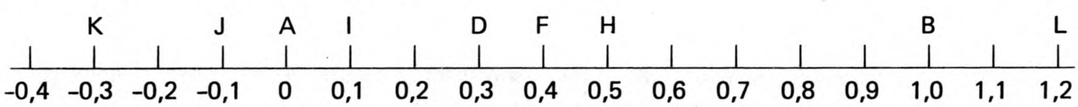
Pourquoi peut-on dire que dans le mot «avanie» une lettre sur trois est un a.

3.9 Dans une classe il y a 24 élèves et 20 élèves sont présents. On peut dire que cinq élèves sur six sont présents.

Pourquoi ?

IV – ECRITURE FRACTIONNAIRES DES NOMBRES DECIMAUX.

4.1 Voici une échelle régulière graduée par $\mathbb{D}_1$. La longueur de chaque échelon est un dixième de la longueur du segment AB.



L'abscisse du barreau I est 0,1.

Nous pouvons écrire aussi ce nombre $\frac{1}{10}$. L'écriture $\frac{1}{10}$ est une ECRITURE FRACTIONNAIRE du nombre 0,1.

Ecris à l'aide de fractions les abscisses des barreaux B, D, F, L *et* H.

L'abscisse du barreau J est –0,1.

En remplaçant dans cette écriture 0,1 par $\frac{1}{10}$, on peut écrire que l'abscisse de J est $-\frac{1}{10}$.

Ecris de même l'abscisse de K.

4.2 *Observe le dessin ci-dessous.*

Nous avons reproduit l'échelle précédente et nous avons divisé chaque échelon en dix. La longueur de chaque nouvel échelon est un dixième de la longueur du segment AI. C'est donc aussi le centième de la longueur du segment AB. Le point W a pour abscisse 0,24.

Combien y a-t-il d'échelons entre A *et* W *?*

Tu comprends pourquoi on peut écrire que $0{,}24 = \frac{24}{100}$.

Recopie et complète les égalités suivantes.

$0{,}12 = \frac{\cdots\cdots}{100}$; $0{,}30 = \frac{\cdots\cdots}{100}$; $\cdots\cdots = \frac{121}{100}$; $-0{,}35 = -\frac{\cdots\cdots}{100}$; $1{,}2 = \frac{\cdots\cdots}{100}$; $\cdots\cdots = -\frac{10}{100}$; $\cdots\cdots = \frac{167}{100}$.

4.3 **Nous admettrons que tout nombre décimal peut s'écrire en utilisant des fractions ; ainsi,**

$$40{,}3 = \frac{403}{10} \quad ; \quad -0{,}075 = -\frac{75}{1\,000} \quad ; \quad 25 = \frac{25}{1}.$$

Remarque bien qu'on peut le faire de plusieurs façons. Ainsi 40,3 peut aussi s'écrire $\frac{40\,300}{1\,000}$.

Exercice 1.

Ecris les nombres suivants sous forme décimale.

$\frac{1}{10}$; $\frac{52}{1\,000}$; $\frac{1}{100}$; $-\frac{38}{1\,000}$; $\frac{135}{100\,000}$; $-\frac{2\,354}{100}$; $\frac{300}{10}$.

Exercice 2.

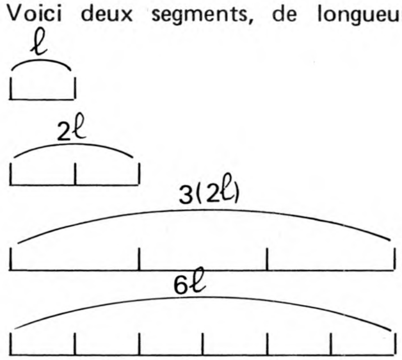
Ecris les nombres suivants en utilisant des fractions.

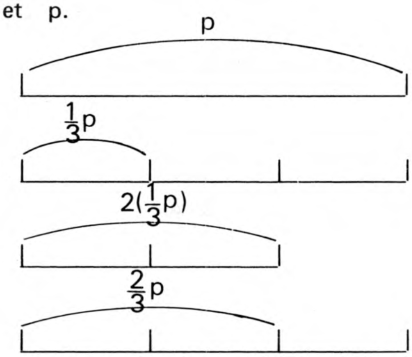
7,8 ; –0,13 ; 0,819 0 ; 43 ; 102,0 ; –0,07 ; 8,930 7 .

Q2 Ou l'on multiplie de nouveaux nombres

I – DES SITUATIONS COMPARABLES.

1.1 Voici deux segments, de longueur ℓ et p.





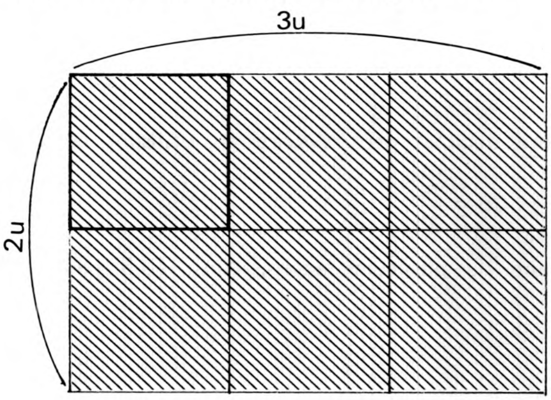
Tu vois que $3(2\ell) = 6\ell$.

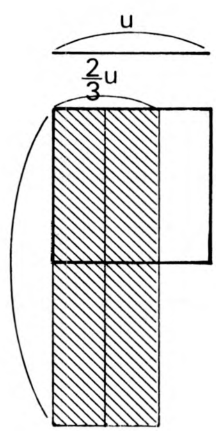
Remarque que $3 \times 2 = 6$.

Tu vois aussi que $2(\frac{1}{3}p) = \frac{2}{3}p$.

Par analogie, nous écrirons que $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

1.2 Voici un segment de longueur u.





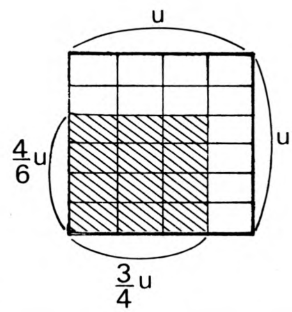
L'aire du rectangle hachuré est $6u^2$.

Remarque que $3 \times 2 = 6$.

L'aire du rectangle hachuré est $\frac{4}{3}u^2$.

Par analogie, nous écrirons que $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$.

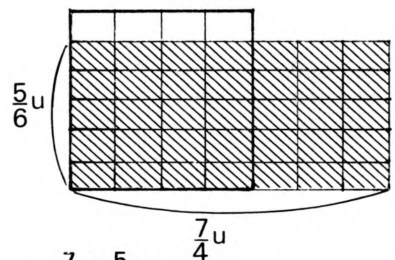
Quelle est l'aire de la surface hachurée ?

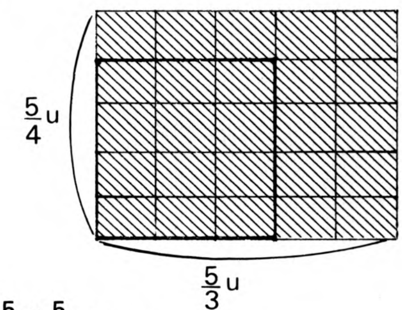


Nous écrirons aussi que $\frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24}$.

Voici deux autres situations analogues.

En t'aidant des dessins, recopie et complète.





$\frac{7}{4} \times \frac{5}{6} = \ldots\ldots$; $\frac{5}{4} \times \frac{5}{3} = \ldots\ldots$.

Exercice.

Nous écrirons que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

Fais un dessin qui explique pourquoi.

1.3 Nous avons décidé d'écrire que

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$; $\frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24}$; $\frac{7}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{24}$ et $\frac{5}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{12}$.

Remarque que $2 \times 4 = 8$ et $3 \times 5 = 15$.

Peux-tu faire une remarque analogue pour chacune des autres égalités ?

Nous avons aussi décidé d'écrire que

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

Mais tu sais que $2 = \frac{2}{1}$; nous pouvons donc écrire que

$$\frac{2}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{3}.$$

Quelles remarques fais-tu ?

Nous venons d'effectuer des produits de nombres rationnels.

Plus généralement, nous décidons que si a, b, c et d sont des naturels non nuls,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

1.4 Exercices.

Calcule les nombres suivants.

$\frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$; $\frac{4}{9} \times \frac{3}{2}$; $\frac{13}{5} \times \frac{2}{3}$; $3 \times \frac{2}{5}$; $\frac{1}{10} \times 5$; $1 \times \frac{2}{3}$; $\frac{43}{17} \times 1$.

Montre que les nombres suivants sont des entiers.

$4 \times \frac{5}{4}$; $5 \times \frac{2}{5}$; $3 \times \frac{4}{3}$; $3 \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{6} \times 6$; $57 \times \frac{1}{57}$; $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$;

$\frac{37}{5} \times \frac{5}{37}$; $\frac{7}{8} \times \frac{8}{7}$; $\frac{8}{5} \times \frac{5}{2}$; $\frac{14}{3} \times \frac{9}{7}$; $\frac{123\,456}{567\,890} \times \frac{567\,890}{123\,456}$.

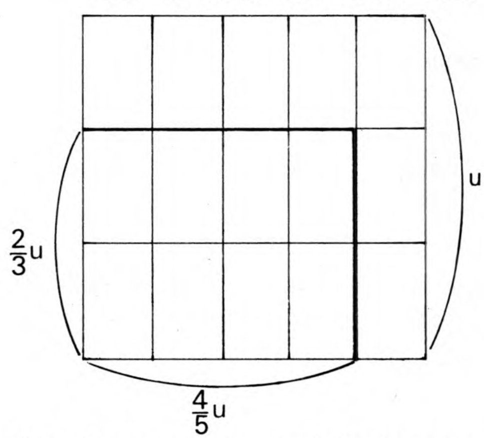
Remarque.

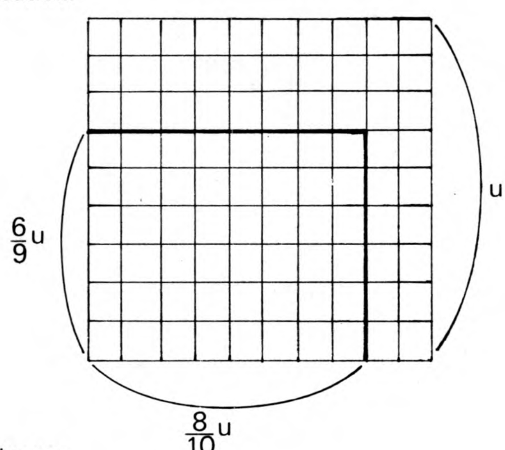
Examinons les produits $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ et $\frac{6}{9} \times \frac{8}{10}$. Ces deux écritures désignent le même rationnel.

Vérifie-le.

Ceci n'est pas étonnant ; en effet $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ et $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

Voici un dessin qui illustre cette situation.





1.5 Retour sur la multiplication des décimaux.

Tu sais que $2{,}4 \times 1{,}5 = 3{,}6$; $2{,}4 = \frac{24}{10}$ et $1{,}5 = \frac{15}{10}$.

Suivant la définition du paragraphe 1.3, nous savons que $\frac{24}{10} \times \frac{15}{10} = \frac{360}{100}$.

Généralisation.

Soit a, b, u, v, x et y des naturels non nuls.

Supposons que $\frac{u}{v} \times \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. | Nous dirons que $\frac{x}{y}$ est le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{u}{v}$ et nous écrirons que

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{u}{v}.$$

| *Vérifie que* $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{v}{u}$.

Par conséquent $\frac{a}{b} : \frac{u}{v} = \frac{a}{b} \times \frac{v}{u}$.

Nous pouvons donc répondre oui à la question posée dans le paragraphe 3.1.

3.3 Une convention.

Jusqu'à présent, lorsqu'on voulait écrire le quotient de 32 par 8 on écrivait 32 : 8. Nous venons de voir que nous pouvons écrire ce quotient $\frac{32}{8}$.

De façon analogue, nous convenons que le quotient $\frac{12}{10} : \frac{3}{4}$ peut aussi être écrit $\frac{\left(\frac{12}{10}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$.

Tu sais que $12{,}3 = \frac{123}{10}$ et que $4{,}21 = \frac{421}{100}$.

D'après la convention précédente $\frac{123}{10} : \frac{421}{100} = \frac{\left(\frac{123}{10}\right)}{\left(\frac{421}{100}\right)}$.

Aussi écrirons nous que $12{,}3 : 4{,}21 = \frac{12{,}3}{4{,}21}$.

Tu pourras encore rencontrer comme autres écritures de ce quotient 12,3 / 4,21 et même $12{,}3 \div 4{,}21$.

3.4 Exercice.

Donne une écriture fractionnaire des quotients suivants.

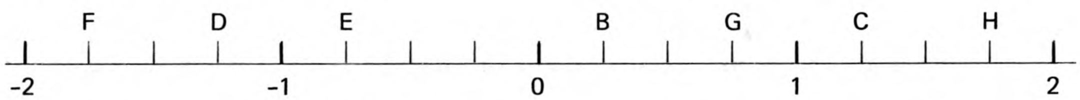
$$\frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)} \; ; \; \frac{7}{4{,}5} \; ; \; \frac{8{,}5}{7{,}1} \; ; \; \frac{7{,}2}{\left(\frac{3}{7}\right)} \; ; \; \frac{\left(\frac{3}{11}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)} \; ; \; \frac{\left(\frac{3}{9{,}1}\right)}{7} \; ; \; \frac{\left(\frac{1}{0{,}2}\right)}{\left(\frac{2{,}2}{3}\right)}.$$

Q3 Les rationnels

Jusqu'à maintenant nous avons écrit des fractions où le numérateur et le dénominateur sont des entiers naturels non nuls. Nous allons maintenant utiliser des entiers négatifs.

I – DE NOUVELLES FRACTIONS.

1.1 Sur le dessin ci-dessous, nous avons partagé chaque échelon d'une échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$ en quatre.



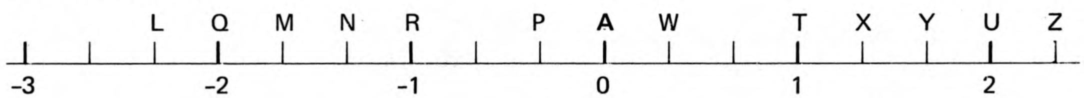
L'abscisse de B est 0,25, ce qui s'écrit encore $\frac{1}{4}$.

L'abscisse de C est 1,25, ce qui s'écrit encore $\frac{5}{4}$, **et tu sais que** $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

L'abscisse de D est –1,25. Mais $\frac{5}{4}$ est une autre écriture de 1,25 ; aussi écrirons nous que **l'abscisse de D est** $-\frac{5}{4}$.

Donne de même deux écritures des abscisses des points E, F, G *et* H.

Voici une échelle régulière obtenue d'une façon analogue, mais ici les échelons ont été partagés en trois.



La longueur du segment **AT** est trois fois celle du segment **AW**.

Tu sais que $1 = 3 \times \frac{1}{3}$. C'est pourquoi on dit que l'abscisse de W est $\frac{1}{3}$.

Effectue la division de* 1 *par* 3. *Le nombre* $\frac{1}{3}$ *est-il un décimal ?

La longueur du segment **AX** est quatre fois celle du segment **AW**.

Tu sais que $\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$. C'est pourquoi on dit que l'abscisse de X est $\frac{4}{3}$.

Le nombre $\frac{4}{3}$ ***appartient-il à*** $\mathbb{D}$ ***?***

Quelle est l'abscisse du point Y *? Du point* Z *?*

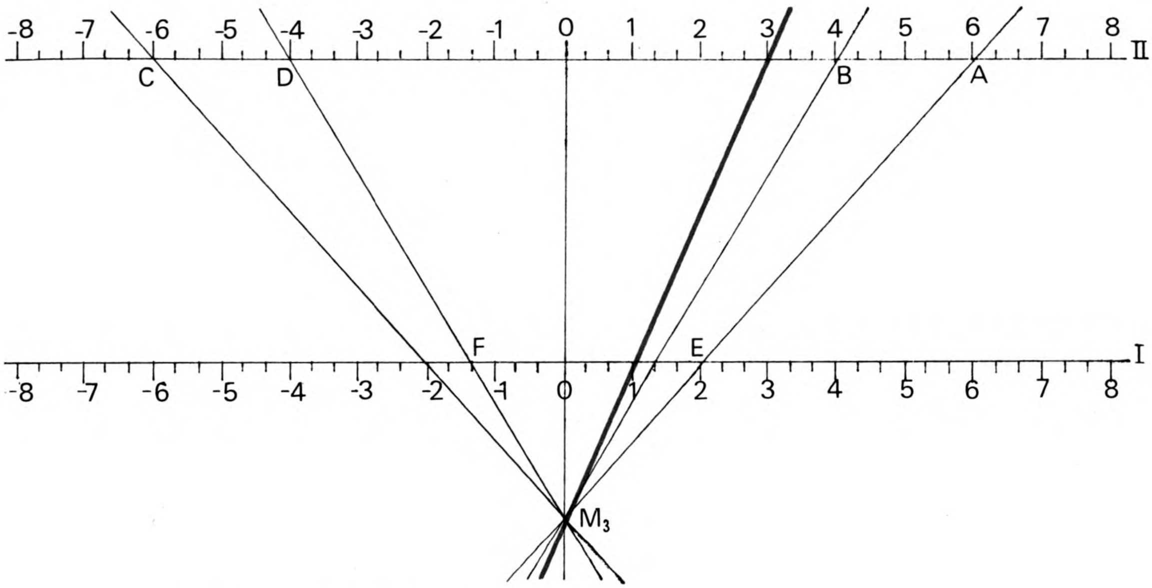
Le point **A** d'abscisse 0 est le milieu du segment RT. Le point T a pour abscisse 1 et R a pour abscisse –1.

Le point **A** est le milieu du segment QU. Le point U a pour abscisse 2 et Q a pour abscisse −2.

Le point **A** est aussi le milieu du segment NX. Le point X a pour abscisse $\frac{4}{3}$. Par analogie avec les deux exemples précédents, nous dirons que le point N a pour abscisse $-\frac{4}{3}$.

Quelle est l'abscisse de chacun des points L, M *et* P *?*

1.2 Où l'on retrouve la machine à multiplier.



La machine à multiplier sert aussi à diviser.

Sur ce dessin, nous avons marqué le point M_3 qui sert à multiplier par 3.

Pour multiplier 2 par 3, nous avons tracé la droite M_3E et trouvé 6 sur la règle II. Pour diviser 6 par 3, on peut tracer la droite M_3A et trouver 2 sur la règle I

Le nombre 2 est le quotient de 6 par 3 et tu sais qu'on peut noter ce quotient $\frac{6}{3}$: $3 \times 2 = 6$ et $2 = \frac{6}{3} = 6 : 3$.

Lis sur le dessin le quotient de 4 par 3. Ce résultat ne te surprendras pas. En effet, on a déjà écrit : $3 \times \frac{4}{3} = 4$ et $\frac{4}{3} = 4 : 3$.

1.3 Où l'on divise des nombres négatifs.

La droite M_3C coupe la règle I au point d'abscisse -2. **Nous dirons que -2 est le quotient de -6 par 3 et nous noterons ce quotient $\frac{-6}{3}$:**

$$3 \times (-2) = -6 \quad \text{et} \quad -2 = \frac{-6}{3} = -6 : 3 .$$

Le point D a pour abscisse -4 et le point F a pour abscisse $-\frac{4}{3}$. Les points M_3, D et F sont alignés.

C'est pourquoi nous dirons que

-4 est le produit de 3 par $-\frac{4}{3}$,

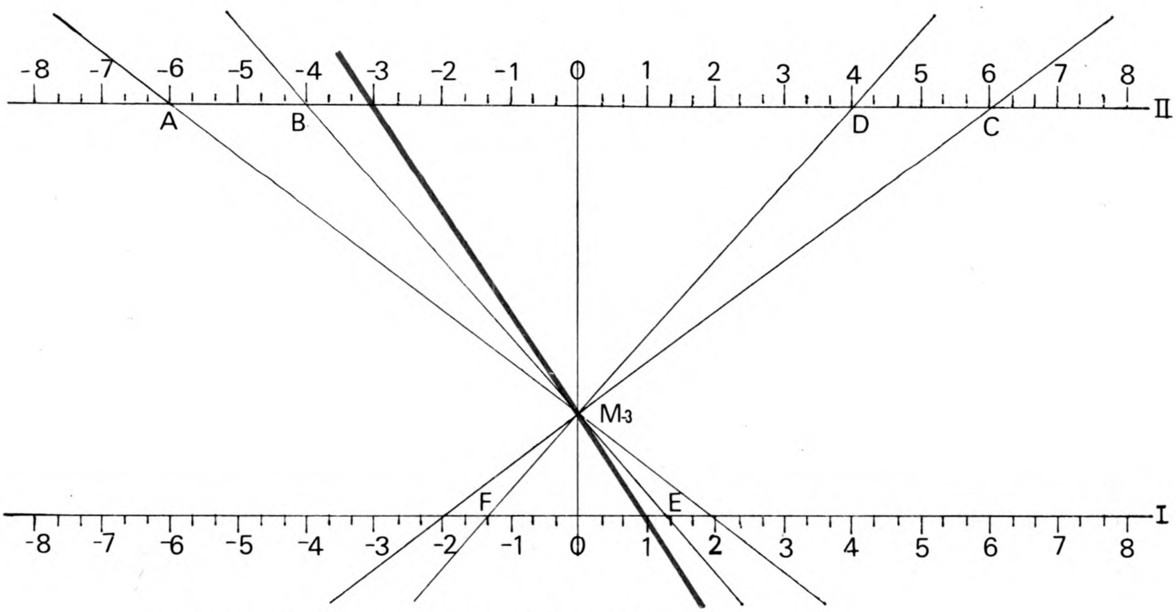
$-\frac{4}{3}$ est le quotient de -4 par 3.

Nous noterons aussi ce quotient $\frac{-4}{3}$:

$$3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -4 \quad \text{et} \quad -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = -4 : 3 .$$

Utilise la machine pour dire quel est le quotient de -8 *par* 3. *Tu peux te servir d'une règle ; mais surtout n'écris pas sur le livre.*

1.4 Où l'on divise aussi par des nombres négatifs.



Sur ce dessin, nous avons marqué le point M_{-3} qui sert à multiplier par -3.

La droite $M_{-3}A$ coupe la règle I au point d'abscisse 2. **Nous dirons que 2 est le quotient de -6 par -3 et nous noterons ce quotient $\frac{-6}{-3}$:**

$$-3 \times 2 = -6 \quad \text{et} \quad 2 = \frac{-6}{-3} = -6 : (-3) .$$

Le point B a pour abscisse -4 et le point E a pour abscisse $\frac{4}{3}$. Les points M_{-3}, B et E sont alignés.

C'est pourquoi nous dirons que

-4 est le produit de -3 par $\frac{4}{3}$,

$\frac{4}{3}$ est le quotient de -4 par -3.

Nous noterons aussi ce quotient $\frac{-4}{-3}$: $\quad -3 \times \frac{4}{3} = -4$ et $\frac{4}{3} = \frac{-4}{-3} = -4 : (-3)$.

La droite $M_{-3}C$ coupe la règle I au point d'abscisse -2. **Nous dirons que -2 est le quotient de 6 par -3 et nous noterons ce quotient $\frac{6}{-3}$:** $\quad -3 \times (-2) = 6$ et $-2 = \frac{6}{-3} = 6 : (-3)$.

Le point D a pour abscisse 4 et le point F a pour abscisse $-\frac{4}{3}$. Les points M_{-3}, D et F sont alignés.

C'est pourquoi nous dirons que

4 est le produit de -3 par $-\frac{4}{3}$,

$-\frac{4}{3}$ est le quotient de 4 par -3.

Nous noterons aussi ce quotient $\frac{4}{-3}$: $\quad -3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 4$ et $-\frac{4}{3} = \frac{4}{-3} = 4 : (-3)$.

Utilise la machine pour dire quel est le quotient de -7 par -3 ; bien entendu, il n'est toujours pas question d'écrire sur le livre.

1.5 Réflexions sur les exercices précédents.

Dans les deux paragraphes précédents,

nous avons introduit de nouveaux nombres comme $-\frac{4}{3}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{4}{-3}$,

nous avons vu que : $-\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{4}{-3}$,

nous avons donné une autre écriture du nombre $\frac{4}{3}$, à savoir $\frac{-4}{-3}$.

Nous dirons que les écritures $\frac{-4}{3}$, $\frac{4}{-3}$ et $\frac{-4}{-3}$ sont des FRACTIONS.

D'une manière générale, si a et b sont deux entiers relatifs différents de O,

► **nous dirons que l'écriture $\frac{a}{b}$ est une FRACTION.**

Cette fraction est l'écriture d'un nombre, le quotient de a par b.

Enfin, nous admettrons que

si u et v sont des naturels non nuls, $\frac{-u}{v} = \frac{u}{-v} = -\frac{u}{v}$, et $\frac{-u}{-v} = \frac{u}{v}$.

Remarque que l'écriture $-\frac{u}{v}$ n'est pas une fraction.

Exercice.

Calcule

$$\frac{-6}{5} \times \frac{-1}{7} \quad ; \quad \frac{-4}{3} \times \frac{8}{-9} \quad ; \quad \frac{-5}{-3} \times \frac{-8}{11} \quad ; \quad \frac{-2}{-7} \times \frac{-9}{-5}.$$

2.2 Et si l'on choisit d'autres écritures ?

Pourquoi $\frac{-2}{7} = \frac{-6}{21}$ *et* $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ *?*

Compare $\frac{-2 \times 6}{7 \times 9}$ *et* $\frac{-6}{21} \times \frac{8}{12}$.

Ce que tu viens de faire ne démontre pas que le produit de $\frac{-2}{7}$ par $\frac{6}{9}$ est indépendant des écritures choisies.

Pourquoi ?

Nous admettrons sans démonstration que

quelle que soit l'écriture fractionnaire $\frac{p}{q}$ de $\frac{-2}{7}$,

et quelle que soit l'écriture fractionnaire $\frac{r}{s}$ de $\frac{6}{9}$,

$$\frac{-2 \times 6}{7 \times 9} = \frac{p \times r}{q \times s}.$$

Nous admettrons aussi que ceci est vrai pour des éléments quelconques de $\mathbb{Q}^*$.

2.3 Nous pourrions démontrer que la multiplication dans $\mathbb{Q}^*$ a les propriétés suivantes :

elle est associative,

elle a un élément neutre, qui est 1,

tout élément de $\mathbb{Q}^*$ a un inverse.

Nous avions démontré ces propriétés dans le cas des rationnels $\frac{a}{b}$ où a et b étaient des entiers naturels non nuls.

Soit u un élément de $\mathbb{Q}^*$: son inverse est noté indifféremment u^{-1} ou $\frac{1}{u}$.

Soit $\frac{a}{b}$ une écriture fractionnaire d'un élément de $\mathbb{Q}^*$.

Vérifie que $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

Donc si $\frac{a}{b}$ est une écriture d'un élément de $\mathbb{Q}^*$, son inverse peut s'écrire indifféremment $\frac{b}{a}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Donne trois écritures différentes de l'inverse de $\frac{3}{7}$; de $\frac{-5}{11}$.

Enfin, la multiplication est commutative.

Nous pouvons conclure que $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Penses-tu que $(\mathbb{D}^*, \times)$ *soit un groupe ?*

Q4 Calculs dans le groupe $(\mathbb{Q}^*, \times)$

I – CONSEQUENCES DES PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION.

1.1 Soit u, v et w des éléments de $\mathbb{Q}^*$.
On suppose que $u \times w = v \times w$.

Penses-tu que $u = v$ *?*

Nous allons voir si tu as raison. Notons w^{-1} l'inverse de w.
Si $u \times w = v \times w$, alors $(u \times w) \times w^{-1} = (v \times w) \times w^{-1}$.

Justifie les égalités suivantes.

$$u \times (w \times w^{-1}) = v \times (w \times w^{-1}),$$
$$u \times 1 = v \times 1,$$
$$u = v.$$

Conclus.

Exercices.

Soit u et v deux éléments de $\mathbb{Q}^*$.

Explique pourquoi les phrases ci-dessous sont vraies :

si $-\frac{5}{7}u = -\frac{5}{7}v$ alors $u = v$; si $3{,}53u = 3{,}53v$ alors $u = v$.

Supposons maintenant que $\frac{7}{13}u = -\frac{7}{5}v$.

$$\frac{7}{13}u = 7 \times \frac{1}{13} \times u \quad \text{et} \quad -\frac{7}{5}v = 7 \times \frac{-1}{5} \times v.$$

Donc $7 \times (\frac{1}{13} \times u) = 7 \times (\frac{-1}{5} \times v)$.

Nous pouvons utiliser le résultat précédent et affirmer que

$$\frac{1}{13} \times u = \frac{-1}{5} \times v.$$

Fais un travail analogue pour montrer que si $\frac{15}{20}u = \frac{13}{20}v$ *alors* $15u = 13v$.

1.2 Inverse d'un produit.

Recopie et complète le tableau suivant.

nombre a	-5	$\frac{3}{4}$	$\frac{-5}{7}$	-3
nombre b	2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{4}{11}$
produit de a par b				
inverse du produit de a par b				
inverse de a				
inverse de b				
produits des inverses de a et b				

Tu vois que, pour les nombres choisis, l'inverse du produit de deux rationnels est égal au produit de leurs inverses. Nous admettrons que ce résultat est général, c'est-à-dire que quels que soient les rationnels non nuls u et v,

$$(uv)^{-1} = u^{-1}v^{-1}.$$

Exercices.

1. D'après ce que nous venons de voir l'inverse de $\frac{-5}{3} \times \frac{4}{11}$ est $\frac{3}{-5} \times \frac{11}{4}$, ce qui peut aussi s'écrire $\frac{33}{-20}$, et encore $\frac{-33}{20}$.

Ecris de même l'inverse de chacun des nombres suivants.

$\frac{5}{13} \times \frac{7}{9}$; $-5 \times \frac{1}{4}$; $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$; -7×-12 ; $\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)} \times 11$.

2. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^*$.

Quel est l'inverse de $x \times y$; $\frac{1}{x} \times y$; $x \times \frac{1}{y}$; $\frac{1}{x} \times \frac{1}{y}$ *?*

1.3 Division.

Dans [D2] nous avons vu que $(\mathbb{D}, +)$ est un groupe commutatif, et nous avons été conduit à étudier le problème suivant.

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{D}$.

Existe-t-il un décimal x *tel que* $b + x = a$ *?*

Nous avons vu que cette équation en x a une solution unique. C'est le nombre $a + (-b)$, que nous avons noté $a - b$.

II – PLUSIEURS ECRITURES D'UN MEME RATIONNEL.

2.1 Rappel.

Nous avons écrit des égalités telles que

$$\frac{1,3}{0,3} = \frac{13}{3} \quad ; \quad \frac{-17}{3} = \frac{17}{-3} \quad ; \quad \frac{15}{9} = \frac{35}{21} \quad ; \quad \frac{16}{24} = \frac{2}{3} .$$

Dans chacune de ces égalités, on passe d'une écriture à l'autre en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par un même nombre.

$$\frac{1,3}{0,3} \;\underset{\times 10}{\overset{\times 10}{=}}\; \frac{13}{3} \qquad\qquad \frac{-17}{4} \;\underset{\times -1}{\overset{\times -1}{=}}\; \frac{17}{-4}$$

$$\frac{15}{9} \;\underset{\times \frac{7}{3}}{\overset{\times \frac{7}{3}}{=}}\; \frac{35}{21} \qquad\qquad \frac{16}{24} \;\underset{:8}{\overset{:8}{=}}\; \frac{2}{3}$$

2.2 Généralisation.

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Q}^*$. Le nombre $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b.

Donc $$a = b \times \frac{a}{b} .$$

Soit k un élément de $\mathbb{Q}^*$.

Alors $$k \times a = k \times (b \times \frac{a}{b}) .$$

Or $$k \times (b \times \frac{a}{b}) = (k \times b) \times \frac{a}{b} .$$

Donc $$k \times a = (k \times b) \times \frac{a}{b} .$$

Nous venons de démontrer que le quotient de a par b, c'est-à-dire $\frac{a}{b}$, est aussi le quotient de ka par kb. Nous pouvons donc écrire que

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} .$$

Nous admettrons que tout rationnel admet une écriture fractionnaire irréductible.

2.4 Toutes les écritures fractionnaires d'un rationnel.

Donne cinq écritures fractionnaires du rationnel $\frac{66}{21}$.

Donne une écriture irréductible de ce rationnel.

Tu vois que si $\frac{u}{v}$ est une des fractions que tu as écrites, tu peux obtenir u et v en multipliant 22 et 7 par un même nombre.

On pourrait démontrer que si a et b sont des entiers tels que

$$\frac{a}{b} = \frac{22}{7},$$

il existe un entier relatif n tel que $a = 22 \times n$ et $b = 7 \times n$.

Exercice.

Donne toutes les écritures fractionnaires du rationnel $\frac{70}{48}$ *dont le numérateur est compris entre* 100 *et* 200.

2.5 Remarque sur les écritures des rationnels.

Vérifie que toutes les écritures suivantes représentent le même rationnel :

$$\frac{-2}{3} \; ; \; \frac{-0,2}{0,3} \; ; \; \frac{1}{\left(\frac{-3}{2}\right)} \; ; \; \frac{\left(\frac{-2}{7}\right)}{\left(\frac{3}{7}\right)} \; ; \; \frac{2}{-3} \; ; \; \frac{-8}{12}.$$

Parmi toutes ces écritures, certaines sont fractionnaires ; lesquelles ?

Quand il n'y a pas de raison de faire autrement, on représente ce nombre par $\frac{-2}{3}$ ou par $-\frac{2}{3}$. De même l'écriture la plus usuelle de $\frac{-66}{-77}$ est $\frac{6}{7}$.

Pour les rationnels qui sont des décimaux, on utilise aussi très fréquemment leur écriture décimale.

III – OU ON MULTIPLIE DES QUOTIENTS.

3.1 Nous savons que si a, b, c et d sont des entiers relatifs non nuls,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Mais nous ne savons pas s'il en est encore ainsi lorsque a, b, c et d sont des éléments de $\mathbb{Q}^*$.

Calcule $$\frac{\left(\frac{-3}{4}\right)}{\left(\frac{7}{5}\right)} \; ; \; \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{-5}{3}\right)} \; ; \; \frac{\left(\frac{-3}{4}\right)}{\left(\frac{7}{5}\right)} \times \frac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{-5}{3}\right)} \; ; \; \frac{\left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{7}{5}\right) \times \left(\frac{-5}{3}\right)}.$$

Compare les deux derniers nombres.

IV — EXERCICES.

4.1 *Calcule* $\dfrac{7}{6} \times \dfrac{5}{8}$; $\dfrac{3}{11} \times \dfrac{5}{4} \times \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{13}{4} : \dfrac{8}{3}$.

4.2 *Calculons le rationnel* $\dfrac{21}{32} \times \dfrac{8}{7}$.

Nous pourrions calculer les produits 21×8 et 32×7. Mais ce n'est pas nécessaire. Voici en effet comment on peut procéder.

$$\begin{aligned}\frac{21}{32} \times \frac{8}{7} &= \frac{21 \times 8}{32 \times 7},\\ &= \frac{(7 \times 3) \times 8}{(4 \times 8) \times 7},\\ &= \frac{3 \times (7 \times 8)}{4 \times (7 \times 8)},\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Tu peux remarquer que nous avons ainsi obtenu une écriture fractionnaire irréductible du produit $\dfrac{21}{32} \times \dfrac{8}{7}$.

Voici, sur des calculs analogues, d'autres façons de procéder.

$$\begin{aligned}\frac{21}{32} \times \frac{8}{7} &= \frac{\overset{3}{21} \times \overset{1}{8}}{\underset{4}{32} \times \underset{1}{7}},\\ &= \frac{3 \times 1}{4 \times 1},\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

On a remarqué que 21 et 7 sont des multiples de 7. On a divisé numérateur et dénominateur par 7. Une remarque analogue sur 8 et 32 nous a permis de diviser numérateur et dénominateur par 8.

$$\begin{aligned}\frac{13}{28} \times \frac{14}{9} &= \frac{13 \times \overset{1}{14}}{\underset{2}{28} \times 9},\\ &= \frac{13 \times 1}{2 \times 9},\\ &= \frac{13}{18}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{25}{6} \times \frac{9}{35} &= \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \times \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{6}} \times \underset{7}{\cancel{35}}},\\ &= \frac{5 \times 3}{2 \times 7},\\ &= \frac{15}{14}.\end{aligned}$$

Calcule $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{13}{3}$; $\dfrac{7}{5} \times \dfrac{1}{7}$; $\dfrac{12}{5} \times \dfrac{25}{9}$; $\dfrac{14}{15} \times \dfrac{10}{21}$; $\dfrac{24}{11} : \dfrac{18}{33}$; $\dfrac{\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(\frac{11}{7}\right)}$; $\dfrac{\left(\frac{8}{13}\right)}{\left(\frac{8}{3}\right)}$.

4.3 *Calcule* $\frac{3}{5} \times 4$; $\frac{-3}{5} : 2$; $\frac{13}{15} \times 15$; $-7 : \frac{-7}{6}$; $-12 : \frac{6}{7}$; $\frac{\left(\frac{-4}{9}\right)}{2}$; $\frac{1}{8} \times 16$; $\frac{21}{11} : -14$.

4.4 Nous allons calculer un produit de quatre rationnels.

$$\frac{9}{4} \times \frac{7}{10} \times \frac{16}{21} \times 15 = \frac{9 \times \overset{1}{7} \times \overset{4}{16} \times \overset{3}{15}}{\underset{1}{4} \times \underset{2}{10} \times \underset{3}{21}},$$

$$= \frac{9 \times 4 \times 3}{2 \times 3}.$$

Termine maintenant ce calcul en remarquant que des simplifications sont encore possibles.

Voici le début d'un autre calcul :

$$\frac{-7}{4} \times \frac{5}{-3} \times \frac{-6}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{-7 \times 5 \times (-6) \times 2}{4 \times (-3) \times 7 \times 5}.$$

Quel est le signe du numérateur ? Du dénominateur ?

Nous pouvons écrire que

$$\frac{-7 \times 5 \times (-6) \times 2}{4 \times (-3) \times 7 \times 5} = \frac{7 \times 5 \times 6 \times 2}{-(4 \times 3 \times 7 \times 5)}.$$

Termine le calcul.

Calcule de même $\frac{4}{11} \times \frac{22}{3} \times \frac{18}{5} \times \frac{1}{8}$; $\frac{-10}{3} \times \frac{7}{-15} \times \frac{-9}{2} \times \frac{-1}{7}$.

4.5 Calculons le rationnel $\frac{\left(\frac{11}{3} \times \frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{4}{7} \times 11\right)}$.

$$\frac{\left(\frac{11}{3} \times \frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{4}{7} \times 11\right)} = \left(\frac{11}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{4}{7} \times 11\right)^{-1},$$

$$= \frac{11}{3} \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} \times (11)^{-1},$$

$$= \frac{11}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{4} \times \frac{1}{11}.$$

Termine le calcul.

Calcule $\dfrac{\left(\dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4}\right)}{\left(\dfrac{6}{5} \times \dfrac{1}{2}\right)}$; $\dfrac{\left(\dfrac{-4}{7} \times \dfrac{11}{3}\right)}{\left(\dfrac{-22}{3} \times \dfrac{-2}{7}\right)}$; $\dfrac{\left(3 \times \dfrac{-2}{5}\right)}{\left(2 \times \dfrac{-3}{10}\right)}$.

Q5 Addition dans $\mathbb{Q}$

I – INTRODUCTION.

Calcule $\dfrac{72}{100} + \dfrac{-4}{10}$; $\dfrac{-4}{2} + \dfrac{3}{10}$; $\dfrac{-5}{2} + \dfrac{3}{5}$; $\dfrac{3}{-25} + \dfrac{-9}{50}$.

Tu viens d'additionner des décimaux.

Mais tu sais que les décimaux sont des rationnels. C'est pourquoi nous avons donné une écriture fractionnaire des nombres ci-dessus.

Tu as déjà vérifié que $\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{11}{7}$ ne sont pas des décimaux.

Pour le moment l'écriture «$\dfrac{4}{3} + \dfrac{11}{7}$» n'a pas de sens.

Nous allons maintenant définir une addition dans $\mathbb{Q}$, de façon que les décimaux s'additionnent dans $\mathbb{Q}$ comme dans $\mathbb{D}$.

Mais voilà qu'en entendant parler d'addition, zéro pointe le bout de son nez tout rond, pas mécontent du tout d'avoir pu se tenir jusqu'ici loin des opérations.

Toutefois, zéro se sent bien nu au milieu de cette armée de rationnels en nouvel uniforme $\dfrac{a}{b}$. «Il me faut en trouver un» se dit-il, «ce ne doit pas être bien difficile puisque même mes vieux camarades, les naturels, en sont habillés».

Venons à son secours, même si nous pensons que $\dfrac{-12}{-6}$ ne fait pas bien naturel.

II – ECRITURES FRACTIONNAIRES DE ZERO.

2.1 Tu sais que si q est le quotient d'un nombre u par un nombre v, alors

$$v \times q = u \ ;$$

tu sais aussi que l'on écrit :

$$q = \frac{u}{v}.$$

Soit a un entier relatif différent de 0.

Existe-t-il un nombre y *tel que* $a \times y = 0$?

Nous pouvons donc dire que 0 est le quotient de 0 par a et nous écrirons

$$0 = \frac{0}{a}.$$

Tu vois donc que si a est un entier relatif non nul, $\frac{0}{a}$ est une écriture fractionnaire de 0.

Donne différentes écritures fractionnaires de 0.

2.2 Ecriture fractionnaire des rationnels.

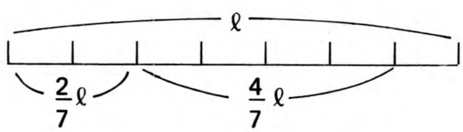
Nous pouvons dire maintenant que tout nombre rationnel admet une écriture de la forme $\frac{a}{b}$ où

a est un entier relatif,
b est un entier relatif différent de 0.

Nous pouvons nous demander s'il est possible de donner un sens à l'écriture $\frac{a}{0}$ où a est un entier relatif. Nous répondrons à cette question un peu plus loin.

III – ECRITURES FRACTIONNAIRES AYANT MEME DENOMINATEUR.

3.1 *Observe ce dessin.*



Tu as sûrement envie de donner un sens à l'écriture $\frac{2}{7} + \frac{4}{7}$.

Lequel ?

Par contre nous ne pouvons toujours pas donner un sens à l'écriture

$$\frac{4}{3} + \frac{11}{7}.$$

C'est pour cela que nous allons essayer de trouver des écritures de $\frac{4}{3}$ et $\frac{11}{7}$ ayant même dénominateur.

Recopie et complète les égalités suivantes.

$\frac{4}{3} = \frac{\ldots}{21}$; $\frac{11}{7} = \frac{\ldots}{21}$.

Remarque que $21 = 3 \times 7$.

Fais un travail analogue pour $\frac{-5}{9}$ *et* $\frac{1}{8}$, *pour* -2 *et* $\frac{7}{-4}$, *pour* 0 *et* $\frac{2}{31}$, *pour* $\frac{9}{222}$ *et* $\frac{13}{333}$.

Généralisons.

Soit a et b deux entiers relatifs, c et d deux entiers relatifs non nuls.

Fais un travail analogue pour $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$.

3.2 Reprenons $\frac{9}{222}$ et $\frac{13}{333}$.

Tu aurais probablement mieux aimé ne pas avoir à calculer le produit de 222 et 333. Ce n'était pas la peine.

Remarque que 666 est un multiple commun à 222 et 333.

Recopie et complète :

$\frac{9}{222} = \frac{\quad}{666}$ *et* $\frac{13}{333} = \frac{\quad}{666}$.

Pour faire ce travail, on doit chercher un multiple commun aux dénominateurs. On choisit le multiple commun qui nous demande le moins d'effort. Souvent c'est le plus petit. C'était le cas dans l'exercice précédent.

Exercices.

Fais un travail analogue pour $\frac{6}{4}$ *et* $\frac{-11}{12}$; $\frac{7}{3}$ *et* $\frac{5}{6}$; $\frac{-3}{4}$ *et* $\frac{11}{6}$; $\frac{7}{15}$ *et* $\frac{-13}{24}$; 3 *et* $\frac{7}{6}$; $\frac{5}{108}$ *et* $\frac{-11}{60}$; $\frac{11}{24}$ *et* $\frac{3}{32}$; $\frac{7}{15}$ *et* $\frac{25}{-36}$; $\frac{1}{404}$ *et* $\frac{1}{303}$; 1,5 *et* $\frac{-7}{5}$.

3.3 Refaisons le même travail pour

$$\frac{8}{40} \text{ et } \frac{77}{66}.$$

Nous remarquons que $40 = 2 \times 20$ et que $66 = 2 \times 33$.

Nous pouvons prendre comme multiple commun $2 \times 20 \times 33$ c'est-à-dire 1 320.

Recopie et complète.

$\frac{8}{40} = \frac{\quad}{1\,320}$; $\frac{77}{66} = \frac{\quad}{1\,320}$.

On peut procéder plus simplement en remarquant que

$$\frac{8}{40} = \frac{1}{5} \text{ et que } \frac{77}{66} = \frac{7}{6}.$$

Achève le travail en utilisant ces écritures.

Exercices.

Fais un travail analogue pour

$\frac{12}{48}$ *et* $\frac{-24}{32}$; $\frac{84}{90}$ *et* $\frac{-156}{108}$; -7 *et* $\frac{-15}{3}$.

3.4 Cas de trois fractions.

Nous allons chercher des écritures fractionnaires des nombres $\frac{-4}{15}$, $\frac{7}{6}$ et $\frac{-5}{12}$ qui ont le même dénominateur.

Nous avons décomposé 15, 6 et 12 en produit de nombres premiers et nous avons trouvé que

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \times 5\,, \\ 6 &= 2 \times 3\,, \\ 12 &= 2 \times 2 \times 3\,. \end{aligned}$$

Montre que $2 \times 2 \times 3 \times 5$, *c'est-à-dire* 60, *est un multiple commun à* 15, 6 *et* 12.

Recopie et complète les égalités suivantes.

$$\frac{-4}{15} = \frac{\;}{60} \quad \textit{et} \quad \frac{7}{6} = \frac{\;}{60} \quad \textit{et} \quad \frac{-5}{12} = \frac{\;}{60}\,.$$

Remarque que tu aurais pu prendre, comme même dénominateur des écritures fractionnaires, le nombre $15 \times 6 \times 12$ c'est-à-dire 720 : le travail aurait été alors moins facile.

Fais un travail analogue pour $\frac{3}{7}$, $\frac{-4}{21}$ *et* $\frac{17}{42}$; $\frac{-4}{3}$, $\frac{5}{-18}$ *et* $\frac{-8}{27}$.

IV – ADDITION DANS $\mathbb{Q}$.

4.1 Au paragraphe 2.1 tu as probablement proposé d'écrire que $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$, et remarqué que $2 + 4 = 6$.

Voici une échelle régulière graduée avec les rationnels qui admettent une écriture fractionnaire ayant 7 pour dénominateur.

$$-\frac{10}{7} \quad -\frac{9}{7} \quad -\frac{8}{7} \quad -1 \quad -\frac{6}{7} \quad -\frac{5}{7} \quad -\frac{4}{7} \quad -\frac{3}{7} \quad -\frac{2}{7} \quad -\frac{1}{7} \quad 0 \quad \frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{6}{7} \quad 1 \quad \frac{8}{7} \quad \frac{9}{7}$$

Reprends le curseur utilisé dans [D2, *page* 71], *ou refais-en un. Place-le en face du barreau d'abscisse* 0 ; *déplace-le de* $\frac{2}{7}$ *vers la droite puis de* $\frac{4}{7}$ *vers la droite.*

Le curseur est alors en face du barreau d'abscisse $\frac{6}{7}$: ce que tu as proposé d'écrire semble donc raisonnable.

Tu sais que $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ et que $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$.

Compare $\frac{12}{14}$ *et* $\frac{6}{7}$.

Nous pouvons donc écrire que $\frac{8+4}{14} = \frac{4+2}{7}$.

4.2 Généralisation.

Nous allons maintenant définir une addition dans $\mathbb{Q}$ de la manière suivante.
Soit u et v deux rationnels.
Si $\frac{a}{m}$ et $\frac{b}{m}$ sont deux écritures fractionnaires de u et v, nous dirons que le rationnel $\frac{a+b}{m}$ est la somme de u et v et nous écrirons :

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Remarque.

Ce que nous avons fait au paragraphe III te montre qu'étant donnés deux rationnels, il est toujours possible d'en donner des écritures fractionnaires de même dénominateur. Tu es donc en mesure maintenant de calculer la somme de deux rationnels quelconques.

C'est d'ailleurs certainement ce que tu as fait dans le dernier exercice du paragraphe 4.1 ; tu as en effet certainement écrit que

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad ; \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12}.$$

On dit souvent que l'on a REDUIT LES FRACTIONS A UN MEME DENOMINATEUR ; ici ce dénominateur commun est 12.

4.3 Exercices.

Calcule les nombres suivants :

$$\frac{-7}{15} + \frac{18}{15} \quad ; \quad \frac{-11}{9} + \frac{-23}{9} \quad ; \quad -\frac{13}{12} + \frac{10}{12} \quad ; \quad \frac{19}{17} + \frac{15}{17} \quad ; \quad \frac{2}{7} + \frac{-4}{7} + \frac{5}{7}.$$

Calcule les nombres suivants :

$$\frac{-4}{12} + \frac{9}{4} \quad ; \quad \frac{7}{15} + \frac{8}{25} \quad ; \quad 1 + \frac{-7}{12} \quad ; \quad \frac{-16}{28} + \frac{-8}{42} \quad ; \quad 1{,}5 + \frac{4}{30} \quad ; \quad \frac{-11}{13} + 2 \quad ;$$

$$\frac{-8}{206} + \frac{4}{103} \quad ; \quad 0 + \frac{1}{11} \quad ; \quad \frac{-1{,}1}{1{,}2} + \frac{0{,}3}{0{,}4} \quad ; \quad -3 + \frac{1{,}2}{0{,}3}.$$

4.4 Retour sur l'addition dans $\mathbb{D}$.

Tu as calculé dans le paragraphe I des sommes de décimaux. Tu as certainement utilisé pour cela la forme décimale de ces nombres. Mais ces nombres sont aussi des rationnels.

Additionne-les en utilisant la définition du paragraphe 4.2. *Que constates-tu ?*

Nous admettrons que ce que tu as constaté sur quelques exemples est général.

4.5 Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$.

Soit a, b et c trois entiers relatifs et m un entier relatif différent de 0.

Justifie les égalités suivantes.

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)+\frac{c}{m}=\frac{a}{m}+\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right) \ ;$$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{b}{m}+\frac{a}{m} \ ;$$

$$\frac{a}{m}+\frac{0}{m}=\frac{a}{m}.$$

Le rationnel $\frac{a}{m}$ *a un symétrique pour l'addition : lequel ?*

Les propriétés précédentes permettent d'affirmer que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe commutatif.

Remarque.

Si u est un rationnel, on note évidemment $-u$ son opposé.

4.6 Conséquences des propriétés du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.

Soit u, v et w trois éléments de $\mathbb{Q}$. On suppose que $u+w=v+w$.

Penses-tu que $u=v$ *?*

Nous allons voir si tu as raison.
Si $u+w=v+w$, alors $(u+w)+(-w)=(v+w)+(-w)$.

Justifie les égalités suivantes.

$$u+(w+(-w))=v+(w+(-w)),$$

$$u+0=v+0,$$

$$u=v.$$

Dans le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ on peut faire des soustractions.

Résous dans $\mathbb{Q}$ *l'équation en* u *suivante.*

$$\frac{3}{4}+u=-\frac{2}{7}.$$

Bien sûr, $-\frac{2}{7}-\frac{3}{4}$ est une autre écriture du rationnel $-\frac{2}{7}+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Exercice.

Calcule $\frac{18}{72}-\frac{45}{63}$; $\frac{93}{140}+\frac{121}{22}-\frac{9}{75}$.

Soit u et v deux rationnels. L'opposé de $u+v$ est $-(u+v)$.

Donne d'autres écritures de ce nombre et justifie ta réponse.

Exercices.

Tu sais que $-\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{5}\right)=-\frac{2}{7}-\frac{4}{5}$.

Calcule $\left(\frac{4}{5}+\frac{16}{7}\right)-\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{5}\right)$.

Tu as peut-être calculé ce nombre mentalement : c'est que tu as utilisé les propriétés du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.

Calcule $\left(1{,}5 + \frac{2}{3} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right)$.

Soit x et y deux rationnels.

Donne une écriture plus brève des rationnels suivants.

$x + \frac{3}{4} - (x - \frac{1}{2})$; $x + \frac{5}{13} + (y - 1)$; $-x - \frac{3}{7} - (-x - \frac{10}{7})$; $1 - (x - y + \frac{3}{2})$.

Q6 Zéro et multiplication dans $\mathbb{Q}$

I – ZERO ET MULTIPLICATION.

1.1 Multiplication par **0**.

Soit d un décimal. Tu sais que $d \times 0 = 0$.

Soit u un rationnel et $\frac{a}{b}$ une écriture fractionnaire de u. Tu sais qu'on peut écrire que $0 = \frac{0}{1}$ et aussi que

$$0 = \frac{0 \times a}{1 \times b}.$$

C'est pourquoi on décide que, si u est un rationnel,

$$0 \times u = 0.$$

1.2 Cherchons si $(\mathbb{Q}, \times)$ est un groupe.

Soit u, v et w trois éléments de $\mathbb{Q}$.

Est-ce que, comme dans $\mathbb{Q}^*$,

$u \times v = v \times u$?

$(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$?

$u \times 1 = u$?

u possède un inverse ?

1.3 Nous avons montré la propriété suivante.

Soit u, v et w trois éléments de $\mathbb{Q}^*$;

si $uw = vw$ alors $u = v$.

Examinons si elle est vraie dans $\mathbb{Q}$.

Essaie. Qu'en penses-tu ?

II – RETOUR SUR LES QUOTIENTS.

2.1 Tu te rappelles que dans [Q5, page 138] nous nous étions posé la question suisuivante : est-il possible de donner raisonnablement un sens à l'écriture $\frac{a}{0}$ où a est un entier relatif.

Nous allons répondre à la question dans le cas, plus général, où a est rationnel.

2.2 Examinons d'abord le cas où le rationnel a est différent de 0. Supposons qu'on décide que $\frac{a}{0}$ est un rationnel ; appelons-le y :

$$y = \frac{a}{0}.$$

Alors $$0 \times y = a.$$

Or le produit de 0 et de y est 0.

Donc si $a \neq 0$, il n'existe pas de rationnel y tel que $0 \times y = a$. C'est pourquoi nous ne donnerons pas de sens à l'écriture $\frac{a}{0}$ dans le cas où a est un rationnel non nul.

2.3 Nous allons maintenant chercher si $\frac{0}{0}$ peut être l'écriture d'un rationnel.

Appelons y ce rationnel :

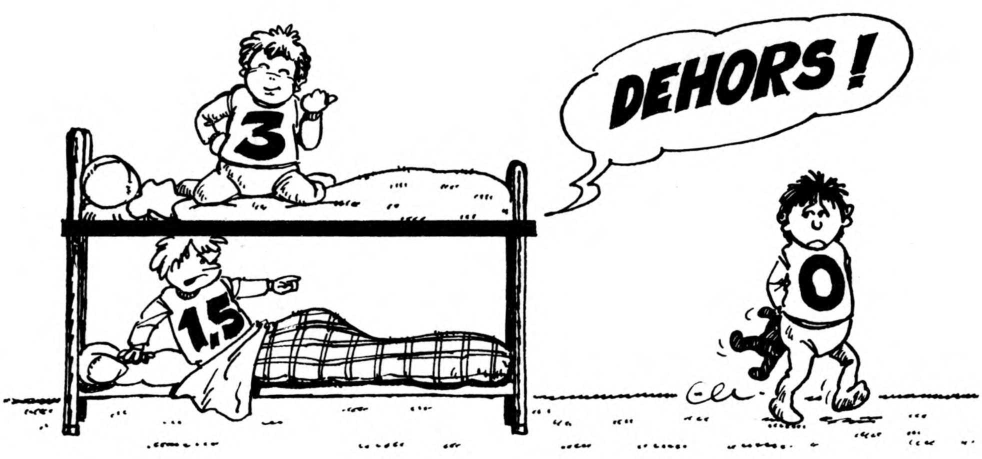
$$y = \frac{0}{0}.$$

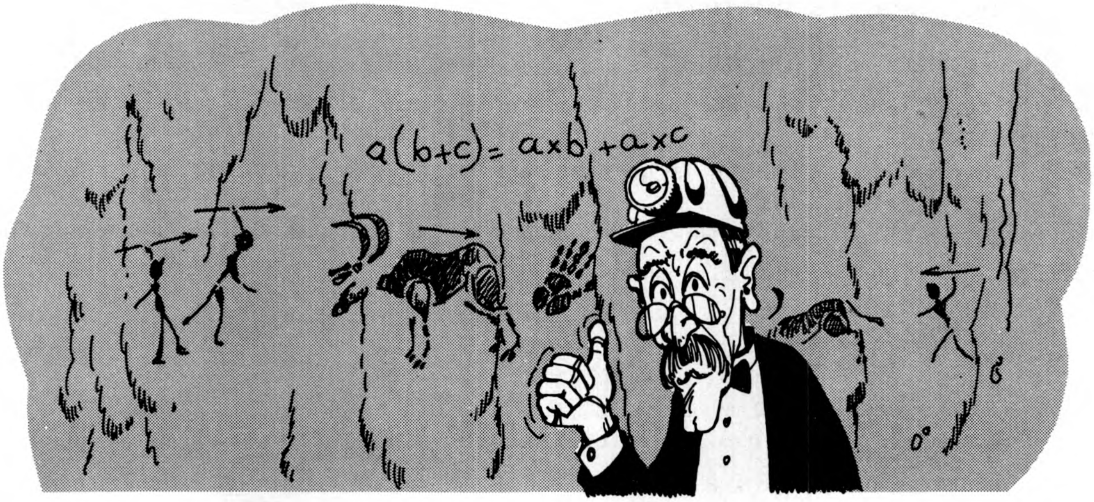
Alors $$0 \times y = 0.$$

Constate que $0 \times 2 = 0$ et $0 \times \frac{4}{3} = 0$.

Faut-il décider que $\frac{0}{0} = 2$, ou que $\frac{0}{0} = \frac{4}{3}$, ou que...... ? C'est bien embarassant.

Tu vois pourquoi il n'est pas possible de donner un sens à l'écriture $\frac{0}{0}$.





III – DISTRIBUTIVITE.

3.1 Soit a, b et c trois entiers relatifs et m et p deux entiers relatifs non nuls.

Démontre que $\frac{c}{p} \times (\frac{a}{m} + \frac{b}{m}) = \frac{c}{p} \times \frac{a}{m} + \frac{c}{p} \times \frac{b}{m}$.

Tu as démontré que si u, v et w sont trois rationnels,

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w.$$

3.2 Exercices.

Calcule $\frac{20}{3} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{6}{5}\right)$; $\frac{-15}{17} \times \frac{5}{18} + \frac{-15}{17} \times \frac{13}{18}$; $\frac{13}{11} \times \frac{7}{15} + \frac{13}{11} \times \frac{8}{15} + \frac{13}{11}$; $\frac{-12}{7} \times \frac{6}{19} - \frac{-12}{7} \times \frac{44}{19} - \frac{12}{7}$.

Soit a et b deux rationnels.

Calcule

$\frac{1}{3} a + \frac{2}{3} a$; $a - \frac{1}{7} a$; $\frac{5}{9} a + \frac{2}{3} a - a$; $\frac{5}{11} ab - 2ab + \frac{17}{11} ab$; $\frac{2}{6} a - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} a + \frac{3}{8}$; $\frac{-4}{7} a + \frac{1}{3} b + a - \frac{1}{2} b + 1$; $\frac{1}{2} (2a + b) + 3 (a - \frac{1}{2} b)$.

Soit y un rationnel. L'opposé de $\frac{4}{3} (y - 1)$ est $-\frac{4}{3} y + \frac{4}{3}$.

Pourquoi ? Calcule $2(y - 2) - \frac{4}{3} (y - 1)$.

Fais le même travail pour $-\frac{3}{2} (3y + 2) - \frac{5}{6} (y - 2) - (1 - 2y)$.

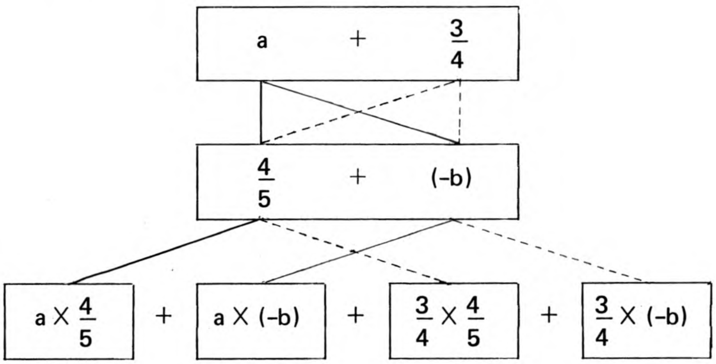
3.3 Produit de sommes et de différences.

Soit a et b deux rationnels. Nous allons donner une autre écriture du nombre $(a + \frac{3}{4})(\frac{4}{5} - b)$.

Ce nombre peut s'écrire

$$(a + \frac{3}{4})(\frac{4}{5} + (-b)) .$$

Le dessin ci-dessous te rappelle comment on s'y prend.



Nous pouvons écrire que

$$(a + \frac{3}{4})(\frac{4}{5} - b) = a \times \frac{4}{5} + a \times (-b) + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \times (-b) ,$$

et donc que

$$(a + \frac{3}{4})(\frac{4}{5} - b) = \frac{4}{5} a - ab + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} b .$$

Fais un travail analogue pour $(a - \frac{1}{3})(b - 2)$; $(a - 1)(b + \frac{1}{2})$; $(-a - \frac{4}{7})(b - \frac{1}{4})$; $(-a - \frac{3}{11})(-b - \frac{5}{2})$.

IV – ADDITION DE QUOTIENTS.

4.1 Nous savons que si a et b sont des entiers relatifs et si m est un entier relatif non nul,

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m} .$$

Mais nous ne savons pas encore s'il en est ainsi dans le cas où a, b et m sont des rationnels.

Explique pourquoi $\frac{-5{,}3}{2{,}1} + \frac{3{,}2}{2{,}1} = \frac{-5{,}3 + 3{,}2}{2{,}1}$.

Vérifie que $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{7}{3}\right)} + \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{3}\right)} = \dfrac{\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{7}{3}\right)}$.

Nous admettrons que, de façon générale, si u et v sont deux rationnels et si w est un rationnel non nul,

$$\frac{u}{w} + \frac{v}{w} = \frac{u+v}{w}.$$

Exercices.

1. *Calcule* $\dfrac{-73{,}4}{\left(\frac{121}{47}\right)} + \dfrac{73{,}4}{\left(\frac{121}{47}\right)}$; $\dfrac{4{,}2}{3{,}1} - \dfrac{1{,}1}{3{,}1}$; $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)} + \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}$.

2. Soit u un rationnel et v un rationnel non nul.

   Ecris les rationnels suivants sous forme d'un quotient de deux rationnels :

$\frac{2}{v} + \frac{5}{v}$; $\frac{u}{3} + \frac{v}{3}$; $\frac{5u}{2v} + \frac{2u}{v}$; $\frac{u}{2} + \frac{2}{v}$; $3 + \frac{1}{v}$; $\frac{u}{v} + \frac{-u}{v}$; $2 - \frac{3}{v}$; $1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{2v}$; $\frac{u}{3v} - \frac{1}{2v} + \frac{2}{v}$.

Q7 Ordre dans $\mathbb{Q}$

I – UNE RELATION D'ORDRE DANS L'ENSEMBLE DES RATIONNELS.

1.1 Rangeons des nombres rationnels.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 10a, nous avons placé quelques barreaux d'une échelle régulière graduée.

Place les points d'abscisses

$0{,}5$; $\frac{11}{6}$; $-\frac{2}{3}$; $1{,}5$; $\frac{1}{4}$; $0{,}8$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{6}$.

Tu pourras utiliser ton double décimètre.

Si on parcourt la droite dans le sens AB, les points sont rangés de la gauche vers la droite : par exemple, si on appelle E le point d'abscisse $\frac{11}{6}$ et F le point d'abscisse $\frac{4}{3}$, tu vois que F est à gauche de E.

Nous écrirons : $\frac{4}{3} < \frac{11}{6}$, ce qui se lit : «$\frac{4}{3}$ est inférieur à $\frac{11}{6}$».

On peut aussi écrire : $\frac{11}{6} > \frac{4}{3}$, ce qui se lit : «$\frac{11}{6}$ est supérieur à $\frac{4}{3}$».

Utilise ton dessin pour ranger, en commençant par le plus petit, les nombres : 1 ; -1 ; 0 ; 2 ; 0,5 ; $\frac{11}{6}$; $-\frac{2}{3}$; 1,5 ; $\frac{1}{4}$; 0,8 ; $-\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$ *et* $-\frac{5}{6}$.

Exercice.

Range les rationnels suivants en commençant par le plus grand : $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{-14}{-7}$; $\frac{6}{14}$; $-\frac{2}{7}$; $-\frac{-15}{-7}$; $\frac{-14}{7}$; $\frac{7}{7}$; $\frac{-3}{7}$; $\frac{-17}{7}$; 2 ; $\frac{9}{7}$; $\frac{-19}{7}$; $\frac{-9}{7}$; $-\frac{11}{7}$.

Tu peux utiliser le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 10a.

Exercice.

Tu sais que $\frac{7}{8} < 1$.

Vérifie que $\frac{23}{8} = 2 + \frac{7}{8}$.

On peut obtenir cette égalité en cherchant le quotient de 23 par 8.

Sur le dessin numéro 3 de la feuille de manipulation 10a le point d'abscisse $\frac{23}{8}$ est entre les points d'abscisses 2 et 3.

Place-le approximativement. Compare avec tes camarades.

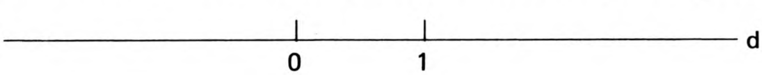
Fais le même travail pour le rationnel $\frac{86}{21}$.

Comme 3 est plus petit que 4, ce que tu viens de faire permet facilement d'affirmer que $\frac{23}{8} < \frac{86}{21}$.

Fais un travail analogue pour ranger les rationnels $\frac{37}{19}$ *et* $\frac{63}{31}$.

1.2 Ordre dans $\mathbb{Q}$.

Soit une droite d et sur cette droite, une échelle régulière graduée.

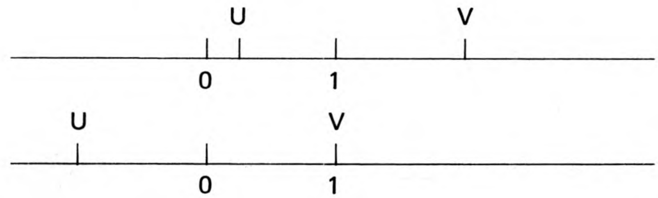


Soit u et v deux rationnels. On peut décider que u et v sont les abscisses de deux points de la droite d. Appelons U et V ces points.

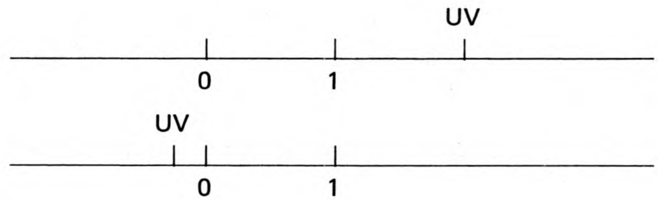
Trois situations peuvent se présenter.

Nous avons illustré chacune d'elles par 2 dessins.

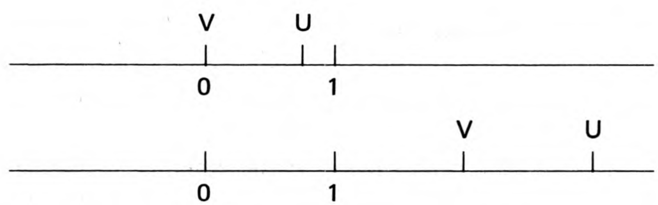
Le point U est à gauche du point V.
On dit que u est plus petit que v.



Les points U et V sont confondus : u et v sont deux écritures d'un même rationnel.



Le point U est à droite du point V.
On dit que u est plus grand que v.



Si on est dans le premier cas, on écrit que $u < v$ ou que $v > u$.

Si on est dans le deuxième cas, on écrit que $u = v$.

Si on est dans le troisième cas, on écrit que $v < u$ ou que $u > v$.

Dans le premier ou le deuxième cas, on peut aussi écrire que $u \leqslant v$, ou encore que $v \geqslant u$.

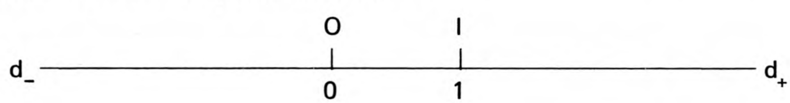
Tu vois qu'on a la propriété suivante :

Soit u et v deux rationnels.

Si on sait que $u \leqslant v$ et que $v \leqslant u$, alors on peut affirmer que $u = v$.

II – NOMBRES POSITIFS - NOMBRES NEGATIFS.

Soit une droite d et sur cette droite une échelle régulière graduée. Appelons O le point d'abscisse 0 et I le point d'abscisse 1.



Le point O partage la droite en deux DEMI-DROITES ;
celle qui contient I : nous la noterons d_+ ;
celle qui ne contient pas I : nous la noterons d_-.

Soit u un rationnel non nul et U le point d'abscisse u.

Si le point U appartient à d_+, on dit que u est un rationnel positif. On dit encore que le signe de u est plus.

Si le point U appartient à d_-, on dit que u est un rationnel négatif. On dit encore que le signe de u est moins.

Nous décidons que, comme dans ID, le nombre 0 n'est ni positif, ni négatif.

Reprenons les nombres étudiés au paragraphe 1.1.

$\frac{2}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{-14}{-7}$; $\frac{6}{14}$; $-\frac{2}{7}$; $\frac{-14}{7}$; $\frac{7}{7}$; $-\frac{-15}{-7}$; $\frac{-3}{7}$; $-\frac{17}{7}$; 2 ; $\frac{9}{7}$; $\frac{-19}{7}$; $\frac{-9}{7}$; $-\frac{11}{7}$.

Quels sont ceux qui sont positifs ? Négatifs ?

Tu vois que

les rationnels positifs sont ceux qu'on peut écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers de même signe ;

les rationnels négatifs sont ceux qu'on peut écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers de signes différents, ou encore sous la forme $-\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers de même signe.

Tu vois aussi que tout nombre négatif est inférieur à tout nombre positif.

III – ORDRE ET ADDITION.

3.1 Ordre et opposés.

Soit a, b, c et d quatre rationnels tels que
a et b sont positifs,
c et d sont négatifs,
et $d \leqslant c \leqslant a \leqslant b$.

Le dessin numéro 4 de la feuille de manipulation 10a illustre cette situation.

Place sur ces dessins les points d'abscisses $-a$; $-b$; $-c$ *et* $-d$.
Range les nombres $-a$; $-b$; $-c$ ***et*** $-d$ ***en commençant par le plus petit. Conclus.***

Soit u un rationnel.
Peux-tu dire si $-u$ *est un nombre négatif ?*

Nous admettrons la propriété suivante.
Soit u et v deux nombres rationnels :

$$\text{si } u \leqslant v \text{ alors } -u \geqslant -v .$$

3.2 Ordre et addition.

Sur le dessin numéro 5 de la feuille de manipulation 10a, nous avons placé les points A, B, C et D d'abscisses $\frac{5}{6}$, $-\frac{2}{3}$, 2 et $-\frac{3}{2}$.

Découpe l'échelle du dessin numéro 6. Place-la contre celle du dessin numéro 5 de façon que les zéros coïncident, puis fais-la glisser pour additionner 1 *aux abscisses des points* A, B, C *et* D.

Tu obtiens les points A′, B′, C′ et D′.

Sont-ils rangés dans le même ordre que les points A, B, C *et* D *?*

Range en commençant par le plus petit les nombres

$\frac{5}{6} + 1$; $-\frac{2}{3} + 1$; $2 + 1$ *et* $-\frac{3}{2} + 1$.

Recommence le même travail en additionnant $\frac{2}{3}$ *aux abscisses de* A, B, C *et* D.

Range en commençant par le plus petit les nombres

$\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$; $2 + \frac{2}{3}$ *et* $-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}$.

Recommence le même travail en additionnant $-\frac{4}{3}$ *aux abscisses de* A, B, C *et* D.

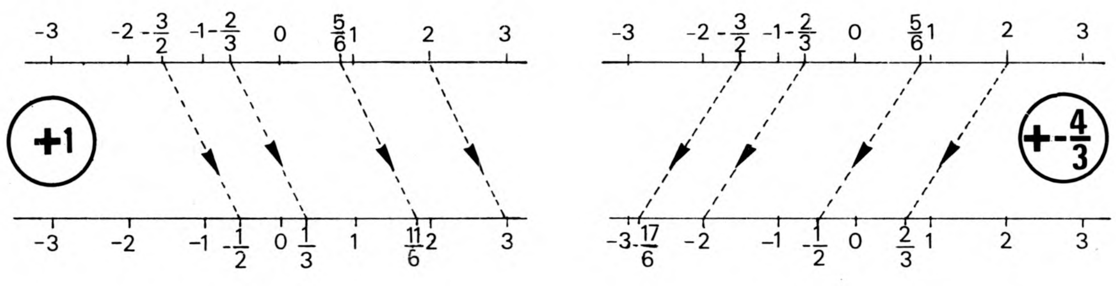
Range en commençant par le plus petit les nombres

$\frac{5}{6} + -\frac{4}{5}$; $-\frac{2}{3} + -\frac{4}{3}$; $2 + -\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{2} + -\frac{4}{3}$.

Nous admettrons la propriété suivante.

Soit a, b et c trois nombres rationnels :

si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.



Exercice.

1. Soit u et v deux rationnels. On suppose que $u + \frac{2}{3} \leqslant v + \frac{2}{3}$.

   Montre que $u \leqslant v$.

2. Soit w un rationnel. On suppose que $w + \frac{7}{13} \leqslant -\frac{6}{13}$.

Montre que $w \leqslant -1$.

IV – ORDRE ET MULTIPLICATION.

4.1 Ordre et inverse.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 10b, nous avons placé les points d'abscisses $\frac{5}{6}$, 2 et $\frac{4}{3}$.

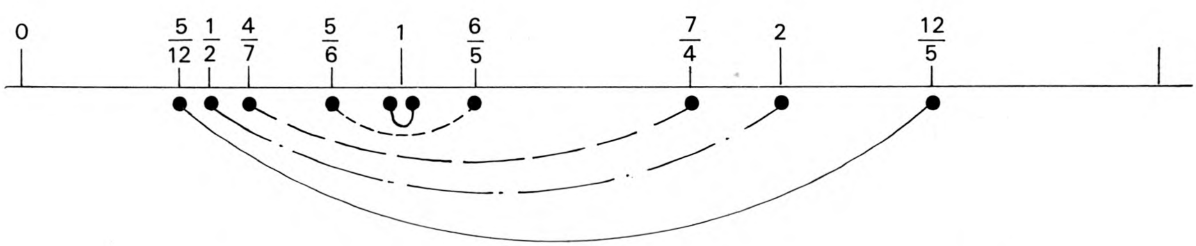
En utilisant ce dessin, range les inverses de ces trois nombres. Que constates-tu ?

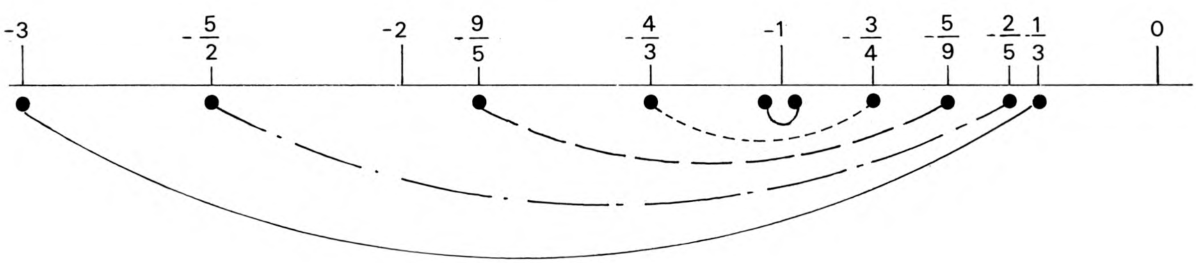
Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 10b, nous avons placé les points d'abscisses -2, $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{4}{5}$.

En utilisant ce dessin, range les inverses de ces trois nombres. Que constates-tu ?

Nous admettrons la propriété suivante.
Soit u est v deux nombres rationnels non nuls de même signe :

$$\text{si } u \leqslant v, \text{ alors } \frac{1}{u} \geqslant \frac{1}{v}.$$





Exercice.

Soit a un rationnel négatif et b un rationnel positif. Evidemment $a \leqslant b$.

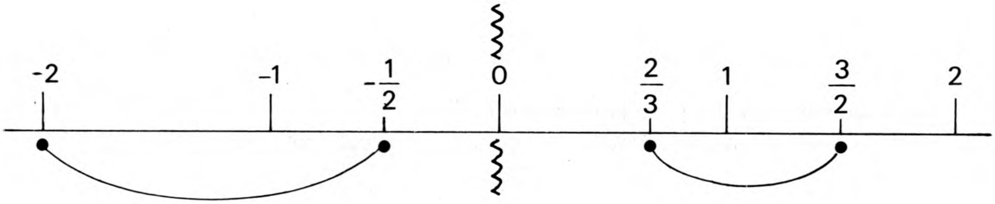
Penses-tu que $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$ *?*

A-t-on rencontré une telle difficulté lorsqu'on a cherché à ranger les opposés de nombres rationnels ?

Exercice.

Soit u *un nombre rationnel tel que* $u \geqslant 1$ *: que peux-tu dire de son inverse ?*

Soit v *un nombre rationnel tel que* $v \leqslant -1$ *: que peux-tu dire de son inverse ?*



4.2 Signe d'un produit.

Choisis deux rationnels positifs. Multiplie-les. Que constates-tu ?
Choisis deux rationnels négatifs. Multiplie-les. Que constates-tu ?
Choisis deux rationnels de signes contraires. Multiplie-les. Que constates-tu ?
Compare avec tes camarades.

Avons-nous démontré que
le produit de deux nombres rationnels de même signe est un rationnel positif,
le produit de deux nombres rationnels de signes contraires est un rationnel négatif ?

Nous admettrons cette propriété.

Dans le paragraphe 4.1, tu as remarqué qu'un rationnel et son inverse sont de même signe. Nous allons essayer de comprendre pourquoi.

Tu sais que le produit d'un nombre et de son inverse est 1, qui est un nombre positif. Donc le nombre et son inverse doivent avoir le même signe.

Exercice.

Quel est le signe de $\dfrac{\left(\dfrac{373}{1\,002}\right)}{-4{,}573}$ *?*

Soit a *et* b *deux rationnels non nuls : que peux-tu dire du signe de* $\frac{a}{b}$ *?*

4.3 Multiplication par **-1.**

Choisis deux rationnels positifs et deux rationnels négatifs. Multiplie ces nombres par −1. ***Qu'observes-tu ?***

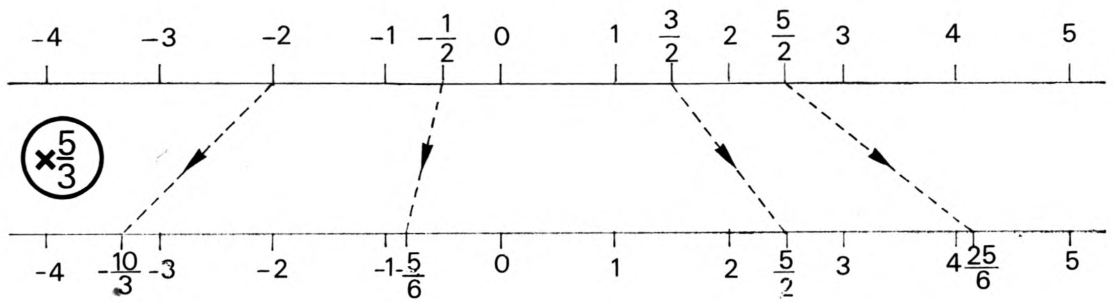
4.4 Multiplication par un nombre positif.

Sur le dessin numéro 3 de la feuille de manipulation 10b, nous avons placé les points A, B, C et D d'abscisses -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$.

Remarque que le nombre $\frac{5}{3}$ est plus grand que 1.

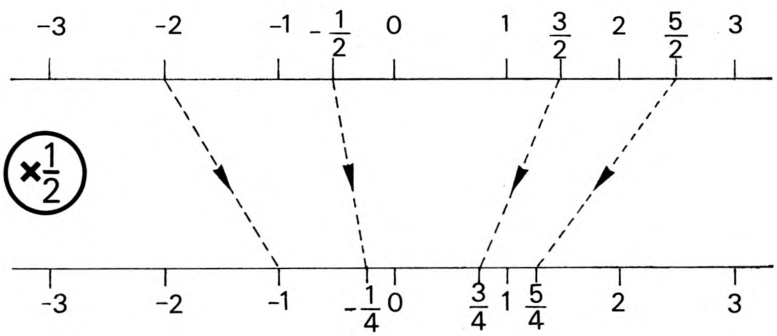
Multiplie les abscisses de A, B, C *et* D *par* $\frac{5}{3}$. *Appelle* A', B', C' *et* D' *les points qui ont pour abscisses les nombres que tu viens d'obtenir.*

Place ces points sur la droite. Qu'observes-tu ?



Remarque que le nombre $\frac{1}{2}$ est un nombre positif plus petit que 1.

Multiplie les abscisses de A, B, C *et* D *par* $\frac{1}{2}$. *Tu obtiens quatre points* A'', B'', C'' *et* D''. *Qu'observes-tu ?*

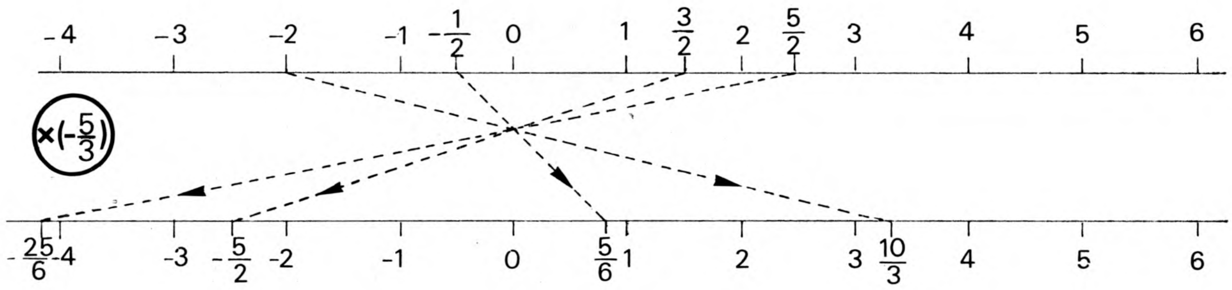


4.5 Multiplication par un nombre négatif.

Sur le dessin numéro 4 de la feuille de manipulation 10b, nous avons reproduit le dessin numéro 3.

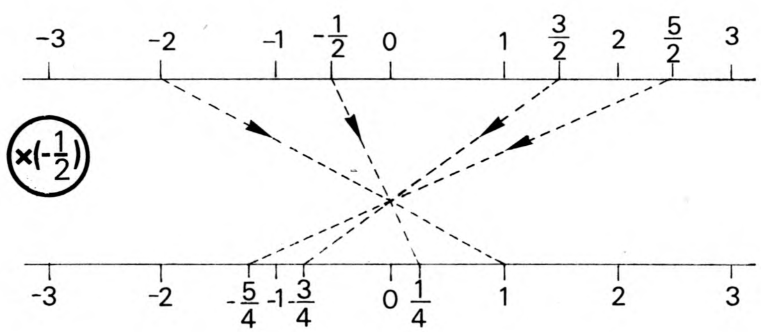
Remarque que le nombre $-\frac{5}{3}$ est inférieur à -1.

Multiplie les abscisses de A, B, C *et* D *par* $-\frac{5}{3}$. *Tu obtiens quatre points* A', B', C' *et* D'. *Qu'observes-tu ?*



Remarque que le nombre $-\frac{1}{2}$ est un nombre négatif supérieur à -1.

Multiplie les abscisses de A, B, C *et* D *par* $-\frac{1}{2}$. *Tu obtiens quatre points* A'', B'', C'' *et* D''. *Qu'observes-tu ?*



4.6 Réflexions sur les exercices précédents.

Tu as sans doute remarqué que dans le paragraphe 4.4 les points A', B', C' et D' et les points A'', B'', C'' et D'' sont rangés dans le même ordre que les points A, B, C et D.

Par contre, dans le paragraphe 4.5, ils sont rangés en sens contraire.

Nous admettrons les propriétés suivantes.

Soit a et b deux rationnels et c un rationnel *positif* :

$$\text{si } a \leqslant b, \text{ alors } ac \leqslant bc.$$

Soit a et b deux rationnels et c un rationnel *négatif* :

$$\text{si } a \leqslant b, \text{ alors } ac \geqslant bc.$$

faisons le point

I — LES RATIONNELS.

Dans ce chapitre, nous avons étudié de nouveaux nombres, les nombres rationnels, et nous avons noté $\mathbb{Q}$ leur ensemble.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction. Une fraction est une écriture du type $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

Mais les nombres rationnels admettent d'autres écritures que les fractions. Par exemple 5, $-1{,}71$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{0{,}7}{13}$, $\frac{\left(\frac{7}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)}$ sont aussi des écritures de nombres rationnels.

Les nombres décimaux, et en particulier les nombres entiers, sont des nombres rationnels ; mais il existe des nombres rationnels qui ne sont pas décimaux, par exemple $\frac{1}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{11}{7}$.

Nous n'avons pas donné de sens aux écritures de la forme $\frac{a}{0}$ où $a \in \mathbb{Z}$.

Soit a un rationnel et b et k deux rationnels non nuls ; alors $\frac{ka}{kb}$ et $\frac{a}{b}$ sont deux écritures du même rationnel, autrement dit $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

En particulier, un rationnel positif peut toujours s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers naturels étrangers. Une telle écriture est appelée fraction irréductible.

Un rationnel négatif peut toujours s'écrire sous la forme $-\frac{a}{b}$ où $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible.

II – MULTIPLICATION DES RATIONNELS.

Nous avons défini une multiplication dans $\mathbb{Q}$ de la manière suivante.

Soit u et v deux rationnels, $\frac{a}{a'}$ une écriture fractionnaire de u, $\frac{b}{b'}$ une écriture fractionnaire de v ; le produit de u et de v est le rationnel dont une écriture est $\frac{a \times b}{a' \times b'}$. Donc

$$\frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}.$$

Cette formule est encore vraie si a et b sont des rationnels et a' et b' des rationnels non nuls.

Tout nombre rationnel non nul a un inverse.

C'est la grande nouveauté apportée par les rationnels. L'ensemble $\mathbb{D}$ dans lequel nous avions travaillé jusqu'alors ne possède pas une telle propriété. Plus précisément :

- certains décimaux non nuls ont un inverse dans $\mathbb{D}$, par exemple 4 ; 0,4 ; 2,5 ; 0,125,
- d'autres non, par exemple 3 ; 7 ; 1,71 ; 0,41.

On peut donc dire qu'on a introduit l'ensemble $\mathbb{Q}$ pour avoir un ensemble de nombres qui possède cette propriété. De la même façon, nous avions introduit l'ensemble $\mathbb{Z}$ en classe de sixième pour avoir un ensemble de nombres où tout nombre a un opposé.

Si u est un rationnel non nul, nous avons noté son inverse u^{-1} ou $\frac{1}{u}$; donc $u^{-1} \times u = 1$.

Si $\frac{c}{d}$ est une écriture fractionnaire de u, alors $\frac{d}{c}$ est une écriture fractionnaire de u^{-1}.

Rappelons une nouvelle fois que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Q}$.

Soit v un rationnel et u un rationnel non nul. Il existe un rationnel unique q tel que $v = u \times q$. Ce rationnel q est le quotient de v par u et $q = v : u = v \times u^{-1}$.

Si $\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire de v et $\frac{c}{d}$ une écriture fractionnaire de u, on peut écrire que

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

En particulier, si r est un entier relatif et s un entier relatif non nul, le rationnel $\frac{r}{s}$ n'est autre que le quotient de r par s.

III – ADDITION DES RATIONNELS.

Soit u et v deux rationnels.

Il est possible de donner des écritures fractionnaires de u et de v qui aient le même dénominateur. Par exemple, si $\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire de u et $\frac{c}{d}$ une écriture fractionnaire de v, les écritures $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$ répondent à cette question. Il peut se faire qu'il y en ait de plus simples.

Soit alors $\frac{p}{m}$ et $\frac{q}{m}$ deux écritures fractionnaires de même dénominateur de u et de v ; le rationnel $\frac{p+q}{m}$ est la somme de u et de v et on peut écrire que

$$\frac{p}{m}+\frac{q}{m}=\frac{p+q}{m}.$$

Cette formule est encore vraie si p et q sont des rationnels et m un rationnel non nul.

IV – PROPRIETES DES OPERATIONS ET ORDRE DANS $\mathbb{Q}$.

Dans [R], nous allons introduire un nouvel ensemble de nombres qui lui aussi sera muni d'une addition, d'une multiplication et d'une relation d'ordre. A la fin de ce chapitre, nous récapitulerons les propriétés principales des opérations et de l'ordre pour tous les ensembles de nombres que nous connaissons.

C'est là qu'en particulier, nous réviserons les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{Q}$ et ce que signifient des phrases comme $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe commutatif, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

un peu d'histoire

Les fractions égyptiennes.

Au milieu du 19ème siècle, un Ecossais nommé Henri Rhind découvrit en Egypte un document assez extraordinaire. C'était un rouleau d'environ 30 centimètres de large qui, une fois déroulé, avait à peu près 6 mètres de long ; il était en papyrus, ce produit qui tenait lieu de papier aux Egyptiens de l'antiquité.

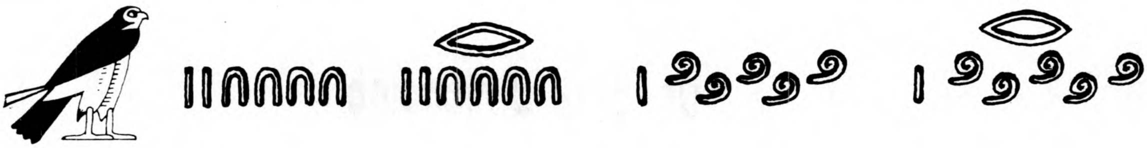
L'étude de ce papyrus devait montrer qu'il avait été écrit entre 1700 et 1600 avant J.C., par un scribe nommé Ahmès. A cette époque, une invasion venue d'Asie avait mis fin pour un temps à l'indépendance et à la prospérité de l'Egypte. A peu près à la même époque, en Europe, les Celtes commençaient à s'installer en Gaule ; ils utilisaient le bronze pour fabriquer des armes, des outils et des bijoux, mais ils ignoraient l'usage du fer, et ne connaissaient pas l'écriture.

Par contre il y avait déjà plus de 1200 ans que les Egyptiens utilisaient les hiéroglyphes pour écrire ; et les grandes pyramides que l'on peut encore voir près de la ville du Caire étaient déjà construites vers 2800 avant J.C. Mais c'est un peu plus tard, vers 1350 avant J.C., que le pharaon Toutankhamon a été enterré dans la tombe qu'on devait découvrir en 1922.

Le papyrus écrit par Ahmès a dû être écrit pour des élèves : il contient de nombreuses questions mathématiques, avec leurs réponses. En particulier, il y est beaucoup question de fractions ; ou plutôt d'inverses de naturels. En effet, les Egyptiens de l'antiquité, à l'exception de 2/3, n'écrivaient pratiquement que les fractions de la forme $\frac{1}{n}$, où n est un naturel supérieur à 1. Leur méthode pour calculer un produit les conduisaient à faire des multiplications par 2 et des additions ; ils étaient donc très intéressés par le double de $\frac{1}{n}$, que nous écrivons tout simplement $\frac{2}{n}$. Le papyrus d'Ahmès contient en particulier une table qui permet d'écrire le double de $\frac{1}{n}$ pour toutes les valeurs impaires de n, de 5 à 101. C'est ainsi qu'on peut y lire que le double de $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, et que le double de $\frac{1}{11}$ est $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$.

Parmi d'autres questions, beaucoup de problèmes sont relatifs aux fractions ; par exemple l'équation en x que nous écrivons $x+\frac{1}{7}x=19$ est proposée ; la solution donnée est $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Tu pourras regarder si elle est correcte.

Cette écriture compliquée des fractions a probablement été l'une des raisons qui ont empêché les Egyptiens de l'antiquité de faire faire de grands progrès à l'algèbre.



Ci-dessus sont écrits en écriture hiéroglyphe, de gauche à droite, les nombres 42, $\frac{1}{42}$, 501 et $\frac{1}{501}$; un oiseau veille sur eux.

exercices et problèmes

1. *Quelle longueur, exprimée en centimètres, représente chacune des fractions de mètre suivantes ?* $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{25}$; $\frac{15}{10}$; $\frac{21}{20}$.

2. *Quelle durée, exprimée en heures, représente chacune des fractions de jour suivantes ?* $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{3}{2}$.

Quelle fraction de jour représente quatre heures ? Seize heures ? Dix-huit heures ?

3. La largeur ℓ d'un rectangle égale trois quarts de sa longueur L.

Exprime ℓ *et* L *en fractions du périmètre* p *de ce rectangle (tu pourras pour cela t'aider d'un dessin).*

4. Un objet est revendu avec un bénéfice égal à deux cinquièmes de son prix d'achat.

Exprime le prix de vente en fraction du prix d'achat ; le prix d'achat en fraction du prix de vente (tu pourras utiliser un schéma).

5. Un objet est revendu avec un bénéfice égal à cinq seizièmes du prix de vente.

Exprime le prix d'achat en fraction du prix de vente ; le bénéfice en fraction du prix d'achat (tu pourras utiliser un schéma).

6. On désigne par ℓ, L et A la largeur, la longueur et l'aire d'un rectangle ; par ℓ', L' et A' la largeur, la longueur et l'aire d'un autre rectangle. On sait que $\ell = \frac{2}{3}\ell'$ et que $L = \frac{2}{3}L'$.

Exprime A *en fraction de* A' *; tu pourras t'aider d'un dessin.*

7. *Recopie et complète :* $\frac{5}{4} = \frac{\dots}{8}$; $\frac{6}{11} = \frac{\dots}{33}$; $\frac{7}{3} = \frac{\dots}{21}$; $2 = \frac{\dots}{3}$; $\frac{7}{6} = \frac{14}{\dots}$; $\frac{8}{5} = \frac{40}{\dots}$; $\frac{9}{11} = \frac{63}{\dots}$; $3 = \frac{18}{\dots}$; $\frac{13}{\dots} = \frac{26}{4}$; $\frac{\dots}{3} = \frac{28}{12}$; $\frac{2}{\dots} = \frac{16}{8}$; $\dots = \frac{45}{9}$.

8. *Donne cinq écritures fractionnaires du nombre* $\frac{5}{3}$ *pour lesquelles le dénominateur est inférieur à* 20.

9. *Donne cinq écritures fractionnaires du nombre* $\frac{12}{18}$ *pour lesquelles le dénominateur est inférieur à* 40.

10. *Donne une écriture fractionnaire du nombre* $\frac{7}{13}$ *pour laquelle le dénominateur est supérieur à* 10 000.

11. *A-t'on le droit d'écrire que* $\frac{15}{18} = \frac{45}{24}$ *? Pourquoi ? Mêmes questions pour les égalités suivantes :* $\frac{8}{6} = \frac{72}{54}$; $\frac{9}{12} = \frac{24}{32}$; $\frac{6}{15} = \frac{15}{25}$.

12. *Calcule* $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$; $\frac{4}{9} \times \frac{7}{8}$; $\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}$; $\frac{1}{11} \times 11$; $\frac{1}{7} \times 5$; $\frac{3}{8} \times 2$; $5 \times \frac{7}{3}$.

13. *Montre que les nombres suivants sont des entiers :* $\frac{2}{3} \times 3$; $\frac{4}{9} \times 18$; $\frac{4}{5} \times \frac{15}{2}$; $14 \times \frac{3}{7}$; $6 \times \frac{10}{4}$; $\frac{1}{101} \times 202$; $\frac{1}{123} \times 123$; $\frac{3}{8} \times \frac{8}{3}$; $\frac{11}{15} \times \frac{30}{11}$.

14. *Calcule :* $\frac{2}{3} \times \frac{6}{4} \times \frac{1}{5}$; $\frac{3}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{5}{9}$; $\frac{7}{4} \times 2 \times 3$; $\frac{6}{11} \times \frac{5}{8} \times 1 \times 22$.

15. Soit a, b, c et d des naturels non nuls.

Donne une autre écriture de chacun des nombres suivants : $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}$; $\frac{2a}{b} \times \frac{c}{d}$; $\frac{4c}{d} \times \frac{d}{4c}$; $\frac{3a}{2b} \times \frac{4c}{d} \times \frac{2a}{b} \times \frac{b}{a}$; $\frac{a}{3} \times \frac{b}{2} \times \frac{c}{4}$; $\frac{b}{5} \times \frac{3}{a} \times \frac{4}{c}$; $\frac{1}{a} \times \frac{2}{b} \times \frac{3}{c}$.

16. *Donne les inverses des nombres suivants :* $\frac{32}{5}$; $\frac{2}{21}$; 23 ; 2,5 ; 4,1 ; 0,01 ; 0,000 1 .

17. Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Donne l'inverse de chacun des nombres suivants : a ; 2a ; $\frac{1}{a}$; $\frac{2}{a}$; $\frac{1}{2a}$; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{(\frac{b}{a})}$; $\frac{b}{2a}$; $\frac{2b}{a}$; $\frac{3b}{2a}$.

18. *Calcule* $\frac{6}{5} : 3$; $\frac{12}{7} : 3$; $\frac{15}{13} : 3$; $\frac{30}{17} : 3$; $\frac{3}{4} : 3$; $\frac{2}{5} : 3$; $\frac{4}{7} : 3$; $\frac{7}{11} : 3$; $\frac{1}{111} : 3$.

19. *Calcule* $\frac{7}{3} : \frac{9}{4}$; $\frac{23}{13} : 2$; $\frac{17}{3} : \frac{1}{2}$; $\frac{9}{4} : \frac{7}{3}$; $1{,}3 : \frac{1}{3}$; $\frac{7{,}2}{1{,}2}$; $\frac{(\frac{2}{9})}{(\frac{5}{4})}$; $\frac{3}{(\frac{8}{3})}$; $\frac{(\frac{1}{0{,}5})}{0{,}2}$.

20. Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Donne une écriture plus simple des rationnels suivants : $\frac{a}{8} : 3$; $\frac{12b}{5a} : 6$; $\frac{3a}{10b} : 6$; $\frac{4}{a} : 2$; $\frac{15a}{7} : a$; $\frac{3b}{2a} : 3b$; $\frac{4a}{9b} : 5a$; $\frac{3a}{2b} : \frac{a}{b}$.

21. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

Donne une écriture plus simple des rationnels suivants.

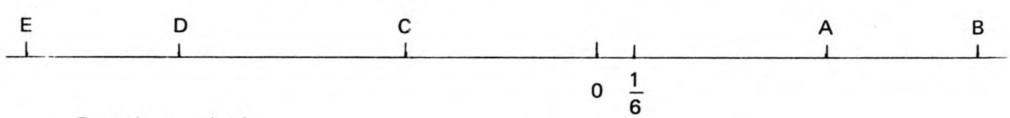
$\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})}$; $\frac{(\frac{a}{b})}{d}$; $\frac{(\frac{2a}{b})}{(\frac{2c}{d})}$; $\frac{(\frac{a}{2b})}{(\frac{c}{2d})}$; $\frac{(\frac{2a}{b})}{(\frac{c}{2d})}$; $\frac{(\frac{a}{2b})}{(\frac{2c}{d})}$; $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{a}{c})}$; $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{b})}$.

22. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

Donne une écriture plus simple des rationnels suivants.

$\frac{a}{(\frac{b}{d})}$; $\frac{(\frac{2a}{b})}{(\frac{3c}{d})}$; $\frac{(\frac{3a}{5b})}{(\frac{c}{4d})}$; $\frac{(\frac{5a}{3b})}{(\frac{5c}{3d})}$; $\frac{(\frac{3a}{2b})}{(\frac{2c}{3d})}$; $\frac{(\frac{2a}{b})}{(\frac{2a}{c})}$; $\frac{(\frac{2a}{5b})}{(\frac{2c}{5b})}$.

23. Voici une droite matérielle ; on a marqué sur cette droite les barreaux d'abscisse 0 et $\frac{1}{6}$ d'une échelle régulière. Cette échelle est graduée par l'ensemble des rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction ayant pour dénominateur 6.



Recopie ce dessin.

Les points A, B, C, D et E sont des barreaux de cette échelle.

Quelle est l'abscisse de chacun de ces points ? Place sur cette échelle les barreaux d'abscisse $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{3}$; $-\frac{4}{6}$; $\frac{-7}{6}$; 1,5 ; $-\frac{1}{3}$; -2 ; $\frac{8}{-3}$.

24. Toutes les écritures suivantes sont des écritures soit du rationnel $-\frac{3}{2}$, soit du rationnel $\frac{4}{-3}$, soit du rationnel $\frac{4}{3}$.

$\frac{-8}{6}$; $\frac{-21}{14}$; $-1{,}5$; $\frac{3}{-2}$; $\frac{-12}{8}$; $\frac{16}{-12}$; $\frac{-15}{10}$; $\frac{-16}{-12}$; $\frac{36}{27}$; $-\frac{12}{8}$; $-\frac{100}{75}$; $\frac{-102}{68}$; $\frac{-104}{-78}$.

Reconnais ces écritures.

25. *Recopie et complète.*

$-\frac{5}{6}=\frac{\dots}{-12}$; $\frac{11}{13}=\frac{\dots}{-39}$; $\frac{17}{-9}=\frac{51}{\dots}$; $-\frac{12}{14}=\frac{-\dots}{21}$; $\frac{15}{-18}=-\frac{\dots}{12}$; $\frac{-60}{32}=\frac{45}{\dots}$; $\frac{-18}{3}=-\dots$; $\frac{-42}{-13}=\dots$.

26. *Calcule* $\frac{-3}{2}\times\frac{5}{4}$; $\frac{4}{-3}\times\frac{-7}{5}$; $\frac{-11}{-6}\times\frac{-8}{5}$; $\frac{-7}{-9}\times\frac{-3}{-2}$; $(-2)\times\frac{7}{3}$; $\frac{5}{4}\times(-3)$; $-4\times\frac{-6}{5}$; $7\times\frac{-11}{5}$; $\frac{-8}{-9}\times(-5)$; $-1{,}2\times\frac{5}{-4}$.

27. *Donne l'inverse de chacun des nombres suivants.*

-2 ; $\frac{-1}{4}$; $0{,}5$; $\frac{-4}{5}$; $\frac{3}{-7}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{3}$; $\frac{-7}{-9}$.

28. *Calcule* $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}$; $\dfrac{\left(\frac{3}{-2}\right)}{\left(\frac{-4}{3}\right)}$; $\dfrac{\left(\frac{-5}{7}\right)}{\left(\frac{-2}{-5}\right)}$; $\dfrac{2}{\left(\frac{-3}{4}\right)}$; $\dfrac{\left(\frac{-6}{7}\right)}{3}$; $\dfrac{-3{,}2}{\left(\frac{8}{3}\right)}$.

29. *Résous dans* $\mathbb{Q}^*$ *les équations en* x *suivantes.*

$3x=\frac{4}{5}$; $4x=\frac{24}{7}$; $-3x=\frac{23}{2}$; $5x=\frac{-11}{3}$; $\frac{3}{4}x=\frac{3}{2}$; $\frac{4}{7}x=-\frac{1}{3}$.

30. *Résous dans* $\mathbb{Q}^*$ *les équations en* x *suivantes.*

$\frac{-11}{2}x=\frac{-22}{5}$; $-\frac{7}{8}x=\frac{14}{2}$; $\frac{2}{3}x=3$; $\frac{3}{7}x=-2$; $\frac{-4}{9}x=1$; $\frac{-7}{8}x=-1$.

31. *Donne une écriture fractionnaire irréductible de chacun des rationnels suivants :* $\frac{15}{9}$; $\frac{-28}{21}$; $\frac{-32}{-24}$; $\frac{-4}{18}$; $\frac{12}{-36}$; $\frac{-45}{9}$; $\frac{-36}{54}$; $\frac{15}{7}$; $-\frac{11}{9}$; $\frac{-22}{-66}$; $-\frac{165}{255}$; $\frac{360}{504}$; $\frac{-780}{3\,510}$.

32. *Donne une écriture fractionnaire irréductible des rationnels suivants.*

$\frac{0{,}41}{0{,}13}$; $\frac{-0{,}03}{1{,}12}$; $\frac{-0{,}63}{0{,}45}$; $\frac{-2{,}8}{0{,}15}$; $\frac{14{,}1}{3{,}3}$.

33. *Donne une écriture irréductible des rationnels suivants :* $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$; $\frac{-12}{5}\times\frac{3}{6}$; $\frac{-15}{7}:\frac{6}{14}$; $\frac{-14}{9}:-7$; $\frac{3}{2}:3$; $\frac{12}{5}:-6$; $\frac{-15}{7}:30$; $18:\frac{6}{5}$; $24:\frac{-8}{3}$; $\dfrac{\left(\frac{-5}{12}\right)}{\left(\frac{-20}{3}\right)}$; $\dfrac{14}{\left(\frac{7}{3}\right)}$; $\dfrac{-36}{\left(\frac{27}{4}\right)}$; $\dfrac{\left(\frac{12}{26}\right)}{-12}$.

34. *Calcule de la façon qui te paraît la plus commode les rationnels suivants :* $\frac{1}{3}\times\frac{-3}{4}\times 8$; $\frac{-12}{2}\times\frac{-3}{18}\times -6$; $18\times\frac{1}{72}\times(-4)$; $\frac{14}{42}\times\frac{63}{84}\times\frac{55}{66}$; $\frac{-16}{3}\times\frac{9}{-38}\times\frac{19}{2}\times\frac{-1}{12}$.

35. Soit a, b et c trois rationnels non nuls.

Donne une écriture plus simple des rationnels suivants : $\frac{3a}{3b}$; $\frac{-2a}{2b}$; $\frac{-a}{-b}$; $\frac{1,3 \times a}{1,3 \times b}$; $\frac{(\frac{11}{2}a)}{(\frac{11}{2}b)}$; $\frac{-15a}{3b}$; $\frac{-21a}{-7b}$; $\frac{-28a}{21b}$; $\frac{2a}{3a}$; $\frac{-15a}{3a}$; $\frac{-28b}{21b}$; $\frac{3ab}{2a}$; $\frac{3abc}{ac}$; $\frac{21a^2bc^2}{14abc}$.

36. *Calcule de la façon qui te paraît la plus commode les rationnels suivants :* $\frac{5}{7} \times \frac{7}{5}$; $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$; $\frac{-2}{14} \times \frac{7}{9}$; $(-2,5) \times \frac{3}{5}$; $\frac{25}{39} \times 13$; $\frac{17}{19} \times \frac{38}{34}$; $3 \times 5 \times \frac{29}{30}$; $12 \times \frac{2}{3} \times 7$.

37. *Calcule* $\frac{(\frac{18}{60})}{(\frac{5}{32})}$; $\frac{(\frac{33}{44} \times \frac{22}{15})}{(\frac{15}{6} \times 7)}$; $\frac{(-\frac{21}{44} \times \frac{17}{5})}{(\frac{-51}{20} \times \frac{-63}{11})}$; $\frac{(4 \times \frac{-3}{7})}{(4 \times \frac{-6}{21})}$.

38. *Donne des écritures fractionnaires de même dénominateur de* $\frac{2}{5}$ *et* $\frac{3}{8}$. *Même question pour* $\frac{-4}{11}$ *et* $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{3}$ *et* $\frac{4}{9}$; $\frac{-7}{12}$ *et* $\frac{11}{18}$; $\frac{4}{6}$ *et* $\frac{5}{-3}$; $\frac{12}{-32}$ *et* $\frac{36}{63}$; $\frac{-7}{42}$ *et* $\frac{11}{36}$.

39. *Donne des écritures fractionnaires de même dénominateur de* $\frac{2}{3}$, $\frac{-4}{7}$ *et* $\frac{4}{-5}$. *Même question pour* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ *et* $\frac{1}{12}$; $\frac{-3}{5}$, $\frac{5}{-8}$ *et* $\frac{4}{15}$.

40. *Calcule* $\frac{3}{17} + \frac{13}{17}$; $\frac{23}{19} + \frac{-15}{19}$; $\frac{-11}{16} + \frac{-5}{16}$; $\frac{3}{11} + \frac{-5}{11} + \frac{-3}{11} + \frac{5}{11}$; $\frac{11}{21} + \frac{10}{21}$.

41. *Calcule* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4}$; $\frac{5}{11} + \frac{7}{9}$; $\frac{-5}{12} + \frac{9}{10}$; $\frac{5}{4} + \frac{7}{20}$; $\frac{8}{15} + \frac{13}{30}$.

42. *Calcule* $\frac{-9}{48} + \frac{-5}{16}$; $\frac{-7}{18} + \frac{5}{72}$; $3 + \frac{1}{3}$; $-4 + \frac{4}{7}$; $\frac{-9}{17} + 2$; $\frac{-11}{5} + (-3)$.

43. *Calcule* $\frac{5}{4} + \frac{7}{6}$; $\frac{5}{18} + \frac{-9}{24}$; $\frac{28}{45} + \frac{23}{36}$; $\frac{49}{56} + \frac{5}{12}$; $\frac{-15}{27} + \frac{55}{121}$; $\frac{-123}{246} + \frac{18}{27}$; $-\frac{148}{296} + \frac{35}{70}$.

44. *Calcule* $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{7}$; $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{12}$; $\frac{7}{15} + \frac{-2}{3} + \frac{9}{10}$; $\frac{-12}{20} + \frac{32}{12} + \frac{56}{28}$; $\frac{1}{5} + \frac{4}{15} + \frac{-9}{24} + \frac{13}{45}$.

45. *Donne les opposés des rationnels suivants :* $\frac{1}{2}$; $\frac{-3}{4}$; $\frac{-5}{-7}$; $\frac{7}{-13}$; $-\frac{4}{7}$; $-\frac{4}{-7}$.

46. *Calcule* $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$; $4 - \frac{4}{3}$; $\frac{4}{9} - \frac{7}{27}$; $\frac{-5}{21} - \frac{3}{35}$; $-\frac{5}{12} - \frac{14}{42}$; $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} - \frac{1}{3}$; $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{7}{5} - \frac{-7}{20} + \frac{6}{45}$; $2 - \frac{3}{18} - \frac{25}{30}$.

47. *Calcule* $-\frac{2}{3} - (\frac{1}{4} + \frac{4}{5}) - (\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + 1)$; $-\frac{11}{123} + (\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{10}{123}) - (\frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{123})$.

48. *Résous dans* $\mathbb{Q}$ *les équations en* u *suivantes :* $5 + u = \frac{-2}{3}$; $\frac{1}{2} + u = -\frac{3}{5}$; $\frac{-2}{7} + u = -\frac{3}{5}$; $\frac{-2}{11} - u = \frac{13}{22}$; $\frac{-12}{9} - u = \frac{-7}{27}$; $u - \frac{3}{8} = -2$.

49. Soit x et y deux rationnels.

Ecris plus brièvement les rationnels suivants : $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$; $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{8}$; $x+\frac{x}{3}-\frac{15}{4}x$; $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-x-0{,}5y$; $\frac{4}{5}y-\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}y+y$; $xy-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}xy-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}xy+2{,}1-2xy$.

50. *Calcule* $4\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$; $\frac{-3}{4}+2\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$; $2\times\frac{3}{5}+2+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{5}$; $4\times\frac{5}{8}-3\times\frac{7}{8}$; $-5\times\frac{1}{4}-3\times\frac{1}{2}$; $4\times\frac{1}{12}-5\times\frac{3}{10}$.

51. *Calcule de la manière qui te semble la plus commode les rationnels suivants :* $\frac{24}{7}\times\left(\frac{7}{4}+\frac{14}{6}\right)$; $\frac{15}{4}\times\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)$; $\frac{32}{15}\times\left(\frac{15}{8}-\frac{30}{4}\right)$; $\frac{14}{13}\times\frac{7}{9}+\frac{14}{13}\times\frac{2}{3}$; $\frac{-11}{7}\times 2+\frac{-11}{7}\times\frac{4}{5}-\frac{11}{7}\times 1{,}2$.

52. Soit u et v deux rationnels.

Ecris le plus brièvement possible les rationnels suivants.

$\frac{1}{3}(3u+v)+(3u+\frac{1}{2}v)$; $6(\frac{1}{2}u-\frac{1}{3}v)+14(\frac{1}{7}u+\frac{1}{2}v)$; $18(\frac{2}{9}u-\frac{5}{6}v)-15(\frac{4}{3}u-v)$; $\frac{2}{5}(25u-\frac{1}{4}v)-\frac{3}{4}(-20u-\frac{2}{15}v)$.

53. Soit a et b deux rationnels.

Donne une autre écriture de chacun des rationnels suivants : $(a+1)(b+\frac{1}{3})$; $(a-\frac{2}{5})(b+2)$; $(a+\frac{2}{7})(b-\frac{2}{7})$; $(a-\frac{3}{4})(b+\frac{4}{3})$; $(-a-\frac{3}{8})(b-\frac{1}{3})$; $(-a-\frac{2}{9})(-b-3)$.

54. *Donne une écriture plus simple des rationnels suivants.*

$\dfrac{\left(\frac{55}{45}\right)}{\left(3+\frac{7}{8}\right)}$; $\dfrac{\left(2-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$; $\dfrac{\left(\frac{-5}{7}\right)}{\left(1-\frac{2}{3}\right)}$; $\dfrac{\left(\frac{4}{5}-1\right)}{\left(\frac{-2}{10}\right)}$; $\dfrac{2-0{,}5}{2+0{,}5}$; $\dfrac{\left(3+\frac{1}{3}\right)}{\left(3-\frac{1}{3}\right)}$; $\dfrac{4+\frac{2}{5}}{2+\frac{2}{5}}$.

55. *Recopie, en remplaçant les pointillés par l'un des signes* $<$ *ou* $>$, *de façon à obtenir des phrases vraies :* $\frac{2}{3}\dots 1$; $\frac{3}{7}\dots 1$; $\frac{5}{4}\dots 1$; $\frac{12}{11}\dots 1$; $\frac{3}{2}\dots 2$; $\frac{5}{2}\dots 2$; $\frac{7}{3}\dots 2$; $\frac{15}{8}\dots 2$; $\frac{23}{4}\dots 6$; $\frac{25}{4}\dots 6$; $\frac{45}{7}\dots 6$; $\frac{63}{10}\dots 6$.

56. *Recopie, en remplaçant les pointillés par l'un des signes* $<$ *ou* $>$, *de façon à obtenir des phrases vraies :* $\frac{3}{2}\dots\frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}\dots\frac{5}{4}$; $\frac{12}{11}\dots\frac{123}{130}$; $\frac{1\,742}{1\,853}\dots\frac{253}{149}$; $\frac{15}{4}\dots\frac{14}{5}$; $\frac{25}{7}\dots\frac{53}{3}$; $\frac{32}{16}\dots\frac{13}{3}$; $\frac{15}{2}\dots\frac{23}{4}$; $\frac{63}{20}\dots\frac{83}{30}$; $\frac{75}{8}\dots\frac{86}{10}$.

57. *Recopie, en remplaçant les pointillés par l'un des signes* $<$ *ou* $>$, *de façon à obtenir des phrases vraies :* $\frac{4}{11}\dots\frac{7}{11}$; $\frac{15}{4}\dots\frac{13}{4}$; $\frac{25}{21}\dots\frac{20}{21}$; $5\dots\frac{11}{4}$; $\frac{17}{12}\dots\frac{5}{4}$; $\frac{12}{13}\dots\frac{37}{39}$; $\frac{2}{3}\dots\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}\dots\frac{12}{8}$; $\frac{15}{28}\dots\frac{11}{21}$; $\frac{4}{7}\dots 0{,}6$; $\frac{27}{5}\dots 5{,}5$; $\frac{32}{17}\dots 1{,}8$.

58. *Recopie, en remplaçant les pointillés par l'un des signes* $<$ *ou* $>$, *de façon à obtenir des phrases vraies :* $\frac{15}{3}\dots\frac{7}{9}$; $\frac{-15}{3}\dots\frac{-7}{9}$; $\frac{11}{7}\dots\frac{5}{2}$; $\frac{-11}{7}\dots\frac{-5}{2}$; $\frac{7}{3}\dots\frac{15}{6}$; $-\frac{7}{3}\dots-\frac{15}{6}$; $\frac{11}{3}\dots\frac{-15}{4}$.

59. *Parmi les phrases suivantes, qeulles sont celle qui sont vraies ?* $\frac{15}{11} \leqslant \frac{5}{3}$; $-\frac{12}{7} \leqslant -\frac{8}{7}$;
$5{,}2 \leqslant \frac{104}{20}$; $\frac{-5}{2} \leqslant 0$; $\frac{-7}{3} \geqslant \frac{8}{3}$; $-\frac{3}{4} \leqslant -\frac{1}{2}$; $\frac{55}{3} \leqslant 0$.

60. *Range les rationnels suivants du plus grand au plus petit.*
$\frac{1}{3}$; $\frac{22}{35}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{14}{21}$; $\frac{44}{100}$; $\frac{583}{1\,000}$.
Range les inverses de ces rationnels du plus grand au plus petit.
Range les opposés de ces rationnels du plus grand au plus petit.

61. *Range les rationnels suivants du plus petit au plus grand.*
-1 ; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{5}$; $0{,}5$; $\frac{1}{0{,}4}$; $-\frac{2}{9}$; $-\frac{5}{3}$; 2.
Range les opposés de ces nombres du plus petit au plus grand.
Range les inverses de ces nombres du plus petit au plus grand.

62. Soit x, y, z et t des rationnels tels que
x et y sont négatifs et $x \leqslant y$,
z et t sont positifs et $t \geqslant z$.
Range du plus petit au plus grand les nombres x, y, z *et* t. *Range de la même façon les opposés de* x, y, z *et* t. *Range de la même façon leurs inverses.*
Range de la même façon les nombres $x+\frac{5}{3}$, $y+\frac{5}{3}$, $z+\frac{5}{3}$, $t+\frac{5}{3}$.
Range de la même façon les nombres $\frac{3x}{2}$, $\frac{3y}{2}$, $\frac{3z}{2}$, $\frac{3t}{2}$.
Range de la même façon les nombres $\frac{-x}{3}$, $\frac{-y}{3}$, $\frac{-z}{3}$, $\frac{-t}{3}$.
Range de la même façon les nombres $-2x+3$, $-2y+3$, $-2z+3$, $-2t+3$.

63. De la lune au soleil en passant par la terre.
Le rayon de la lune est $\frac{3}{11}$ du rayon de la terre. Le rayon du soleil est égal au rayon de la terre multiplié par 108.
Exprime le rayon de la lune à l'aide du rayon du soleil.

64. Un dessert.
Voici les quantités de produits nécessaires pour faire 18 crèpes bretonnes.
- 250 g de farine de froment.
- 1 cuillerée à soupe de blé noir.
- 1 œuf.
- 75 g de sucre.
- 75 g de beurre demi-sel.
- 0,25 ℓ de lait.
- 0,25 ℓ d'eau.
- Une demi-cuillère à café de cannelle.

Quelles quantités de ces produits prendras-tu pour faire 27 crèpes ? Et surtout n'oublie pas de préparer la pâte une heure à l'avance.

65. *Vérifie que* $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6}$; $\frac{-10}{6} = \frac{-15}{9} = \frac{-10+(-15)}{6+9}$; $\frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{-0{,}2}{-0{,}6} = \frac{2{,}5+(-0{,}2)}{7{,}5+(-0{,}6)}$;
$\frac{\left(\frac{7}{3}\right)}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right)}{\left(\frac{10}{7}\right)} = \frac{\left(\frac{7}{3}+\frac{8}{3}\right)}{\left(\frac{5}{4}+\frac{10}{7}\right)}$.

Soit a, b, c et d quatre rationnels non nuls tels que

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux écritures d'un même rationnel t, et

$b+d \neq 0$.

Montre que $\frac{a+c}{b+d}$ *est aussi une autre écriture du rationnel* t.

En est-il de même pour $\frac{a-c}{b-d}$ *? Pour* $\frac{2a+3c}{2b+3d}$ *? A quelles conditions ?*

66. Où multiplier, c'est parfois ajouter.

Vérifie que $\frac{2}{1} \times 2 = \frac{2}{1} + 2$; $\frac{4}{3} \times 4 = \frac{4}{3} + 4$; $\frac{3}{2} \times 3 = \frac{3}{2} + 3$; $\frac{5}{4} \times 5 = \frac{5}{4} + 5$.

Ces résultats sont surprenants. Nous allons essayer de les expliquer.

Dans la dernière égalité tu as remarqué que $5 = 4 + 1$.

Soit n un entier non nul.

Donne une écriture fractionnaire de $\frac{1}{n} + 1$. *Justifie les égalités suivantes.*

$$\frac{n+1}{n} \times (n+1) = \frac{n+1}{n} \times n + \frac{n+1}{n} \times 1 \ ;$$

$$\frac{n+1}{n} \times n + \frac{n+1}{n} \times 1 = n + 1 + \frac{n+1}{n}.$$

Tu as montré que $\frac{n+1}{n} \times (n+1) = \frac{n+1}{n} + (n+1)$.

Est-ce que $\frac{18}{17} \times 18 = \frac{18}{17} + 18$ *?*

67. Où multiplier c'est parfois retrancher.

Vérifie que $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$.

Soit n un entier naturel différent de 0.

Montre que $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Calcule le plus simplement possible $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{7}$.

68. Nous avons admis que si u et v sont deux rationnels non nuls, le produit uv a pour inverse le produit $u^{-1}v^{-1}$. Nous allons démontrer ce résultat.

Soit x et y deux rationnels non nuls.

Quel doit être le rationnel $(xy) \times (x^{-1} \times y^{-1})$ *pour que* $x^{-1} \times y^{-1}$ *soit l'inverse de* xy *?*

Nous allons donc calculer le produit $(x \times y) \times (x^{-1} \times y^{-1})$.

Justifie les égalités suivantes.

$$(x \times y) \times (x^{-1} \times y^{-1}) = (y \times x) \times (x^{-1} \times y^{-1}),$$
$$(y \times x) \times (x^{-1} \times y^{-1}) = y \times (x \times x^{-1}) \times y^{-1},$$
$$y \times (x \times x^{-1}) \times y^{-1} = y \times 1 \times y^{-1},$$
$$y \times 1 \times y^{-1} = y \times y^{-1},$$
$$yy^{-1} = 1.$$

A-t-on démontré que la propriété admise dans le cours est vraie ?

Fais un travail analogue pour démontrer que si x *et* y *sont deux rationnels, le rationnel* $x+y$ *a pour opposé* $(-x)+(-y)$.

69. **Apprenons à faire un problème**

ENONCE DU PROBLEME.

Jean à sept ans et Sylvie 13 ans. Ils sont frère et sœur et ont leur anniversaire le même jour. Leur oncle Evariste, qui fut un grand mathématicien, est devenu très original en vieillissant. Le jour de leur anniversaire, il leur dit : «Voici 80 pièces de un franc. Je veux toutes vous les distribuer ; je vais en donner x à Jean et y à Sylvie, de façon que $\frac{x}{7}=\frac{y}{13}$. Combien dois-je en donner à chacun ? ».
Jean ouvrit de grands yeux, mais Sylvie qui était en 4ème se mit à chercher et trouva la solution.

Fais comme elle.

ETUDE DU PROBLEME.

Nous allons suivre Sylvie dans sa démarche, et tu verras que c'est certainement ce que tu fais pour résoudre un problème.

Sur le coup, Sylvie ne comprit pas grand chose aux paroles de son oncle ; elle avait surtout retenu qu'elle allait recevoir y pièces et son frère x pièces. Comme son oncle voulait distribuer ses 80 pièces, elle écrivit que

$$x+y=80.$$

Mais elle ne voyait absolument pas ce que venait faire l'égalité $\frac{x}{7}=\frac{y}{13}$; c'est alors qu'elle se dit : «Et si je faisais des essais ? ». Elle prit 20 et 60 parce que $20+60=80$; mais elle s'aperçut tristement que $\frac{20}{7}=\frac{60}{21}$ et que $\frac{60}{21}\neq\frac{60}{13}$. Soudain, elle comprit qu'en divisant x par 7 et y par 13 elle devait trouver le même résultat ; elle multiplia alors 7 et 13 par 2, puis par 3, puis par 4 et enfin elle trouva que $28+52=80$! Elle se dit que si elle continuait elle trouverait une somme supérieure à 80 et elle s'arrêta.

Mais là, elle eut une inquiétude, elle savait l'oncle Evariste très, très bizarre ; il connaissait peut-être une autre solution où elle recevrait plus d'argent. Après un long moment elle eut une idée : si j'appelle t le nombre $\frac{x}{7}$, qui est aussi $\frac{y}{13}$, alors $x=7t$ et $y=13t$; et comme $x+y=80$, forcément $7t+13t=80$ et $20t=80$; donc $t=4$. Elle retrouva que $x=28$ et $y=52$ et fut alors certaine d'avoir trouvé la seule solution.

Nous allons maintenant rédiger cette démonstration comme on le ferait «au propre» sur une copie.

REDACTION.

Les nombres x et y dont parle l'oncle sont tels que

$$x+y=80 \quad \text{et} \quad \frac{x}{7}=\frac{y}{13}.$$

Appelons t le quotient $\frac{x}{7}$ (qui est aussi $\frac{y}{13}$).

Puisque $\frac{x}{7}=t$ nous pouvons écrire que $x=7t$; de même $y=13t$ car $\frac{y}{13}=t$.

Nous savons que $x+y=80$; donc $7t+13t=80$, et $20t=80$.

On en déduit que $t=4$.

Il faut donc que $x=7\times 4$ et $y=13\times 4$.

Le problème ne peut donc avoir d'autre solution que 28 et 52.

On vérifie facilement que $28+52=80$ et $\frac{28}{7}=\frac{52}{13}$; comme de plus 28 et 52 sont des naturels, l'oncle Evariste pourra donc donner 28 F à Jean et 52 F à Sylvie.

les translations

TR1 Translations mathématiques

I – DEFINITION DES TRANSLATIONS MATHEMATIQUES.

1.1 Introduction.

Dans le chapitre *droites et points,* nous avons construit le début d'une théorie. Pour cela, nous nous sommes aidés de certaines observations que nous avions faites, par exemple celles qui concernaient les droites parallèles.

Puis nous avons provisoirement abandonné cette théorie pour faire de nouvelles observations dans un plan matériel. En particulier, dans le chapitre *transformations matérielles* nous avons fait de nombreuses observations concernant les pliages et les translations matérielles.

Dans ce chapitre *TR,* nous allons reprendre la construction de la théorie. Nous allons introduire de nouveaux objets mathématiques. Nous les appellerons TRANSLATIONS MATHEMATIQUES, ou plus simplement TRANSLATIONS.

Bien entendu, pour comprendre ce que sont les translations mathématiques, nous nous aiderons de certaines observations que nous avons faites sur les translations matérielles en [TM2]. Nous te rappellerons lesquelles au fur et à mesure.

Nous ferons aussi de nouvelles observations.

Nous allons définir les translations à l'aide de quatre propriétés simples que l'on ne démontre pas.

1.2 Les translations sont des bijections.

Une translation est une application dont la source est le plan et dont le but est le plan.

Cela signifie que si t est une translation, tout point M du plan a une image unique par t. Tu sais qu'on peut noter t(M) ce point.

Cette propriété ne te surprendra pas, car elle correspond à ce que tu as fait tout au long de [TM2]. Ces observations nous conduisent aussi à décider que,

si t est une translation, tout point du plan a un antécédent et un seul par t.

Résumons :

1. Les translations sont des bijections du plan sur lui-même.

1.3 Un point et son image.

Dans [TM1] nous avons observé que dans un pliage autour d'une droite d, tout point de d est confondu avec son transformé.

Par contre, dans les translations matérielles que nous avons étudiées, nous n'avons pas trouvé de point confondu avec son transformé.

Aussi nous décidons que,

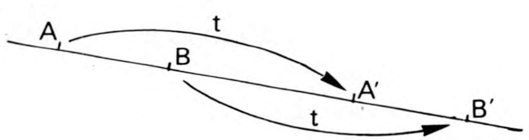
2. Pour une translation, un point quelconque et son image sont distincts.

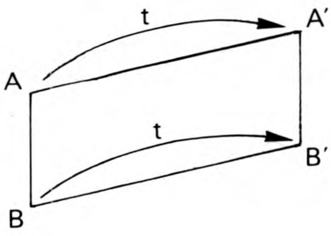
1.4 Translation et parallélogramme.

Soit t une translation et M et N deux points distincts.
Appelons M' et N' les images de M et de N par t.
Puisque t est une bijection, les points M' et N' sont distincts. Il passe donc une droite unique par les points M' et N'.

Nous choisissons aussi la phrase suivante comme propriété des translations.

3. Soit t une translation, A et B deux points distincts et A' et B' les images de A et B par t :
les droites AB et $A'B'$ sont parallèles,
les droites AA' et BB' sont parallèles.





Cette propriété correspond à des observations que tu as faites dans [TM2] et que tu as d'ailleurs utilisées de nombreuses fois pour faire des dessins.

Remarque.

Les droites AA' et BB' sont parallèles et appartiennent donc à une même direction. Soit M un point quelconque et M' son image par t.

Que peux-tu dire de la droite **MM' ?**

Nous appellerons la direction de la droite MM', DIRECTION DE LA TRANSLATION t.

1.5 Bipoint et translation.

Voici enfin une quatrième propriété des translations.

4. Soit A et B deux points distincts. Il existe une translation et une seule par laquelle A a pour image B.

On peut noter cette translation $t_{(A,B)}$. Remarque bien que $t_{(A,B)}(A) = B$.

Dans un plan matériel aussi, deux points suffisaient à définir une translation matérielle.

Remarque.

Dans ce qui précède, les deux points A et B ne jouent pas le même rôle. C'est pourquoi dans la notation $t_{(A,B)}$ nous avons utilisé (A, B) qui est, comme tu le sais, la notation d'un couple.

Un couple de points est encore appelé BIPOINT.

Exercice.

Soit P et Q deux points distincts.

Est-ce que $(P, Q) = (Q, P)$ ***? Quel est le point*** $t_{(P,Q)}(P)$ ***?***

II — EXERCICES.

2.1 **Soit A, B et C trois points non alignés. Soit D et E les points ainsi définis :**

$$D = t_{(A,B)}(C) \quad \text{et} \quad E = t_{(B,C)}(A).$$

Fais une figure qui illustre cette situation.

Démontre que les points **C, D** ***et*** **E** ***sont alignés sur une droite parallèle à la droite*** **AB.**

2.2 **Soit A, B, C et D quatre points distincts et non alignés tels que**

les droites AB et CD sont parallèles,

les droites AC et BD sont parallèles.

Fais une figure.

L'image du point C, par la translation $t_{(A,B)}$ se trouve

sur la droite qui passe par B et qui est parallèle à AC,

sur la droite qui passe par C et qui est parallèle à AB.

C'est une conséquence d'une des propriétés que nous avons admises pour les translations.

Laquelle ?

L'image du point C par $t_{(A,B)}$ est donc le point d'intersection de ces deux droites, c'est-à-dire le point D.

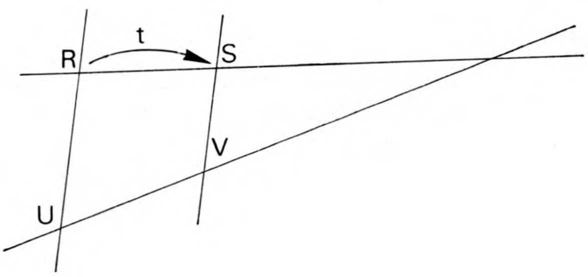
Pourquoi peux-tu écrire que $t_{(A,B)} = t_{(C,D)}$ ***? Que peux-tu dire des translations*** $t_{(A,C)}$ ***et*** $t_{(B,D)}$ ***?***

Remarque.

Soit A, B, C et D quatre points distincts et non alignés tels que
les droites AB et CD sont parallèles,
les droites AC et BD sont parallèles.

On dit que $\{A, B, C, D\}$ est un PARALLELOGRAMME de sommets opposés A et D. On dit encore que $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés C et B.

2.3 Soit R, S, U et V quatre points distincts tels que
les droites RS et UV sont sécantes,
les droites RU et SV sont parallèles.



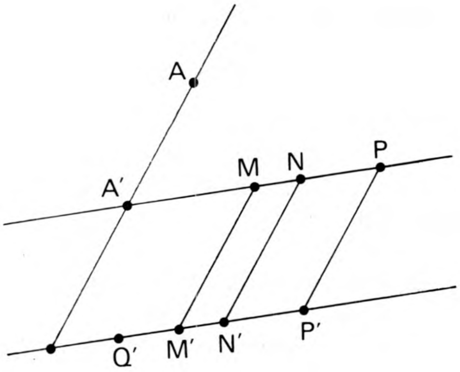
Les quatre points R, S, U et V ne sont donc pas alignés.

Soit t la translation telle que $S = t(R)$.

Est-il possible que $V = t(U)$ *?*

III – IMAGE D'UNE DROITE.

Dans [TM2, paragraphe 2.4 page 99], nous avons transformé des points A', M, N et P alignés, et nous avons trouvé des points alignés.



Puis tu as choisi un point Q' aligné avec M' et N' et tu as constaté qu'il était le transformé d'un point aligné avec M et N.

Nous allons voir à quelle propriété de la théorie correspond cette observation.

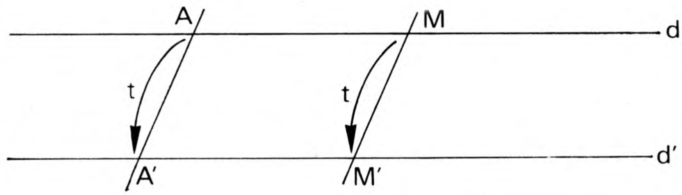
Soit t une translation et d une droite. Soit A un point de d et A' son image par t. Nous allons chercher où se trouve l'image d'un autre point de d.

Soit M un point de d autre que A et M' son image par t.

Les droites AM et $A'M'$ sont parallèles.

Pourquoi ?

Le point M' appartient donc à la droite qui passe par A' et qui est parallèle à d. Appelons d' cette droite.



Nous avons montré que tout point de d a son image sur d'.

Soit N' un point de d' autre que A' et N son antécédent par t.

Les droites A'N' et AN sont parallèles, donc le point N appartient à la droite qui passe par A et qui est parallèle à d'.

Quelle est cette droite ?

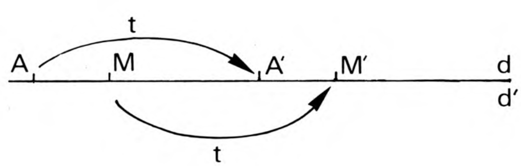
Nous avons montré que tout point de d' est l'image d'un point de d.

Ces deux démonstrations nous permettent d'affirmer que l'ensemble des images des points de la droite d est la droite d'.

Nous traduirons cette propriété en disant que l'image de la droite d est la droite d'.

Remarque.

Si le point A' se trouve sur la droite d, la droite d' n'est autre que la droite d.



TR 2 Hexagones

I – UNE TRANSLATION SUIVIE D'UNE AUTRE.

Observe les dessins de la feuille de manipulation 7a.

Sur chacun d'eux, la figure 2 est la transformée de la figure 1 par une translation matérielle, la figure 3 est la transformée de la figure 2 par une translation matérielle.

Vérifie que la figure 3 *est la transformée de la figure* 1 *par une translation matérielle.*

Cette observation nous invite à penser que la suite de deux translations matérielles est une translation matérielle. Dans [TR2], nous admettrons ce résultat.

II – VOICI LES HEXAGONES.

Prends la feuille de manipulation 7b *et observe les dalles* A, A_1, A_2 *et* A_3.

Nous appellerons
translation grise, la translation par laquelle A a pour transformée A_1,
translation bleue, la translation par laquelle A a pour transformée A_2,
translation rouge, la translation par laquelle A a pour transformée A_3.

1.1 *Dessine la dalle* B_1, *transformée de* B *par la translation grise.*
Dessine la dalle B_2, *transformée de* B *par la translation bleue.*
Dessine la dalle B_3, *transformée de* B *par la translation rouge.*

1.2 *Quelle est la transformée de* A_2 *par la translation grise ?*

La suite de la translation bleue et de la translation grise est une translation. Nous l'appellerons «translation bleue suivie de grise».

Tu viens de trouver que la transformée de A par la translation bleue suivie de grise est A_3.

Quelle est la transformée de B *par la translation bleue suivie de grise ?*

1.3 *Quelles sont les transformées des dalles* A *et* B *par la translation grise suivie de bleue ?*

Refais le même travail avec la dalle C.
Recopie et complète.

$$C \xrightarrow{\text{translation bleue suivie de grise}} \cdots \qquad B \xrightarrow{\text{translation bleue suivie de grise}} \cdots \qquad C \xrightarrow{\text{translation bleue suivie de grise}} \cdots$$

$$A \xrightarrow{\text{translation grise suivie de bleue}} \cdots \qquad B \xrightarrow{\text{translation grise suivie de bleue}} \cdots \qquad C \xrightarrow{\text{translation grise suivie de bleue}} \cdots$$

Ce que tu as observé pour les dalles A, B et C se vérifierait pour toutes les autres dalles.

Nous écrirons que
translation bleue suivie de grise = translation grise suivie de bleue.

Remarque.

Dans [TM3], nous avons étudié la suite de deux pliages autour de deux droites parallèles d_1 et d_2. Tu as alors remarqué qu'au contraire
pliage autour de d_1 suivi de pliage autour de d_2 $\neq$ pliage autour de d_2 suivi de pliage autour de d_1.

III – TROIS TRANSLATIONS QUI SE SUIVENT.

Utilise toujours la feuille de manipulation 7b.

Appelons translation noire, la translation matérielle par laquelle la dalle D a pour transformée la dalle D_1.

3.1 *Marque la dalle* A_4 *transformée de* A *par la translation noire ; colorie* A_4 *en noir.*

Marque la dalle A_5 *transformée de* A_4 *par la translation bleue suivie de grise.*

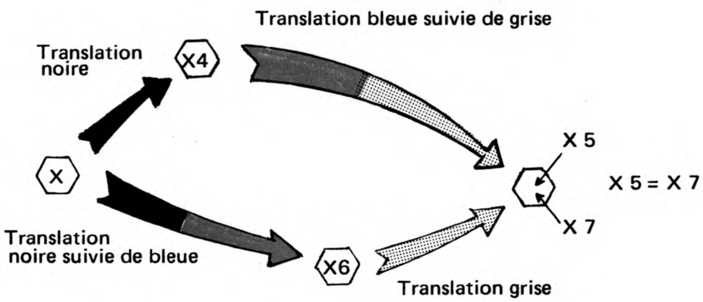
Puis, marque la dalle A_6 *transformée de* A *par la translation noire suivie de bleue et la dalle* A_7, *transformée de* A_6 *par la translation grise.*

Qu'observes-tu ?

3.2 *Marque de façon analogue les dalles* B_4, B_5, B_6 *et* B_7.

Refais le même travail avec la dalle C.

Voici un schéma qui résume ce que tu as fait avec les dalles A, B et C.



IV – RETOUR EN ARRIERE.

Utilise toujours la même feuille de manipulation 7b.

Appelons translation rose la translation matérielle par laquelle la dalle E a pour transformée la dalle E_1.

Quelle est la transformée de la dalle A_2 *par la translation rose ?*

Marque une dalle quelconque, que tu appelleras F. *Marque la dalle* F_1 *transformée de* F *par la translation bleue puis la dalle transformée de* F_1 *par la translation rose.*

Que peux-tu dire de la translation bleue suivie de rose ?

V – ET AINSI DE SUITE.

Utilise toujours la feuille de manipulation 7b.

Marque la dalle M_1*, transformée de* M *par la translation bleue.*
Marque la dalle M_2*, transformée de* M_1 *par la translation bleue.*
Marque la dalle M_3*, transformée de* M_2 *par la translation bleue.*

Continue jusqu'au bout de la feuille. Tu obtiens aussi une suite de dalles M, M_1, M_2, M_3,...

Marque la dalle N*, transformée de* M *par la translation grise, puis, à l'aide de la translation bleue, marque comme plus haut les dalles* N_1, N_2, N_3,...
Par quelle translation M_3 *a-t-elle pour transformée* N_3 *?*
Par quelle translation M_4 *a-t-elle pour transformée* N_4 *?*

Choisis une dalle quelconque dans la suite M, M_1, M_2, M_3,... . *Par quelle translation cette dalle a-t-elle pour transformée la dalle* N *de même numéro ?*

TR 3 Composition de translations matérielles

Dans [TR2], nous avons fait agir plusieurs translations sur des hexagones. Dans [TR3], nous allons refaire la même chose en remplaçant les hexagones par des points.

I – QUAND ON PREND DEUX TRANSLATIONS.

Prends la feuille de manipulation 9a.

Sur le dessin numéro 2, nous avons marqué quatre points A, A_1, B_1 et B_2.

Les points A et A_1 déterminent une translation, que nous appellerons translation noire.

Les points B_1 et B_2 déterminent une translation, que nous appellerons translation blanche.

Dessine le transformé de A_1 *par la translation blanche et appelle-le* A_2.

Les points A et A_2 déterminent une translation, que nous appellerons translation grise.

1.1 *Choisis un point* M *qui n'appartient pas à la droite* AA_1. *Dessine son transformé* M_1 *par la translation noire, puis le transformé* M_2 *de* M_1 *par la translation blanche.*

Vérifie que les droites MM_2 *et* AA_2 *sont parallèles ainsi que les droites* AM *et* A_2M_2.

Quel est le transformé de M *par la translation grise ?*

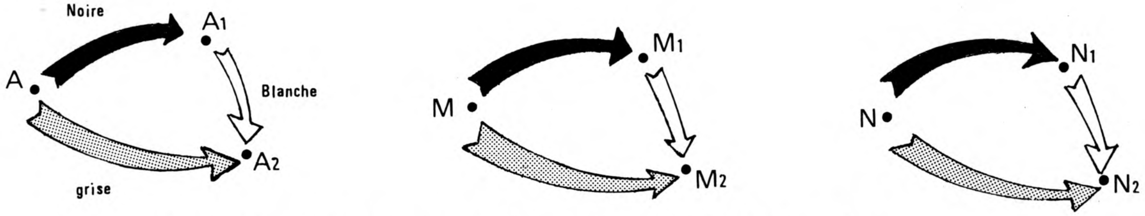
1.2 *Choisis un point* N *sur la droite* AA_1. *Dessine son transformé* N_1 *par la translation noire puis le transformé* N_2 *de* N_1 *par la translation blanche.*

Vérifie que les droites NN_2 *et* MM_2 *sont parallèles ainsi que les droites* MN *et* M_2N_2.

Quel est le transformé de N *par la translation grise ?*

Tu viens de constater la propriété suivante.

En appliquant aux points M et N d'abord la translation noire, puis la translation blanche, tu as obtenu les points M_2 et N_2 qui sont les transformés des points M et N par la translation grise.



La translation grise est la translation noire suivie de blanche.

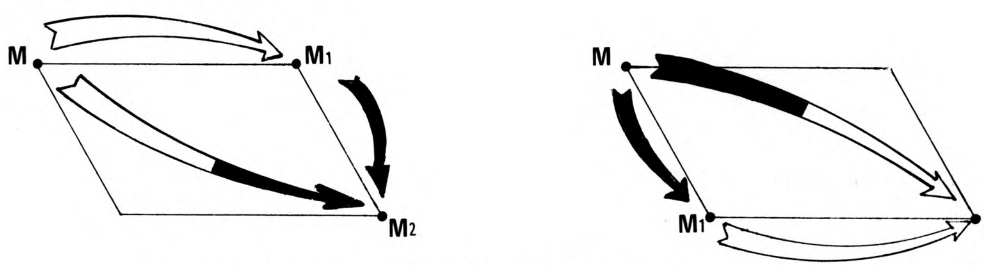
II – LA PREMIERE TRANSLATION N'A PAS LA PRIORITE.

Dessine trois points non alignés A, B *et* N.
Appelle translation blanche, la translation qui transforme A *en* B.
Appelle translation noire, la translation qui transforme A *en* N.

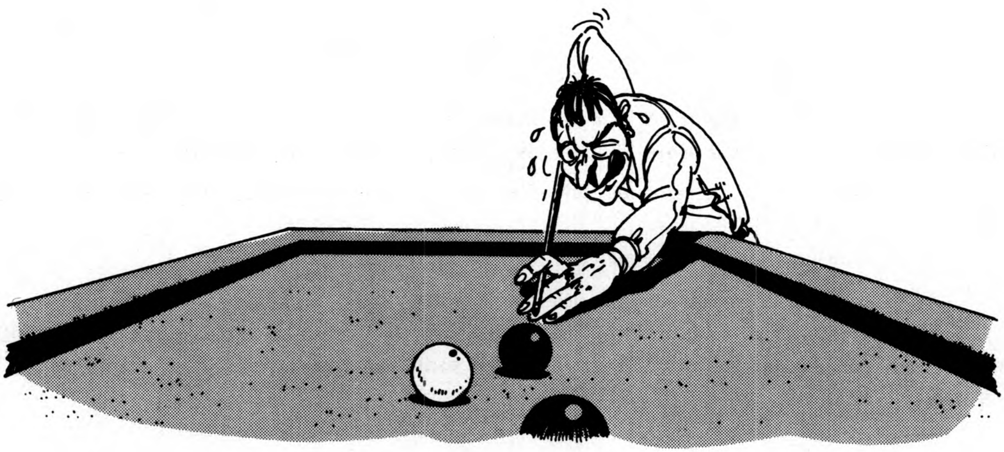
Choisis un point M. *Dessine le point* M_1 *transformé de* M *par la translation blanche, puis le point* M_2 *transformé de* M_1 *par la translation noire.*

Dessine le point M_1^* *transformé de* M *par la translation noire, puis le point* M_2^* *transformé de* M_1^* *par la translation blanche.*

Que constates-tu ?



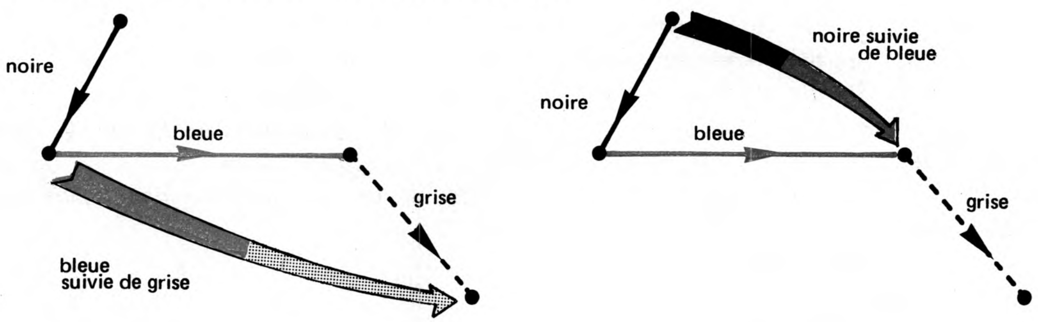
Recommence le même exercice, mais cette fois, tu choisiras trois points A, B *et* N *alignés.*



III – QUAND ON PREND TROIS TRANSLATIONS.

Dans le paragraphe III de [TR2], nous avons observé des translations noire, bleue et grise qui agissaient sur des hexagones.

La figure résume ce que nous avons observé.



Si on remplace les hexagones par des points, on observe un phénomène semblable.

IV – ON REBROUSSE CHEMIN.

Dessine deux points A *et* B.

Appelle translation bleue la translation matérielle qui transforme A *en* B, *et translation rouge la translation matérielle qui transforme* B *en* A.

Choisis un point M *quelconque.*

Dessine le transformé M_1 *de* M *dans la translation bleue puis le transformé* M_2 *de* M_1 *dans la translation rouge. Qu'observes-tu ?*

Dessine le transformé M_3 *de* M *dans la translation rouge puis le transformé* M_4 *de* M_3 *dans la translation bleue. Qu'observes-tu ?*

Nous traduirons cette observation en disant que
la translation rouge est la TRANSLATION RECIPROQUE de la translation bleue,
la translation bleue est la translation réciproque de la translation rouge.

TR4 Le groupe des translations

Dans [TR4], nous revenons à la théorie.

I – RECIPROQUE D'UNE TRANSLATION.

Soit r une translation, A un point et A' l'image de A par r.

Ce que nous avons fait en [TR3, paragraphe IV, page 178] nous conduit à nous intéresser à la translation définie par le bipoint (A', A). Appelons s cette translation.

Quelle est l'image de A' *par* s *? Quelle est l'image de* A *par l'application* r *suivie de* s *?* (Tu sais qu'on note cette application $s \circ r$: tu as donc trouvé le point $s \circ r\,(A)$).

Nous allons voir si ce que tu viens de trouver pour A est vrai pour tous les points.

Soit B un point qui n'appartient pas à la droite AA' et B' le point tel que {A, B, B', A'} soit un parallélogramme de sommets opposés A et B'.

Soit C un point de la droite AA' et C' le point tel que {C, B, B', C'} soit un parallélogramme de sommets opposés C et B'.

Fais une figure qui illustre cette situation.

Recopie et complète.

$B \xmapsto{r} \dots \xmapsto{s} \dots \quad ; \quad C \xmapsto{r} \dots \xmapsto{s} \dots$

Nous avons montré que pour tout point M du plan, $s \circ r(M) = M$.

Remarque bien qu'on a en effet établi cette propriété pour le point A, pour tout point qui n'appartient pas à la droite AA' et pour tout point de la droite AA'.

Tu sais qu'on appelle identité du plan l'application qui à tout point M du plan donne pour image le point M lui même. Cette application sera notée Id_P.

Nous pouvons dire maintenant que tout point M du plan a même image par l'application $s \circ r$ et par l'application Id_P. Nous pouvons donc écrire que $s \circ r = Id_P$.

En échangeant le rôle de A et A', on montrerait de même que $r \circ s = Id_P$.

Concluons :

$$s \circ r = r \circ s = Id_P .$$

Tu sais qu on traduit cette propriété en disant que s est l'application réciproque de r et que r est l'application réciproque de s.

Puisqu'une translation est une bijection, nous savions déjà qu'elle admet une bijection réciproque. Ce qui est nouveau et intéressant, c'est de savoir que cette bijection réciproque est aussi une translation.

Exercice.

Soit P et Q deux points distincts.

Quelle est la translation réciproque de $t_{(P,Q)}$ *?*

II – LE GROUPE DES TRANSLATIONS.

2.1 L'ensemble des translations.

Soit r une translation. Tu sais que sa réciproque est notée r^{-1}. Nous venons de voir que r^{-1} est une translation (et, bien sûr, que $r \circ r^{-1} = r^{-1} \circ r = Id_P$).

Par abus de langage, nous dirons encore que Id_P est une translation.

Nous noterons **T** l'ensemble des translations, y compris Id_P.

Remarques.

Quel que soit le point A du plan $Id_P(A) = A$. Donc A et $Id_P(A)$ ne déterminent pas une droite : on n'attribue pas de direction Id_P.

Soit M un point ; puisque $Id_P(M) = M$, on écrira aussi que $Id_P = t_{(M,M)}$.

2.2 Une opération dans T.

Dans [TR2] et [TR3], tu as observé qu'une suite de deux translations matérielles est une translation matérielle.

Cela nous conduit à introduire un dernier axiome concernant les translations.

5. Si t et t' sont des éléments de **T**, alors $t \circ t'$ est aussi un élément de **T**.

Cela signifie que $\circ$ est une opération dans **T**.

2.3 Elément neutre et symétrique d'une translation.

Soit s un élément de **T**.

Que peux-tu dire de $Id_P \circ s$ *et* $s \circ Id_P$ *?*

Tu as montré que pour tout élément s de **T**, $Id_P \circ s = s \circ Id_P = s$; autrement dit, Id_P est élément neutre pour la loi $\circ$.

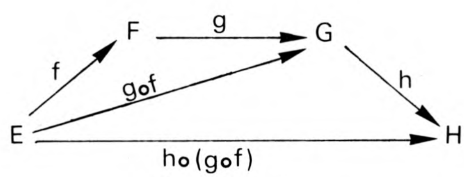
Nous avons montré au paragraphe I que la réciproque d'une translation autre que Id_P est une translation ; de plus Id_P est son propre symétrique pour la loi $\circ$; donc tout élément de **T** a un symétrique dans **T** pour la loi $\circ$.

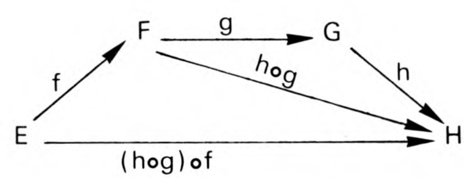
2.4 Associativité.

Pour établir que $(\mathbf{T}, \circ)$ est un groupe, il ne nous reste plus qu'à nous assurer que l'opération $\circ$ est associative.

De façon générale, soit
- E, F, G et H des ensembles,
- f une application de E vers F,
- g une application de F vers G,
- h une application de G vers H ;

alors $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$





Nous avons illustré cette propriété dans [TR2, page 175] et dans [TR3, page 178] pour des translations matérielles.

Cette propriété permet d'affirmer que la composition des translations est associative dans **T** ; donc $(\mathbf{T}, \circ)$ est un groupe.

2.5 Commutativité.

Tu as observé dans [TR2, paragraphe II] et dans [TR3, paragraphe II] que pour deux translations matérielles t_1 et t_2, on obtient le même résultat en faisant agir t_1 suivie de t_2, ou t_2 suivie de t_1.

Nous allons voir ce qu'il en est dans la théorie mathématique.

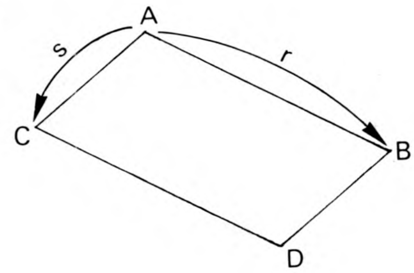
Soit r et s deux translations.

Puisque Id_P est neutre,
$$r \circ Id_P = Id_P \circ r .$$

Supposons maintenant que r et s soient distinctes de Id_P, et de directions différentes.

Soit A un point. Définissons B et C :

$B = r(A)$ et $C = s(A)$.



Appelons D le point tel que $\{A, B, C, D\}$ soit un parallélogramme de sommets opposés A et D.

Montre que
$D = r(C)$ et que $D = s(B)$.

Déduis-en que $s \circ r\ (A) = r \circ s\ (A)$.

Donc $s \circ r\ (A) = r \circ s\ (A)$; d'autre part $s \circ r$ et $r \circ s$ sont des translations.

Pourquoi ? Pourquoi peut-on écrire que $s \circ r = r \circ s$ *?*

Si r et s avaient la même direction, on pourrait aussi démontrer que $s \circ r = r \circ s$. Nous ne le ferons pas, et nous admettrons cette propriété.

Cependant, cette propriété ne te surprendra probablement pas : tu as fait une observation correspondante dans [TR3, paragraphe II, page 177].

Concluons : pour deux éléments quelconques r et s de **T**,

$$r \circ s = s \circ r.$$

Nous pouvons maintenant dire que le groupe $(\mathbf{T}, \circ)$ est commutatif.

2.6 Relation de Chasles.

Soit trois points A, B et C.

Quel est le point $t_{(A,B)}(A)$ *? Quel est le point* $t_{(B,C)}(B)$ *? Quel est le point* $t_{(B,C)} \circ t_{(A,B)}(A)$ *? Quel est le point* $t_{(A,C)}(A)$ *?*

Tu sais que $t_{(B,C)} \circ t_{(A,B)}$ et $t_{(A,C)}$ sont des translations.

Pourquoi peut-on affirmer que $t_{(B,C)} \circ t_{(A,B)} = t_{(A,C)}$ *?*

Montre que $t_{(A,B)} \circ t_{(B,C)} = t_{(A,C)}$.

Cette égalité est appelée RELATION DE CHASLES.

Exercices.

1. Soit A, B, C et D quatre points.

Donne une écriture plus simple de $t_{(C,D)} \circ t_{(B,C)} \circ t_{(A,B)}$.

2. Tu as déjà eu l'occasion de résoudre des équations dans un groupe. Tu sais que $(\mathbf{T}, \circ)$ est un groupe commutatif.

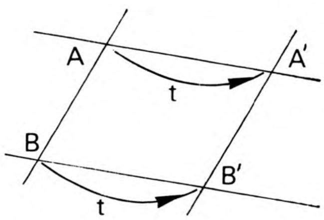
Soit A, B, C, D *et* E *des points ; résous les équations en* y *dans* **T** *suivantes :* $t_{(A,B)} \circ y = t_{(A,E)}$; $t_{(A,B)} \circ y \circ t_{(C,D)} = t_{(A,D)}$; $t_{(A,B)} \circ y \circ t_{(C,A)} = Id_P$; $t_{(A,B)} \circ y = t_{(A,B)}$; $t_{(A,B)} \circ y^{-1} = t_{(A,C)}$.

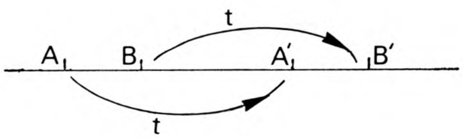
TR 5 Bipoints et vecteurs

I – BIPOINTS EQUIPOLLENTS.

1.1 Equipollence.

Soit une translation t et quatre points A, A', B et B' tels que $t(A) = A'$ et $t(B) = B'$.





Les points A' et B' sont les images des points A et B par une même translation ; on dit que les bipoints (A, A') et (B, B') sont EQUIPOLLENTS.

Est-ce que les bipoints (A', A) *et* (B', B) *sont équipollents ?*

Cherchons si les bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents.

Puisque $t_{(A, A')} = t_{(B, B')}$, il est vrai que $t_{(A, A')} \circ t_{(A', B)} = t_{(B, B')} \circ t_{(A', B)}$.

Termine la démonstration.

Remarque que dans le cas où A, A', B et B' sont des points distincts non alignés, nous avons déjà démontré ce résultat en [TR1, page 171] : en effet, dans ce cas, $\{A, B, B', A'\}$ est un parallélogramme.

Soit M, N, P et Q quatre points. Dire que (M, N) et (P, Q) sont équipollents revient à dire que (M, N) et (P, Q) déterminent la même translation, c'est-à-dire que $t_{(M, N)} = t_{(P, Q)}$.

Soit E et F deux points. Tu sais que $t_{(E, E)} = t_{(F, F)} = Id_P$; donc (E, E) et (F, F) sont équipollents.

1.2 Exercice.

Soit A, B, C, D, E et F six points tels que $t_{(A, B)} = t_{(B, C)} = t_{(F, E)} = t_{(E, D)}$.

Le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 9b illustre cette situation.

Ces six points déterminent 36 bipoints.

Pourquoi ?

Le dessin numéro 2 te permet de lire ces 36 bipoints. Ainsi par exemple, la cinquième case de la troisième ligne correspond au bipoint (C, E).

Nous allons nous intéresser à certains de ces bipoints, ceux qui correspondent aux cases laissées en blanc sur le tableau. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces 18 bipoints.

Colorie en bleu la case correspondant au bipoint (A, B) *ainsi que les cases des bipoints équipollents à* (A, B).

Choisis un autre bipoint dont la case est encore blanche. Colorie cette case en rouge ainsi que les cases des bipoints qui lui sont équipollents.

Continue ainsi avec d'autres couleurs jusqu'à ce que toutes les cases que nous avions laissées en blanc soient coloriées.

Tu as fait une partition de l'ensemble des cases que nous avions laissées en blanc. Cela correspond à une partition de l'ensemble $\mathcal{E}$ des 18 bipoints étudiés.

Combien as-tu trouvé de classes ?

Ecrivons celle qui contient le bipoint (A, B) :

$$\{(A, B), (B, C), (E, D), (F, E)\}.$$

C'est l'ensemble de tous les bipoints de $\mathcal{E}$ qui sont équipollents à (A, B) c'est-à-dire qui déterminent la même translation que (A, B). On dit que cet ensemble de bipoints est la CLASSE de (A, B) dans $\mathcal{E}$. On dit aussi que (A, B) est un REPRESENTANT de cette classe. On peut aussi bien dire que c'est la classe du bipoint (B, C), et que (B, C) est un représentant de cette classe.

On peut de même utiliser (E, D) ou (F, E) pour désigner cette classe.

Ecris la classe du bipoint (B, E). *Donne des représentants de cette classe.*

Nous aurions évidemment pu faire une partition de l'ensemble des 36 bipoints déterminés par les points A, B, C, D, E et F. Nous ne te l'avons pas demandé car cela t'aurait obligé à utiliser trop de couleurs différentes.

Nous aurions, entre autres, trouvé la classe $\{(A, A), (B, B), (C, C), (D, D), (E, E), (F, F)\}$.

A quelle translation correspond-elle ?

II – VECTEURS DU PLAN.

2.1 Une partition de l'ensemble des bipoints du plan.

Considérons maintenant l'ensemble de tous les bipoints du plan. Appelons-le $\mathcal{L}$. Nous ne pouvons évidemment pas compter ces bipoints mais nous pouvons organiser l'ensemble $\mathcal{L}$ comme nous l'avons fait ci-dessus pour l'ensemble $\mathcal{E}$; nous rangeons ensemble tous les bipoints qui déterminent la même translation.

Cela signifie que,

si (A, B) est un bipoint, la classe de (A, B) est l'ensemble de tous les bipoints (M, N) qui sont équipollents à (A, B), c'est-à-dire tels que $t_{(M, N)} = t_{(A, B)}$

Un bipoint ne peut appartenir à deux classes différentes.

Pourquoi ?

Chaque classe de cette partition est appelée VECTEUR.

Ainsi, si v désigne le vecteur qui contient le bipoint (A, B), v est l'ensemble de tous les bipoints (M, N) équipollents à (A, B).

On dit que (A, B) est un représentant de v.

On utilise souvent la notation $\overrightarrow{AB}$ pour désigner le vecteur qui contient (A, B). Le symbole $\overrightarrow{AB}$ se lit «vecteur AB».

Soit Q, R, S et T quatre points. Tu vois que les trois relations suivantes sont toutes les trois vraies ou toutes les trois fausses.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ST}$; (Q, R) est équipollent à (S, T) ; $t_{(Q,R)} = t_{(S,T)}$.

Nous désignerons par **V** l'ensemble des vecteurs.

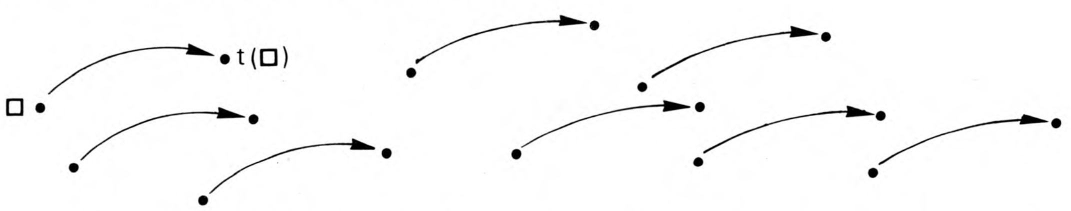
Exercice.

Soit K, L, M et N quatre points.

Montre que si $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$ *alors* $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{NM}$.

2.2 Une bijection de **V** sur **T**.

Soit t une translation. Tous les bipoints de la forme (M, t(M)) sont équipollents. L'ensemble de tous ces bipoints est un vecteur.



Le dessin ci-dessus illustre cette situation. Bien entendu, nous n'avons pas pu représenter tous les bipoints équipollents.

Inversement, soit v un vecteur. Tous les bipoints qui appartiennent à ce vecteur déterminent la même translation. A tout vecteur, on peut donc associer une translation unique.

Tu vois donc qu'il revient au même de se donner une translation ou de se donner un vecteur.

2.3 Vecteur nul.

A la translation Id_P est associé un vecteur. C'est l'ensemble de tous les bipoints de la forme (M, M). Nous dirons que c'est le vecteur nul et nous le noterons θ (θ est une lettre grecque qui se lit «téta»).

2.4 Représentant d'origine donnée d'un vecteur.

Soit v un vecteur et M un point. Appelons t la translation associée à v.

Montre qu'il existe un point N *et un seul tel que* (M, N) *soit un représentant de* v.

On dit que (M, N) est le représentant d'origine M du vecteur v.

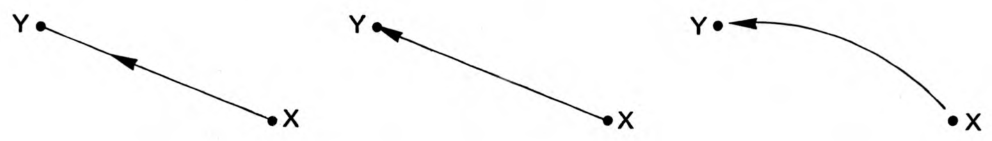
Exercice.

Reprenons la situation étudiée au paragraphe 1.1 et illustrée par le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 9b.

On a marqué un point U sur la figure.
Chacun des sept vecteurs que tu avais trouvés a un représentant d'origine U.

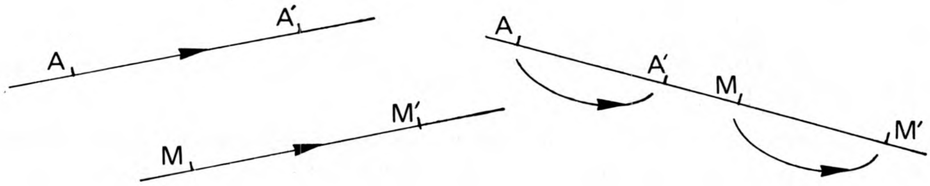
Représente ces sept bipoints sur la figure.

Voici trois manières de représenter un bipoint (X, Y).



2.5 Direction d'un vecteur non nul.

Soit v un vecteur distinct de θ et (A, A′) un représentant de v.
Soit (M, M′) un autre représentant de v.



Les droites AA′ et MM′ sont parallèles.

Pourquoi ?

Nous appellerons la direction de la droite AA′, DIRECTION DU VECTEUR v. C'est bien entendu la direction de la translation $t_{(A, A')}$.

On décide que le vecteur nul n'a pas de direction.

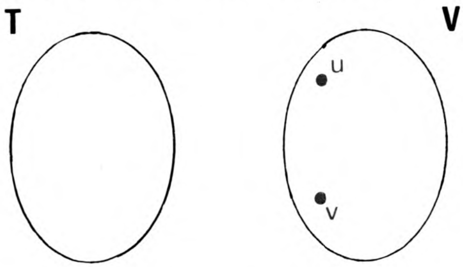
TR 6 Le groupe des vecteurs

I – SOMME DE DEUX VECTEURS.

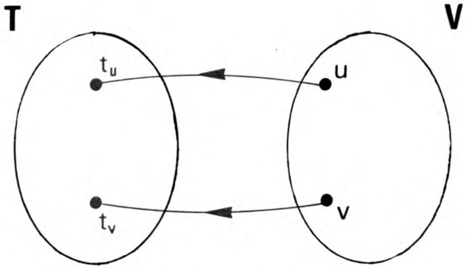
1.1 Une opération dans V.

1. Soit u et v deux vecteurs.

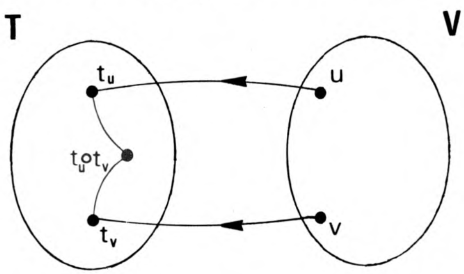
Nous allons utiliser la composition des translations pour définir une opération dans **V**.



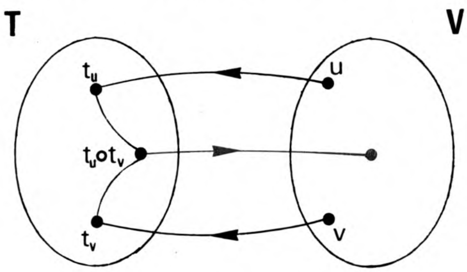
2. Notons t_u et t_v les translations associées à u et à v.



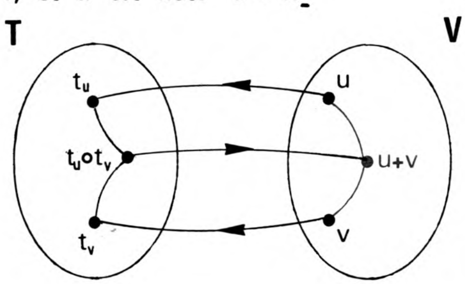
3. Tu sais que $t_u \circ t_v$ est élément de **T**.



4. A la translation $t_u \circ t_v$, il correspond un vecteur.



5. Ce vecteur est appelé SOMME de u et de v, et il est noté u + v.



6. On a ainsi défini une opération dans **V**. Cette opération est appelée ADDITION DES VECTEURS.

Les vecteurs u et v s'additionnent comme les translations t_u et t_v se composent.

Remarque bien que

$$t_u \circ t_v = t_{u+v}\,.$$

1.2 Une nouvelle forme de la relation de Chasles.

Soit A, B et C trois points. Nous avons vu dans [TR4] que $t_{(A,B)} \circ t_{(B,C)} = t_{(A,C)}$; le vecteur qui est associé à $t_{(A,C)}$ est $\overrightarrow{AC}$: c'est le vecteur formé de tous les bipoints équipollents à (A, C) ; de même le vecteur associé à $t_{(A,B)}$ est $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur associé à $t_{(B,C)}$ est $\overrightarrow{BC}$.

Nous savons maintenant que le vecteur associé à $t_{(A,B)} \circ t_{(B,C)}$ est $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Cette égalité est également appelée RELATION DE CHASLES.

1.3 Le groupe des vecteurs.

Soit u, v et w des vecteurs.

Soit t_u, t_v et t_w les translations associées aux vecteurs u, v et w.
Tu sais que l'opération $\circ$ est associative dans **T** :

$$(t_u \circ t_v) \circ t_w = t_u \circ (t_v \circ t_w) .$$

On en déduit que

$$(u + v) + w = u + (v + w) \ :$$

l'opération + est associative dans **V**.

Puisque Id_P est neutre pour l'opération $\circ$ dans **T**,

$$t_u \circ Id_P = Id_P \circ t_u = t_u .$$

$$u + \theta = \theta + u ,$$

donc θ est neutre pour l'opération + dans **V**.

Toute translation admet une translation réciproque ; notons t' la translation réciproque de t_u :

$$t_u \circ t' = t' \circ t_u = Id_P .$$

Notons u' le vecteur associé à t' :

$$u + u' = u' + u = \theta \ :$$

tout vecteur admet un vecteur opposé.

L'opération $\circ$ est commutative dans T :

$$t_u \circ t_v = t_v \circ t_u .$$

$$u + v = v + u \ :$$

l'opération + est commutative dans **V**.

(T, ∘) est un groupe commutatif.

(V, +) est un groupe commutatif.

1.4 Vecteur opposé d'un vecteur.

Soit u un vecteur. On note $-u$ le vecteur opposé de u :

$$u + (-u) = \theta .$$

Exercice.

Soit A et B deux points.

Montre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \theta$.

Il en résulte que $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$; on peut donc écrire que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

1.5 Exercices.

1. *Reprends la feuille de manipulation* 9b, *dessin numéro* 1.

Recopie et complète.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \ldots$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = \ldots$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \ldots$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} = \ldots$;
$\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EB} = \ldots$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \ldots$; $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} = \ldots$; $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC} = \ldots$.

2. Soit A, B, C, D, M, E et F des points tels que

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}.$$

Prends la feuille de manipulation 9b. *Complète le dessin numéro* 3 *pour qu'il illustre cette situation.*

3. Soit A, B, C et D des points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Fais un dessin.

En utilisant la relation de Chasles, montre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

4. Soit F, H, J, K et L des points.

Montre que $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{FL}$,

$$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LF} = \theta .$$

II – DIFFERENCE DE DEUX VECTEURS.

2.1 Le problème de la soustraction.

Soit a et b deux vecteurs. Nous allons chercher s'il existe des vecteurs x tels que $a + x = b$.

Par analogie avec ce que nous avons fait dans $\mathbb{Z}$, on peut penser que le vecteur $b + (-a)$ est une solution.

Vérifie-le.

Tu viens de montrer que $b + (-a)$ est une solution. Cherchons s'il y en a d'autres.

Supposons que y soit une solution. Nous pouvons écrire que $a + y = b$ et que

$$-a + (a + y) = -a + b .$$

Justifie les égalités suivantes.

$$(-a + a) + y = b + (-a) ,$$
$$\theta + y = b + (-a) ,$$
$$y = b + (-a) .$$

Nous avons montré que s'il existe un vecteur y tel que $a + y = b$, ce vecteur ne peut être que $b + (-a)$.

Concluons : il existe un vecteur x et un seul tel que $a + x = b$; c'est le vecteur $b + (-a)$. On dit que ce vecteur est la DIFFERENCE de a et de b et on le note $b - a$.

2.2 Exercices.

1. Soit A, B, C, D, F, G et H des points tels que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$.

Prends la feuille de manipulation 9b. *Complète le dessin numéro* 4 *pour qu'il illustre cette situation (il faut que tu marques les points* F *et* G*).*

2. *Reprends la feuille de manipulation* 9b, *dessin numéro* 1.
Recopie et complète.
$\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AF} = \dots$; $\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{BE} = \dots$; $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EB} = \dots$.

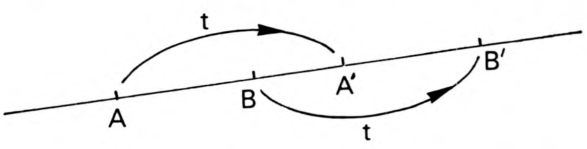
faisons le point

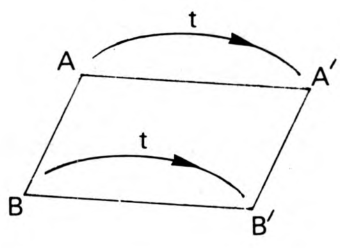
Ce chapitre a pour but l'étude de certaines applications du plan mathématique dans lui-même : les translations.

I – LES TRANSLATIONS.

1.1 Nous avons défini les translations à l'aide de quatre de leurs propriétés que nous n'avons pas démontrées.

1. Les translations sont des bijections du plan sur lui-même.
2. Pour une translation, un point quelconque et son image sont distincts.
3. Soit t une translation, A et B deux points distincts et A' et B' les images de A et B par t ; alors
les droites AB et $A'B'$ sont parallèles,
les droites AA' et BB' sont parallèles.





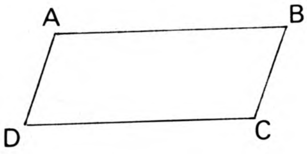
4. Soit A et B deux points distincts. Il existe une translation et une seule pour laquelle A a pour image B.

L'étude des translations nous a conduit à définir des parallélogrammes.

Soit A, B, C et D quatre points distincts et non alignés. On dit que $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et C si

les droites AB et CD sont parallèles et

les droites AD et BC sont parallèles.



Enfin, nous avons démontré que l'image d'une droite d par une translation est une droite. Si on note d' cette droite, cela signifie que

tout point de d a son image sur d',

tout point de d' est l'image d'un point de d.

De plus, la droite d' est parallèle à la droite d.

1.2 Le groupe des translations.

Par abus de langage, nous avons dit que Id_P est une translation et nous avons appelé **T** l'ensemble des translations y compris Id_P.

$(T, \circ)$ est un groupe commutatif,

Id_P est l'élément neutre pour l'opération $\circ$,

soit A et B deux points : la translation réciproque de $t_{(A, B)}$ est la translation $t_{(B, A)}$.

II – LES VECTEURS.

2.1 Bipoints équipollents.

Deux bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents s'ils définissent la même translation, c'est-à-dire si $t_{(A, B)} = t_{(C, D)}$.

L'ensemble de tous les bipoints équipollents à (A, B) est un vecteur, qu'on note souvent $\overrightarrow{AB}$.

Les trois relations suivantes ont la même signification :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; (A, B) est équipollent à (C, D) ; $t_{(A, B)} = t_{(C, D)}$.

Soit v un vecteur et M un point : il existe un point N et un seul tel que $\overrightarrow{MN} = v$.

Il revient au même de se donner une translation ou de se donner un vecteur.

A la translation Id_P est associé le vecteur nul, que nous avons noté θ.

Soit v un vecteur non nul et (A, A') un représentant de v. La direction du vecteur v est la direction de la droite (A, A'), c'est-à-dire la direction de la translation $t_{(A, A')}$.

2.2 Le groupe des vecteurs.

Nous avons noté **V** l'ensemble des vecteurs et défini sur **V** une addition de la façon suivante.

Soit u et v deux vecteurs, t_u et t_v les translations associées à u et v. La somme de u et de v, notée $u + v$, est le vecteur associé à la translation $t_u \circ t_v$.

$(\mathbf{V}, +)$ est un groupe commutatif.

θ est l'élément neutre pour l'addition des vecteurs.

Soit A et B deux points : le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Soit u et v deux vecteurs. Il existe un vecteur x et un seul tel que $u + x = v$. Ce vecteur, noté $v - u$ est la différence de v et de u, et $v - u = v + (-u)$.

Soit A, B et C des points du plan :

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AC}}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Ces relations s'appellent relations de Chasles.

On en déduit que si O est un point du plan, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

un peu d'histoire

Félix KLEIN.

Dans ce chapitre, nous avons étudié le groupe des translations du plan. C'est Félix Klein qui le premier montra clairement toute l'importance des groupes de transformations : faire de la géométrie consiste essentiellement à étudier des groupes de transformations du plan (ou de l'espace), et à chercher les propriétés qui ne sont pas modifiées par les éléments du groupe ; ainsi par exemple, chaque translation transforme une droite en une droite, et conserve les directions.

Félix Klein est né en Allemagne, à Düsseldorf, en 1849. A cette date Victor Hugo avait 47 ans ; deux ans plus tard, un coup d'état allait conduire Napoléon III sur le trône. A cette époque, on commençait à utiliser des machines à vapeur en Europe occidentale ; on voyait circuler les premiers trains.

En 1870, Klein avait 21 ans et se trouvait à Paris pour terminer ses études ; il dut rentrer précipitamment dans son pays au moment où la guerre franco-allemande commençait.

Professeur de faculté à 23 ans, il commença sa carrière à Erlangen en 1872 où son premier cours fut ce qu'on appelle depuis le programme d'Erlangen. Il fut ensuite professeur à Munich, Leipzig et finalement à Göttingen à partir de 1886 ; c'est là qu'il mourut en 1925.

Dans ses nombreuses recherches mathématiques, Félix Klein utilisa beaucoup la théorie des groupes ; il utilisa cette théorie en particulier pour étudier les polyèdres.

On a donné le nom de «groupes de Klein» aux groupes à 4 éléments qui peuvent être représentés par la table suivante.

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Michel CHASLES.

Après y avoir été élève, Michel Chasles (1793-1880) fut professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris ; il fut également professeur de mathématiques à la Faculté des Sciences de Paris.

Bien qu'on ait donné son nom à une relation algébrique ($\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$) Michel Chasles s'est surtout attaché à la géométrie pure : c'est-à-dire qu'il a cherché à résoudre les problèmes géométriques sans utiliser le calcul algébrique. Par là, il est plus proche d'Euclide que de Descartes.

exercices et problèmes

1. Soit A, B et C trois points non alignés. Soit X l'image de C par $t_{(A, B)}$, et Y l'image de C par $t_{(B, A)}$.

1. *Fais un dessin qui illustre cette situation. Que constates-tu ?*
2. ***Démontre que les points** X, C **et** Y **sont alignés.***

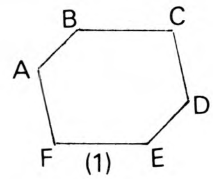
2. Soit M, N, P et Q quatre points tels que les droites MN et PQ sont parallèles. Soit t une translation. Soit M', N', P' et Q' les points ainsi définis : $M' = t(M)$; $N' = t(N)$; $P' = t(P)$; $Q' = t(Q)$.

1. *Fais un dessin qui illustre cette situation. Que constates-tu ?*
2. ***Démontre que les droites** M'N' **et** P'Q' **sont parallèles.***

3. Soit A, B et C trois points du plan. Soit M un point quelconque. Soit N l'image de M par $t_{(A, B)}$, Q l'image de N par $t_{(B, C)}$, R l'image de Q par $t_{(B, A)}$ et S l'image de R par $t_{(C, B)}$.

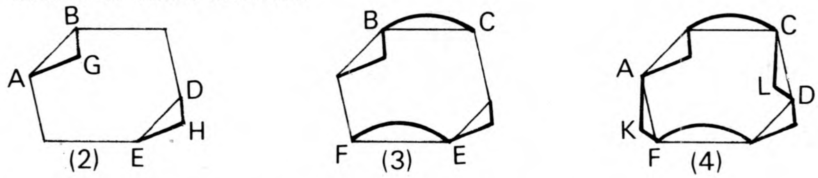
1. *Fais un dessin qui illustre cette situation. Que constates-tu ?*
2. ***Démontre que** $M = S$.*

4.



Observe la figure ci-contre. Tu peux distinguer trois parallélogrammes. Nomme-les.

Observe les dessins ci-dessous.



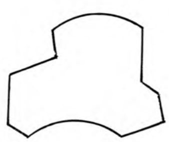
Appelons r la translation matérielle qui transforme A en E,
s la translation matérielle qui transforme F en B,
t la translation matérielle qui transforme A en C.

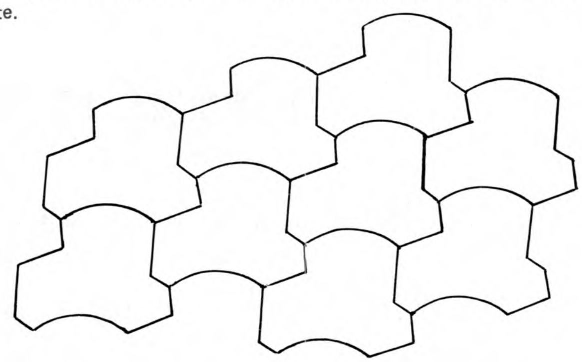
Sur la figure (2) on a dessiné le segment AG et le segment GB ; puis on a dessiné les transformés des segments AG et GB par la translation r.

Sur la figure (3) on a dessiné un arc de cercle qui passe par F et E, puis on a dessiné le transformé de cet arc de cercle par la translation s.

Sur la figure (4) on a dessiné le segment AK et le segment KF, puis on a dessiné les transformés des segments AK et KF par la translation t.

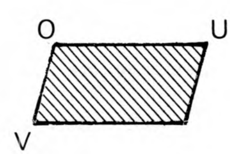
Voici, à gauche, la figure obtenue par le procédé décrit par les figures (2), (3) et (4) ; cette figure permet de réaliser le «pavage» qui est à droite.





Reprends la figure (1) et utilise le même procédé pour faire un autre dessin, et réalise un pavage.

5. *Trace un parallélogramme comme celui-ci.*



Appelons P la région hachurée.
Appelons a la translation matérielle qui transforme O en U,
Appelons b la translation matérielle qui transforme O en V.

1. *Dessine la transformée de la figure* P *par* a, *et appelle-la* A_1 *; dessine la transformée de* A_1 *par* a, *et appelle-la* A_2. *Recommence : tu obtiendras ainsi des figures* A_1, A_2, A_3, A_4,...

Dessine la transformée de P *par* b, *et appelle-la* B_1 *; dessine la transformée de* B_1 *par* b, *et appelle-la* B_2. *Recommence : tu obtiendras ainsi des figures* B_1, B_2, B_3, B_4,...

2. Notons a S a la translation «a suivie de a», et a S a S a la translation «a S a suivie de a» ; on définit de façon analogue a S a S a S a, etc...

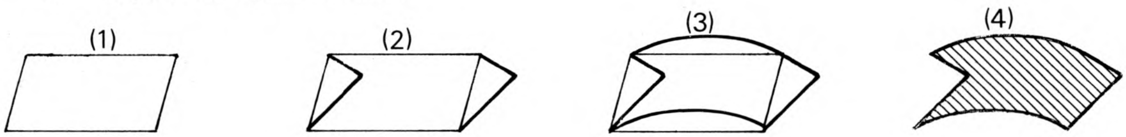
Quelle est la transformée de P par a S a ? Et par a S a S a ? Et par a S a S a S a ?

Dessine la transformée de B_1 par a, et appelle-la A_1B_1 ; dessine la transformée de A_1B_1 par b, et appelle-la A_1B_2.

Quelle est la transformée de P par b S a S b ? Et par a S b S b ?

Tu vois qu'en continuant ainsi on peut «paver» le plan.

3. *Regarde les figures suivantes.*



Refais avec la figure hachurée (4) le même travail qu'avec le parallélogramme P.
Peux-tu expliquer pourquoi on arrive aussi à paver le plan avec cette figure ?

6. Soit r et s deux translations et A et B des points distincts. Soit A', B', A'' et B'' les points ainsi définis :

$$A' = r(A) \quad ; \quad B' = r(B) \quad ; \quad A'' = s(A') \quad ; \quad B'' = s(B').$$

Démontre que les droites AB et $A''B''$ sont parallèles et que les droites AA'' et BB'' sont parallèles.

7. Soit (A, B) et (A', B') deux bipoints équipollents. Soit C un point qui n'appartient pas à la droite AB.

On appelle d_1 la droite qui passe par A' et qui est parallèle à la droite AC. On appelle d_2 la droite qui passe par B' et qui est parallèle à la droite BC.

1. ***Démontre que les droites d_1 et d_2 sont sécantes. Appelle C' leur point d'intersection.***

2. ***Quelle est l'image de la droite AC par $t_{(A, A')}$? Par $t_{(B, B')}$?***

3. ***Explique pourquoi l'image de C par $t_{(B, B')}$ est C'. Démontre que les droites AA', BB' et CC' sont parallèles.***

8. Soit d et d' deux droites parallèles distinctes. Soit A et B deux points de d et A' et B' deux points de d'. La parallèle à la droite $A'B$ qui passe par B' coupe d en un point qu'on note C. La parallèle à la droite AB' qui passe par B coupe d' en un point qu'on note C'.

Appelons r et s les translations ainsi définies : $r = t_{(A, B)}$ et $s = t_{(B, C)}$.

1. *Fais un dessin qui illustre cette situation.*

2. ***Quelle est l'image de A par $s \circ r$?***

3. ***Quelle est l'image de A' par s ? L'image de B' par r ?***

4. ***Quelle est l'image de A' par $r \circ s$? Par $s \circ r$?***

5. ***Démontre que les droites AA' et CC' sont parallèles.***

9. Soit $\{A, A', B, B'\}$ un parallélogramme de sommets opposés A et B'. Soit C un point de la droite BB'. La parallèle à la droite AC qui passe par A' coupe la droite BB' en un point que tu appeleras C'.

1. ***Démontre que les bipoints (A, A'), (B, B') et (C, C') sont équipollents.***

2. ***Démontre que les bipoints (A, C) et (A', C') sont équipollents.***

10. Soit $\{A, B, C, D\}$ un parallélogramme de sommets opposés A et C. Appelons r, s, u et v les translations ainsi définies :

$$r = t_{(A, B)} \quad ; \quad s = t_{(A, D)} \quad ; \quad u = t_{(A, C)} \quad ; \quad v = t_{(B, D)}.$$

1. *Démontre que* $u = r \circ s$ *et que* $v = s \circ r^{-1}$.

2. Soit E et F les points ainsi définis : $E = r(B)$ et $F = s(D)$.
Démontre que $v(E) = C$ *et que* $v(C) = F$. *Démontre que les points* E, C *et* F *sont alignés.*

11. Soit δ une direction. On appelle $\mathbf{T}_\delta$ l'ensemble dont les éléments sont soit les translations de direction δ, soit l'identité. Donc $\mathbf{T}_\delta$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbf{T}$ des translations.

1. Soit r et s deux éléments de $\mathbf{T}_\delta$. Soit M un point. Soit M' et M'' les points tels que

$$M' = r(M) \quad \text{et} \quad M'' = s(M').$$

Montre que les points M, M' *et* M'' *sont alignés. Montre que* $s \circ r$ *est un élément de* $\mathbf{T}_\delta$.
La loi $\circ$ est donc une opération dans $\mathbf{T}_\delta$.

2. *La loi* $\circ$ *est-elle associative dans* $\mathbf{T}_\delta$ *?*

3. *Existe-t-il un élément neutre dans* $\mathbf{T}_\delta$ *pour la loi* $\circ$ *? Lequel ?*

4. *Montre que si* t *est un élément de* $\mathbf{T}_\delta$ *alors* t^{-1} *appartient à* $\mathbf{T}_\delta$.

5. *Est-ce que* $(\mathbf{T}_\delta, \circ)$ *est un groupe commutatif ?*

12. 1. Soit a, b et c trois vecteurs.
Résous dans l'ensemble $\mathbf{V}$ *des vecteurs les équations en* x *suivantes.*

$$x - b = a \quad ; \quad x + b + a = c \quad ; \quad x + (a - x) = b + x.$$

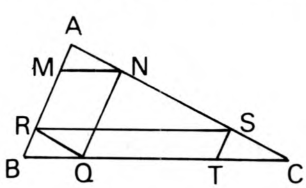
2. Soit r, s et t trois translations.
Résous dans l'ensemble $\mathbf{T}$ *des translations les équations en* u *suivantes.*

$$u \circ s^{-1} = r \quad ; \quad u \circ s \circ r = t \quad ; \quad u \circ (r \circ u^{-1}) = s \circ u.$$

13. Dans ce problème nous allons démontrer la propriété qui correspond à l'observation que tu as faite dans [DP4, paragraphe 4.2, page 55].

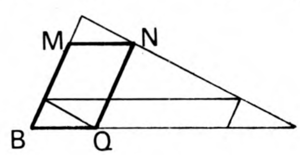
Soit $\{A, B, C\}$ un triangle et M un point de la droite AB.
On appelle N le projeté de M sur la droite AC suivant la direction de la droite BC ;
on appelle Q le projeté de N sur la droite BC suivant la direction de la droite AB ;
on appelle R le projeté de Q sur la droite AB suivant la direction de la droite AC ;
on appelle S le projeté de R sur la droite AC suivant la direction de la droite BC ;
on appelle T le projeté de S sur la droite BC suivant la direction de la droite AB.

Voici un dessin qui illustre cette situation.



Nous allons démontrer que les droites MT et AC sont parallèles.

Les figures (1), (2) et (3) pourront t'aider à raisonner.



(1)

1. *Démontre que* $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MB}$ *(fig. 1).*

2. *Démontre que* $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{AR}$ *(fig. 2).*

3. *Déduis des égalités précédentes que* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{RB}$.

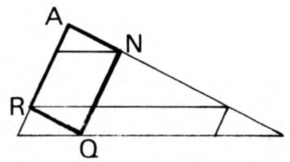
4. *Démontre que* $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{ST}$ *(fig. 3).*

5. ***Démontre que*** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ST}$ ***et que les droites*** MT ***et*** AS ***sont parallèles.***

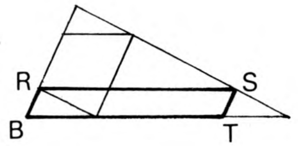
Tu as donc démontré que les droites MT et AC sont parallèles.

6. Pour illustrer ce problème on a choisi un point M qui appartient au segment AB. On peut aussi bien faire un dessin en choisissant un point M extérieur au segment AB.

Fais-le. Fais aussi un dessin dans le cas où M *est le milieu du segment* AB.



(2)



(3)

14. Soit {A, B, C, D} un parallélogramme de sommets opposés A et D.

Démontre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. ***Démontre que*** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

15. Soit quatre points A, B, C et D non alignés tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Démontre que {A, B, C, D} ***est un parallélogramme de sommets opposés*** A ***et*** D.

16. Soit A, B et C trois points non alignés. Soit X et Y les points ainsi définis :

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{BA}.$$

1. *Fais un dessin qui illustre cette situation. Que constates-tu ?*

2. ***Démontre que les points*** X, C ***et*** Y ***sont alignés.***

3. ***Démontre que les droites*** BX ***et*** AY ***sont sécantes. Appelle*** Z ***leur point d'intersection.***

4. ***Démontre que*** $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{CB}$ ***et que*** $\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

5. ***Calcule*** $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ}$.

17. Soit A, B, C et D quatre points quelconques. Soit E et F les points ainsi définis :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}.$$

1. ***Démontre que*** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BD}$.

2. ***Déduis-en que*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FD}$.

18. Soit A, B, C et D quatre points quelconques.

Démontre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. ***(Tu peux commencer par écrire que*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$, ***mais il y a bien d'autres façons de faire).***

19. Soit A, B, C, D, E, F et G des points quelconques.

Calcule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} - (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB})$. ***Que peux-tu en déduire pour les vecteurs*** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ ***et*** $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$ ***?***

20. Soit A, B, C et D quatre points quelconques. Soit M un point tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Démontre que M ***est l'un des points*** A, B, C ***ou*** D ***(tu peux essayer de trouver un vecteur égal au vecteur*** $\overrightarrow{CM}$***).***

21. Soit A, B, C et D quatre points quelconques. Soit M un point tel que $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB}$.

Démontre que M ***est l'un des points*** A, B, C ***ou*** D.

22. Soit A, B, C et D quatre points quelconques. Soit M un point tel que $\overrightarrow{DM} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DB}$.
Démontre que M *est l'un des points* A, B, C *ou* D.

23. Soit A, B, C et D quatre points quelconques. Soit M un point tel que $\overrightarrow{DM} - (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AM}$.
Démontre que M *est l'un des points* A, B, C *ou* D.

24. Soit A, B et C trois points.

1. Soit M un point. Notons u(M) le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AC}$.
Donne une écriture plus simple de u(M). *Quel est le vecteur* u(A) *? Et* u(B) *? Et* u(C) *?*

2. Soit M un point. Notons v(M) le vecteur $\overrightarrow{CM} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MB}) - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{CB}$.
Donne une écriture plus simple de v(M). *Quel est le vecteur* v(A) *? Et* v(B) *? Et* v(C) *?*

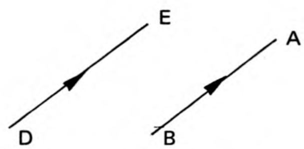
25. **Apprenons à faire un problème.**

ENONCE DU PROBLEME.

Soit A, B, C et D quatre points. Soit E l'image de D par $t_{(B, A)}$, F l'image de E par $t_{(C, B)}$ et G l'image de F par $t_{(D, C)}$.

1. Fais une figure qui illustre cette situation. Que constates-tu ?
2. Démontre que G est l'image de D par $t_{(D, A)}$.
   Déduis-en que G = A.

ETUDE DU PROBLEME.



Essayons de comprendre l'énoncé et d'organiser nos données.

Dessine quatre points A, B, C *et* D.

On nous dit que E est l'image de D par $t_{(B, A)}$ donc {A, B, E, D} est un parallélogramme de sommets opposés A et E. *Dessine le point* E.

On nous dit que F est l'image de E par $t_{(C, B)}$. *Raisonne de même pour les quatre points* C, B, E *et* F *et dessine le point* F.

On nous dit que G est l'image de F par $t_{(D, C)}$. *Raisonne de même pour les quatre points* D, C, F *et* G *et dessine le point* G.

Faisons un petit schéma pour mieux comprendre ce que nous avons fait.

$$D \overset{t_{(B,A)}}{\longmapsto} E \overset{t_{(C,B)}}{\longmapsto} F \overset{t_{(D,C)}}{\longmapsto} G .$$

Ce schéma nous invite à composer les trois translations utilisées. Nous avons appris dans le cours que la relation de Chasles pouvait être utile. Essayons :

$$t_{(D, C)} \circ t_{(C, B)} \circ t_{(B, A)} = t_{(D, A)} .$$

Donc le point G est l'image du point D par $t_{(D, A)}$.

Pourquoi est-ce le point A *? (Si tu ne trouves pas tout de suite, tu peux te reporter à la définition de* $t_{(D, A)}$*).*

Nous allons maintenant RÉDIGER cette démonstration comme on le ferait «au propre» sur une copie. Pour cela, nous allons faire une phrase pour chaque propriété du cours qu'on a utilisée.

REDACTION.

La relation de Chasles nous permet d'affirmer que

$$t_{(D, C)} \circ t_{(C, B)} \circ t_{(B, A)} = t_{(D, A)} ;$$

donc G est l'image de D dans la translation $t_{(D, A)}$.

Nous savons que, par définition, A est l'image de D par $t_{(D, A)}$; donc G = A.

les réels

R1 Les nombres réels

I – ENCORE DE NOUVEAUX NOMBRES.

1.1 Aires de carrés.

Examine la feuille de manipulation 11a, *dessin numéro* 1. *Nous y avons dessiné deux carrés. Le côté* BG *du carré* BJHG *est une diagonale du carré* ABFG. *Le segment* AB *mesure* 1 dm.

Quelle est la mesure en dm^2 *du carré* ABFG *? Du triangle* BFG *? Du carré* BJHG *?*

Appelons y la mesure en dm du segment BG : la mesure en dm^2 du carré BJHG est y^2. On peut donc écrire que $y^2 = 2$.

1.2 Etude de l'égalité $y^2 = 2$.

Existe-t-il un entier positif* y *tel que* $y^2 = 2$ *?

Nous allons chercher s'il existe un rationnel positif y tel que $y^2 = 2$.

Supposons qu'un tel nombre existe et soit $\frac{a}{b}$ une écriture fractionnaire irréductible de ce nombre. Les nombres a et b sont deux naturels non nuls et étrangers.

Si $y = \frac{a}{b}$ et $y^2 = 2$, alors $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, $\frac{a^2}{b^2} = 2$, $a^2 = 2b^2$.

Cette dernière égalité montre que a^2 est un naturel pair, c'est-à-dire divisible par 2. Le nombre a est donc pair (nous examinerons plus loin pourquoi).

Soit a' le naturel tel que $a = 2a'$:

$$(2a')^2 = 2b^2 \quad ; \quad 4a'^2 = 2b^2 \quad ; \quad 2a'^2 = b^2.$$

Le nombre b^2 est donc pair et par suite le naturel b est pair.

Les nombres a et b sont donc tous les deux divisibles par 2 : c'est impossible, car nous les avions supposés étrangers.

Nous avions supposé qu'il existe un nombre rationnel positif y tel que $y^2 = 2$. Cela nous a conduit à une absurdité, donc notre supposition était fausse.

Concluons : il n'existe pas de rationnel positif dont le carré est 2.

Il n'en existe pas non plus qui soit négatif. En effet, si un nombre négatif avait pour carré 2, son opposé, qui est positif aurait aussi pour carré 2. Nous venons de voir que c'est impossible.

Enfin, tu sais que 0^2 est différent de 2.

Il n'y a donc pas de nombre rationnel dont le carré est 2.

1.3 Remarque.

Dans cette démonstration, nous avons utilisé la propriété suivante.
Soit n un entier naturel ; si n^2 est pair, alors n est pair.

Choisis quelques naturels pairs et quelques naturels impairs. Calcule leurs carrés. Que constates-tu ? Compare avec tes camarades.

Est-ce que tu viens de faire une démonstration ?

1.4 Réflexion sur l'activité précédente.

Nous venons d'être confrontés à un problème insoluble dans $\mathbb{Q}$. Il n'existe pas de rationnel y tel que $y^2 = 2$.

Tu as déjà rencontré des situations analogues.

Par exemple, il n'existe pas d'entier naturel z tel que $z + 7 = 2$. On a alors introduit de nouveaux nombres, les entiers relatifs. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, l'équation en z, $z + 7 = 2$, admet la solution -5 : en effet, $-5 + 7 = 2$.

De façon analogue, il n'existe pas d'entier relatif u tel que $2u = -1$. Mais dans l'ensemble $\mathbb{D}$, cette équation en u admet la solution $-0{,}5$: en effet $2 \times (-0{,}5) = -1$.

Enfin, nous savons qu'il n'existe pas de nombre décimal v tel que $3v = 1$. Nous avons introduit l'ensemble $\mathbb{Q}$ où cette équation en v admet la solution $\frac{1}{3}$: en effet $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

Rappelons la chaine d'inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Par analogie, nous allons admettre qu'il existe un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$ dans lequel l'équation en y, $y^2 = 2$, a une unique solution positive. Ce nouveau nombre est souvent noté $\sqrt{2}$, et tu vois que $(\sqrt{2})^2 = 2$. L'écriture $\sqrt{2}$ se lit RACINE CARREE de 2.

Ce nouvel ensemble est l'ensemble des NOMBRES REELS. Il est noté $\mathbb{R}$. Nous le connaîtrons mieux lorsque nous aurons étudié certaines de ses propriétés. Nous savons déjà que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Le nombre $\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{R}$ sans appartenir à $\mathbb{Q}$. Il y a bien d'autres nombres qui sont réels sans être rationnels, par exemple $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ et π.

Exercice 1.

Prends la feuille de manipulation 11b, *dessin numéro* 1.

Place dans cette figure les nombres 0 ; 1 ; 2,5 ; –2 ; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{2}$; - $\sqrt{2}$.

Exercice 2.

Prends la feuille de manipulation 11b *et regarde le dessin numéro* 2.

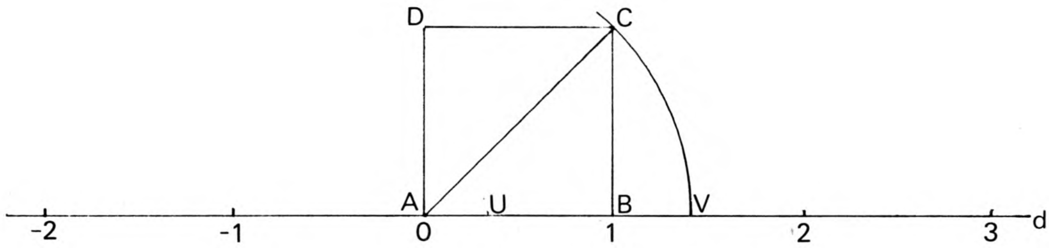
Les croix qui sont dans la première colonne indiquent que le nombre –3 est un entier relatif, un décimal, un rationnel, un réel.

Remplis de façon analogue les autres colonnes.

II – BIJECTIONS D'UNE DROITE MATERIELLE VERS $\mathbb{R}$.

2.1 Avec une échelle régulière.

Nous avons dessiné une droite matérielle d et placé sur cette droite une échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$.



Tu as vu qu'on pouvait partager chaque échelon d'une échelle régulière en parties de même longueur et obtenir ainsi des échelles plus fines. Nous avons gradué certaines de ces échelles avec $\mathbb{D}_1$ ou $\mathbb{D}_2$, ou encore des éléments de $\mathbb{Q}$.

Par exemple, si on partage ici chaque échelon en trois parties de même longueur, on obtient une nouvelle échelle. Le point U, situé au tiers de l'échelon AB, a pour abscisse $\frac{1}{3}$.

La figure ABCD est un carré, les segments AC et AV ont la même longueur. Appelons ℓ la longueur du segment AB et y la mesure du segment AV selon l'unité ℓ. Nous avons vu dans le paragraphe I que $y^2 = 2$, et qu'il n'existe pas de rationnel y tel que $y^2 = 2$.

Le point V n'est donc pas un barreau de notre nouvelle échelle. Nous souhaitons cependant lui associer un nombre.

Que proposes-tu ?

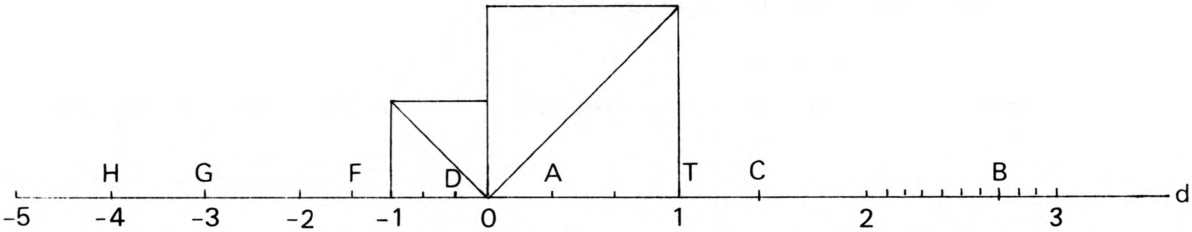
Nous sommes ainsi amené à imaginer qu'à chaque point de la droite matérielle d on peut associer un nombre réel, que nous appellerons encore ABSCISSE de ce point. On définit ainsi une application f de d vers IR.

Une telle application est appelée une GRADUATION de d.

Le bipoint (A, B) est le REPERE de la graduation f.

2.2 Avec une échelle qui n'est pas régulière.

Nous avons dessiné une droite matérielle d et placé sur cette droite une échelle qui n'est pas régulière. A chaque barreau de cette échelle, on a associé un nombre relatif.



A partir de cette échelle non régulière, à chaque point de la droite d, on peut associer un nombre réel de la manière suivante.

Par exemple, au point A correspond le réel $\frac{1}{3}$, au point C correspond le réel $\sqrt{2}$, etc...

Suivant cette règle, quels sont les réels qui correspondent aux points B, D, F, G *et* H *?*

On peut ainsi définir une application de d vers IR. On décide qu'une telle application n'est pas une graduation de d ; nous conserverons le mot graduation seulement pour les échelles régulières.

2.3 Des abscisses aux points.

Trace une droite d. *Place sur cette droite deux points* K *et* L *tels que la longueur du segment* KL *soit* 7 cm.

Les points K et L sont les barreaux d'abscisse 0 et 1 d'une échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$. A partir de cette échelle, tu peux imaginer une graduation t de la droite matérielle d. Le bipoint (K, L) est le repère de la graduation t.

Marque sur la droite d *les points* A, B, C, D *et* E *tels que*

$t(A) = 2$; $t(B) = -0{,}5$; $t(C) = \frac{5}{7}$; $t(D) = \frac{8}{7}$; $t(E) = -\frac{2}{7}$.

2.4 Résumons ce que nous avons fait.

Soit d une droite matérielle. Ce que nous avons vu nous conduit à affirmer qu'il existe des bijections de d vers IR. Nous avons appelé graduations certaines de ces bijections.

Soit O et I deux points distincts de d. Il existe une graduation de d et une seule de repère (O, I) : tout point de d a une abscisse pour cette graduation et tout réel est l'abscisse d'un seul point de d.

2.5 Exercice.

***Prends la feuille de manipulation* 11a.**

Sur le dessin numéro 3, nous avons tracé une droite matérielle d ; soit g la graduation de repère (O, I).

Marque sur la droite d *les points* A, B, C, D, E, F, G *et* H *tels que*

$g(A) = 2\sqrt{2}$; $g(B) = -\frac{2}{3}$; $g(C) = \frac{5}{3}$; $g(D) = \frac{4}{3}$; $g(E) = 3 + \sqrt{2}$; $g(F) = \frac{13}{3}$; $g(G) = \frac{28}{6}$; $g(H) = \frac{3}{2}$.

III – OPERATIONS DANS IR.

3.1 Addition et multiplication.

Dans l'ensemble IR, il y a une addition qu'on notera +, et une multiplication qu'on notera X.

Les rationnels s'additionnent et se multiplient de la même manière dans IR que dans Q.

L'ensemble IR muni de l'addition et de la multiplication a les mêmes propriétés que l'ensemble Q muni de l'addition et de la multiplication. Tu peux lire ces propriétés dans la synthèse page 229.

Nous pouvons les résumer en disant que

(IR, +) est un groupe commutatif,
(IR*, X) est un groupe commutatif (la notation IR* désigne l'ensemble des nombres réels non nuls),
la multiplication est distributive sur l'addition.

Exercice.

***Souviens-toi que le nombre* $\sqrt{2}$ *est tel que* $(\sqrt{2})^2 = 2$.**
Calcule* $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ *; quel est l'inverse de* $\sqrt{2} + 1$ *?

3.2 Rôle du zéro.

Les propriétés du zéro dans $\mathbb{Q}$ s'étendent à $\mathbb{R}$. En particulier,

si a est un réel, alors $a \times 0 = 0$;

le nombre 0 n'a pas d'inverse : on ne peut pas trouver de réel u tel que $u \times 0 = 1$. C'est pourquoi, si a est un réel, on ne peut pas donner de sens raisonnable à l'écriture $\frac{a}{0}$. Tu pourras te reporter à [Q6, paragraphe 2.1, page 145].

Dans le chapitre *Q*, nous avons démontré la propriété suivante :

soit a, x et y des éléments de $\mathbb{Q}^*$; si $ax = ay$ alors $x = y$.

Puisque $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe, on aurait une nouvelle propriété en remplaçant, dans l'énoncé ci-dessus, $\mathbb{Q}^*$ par $\mathbb{R}^*$.

Est-ce que $0 \times 3 = 0 \times 2$ *? Est-ce que* $3 = 2$ *?*

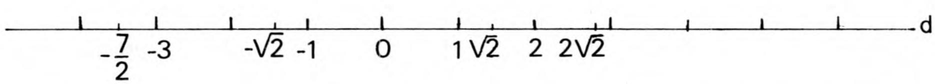
Tu vois que la propriété ci-dessus n'est plus vraie dans $\mathbb{R}$. Autrement dit :

soit a, x et y trois nombres réels ; si $ax = xy$, on ne peut conclure que $x = y$ que si a est différent de 0.

IV – ORDRE DANS $\mathbb{R}$.

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, il y a une relation d'ordre notée $\leqslant$. Les rationnels sont rangés dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{Q}$.

Nous avons dessiné ci-dessous une droite matérielle d.



Nous admettrons que l'ordre dans $\mathbb{R}$ correspond à l'ordre des points de la droite d munie de la graduation de repère (O, I). Cela ne fait que généraliser ce que nous avons dit pour les rationnels.

Comme nous l'avons fait dans [Q7], nous pouvons dire ce que sont les réels positifs et les réels négatifs.

Le point O partage la droite en deux DEMI-DROITES :

celle qui contient I ; nous la noterons d_+ ;

celle qui ne contient pas I ; nous la noterons d_-.

Les réels positifs sont les abscisses des points de la demi-droite d_+ et les réels négatifs sont les abscisses des points de la demi-droite d_-.

Ainsi, $-\frac{7}{2}$, -3, $-\sqrt{2}$, -1 sont des réels négatifs, et 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$ sont des réels positifs.

Nous décidons que, comme dans $\mathbb{Q}$, le nombre 0 n'est ni positif, ni négatif.

Nous avons aussi les propriétés suivantes.

Soit a, b et c trois réels ;
si $a \leqslant b$, alors $a+c \leqslant b+c$.

Soit a, b et c trois réels ;
si $a \leqslant b$ et si c est positif, alors $ac \leqslant bc$;
si $a \leqslant b$ et si c est négatif, alors $ac \geqslant bc$.

Exercices.

Tu sais que $1 \leqslant \sqrt{2}$. Soit x un réel.

Compare $x+1$ *et* $x+\sqrt{2}$.

Tu sais que $13 \leqslant 15$.

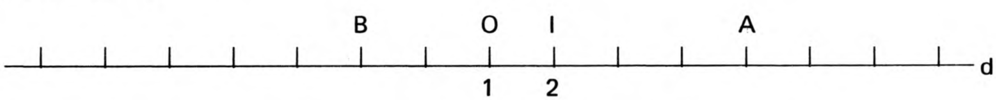
Compare les réels $13(2-\sqrt{2})$ *et* $15(2-\sqrt{2})$ *puis les réels* $13(1-\sqrt{2})$ *et* $15(1-\sqrt{2})$.

$\boxed{\text{R2}}$ Calculs dans IR et graduations

I — SURLIGNES.

1.1 Surlignés dans IR.

Nous avons dessiné ci-dessous une droite d et placé sur cette droite une échelle régulière graduée par $\mathbb{Z}$.



Soit X et Y deux barreaux de cette échelle. Dans [D3], nous avons appelé «XY surligné», et noté $\overline{XY}$, le nombre

abscisse de Y − abscisse de X.

Calcule $\overline{AB}$, $\overline{OI}$ *et* $\overline{BI}$.

Nous pouvons généraliser cela à une droite matérielle graduée par IR. Mais maintenant tous les points de la droite ont une abscisse.

Soit d une droite et g une graduation de cette droite. Soit M et N deux points de cette droite. Nous appellerons «MN surligné», et nous noterons $\overline{MN}$, le nombre

abscisse de N − abscisse de M,

c'est-à-dire $g(N) - g(M)$.

1.2 Exercice.

Soit d une droite matérielle, O et I deux points de cette droite et g la graduation de d de repère (O, I). Soit A, B, C, D et E les points de d tels que

$g(A) = -5 \quad ; \quad g(B) = 2 \quad ; \quad g(C) = \sqrt{2} \quad ; \quad g(D) = -1 \quad \text{et} \quad g(E) = -\frac{1}{2}$.

Fais un dessin. Calcule $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DD}$, $\overline{CE}$, $\overline{IA}$.

Soit M un point de d tel que $\overline{BM} = 8$.

Quelle est l'abscisse de M *?*

Tu as peut-être répondu à cette question en utilisant ton dessin.
Voici une autre façon de procéder.
Nous ne connaissons pas encore l'abscisse de M, appelons-la provisoirement x.

Donne de $\overline{BM}$ *une autre écriture qui utilise* x.

Cela conduit à écrire que $x - 2 = 8$.

Résous cette équation en x. *Cela correspond-il à ce que tu avais trouvé ?*

Soit N un point de d tel que $\overline{NA} = -7$.

Quelle est l'abscisse de N *?*

Compare $\overline{AB} + \overline{BC}$ *et* $\overline{AC}$. *Compare* $\overline{BC} + \overline{CE}$ *et* $\overline{BE}$.

1.3 Relation de Chasles.

Dans l'exercice qui précède, tu as vérifié que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ et $\overline{BC} + \overline{CE} = \overline{BE}$.
Nous allons voir que cela provient d'une propriété générale.

Soit d une droite munie d'une graduation.
Soit P, Q et R trois points de d. Appelons u, v et w leurs abscisses dans la graduation choisie.
Tu sais que $\overline{PQ} = v - u$.

Calcule de même $\overline{QR}$ *et* $\overline{PR}$. *Montre que* $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$.

Cette relation s'appelle RELATION DE CHASLES.

1.4 Conséquences.

On désigne par A, B, N et W des points de d.

Calcule $\overline{BA} + \overline{AB}$. *Déduis-en que* $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Il y a un seul nombre réel égal à son opposé.

Lequel ?

Montre que si $\overline{BA} = \overline{AB}$ *alors* A = B.

La relation de Chasles permet d'affirmer que $\overline{AB} = \overline{AW} + \overline{WB}$.

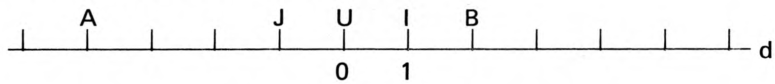
Montre que $\overline{AB} = \overline{WB} - \overline{WA}$.

Montre que si $\overline{AN} = \overline{AB}$ *alors* B = N.

II – MILIEU D'UN BIPOINT.

2.1 Exercice.

Voici une droite matérielle graduée d.



Quelles sont les abscisses de A, B *et* J *? Vérifie que* J *est le milieu du segment* AB.

Calcule $\overline{AJ}$ *et* $\overline{JB}$. *Que constates-tu ?*

Calcule $\dfrac{\text{abscisse de A} + \text{abscisse de B}}{2}$. *Que constates-tu ?*

2.2 Exercice.

Dessine une droite matérielle et marque un repère sur cette droite. Place deux points C *et* D *sur cette droite. Calcule* $\dfrac{\text{abscisse de C} + \text{abscisse de D}}{2}$. *Place sur la droite, le point qui a pour abscisse le nombre que tu viens de trouver. Appelle-le* L. *Que constates-tu ?*

Calcule $\overline{CL}$ *et* $\overline{LD}$. *Que constates-tu ?*

2.3 Milieu d'un bipoint.

Soit d une droite graduée par IR. Soit M, N et I trois points de d. Appelons x_M, x_N et x_I leurs abscisses.

Ce que nous avons fait dans les deux paragraphes précédents nous conduit à comparer les deux égalités suivantes :

$$\overline{MI} = \overline{IN} \qquad \text{et} \qquad x_I = \frac{x_M + x_N}{2}.$$

Supposons que les points M, N et I soient tels que $\overline{MI} = \overline{IN}$.

Donne une autre écriture de cette égalité en utilisant x_M, x_N *et* x_I.

Calcule x_I *en fonction de* x_M *et* x_N.

Tu as trouvé que

$$x_I = \frac{x_M + x_N}{2}.$$

Supposons que les points M, N et I soient tels que $x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2}$.

Justifie les égalités suivantes.

$$2x_I = x_M + x_N \ ;$$

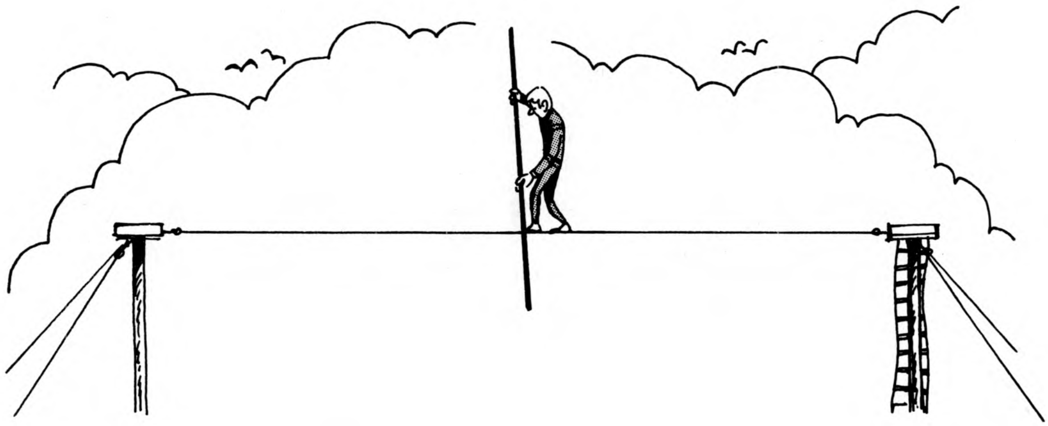
$$x_I + x_I = x_M + x_N \ ;$$

$$x_I - x_M = x_N - x_I .$$

Tu as trouvé que $\overline{MI} = \overline{IN}$.

Concluons : il revient au même d'écrire que $x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2}$ ou $\overline{MI} = \overline{IN}$.

Si on fait un dessin qui illustre cette situation, on voit que I est alors le milieu du segment matériel MN.



Dans ce cas, nous dirons aussi que I est le MILIEU du BIPOINT (M, N) ; il est aussi le milieu du bipoint (N, M).

Montre qu'alors $\overline{IM} + \overline{IN} = 0$; $\overline{MI} = \frac{1}{2}\overline{MN}$; $\frac{\overline{MI}}{\overline{IN}} = 1$; $\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = -1$.

2.4 Exercice.

Dessine une droite matérielle et marque un repère sur cette droite. Place les points A, B *et* C *d'abscisse* 8, –5 *et* 7.

Calcule l'abscisse du point U *milieu de* (A, C), *du point* P *milieu de* (B, C).

Calcule l'abscisse du point M *tel que* B *soit le milieu de* (A, M).

Tu as peut-être répondu à cette question en utilisant ton dessin. Voici une autre façon de procéder.

Nous ne connaissons pas encore l'abscisse de M. Appelons-la provisoirement y.

Puisque B doit être le milieu de (A, M) nous pouvons écrire que $-5 = \frac{8 + y}{2}$.

Résous cette équation en y. *Cela correspond-il à ce que tu avais trouvé ?*

Quels sont les nombres $\frac{\overline{CP}}{\overline{CB}}$, $\frac{\overline{AU}}{\overline{CU}}$ *et* $\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$ *?*

2.5 Deux bipoints qui ont le même milieu.

Dessine une droite et place un repère sur cette droite.

Place un point M, *puis deux points* E *et* F *de façon que* M *soit le milieu de* (E, F), *puis deux points* G *et* H *de façon que* M *soit aussi le milieu de* (G, H).

Calcule $\overline{EG}$ *et* $\overline{HF}$. *Que constates-tu ? Compare avec tes camarades.*

Place quatre points P, Q, R *et* S *tels que* $\overline{PQ} = \overline{RS}$.

Calcule l'abscisse du milieu de (P, S) *et celle du milieu de* (Q, R). *Que constates-tu ? Et tes camarades ?*

Soit d une droite graduée par IR. Soit A, B, C et D quatre points de cette droite. Appelons x_A, x_B, x_C et x_D leurs abscisses.

Ce que nous venons de faire nous conduit à comparer les phrases

$\overline{AB} = \overline{DC}$ et (A, C) et (B, D) ont le même milieu.

Supposons que les points A, B, C et D soient tels que $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Donne une autre écriture de cette égalité en utilisant x_A, x_B, x_C *et* x_D.

Déduis-en que

$$x_A + x_C = x_D + x_B,$$

puis que

(A, C) et (B, D) ont le même milieu.

Supposons que les points A, B, C et D soient tels que (A, C) et (B, D) aient le même milieu.

Calcule l'abscisse de ce milieu en utilisant x_A *et* x_C *puis en utilisant* x_B *et* x_D.

Cela conduit à écrire que

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}.$$

Termine la démonstration.

Concluons : il revient au même de dire que (A, C) et (B, D) ont le même milieu ou que $\overline{AB} = \overline{DC}$.

R3 D'autres calculs dans IR

I – OU ON UTILISE LA MULTIPLICATION ET L'ADDITION.

Tu sais que les propriétés de l'addition et de la multiplication dans IR sont les mêmes que celles de l'addition et de la multiplication dans Q. Nous allons utiliser ces propriétés pour faire des exercices qui ressemblent à des choses que nous avons déjà faites.

1.1 Associativité et commutativité de la multiplication.

Soit a un réel.

Justifie l'égalité suivante : $a^2 \times a^3 = a^5$. ***(tu n'as pas oublié que, par exemple,*** a^3 ***est une autre écriture de*** $a \times a \times a$***).***

Justifie l'égalité $a^6 \times a = a^7$.

Ce que tu viens de faire conduit à donner un sens à l'écriture a^1 ; nous conviendrons que $a^1 = a$.

Justifie les égalités suivantes : $5 \times (-2a) = -10a$; $-3a^4 \times (-0,5) = 1,5a^4$; $-4a \times 5b = -20ab$; $3a^7 \times 2a^3 = 6a^{10}$.

Soit a et b deux réels.

Donne une écriture plus simple des réels suivants : $-2 \times 1,5a$; $-4a \times (-8)$; $\frac{4}{7} \times 2a$; $5 \times 1,2a^4$; $-2 \times (-4a^7)$; $7a^2 \times (-8)$; $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}a^2$; $3a \times 6b$; $-2a \times 5b$; $0,5a \times (-2b)$; $-a \times (-6b)$; $-\frac{2}{13}a \times \frac{13}{5}b$; $5a^6 \times (-7a^3)$; $-3a^{10} \times (-6a^5)$; $0,2a^3 \times 0,3a^3$; $3\sqrt{2}\,a^4 \times \sqrt{2}\,a^7$; $-5a^2 \times 8a \times (-6a^5)$.

1.2 Soit a un réel.

Donne une écriture plus simple des réels suivants : $3a \times 3a$; $(3a)^2$; $(-4a)^2$; $\left(\frac{1}{2}a\right)^2$; $(\sqrt{2}\,a)^2$.

1.3 Distributivité de la multiplication sur l'addition.

Soit u un réel. On peut écrire que $5(u + 2) = 5u + 10$.

Lorsqu'on écrit le nombre $5(u + 2)$ sous la forme $5u + 10$, on dit que l'on DEVELOPPE le produit $5(u + 2)$.

Lorsqu'on écrit le nombre $5u + 10$ sous la forme $5(u + 2)$, on dit que l'on FACTORISE la somme $5u + 10$.

Soit x, y et z des réels.

Justifie l'égalité suivante : $-x(4 - 18y) = -4x + 18xy$.

Développe $4(3x + 2y)$; $(3x - 2) \times (-12)$; $2x(3y - 7)$; $-8x(-5y + 9z)$; $0,5(2x - 4y + 6)$; $(-3x - 2y - 1) \times (-7z)$; $13x(-2y + 3z - 4)$; $5x^2(2x^4 - 3x - x)$; $-4x(-5x^2 + 0,25x + 1,5)$; $7(2 + 6x - 7x^2 + 5x^4)$.

Soit a, b et c des réels.

Factorise $3a + 3b$; $2a - 6b + 2$; $36 - 18a + 12b - 42c$; $ab + 2a$; $-2abc + 5b + 7bc$; $5abc + 25ac$; $3a + 12ab - 15ac$; $a^2 + ab$; $-a^3 - 2a^2$; $3a^2 + 6ab$; $-7ab^2 + 14a^2b$.

1.4 Soit a un réel.

Tu sais que :
$$\begin{aligned} 3a^2 + 5a^2 &= 3 \times a^2 + 5 \times a^2, \\ &= (3 + 5)a^2, \\ &= 8a^2. \end{aligned}$$

Donne une écriture plus simple des réels suivants : $3a^3 + 1 - 2a^3 - 5$; $a + \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a$; $-3a^2 + 5a - 6 + 7a + 8a^2 - 4$.

1.5 Soit b un réel.

$$3b(5b + 1) + 2(4 - 7b) = (15b^2 + 3b) + (8 - 14b),$$
$$= 15b^2 + 3b - 14b + 8,$$
$$= 15b^2 - 11b + 8.$$

Nous dirons que $15b^2 - 11b + 8$ est une ECRITURE REDUITE de

$$3b(5b + 1) + 2(4 - 7b).$$

Développe et réduis les expressions suivantes.

$-5(-b^2 + 2b - 7) + 2(4b^2 - 6b - 8)$; $3b(5b^2 - 2) + 7b^2(b + 3) - 5b(2b^2 - 8b + 6)$.

1.6 Soit x et y deux réels.

Développe $(3x + 7)(4y + 2)$; $(0,5x - 2,5)(7 + y)$; $(7x - 2)(6y - 4)$;
$(-2x + 5)(-4y + 2)$; $(\frac{7}{5}x + 2)(4y + \frac{2}{9})$.

1.7 Soit x un réel.

Développe et réduis $(x - 7)(3x + 1)$; $(-3x^2 - 5x)(6 + 3x)$; $(x^3 + 2)(-x^2 + 1)$;
$(11 - 2x^2)(7 - 10x^2)$; $(3x - 1)(4 - \frac{7}{3}x)$; $(2x^2 + x)(3x^2 - 2x + 1)$.

1.8 Remarque.

Attention ! Ne confonds pas addition et multiplication.

Soit x et y deux réels.

On ne peut pas donner une écriture plus simple de

$$2x + 3y,$$

ni de $4 + 2x + 5x^2$.

Par contre, on peut écrire que

$$2x \times 3y = 6xy,$$ et que
$$4 \times 2x \times 5x^2 = 40x^3.$$

On peut écrire que

$$7x + 9x = 16x.$$

$$7x \times 9x = 63x^2.$$

1.9 Soit a et b deux réels.

Justifie les égalités suivantes.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b),$$
$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2,$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Nous pouvons aussi énoncer ce résultat de la façon suivante : dans IR,

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\,\square \times \bigcirc + \bigcirc^2.$$

Soit x un réel.

Développe les carrés suivants : $(x+1)^2$; $(\sqrt{2}+1)^2$; $(4x+3)^2$; $(\frac{1}{2}+x)^2$; $(2x+1)^2$.

1.10 Soit p un réel. Nous allons essayer de factoriser la somme $9p^2 + 6p + 1$.

Tu remarques que $9p^2 = (3p)^2$ et que $1 = 1^2$; c'est pourquoi nous voulons utiliser la formule $\square^2 + 2\,\square \times \bigcirc + \bigcirc^2 = (\square + \bigcirc)^2$.

Pour cela, il faut que $9p^2 + 6p + 1$ puisse prendre la forme $\square^2 + 2\,\square \times \bigcirc + \bigcirc^2$.

On va mettre $3p$ dans la boîte $\square$: $\boxed{3p}^2 + 2\,\boxed{3p} \times \bigcirc + \bigcirc^2$.

On va mettre 1 dans la boîte $\bigcirc$: $\boxed{3p}^2 + 2\,\boxed{3p} \times 1 + 1^2$.

Il faut donc nous assurer que $6p = 2 \times 3p \times 1$. C'est le cas. Donc

$$\boxed{3p}^2 + 2 \times \boxed{3p} \times 1 + 1^2 = (\boxed{3p} + 1)^2 \quad ;$$

$$9p^2 + 6p + 1 = (3p+1)^2.$$

Soit p un réel. Regardons si on peut faire la même chose avec $4p^2 + 10p + 9$.

Peux-tu mettre ce nombre sous la forme $\square^2 + 2\,\square \times \bigcirc + \bigcirc^2$ *?*

Peux-tu le mettre sous la forme $(\square + \bigcirc)^2$ *?*

Soit u, v, x et a des réels.

Factorise les sommes suivantes : $u^2 + 2uv + v^2$; $x^2 + 6x + 9$; $25x^2 + 40x + 16$; $4a^2 + 4a + 1$.

1.11 *Explique pourquoi la propriété suivante est vraie : dans* IR,

$$(\square - \bigcirc)^2 = \square^2 - 2\,\square \times \bigcirc + \bigcirc^2.$$

Soit x un réel.

Développe les carrés suivants : $(x-1)^2$; $(10x-2)^2$.

Factorise les sommes suivantes : $25x^2 - 30x + 9$; $x^2 - 4x + 4$.

1.12 Soit a et b deux réels.

Justifie les égalités suivantes.

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2,$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Nous pouvons aussi énoncer ce résultat de la façon suivante : dans IR,

$$(\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc) = \square^2 - \bigcirc^2.$$

Soit u et v deux réels.

Développe les produits suivants : $(u+9)(u-9)$; $(3-v)(3+v)$; $(2u-1)(2u+1)$.

1.13 Soit p un réel. Nous allons essayer de factoriser la somme $16p^2 - 25$.

Tu remarques que $16p^2 = (4p)^2$ et que $25 = 5^2$; c'est pourquoi nous voulons utiliser la formule $\square^2 - \bigcirc^2 = (\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc)$.

Pour cela, il faut que $16p^2 - 25$ puisse prendre la forme $\square^2 - \bigcirc^2$. C'est le cas, donc

$$\boxed{4p}^2 - 5^2 = (\boxed{4p} - 5)(\boxed{4p} + 5) \ ;$$

$$16p^2 - 25 = (4p-5)(4p+5) \ .$$

Soit u et v deux réels.

Factorise les sommes suivantes : $u^2 - v^2$; $u^2 - 1$; $100v^2 - 9$.

1.14 Les propriétés précédentes peuvent permettre de faire rapidement certains calculs.

Essaie de les utiliser pour calculer mentalement 101^2 ; 102^2 ; 19×21 ; 39^2.

II – QUOTIENTS DE REELS.

On définit les quotients dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{Q}$.

Ainsi, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ est le quotient de $\sqrt{2}$ par 3 et $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \times 3 = \sqrt{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{3}$; ainsi, $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ est l'inverse de $\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$.

On calcule sur les quotients de réels comme sur les quotients de rationnels.

Donne une autre écriture des nombres suivants. $\dfrac{\left(\dfrac{-5}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)}$; $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)}$; $\dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{6}{2\pi}$; $\dfrac{\sqrt{5}}{6} + \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

III – QUELQUES EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$.

3.1 Equations.

Nous avons étudié le problème de la soustraction dans $(\mathbb{D}, +)$ et celui de la division dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$. Cela nous a permis de résoudre des équations en x comme

$$x + 0{,}5 = 3{,}7 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}x = \frac{4}{7} \ .$$

Tu sais que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont des groupes.

Résous dans $\mathbb{R}$ *les équations en* x *suivantes :* $x + 3 = 5$; $x + \sqrt{2} = 0$; $x - \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $3x = 4$; $-x = \sqrt{2}$; $\frac{3}{5}x = \frac{5}{3}$; $-\frac{1}{7}x = -\frac{1}{7}$.

3.2 Inéquations.

Etudions le problème suivant : quel est l'ensemble des réels x tels que

$$3x + 7 < 2x - 2 \ ?$$

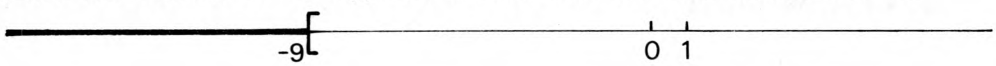
Supposons que a soit une solution de ce problème, c'est-à-dire que

$$3a + 7 < 2a - 2 .$$

Justifie les inégalités suivantes. (Tu pourras utiliser [R1, paragraphe IV, page 205]*).*

$$3a + 7 + (-7) < 2a - 2 + (-7) ,$$
$$3a < 2a - 9 ,$$
$$3a + (-2a) < 2a - 9 + (-2a) ,$$
$$a < -9 .$$

Tu viens de montrer que, si a est une solution du problème posé, alors a est un nombre réel inférieur à -9. Appelons S l'ensemble des réels inférieurs à -9.



Tu remarques que $-9 \notin S$. C'est ce qu'indique le crochet [que nous avons dessiné. Il nous reste à regarder si les éléments de S sont solutions du problème posé.

Soit b l'un d'eux : $b < -9$.

Justifie les inégalités suivantes.

$$3b < 2b - 9 ,$$
$$3b + 7 < 2b - 2 .$$

Nous venons de démontrer que tout élément de S est solution du problème posé. Concluons : l'ensemble des réels x tels que $3x + 7 < 2x - 2$ est l'ensemble S, c'est-à-dire l'ensemble des réels inférieurs à -9.

Le problème qu'on vient de résoudre s'appelle une INEQUATION.

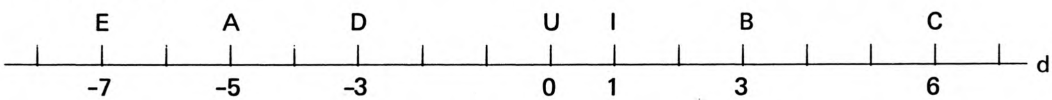
Résous les inéquations en x *dans* $\mathbb{R}$ *suivantes :* $x - 3 > 2$; $2x + \frac{1}{4} \leqslant x - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} < \frac{4}{3}x - \frac{13}{6}$.

$\boxed{\text{R4}}$ Valeur absolue et distance dans $\mathbb{R}$

I — DISTANCE SUR UNE DROITE.

1.1 Mesure d'un segment.

Soit d une droite matérielle, U et I deux points de cette droite et g la graduation de repère (U, I).



On choisit comme unité de longueur la longueur du segment UI.

Soit A et B les points d'abscisses –5 et 3.

Quelle est la mesure du segment AB *selon l'unité choisie ?*

Nous dirons aussi que cette mesure du segment AB est la distance des points A et B et nous écrirons que $d(A, B) = 8$.

Remarque bien que ce nombre dépend de l'unité de longueur que nous avons choisie. Ce n'est pas, ici, la distance en centimètres des points A et B.

Quel est le nombre $d(B, A)$ *?*

Soit C, D et E les points de d d'abscisses 6, –3 et –7.

Quels sont les nombres : $d(E, D)$; $d(D, E)$; $d(B, C)$; $d(C, B)$; $d(U, C)$; $d(E, U)$ *?*

Quelle est la distance du point I *au point* B *? Existe-t-il un point* M *de* d, *distinct de* I, *tel que* $d(M, B) = d(I, B)$ *?*

2.1 Distance et surlignés.

Nous utilisons les mêmes données et le même dessin qu'au paragraphe précédent.

Nous avons vu que $d(A, B) = d(B, A) = 8$. Tu sais d'autre part que $\overline{AB} = 8$ et $\overline{BA} = -8$.

Calcule les nombres suivants :

$$\overline{AC},\ \overline{CA},\ d(A, C),\ d(C, A),$$
$$\overline{UE},\ \overline{EU},\ d(E, U),\ d(U, E),$$
$$\overline{BC},\ \overline{CB},\ d(B, C),\ d(C, B).$$

Nous constatons que, dans le cas des points A et B, l'un des deux nombres $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ est positif, l'autre est négatif. Le nombre $d(A, B)$ est celui des deux qui est positif. C'est aussi $d(B, A)$.

En est-il de même pour les points A *et* C, *les points* U *et* E, *les points* B *et* C ?

Dans ces exemples, pour simplifier, nous avons choisi des points d'abscisses entières. De façon générale, soit M et N deux points. La distance de M à N est celui des deux nombres $\overline{MN}$ et $\overline{NM}$ qui est positif.

Nous décidons que $d(M, M) = 0$.

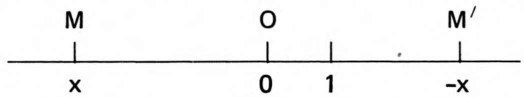
II – VALEUR ABSOLUE D'UN REEL.

2.1 Valeur absolue.

Soit d une droite matérielle graduée par IR, et O le point d'abscisse 0.

Soit x un réel.

Appelons M et M′ les points de d d'abscisses x et $-x$.



Tu sais que $d(O, M) = d(O, M')$. Ce nombre est celui des deux nombres x et $-x$ qui est positif.

Nous dirons que ce nombre est la VALEUR ABSOLUE de x et nous la noterons $|x|$.

Ainsi si $x = -7$, $d(O, M) = d(O, M') = 7$ et $|-7| = 7$;

si $x = 2{,}5$, $d(O, M) = d(O, M') = 2{,}5$ et $|2{,}5| = 2{,}5$.

D'une manière générale,

dans l'ensemble des réels positifs $|\Diamond| = \Diamond$,

dans l'ensemble des réels négatifs $|\Diamond| = -\Diamond$,

et nous décidons que $|0| = 0$ puisque $d(O, O) = 0$.

Exercices.

1. *Quels sont les nombres* $|-\sqrt{2}|$, $|\frac{1}{3}|$, $|-\frac{4}{7}|$?

2. *Quelles sont les valeurs absolues des réels suivants ?*

   $3 - 7$; $1 - \sqrt{2}$; $-\frac{5}{2}$; $\frac{-13}{-3}$; $0{,}000\,1$; 10^{-2}.

3. **Soit u un réel.**

   Est-ce que $|u| = u$? *Est-ce que* $|-u| = u$?

4. *Existe-t-il des réels* x *tels que* $|x| = -1$? *Existe-t-il des réels tels que* $|x| = 2$?

2.2 Valeurs absolues et surlignés.

Soit d une droite matérielle graduée par IR et M et N deux points de cette droite.

Tu as vu que $d(M, N)$ est celui des deux nombres $\overline{MN}$ et $\overline{NM}$ qui est positif. D'autre part, tu sais que $\overline{NM} = -\overline{MN}$.

Donc $d(M, N)$ est celui des deux nombres $\overline{MN}$ et $-\overline{MN}$ qui est positif, c'est-à-dire $|\overline{MN}|$.

Soit a et b deux réels et A et B les points d'abscisses a et b :

$$b - a = \overline{AB}, \quad \text{donc} \quad |b - a| = d(A, B).$$

Exercices.

1. **Cherchons l'ensemble des réels u tels que $|u - 3| = 1$.**

Soit d une droite matérielle graduée par $\mathbb{R}$. Appelons A le point d'abscisse 3. Notre problème revient à chercher l'ensemble des points M d'abscisse u tels que $|\overline{AM}| = 1$, c'est-à-dire tels que $d(A, M) = 1$.

Termine ce problème.
Résous de même les deux équations en x dans $\mathbb{R}$ suivantes.
$|1 - x| = 0{,}1$; $|x + 2| = 3$.

2. **Nous allons résoudre l'équation en x dans $\mathbb{R}$.**

$$|2x + 1| = x.$$

Appelons S l'ensemble des solutions. Supposons que $a \in S$; alors $|2a + 1| = a$.

Si $2a + 1$ est positif, alors $|2a + 1| = 2a + 1$, et $2a + 1 = a$.
Donc si $a \in S$ et si $2a + 1$ est positif, alors $a = -1$.

Si $2a + 1$ est négatif, alors $|2a + 1| = -2a - 1$, et $-2a - 1 = a$.
Donc si $a \in S$ et si $2a + 1$ est négatif, alors $a = -\frac{1}{3}$.

Nous venons de montrer que si a est une solution, ce ne peut être -1 ou $-\frac{1}{3}$.

Quel est l'ensemble S ?

R5 Encadrement de sommes et de produits

I — ARTHUR ET SON JARDIN.

Devant la maison d'Arthur, il y a un jardin magnifique dans lequel poussent toutes sortes de plantes extraordinaires : petits pois, carottes, poireaux...

Ce jardin cause bien du souci à Arthur depuis que son ami Eusèbe lui a demandé : «Ton jardin, il est grand comment ? ».

Arthur a été bien embêté et il n'a pas su répondre. Depuis, il a beaucoup réfléchi et puisque son jardin est rectangulaire, il a décidé d'appeler L et ℓ les mesures en mètres de la longueur et de la largeur de son jardin.

Mais cela n'a rien arrangé du tout, bien au contraire. Depuis ce jour là, les choses ne font qu'empirer et il arrive même que la nuit, Arthur fasse des cauchemars où il est poursuivi par des grands L et des petits ℓ.

Aussi un beau mercredi matin où il faisait soleil et où il n'avait pas de devoir de mathématique à faire, Arthur a décidé d'en avoir le cœur net. Il allait enfin savoir, et pour cela, il allait mesurer son jardin.

Après un copieux petit déjeuner bien nécessaire avant de partir pour une telle aventure, Arthur se mit à la recherche d'un instrument de mesure. Les choses commençaient mal. Il ne réussit qu'à trouver un vieux double décimètre à peine entier et pas mal ébréché.

Arthur alla s'asseoir sur le banc qui se trouve sous le pommier au fond du jardin et il se mit à réfléchir. Il se dit que mesurer le jardin avec cet instrument allait être très éprouvant et tout à coup il eut une idée : il allait mesurer le jardin avec ses pas.

Dans le sens de la largeur, il trouva 35 pas. Il recommença plusieurs fois et il trouvait à chaque coup 35 pas. Il décida d'appeler x la mesure en pas de la largeur du jardin et il écrivit sur son carnet : $x = 35$.

Dans le sens de la longueur, avec 57 pas, il n'arrivait pas tout à fait au bout du jardin, mais il ne restait pas assez de place pour faire encore un pas.

Arthur se gratta la tête deux ou trois fois et il écrivit sur son carnet :

$$57 < y < 58.$$

Il avait donné un ENCADREMENT de la mesure en pas de la longueur du jardin.

Tout cela avait conduit un Arthur très satisfait de lui jusqu'au diner et c'est avec bon appétit qu'il se mit à table. Tout à coup, au moment où il allait attaquer son dessert (une glace à la pistache...) une idée affreuse le poignarda :

«Et si les pas que j'ai faits ce matin n'avaient pas tous la même longueur... ? ».

Il fallait contrôler cela tout de suite. Laissant la glace à la pistache fondre dans son assiette, sous le regard ahuri de ses parents, Arthur se précipita dans le jardin. Sur l'allée très dure qui traverse son jardin, il marqua toute une série de ses pas et les mesura avec son vieux double décimètre. Catastrophe ! Il n'y en avait pas deux pareils.

Le plus court mesurait 0,63 m et le plus long 0,68 m.

Arthur décida d'imaginer un nombre p, mesure théorique de son pas en mètres, et il écrivit sur son carnet :

$$0{,}63 \leqslant p \leqslant 0{,}68,$$

puis il retourna s'asseoir sur son banc. Il avait donné un encadrement de p.

Arthur ne connaissait toujours pas ℓ, mesure en mètres de la largeur du jardin mais il savait que :

$$x = 35 \quad \text{et} \quad 0{,}63 \leqslant p \leqslant 0{,}68 .$$

Il découvrit qu'il pouvait faire quelque chose de beaucoup plus amusant et donner un encadrement de ℓ.

Fais comme lui.

Pour L, c'était plus difficile car Arthur ne connaissait pas y. Il savait simplement que

$$57 < y < 58 \quad \text{et} \quad 0{,}63 \leqslant p \leqslant 0{,}68\,.$$

Il réfléchit plus longuement.

Fais comme lui et essaie de donner un encadrement de L.

Arthur était enchanté. Si bien qu'il appela

P la mesure en mètres du périmètre du jardin,

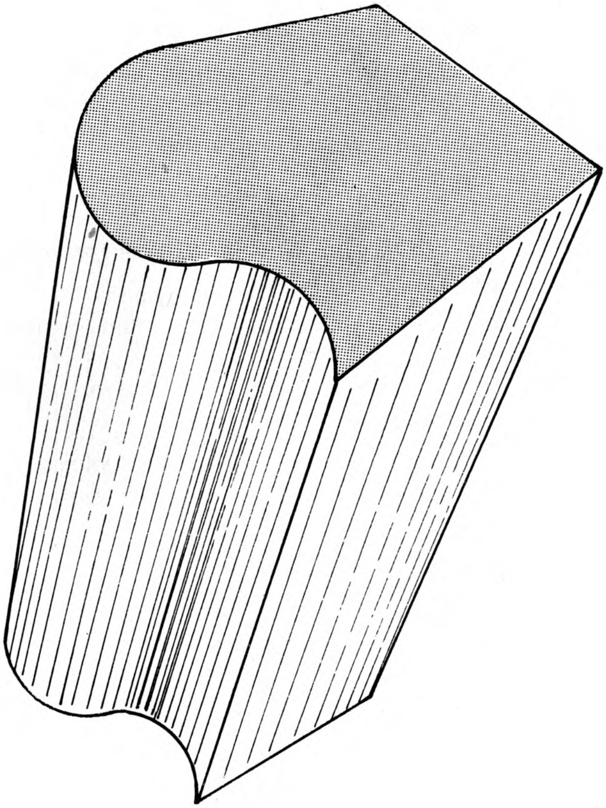
S la mesure en mètres carrés de la surface du jardin,

et qu'il calcula un encadrement de S et un encadrement de P.

Fais comme lui.

II – ARTHUR, SOPHIE ET LE GADGET.

A quelques temps de là, Arthur reçut la visite de son amie Sophie. Celle-ci avait trouvé un objet très curieux. C'était en métal, lourd et impossible à décrire ; aussi en voici un dessin.



Les deux amis étaient très intrigués. Ils tournèrent cet objet dans tous les sens un certain nombre de fois sans arriver à deviner à quoi cela pouvait bien servir.

«Un truc comme ça, dit Sophie au bout d'un moment, cela ne peut servir à rien. Cela doit être un gadget qu'on trouve avec les paquets de lessive. Il n'y a qu'à le jeter».

Mais Arthur était d'un autre avis. Il avait vu un jour dans son dictionnaire qu'on peut trouver le nombre qui mesure le volume d'un tel objet (c'était un cylindre). Pour cela il suffit de

- choisir une unité pour mesurer les longueurs et par conséquent une unité pour mesurer les surfaces et une unité pour mesurer les volumes,

- connaître le nombre qui mesure la surface de base de l'objet,

- connaître le nombre qui mesure la hauteur de l'objet,

- multiplier ces deux nombres.

De plus, Arthur avait envie de faire profiter Sophie de ses connaissances toutes neuves en matière d'encadrements. Il proposa donc à son amie de chercher un encadrement du nombre qui mesure le volume du gadget.

Cette idée n'enthousiasmait pas particulièrement Sophie mais après tout, puisque ce jour là il pleuvait, autant faire cela que de passer son après-midi devant la télévision.

Arthur alla chercher un vieux parchemin transparent qu'il avait trouvé par hasard dans une malle du grenier en cherchant un instrument de mesure. Ce parchemin avait dû être rapporté par sa tante Gertrude à la suite d'une de ses périlleuses expéditions en Transvalachie.

Nous t'avons donné, sur la feuille de manipulation 13, une copie (en meilleur état) de ce parchemin transparent.

Les deux amis décidèrent de choisir comme unité de longueur, la longueur du côté d'un carré du quadrillage numéro 3 ; ils appelèrent u cette unité.

La longueur d'un côté d'un carré du quadrillage numéro 2 est donc 2u ; celle d'un côté d'un carré du quadrillage numéro 1 est 4u.

Ils appelèrent h la mesure, en unités u, de la hauteur du gadget et ils trouvèrent un encadrement de h. Nous allons faire comme eux.

Voici un segment qui a même longueur que la hauteur du gadget.

Utilise un côté du quadrillage numéro 3 pour trouver un encadrement de h.

Ensuite, Arthur et Sophie choisirent

- comme unité d'aire, l'aire d'un carré du quadrillage numéro 3. Ils appelèrent u^2 cette unité.

Combien d'unités u^2 *mesure un carré du quadrillage numéro 2 ? Un carré du quadrillage numéro 1 ?*

- Comme unité de volume, le volume d'un cube dont une face est un carré du quadrillage numéro 3. Ils appelèrent u^3 cette unité.

Ils appelèrent enfin s la mesure en unités u^2 de la base du gadget et v la mesure en unités u^3 du volume du gadget.

Ils trouvèrent alors plusieurs encadrements de s, et donc plusieurs encadrements de v. Nous allons faire comme eux.

Premier encadrement de **s** et de **v.**

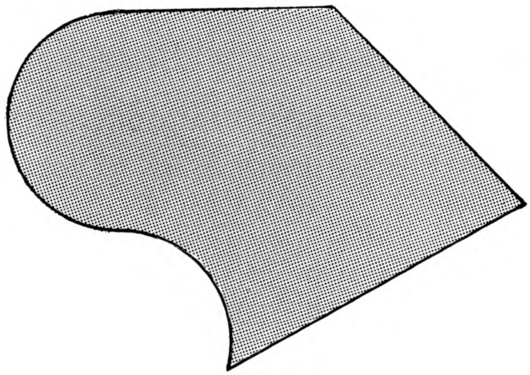
Voici sur la page suivante un dessin de la base du gadget en vraie grandeur.

Pose le quadrillage numéro 1 sur ce dessin.

Compte tous les carreaux que tu vois entièrement gris. Compte tous les carreaux que tu vois entièrement ou en partie en gris.

Avec tes camarades, inscrivez au tableau la double liste des résultats que vous avez trouvés. Choisissez un encadrement de s. *Pour cela, il ne faut pas oublier qu'un carré du* *quadrillage numéro 1 mesure* $16u^2$ *? Pourquoi ?*

Déduis-en un encadrement de v.



Deuxième encadrement de **s** et de **v.**

Recommence en utilisant le quadrillage numéro 2.
Avec tes camarades, choisis de la même façon un encadrement de s.
Déduis-en un encadrement de v.

Troisième encadrement de **s** et de **v.**

Recommence en utilisant le quadrillage numéro 3.
Choisissez un nouvel encadrement de s.
Déduis-en un encadrement de v.
Quelles observations fais-tu sur les trois encadrements de v *que tu as trouvés ?*

R6 Calculs approchés

I – PUISSANCES DE DIX.

1.1 Exposants positifs.

Tu sais que 10^2 est une autre écriture de 10×10, c'est-à-dire de 100. On peut donc écrire que $10^2 = 100$. On dit que 100 est une PUISSANCE DE DIX. Dans l'écriture 10^2, le nombre 2 est appelé EXPOSANT.

Donne une autre écriture de **10^3, 10^4, 10^6.**

Nous avons également convenu que 10^1 est une autre écriture de 10.

Tu vois que si n est un entier naturel non nul, le nombre 10^n peut aussi s'écrire avec un 1 suivi de n zéros.

Exercice.

Ecris les nombres suivants sous la forme 10^p *où* p *est un entier naturel non nul.*

$10^4 \times 10^5$; 10×10^6 ; $10^3 \times 10 \times 10^2$; $10^2 \times 10^3 \times 10^2$.

On montrerait facilement que si n et p sont des entiers naturels non nuls,

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}.$$

1.2 Exposants nuls ou négatifs.

Tu sais que $10^4 = 10\,000$; $10^3 = 1\,000$; $10^2 = 100$; $10^1 = 10$.

Chaque nombre est le dixième du précédent, et chaque exposant s'obtient en diminuant de 1 l'exposant précédent.

Or, le nombre 1 est le dixième de 10 : nous conviendrons qu'on peut l'écrire 10^0 ;
le nombre 0,1 est le dixième de 1 : nous conviendrons qu'on peut l'écrire 10^{-1} ;
le nombre 0,01 est le dixième de 0,1 : nous conviendrons qu'on peut l'écrire 10^{-2}.

Comment proposes-tu d'écrire 0,001 ; 0,000 1 ; 0,000 001 *?*

Ces trois nombres sont aussi des puissance de dix.
Voici un tableau qui résume ces écritures.

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1	0,000 01

Tu vois que si n est un entier non nul, le nombre 10^{-n} peut aussi s'écrire avec un 1 précédé de n zéros (n'oublie pas qu'il y a une virgule immédiatement après le premier zéro).

Exemple : $10^{-5} = 0{,}000\,01$.

Tu comprends mieux maintenant pourquoi dans [D4] nous avions décidé de remplacer par exemple «quotient approché à 0,000 000 01 près» par «quotient approché de 10^{-8} près».

1.3 Produit de puissances de dix.

Dans le paragraphe 1.1 nous avons vu que si n et p sont des entiers naturels, $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$. Examinons ce qui se passe lorsqu'on multiplie deux puissances de 10 à exposants relatifs.

Etudions d'abord deux exemples.

$10^{-5} \times 10^2$,	$10^4 \times 10^0$,
$10^{-5} = 0{,}000\,01$ et $10^2 = 100$.	$10^4 = 10\,000$ et $10^0 = 1$.
Donc $10^{-5} \times 10^2 = 0{,}000\,01 \times 100$,	Donc $10^4 \times 10^0 = 10\,000 \times 1$,
$10^{-5} \times 10^2 = 0{,}001$,	$10^4 \times 10^0 = 10\,000$,
$10^{-5} \times 10^2 = 10^{-3}$.	$10^4 \times 10^0 = 10^4$.
Remarque bien que $-5 + 2 = -3$.	Remarque bien que $4 + 0 = 4$.

On pourrait montrer que si n et p sont des entiers relatifs,

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}.$$

Exercice.

Ecris les nombres suivants sous la forme 10^p *où* p *est un entier relatif.*

$10^{-2} \times 10^{-4}$; $10^4 \times 10^{-3}$; $10^{-3} \times 10^5 \times 10^0 \times 10$.

II – VALEURS APPROCHEES DECIMALES D'UN RATIONNEL.

2.1 Retour sur les quotients approchés à 10^{-n} près.

Tu sais qu'un rationnel peut toujours être considéré comme le quotient de deux entiers. D'autre part, dans [D4], nous avons fait des divisions de nombres entiers.

Reprenons par exemple la division de 11 par 7.

$$\begin{array}{l|l} 11 & 7 \\ \hline \;\,40 & 1{,}571\,428\,5 \\ \;\;\,50 & \\ \;\;\;\,10 & \\ \;\;\;\;\,30 & \\ \;\;\;\;\;\,20 & \\ \;\;\;\;\;\;\,60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\,40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;5 & \end{array}$$

Le nombre 1,5 est le quotient approché à 10^{-1} près par défaut de 11 par 7.

Vérifie que

$1{,}5 \times 7 < 11 < 1{,}6 \times 7$.

On en déduit que

$$1{,}5 < \frac{11}{7} < 1{,}6\,.$$

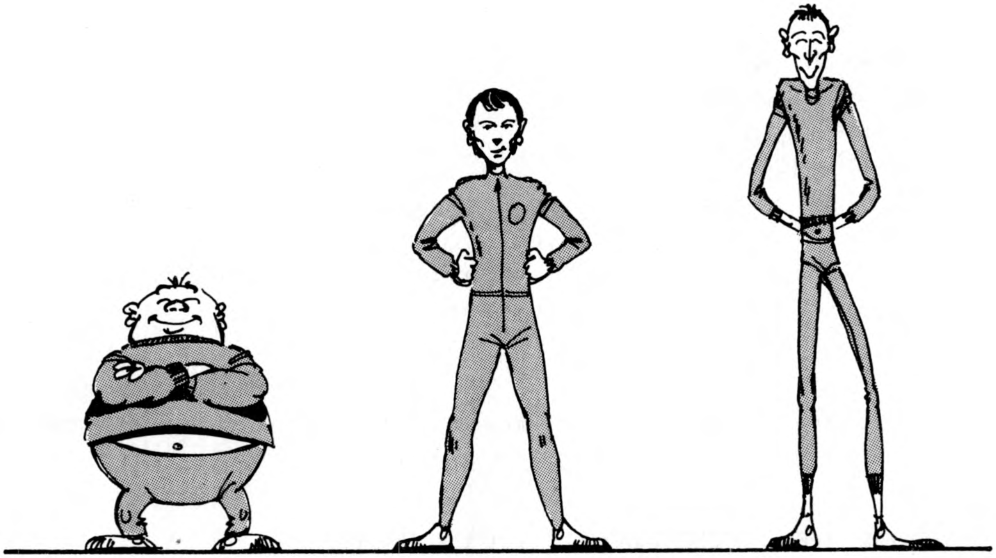
Tu vois que $\frac{11}{7}$ est compris entre deux éléments de $\mathbb{D}_1$ dont la différence est 10^{-1}.

On traduit ce résultat en disant que

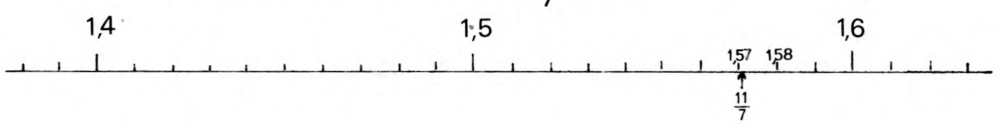
1,5 est la VALEUR APPROCHEE A 10^{-1} PRES PAR DEFAUT du rationnel $\frac{11}{7}$,

1,6 est la VALEUR APPROCHEE A 10^{-1} PRES PAR EXCES du rationnel $\frac{11}{7}$.

Pour être plus précis, on dit parfois VALEUR APPROCHEE DECIMALE à 10^{-1} près.



On montrerait de même que $1{,}57 < \frac{11}{7} < 1{,}58$.



On dit que

$1{,}57$ est la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut du rationnel $\frac{11}{7}$,

$1{,}58$ est la valeur approchée à 10^{-2} près par excés du rationnel $\frac{11}{7}$.

Exercices.

1. *Donne la valeur approchée à* 10^{-5} *près par excès de* $\frac{11}{7}$ *et la valeur approchée à* 10^{-13} *près par défaut de* $\frac{11}{7}$.

2. *Donne les valeurs approchées à* 10^{-1} *près et à* 10^{-3} *près par défaut de* $\frac{5}{7}$.

3. *Donne les valeurs approchées à* 10^{-1} *près et à* 10^{-3} *près par excès de* $\frac{19}{3}$.

2.2 Partie entière.

On peut aussi arrêter la division de 11 par 7 à la virgule. On dit que 1 est le quotient à 1 près par défaut de 11 par 7, ou encore le quotient entier de 11 par 7.

Tu vérifieras facilement que $1 < \frac{11}{7} < 2$.

On peut donc dire aussi que 1 est la valeur approchée à 1 près par défaut du rationnel $\frac{11}{7}$. On préfère souvent dire que 1 est la PARTIE ENTIERE de $\frac{11}{7}$.

Quelles sont les parties entières de $\frac{1}{2}$; 1,02 ; $\frac{91}{8}$; $\frac{37}{19}$; $\frac{13}{12}$; 0,85 ?

2.3 Et les nombres négatifs ?

Dans tout ce qui précède, nous n'avons utilisé que des nombres positifs. C'était nécessaire puisque nous posions des divisions. Nous reprendrons plus en détail ces questions d'encadrement, l'année prochaine. Nous examinerons alors le cas des nombres négatifs.

III – VALEURS APPROCHEES DECIMALES D'UN REEL.

3.1 Les réels qui ne sont pas rationnels.

Pour trouver des valeurs approchées décimales d'un rationnel, il suffit de savoir faire une division.

De plus, nous pouvons affirmer que, si n est un entier naturel quelconque, il est toujours possible de trouver les valeurs approchées à 10^{-n} près d'un rationnel quelconque.

Nous admettrons que cette propriété est également vraie pour les nombres réels qui ne sont pas rationnels, comme π ou $\sqrt{2}$.

Cependant, il n'est pas possible de calculer des valeurs approchées décimales d'un tel nombre en faisant une division. Il faut employer des moyens plus compliqués que nous n'étudierons pas maintenant.

Par exemple, en classe de troisième, l'usage des tables nous permettra de trouver quelques valeurs approchées décimales de nombres comme $\sqrt{2}$.

Une calculatrice peut aussi permettre de trouver des valeurs approchées décimales de certains réels.

3.2 Un exemple : le nombre π.

Trouver des valeurs approchées du nombre π est un problème qui a préoccupé les savants depuis très longtemps.

Dans la Bible, on trouve 3 comme valeur approchée de π.

Dans l'Egypte de l'antiquité, vers 1700 avant J.C., on emploie $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$

Archimède, au 3ème siècle avant J.C., donne $\frac{22}{7}$.

Au 5ème siècle après J.C., le mathématicien chinois Tsu Ch'ung Chih propose $\frac{355}{113}$, en croyant probablement que c'était la valeur excate de π.

Tu remarques que ces valeurs approchées ne sont pas toutes des valeurs approchées décimales.

En 1873, Shanks donne une valeur approchée de π avec 707 décimales. Il avait mis 30 ans pour les calculer et on sait maintenant que les 180 dernières qu'il a données sont fausses.

A l'époque actuelle, les calculatrices ont permis d'en donner une valeur approchée avec un million de décimales. Nous t'en donnons les 71 premières, c'est-à-dire la valeur approchée par défaut de π à 10^{-71} près :

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 40 .

Tu peux en déduire par exemple que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Exercice.

Vérifie que $4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}$. *Calcule les valeurs approchées par défaut et par excès à* 10^{-3} *près de* $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$.

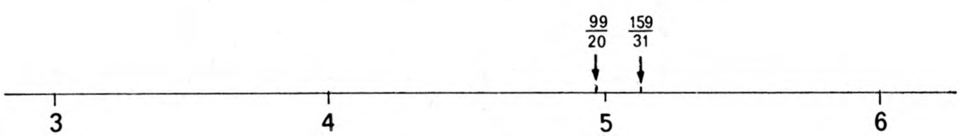
Calcule les valeurs approchées à 10^{-2} *près et à* 10^{-3} *près par défaut et par excès de* $\frac{22}{7}$. *Que constates-tu ?*

Calcule les valeurs approchées à 10^{-6} *près et à* 10^{-7} *près par défaut et par excès de* $\frac{355}{113}$. *Que constates-tu ?*

3.3 Comparaison de deux réels.

Pour comparer deux nombres réels, on a souvent intérêt à utiliser des valeurs approchées de ces nombres. Voici deux exemples :

la partie entière de $\frac{99}{20}$ est 4 ; la partie entière de $\frac{159}{31}$ est 5 ; donc $\frac{99}{20} < \frac{159}{31}$.



$5{,}1 < \frac{41}{8} < 5{,}2$ et $5{,}2 < \frac{37}{7} < 5{,}3$; donc $\frac{41}{8} < \frac{37}{7}$.

Compare les nombres suivants : 0,45 *et* $\frac{1{,}39}{3}$; π *et* $\frac{22}{7}$; $\frac{8}{5}$ *et* $\frac{2\,251}{1\,324}$;

La valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $\sqrt{2}$ est 1,41.

Compare les nombres suivants : $\frac{4}{3}$ *et* $\sqrt{2}$; $\frac{5}{2}$ *et* $1+\sqrt{2}$.

faisons le point

I – PUISSANCES DE DIX.

Nous avons appelé puissances de dix les nombres comme 1 ; 10 ; 100 ; ... ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ..., et nous avons fait les conventions d'écritures suivantes :

$$10^n = 1\underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{n \text{ zéros}} \quad ; \quad 10^{-n} = \underbrace{0{,}0 \ldots\ldots 0}_{n \text{ zéros}}1 \quad ; \quad 10^0 = 1 .$$

Soit n et p deux entiers relatifs :

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}.$$

II – LES NOMBRES REELS.

En étudiant l'équation $y^2 = 2$, nous avons eu l'idée de nouveaux nombres, comme $\sqrt{2}$, qui ne sont pas des rationnels.

Nous avons eu aussi l'idée d'un nouvel ensemble de nombres, qui contient $\mathbb{Q}$ mais qui n'est pas égal à $\mathbb{Q}$. Nous avons noté $\mathbb{R}$ cet ensemble et appelé nombres réels les éléments de $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} .$$

Nous ne pouvons pas, pour le moment, avoir une idée très précise de ce que peut être cet ensemble $\mathbb{R}$. Nous savons cependant que

l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une addition, d'une multiplication et d'une relation d'ordre, de façon que les rationnels s'additionnent, se multiplient et se rangent dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{Q}$;

il est possible de donner d'un nombre réel des valeurs approchées décimales avec l'approximation qu'on veut.

Cela signifie que si u est un réel et n un entier naturel, on peut trouver une valeur approchée à 10^{-n} près par défaut de u.

Si u est un rationnel, on peut trouver cette valeur approchée en poursuivant suffisamment loin une division.

Si u n'est pas rationnel, nous ne connaissons pas pour le moment de méthode pour trouver cette valeur approchée.

III – NOMBRES REELS ET DROITE MATERIELLE.

3.1 Soit d une droite matérielle. Nous avons admis qu'il existe des bijections de d sur $\mathbb{R}$.

Certaines de ces bijections nous ont été suggérées par des échelles régulières. Nous les avons appelées graduations.

Soit O et I deux points distincts de d. Il existe une graduation et une seule de repère (O, I).

Soit f une graduation de d et M un point de d. La bijection f associe au point M un nombre réel unique appelé abscisse de M.

3.2 Surlignés.

Soit d une droite matérielle et g une graduation de cette droite.

Soit M et N deux points de d. Nous avons appelé «MN surligné» et noté $\overline{MN}$ le nombre

abscisse de N - abscisse de M.

Nous avons montré que si A, B et C sont trois points quelconques de d,

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Cette relation est appelée relation de Chasles.

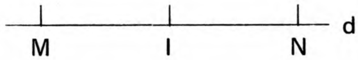
3.3 Milieu.

Soit d une droite graduée par IR. Soit M, N et I trois points de d. Appelons x_M, x_N et x_I leurs abscisses.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2}$;

$\overline{MI} = \overline{IN}$.

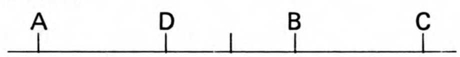


Soit d une droite graduée par IR. Soit A, B, C et D quatre points de cette droite.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$\overline{AB} = \overline{DC}$;

(A, C) et (B, D) ont même milieu



3.4 Distance et valeur absolue.

Soit d une droite graduée par IR et O le point de d d'abscisse 0.

Soit A et B deux points de d. Nous avons vu que la distance de A à B est celui des deux nombres $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ qui est positif.

Soit x un réel et soit M et M' les points d'abscisse x et -x.

On sait que d(O, M) = d(O, M'). Ce nombre est celui des deux nombres x et -x qui est positif. On appelle ce nombre : «valeur absolue de x», et on le note |x|.

Dans l'ensemble des réels positifs, $|\diamondsuit| = \diamondsuit$.

Dans l'ensemble des réels négatifs, $|\diamondsuit| = -\diamondsuit$.

Enfin $d(A, B) = |\overline{AB}|$.

3.5 Ordre.

Dans l'ensemble IR, il y a une relation d'ordre notée $\leqslant$. C'est ce que nous suggère l'observation d'une droite matérielle graduée par IR.

Les réels positifs, sont ceux qui sont plus grands que zéro et les réels négatifs, ceux qui sont plus petits que zéro. Cela correspond au deux demi-droites déterminées par le point d'abscisse 0 sur une droite graduée par IR.

IV – PROPRIETES DES OPERATIONS ET DE L'ORDRE.

Nous allons réviser ici les propriétés des opérations pour les ensembles de nombres que nous connaissons.

4.1

Addition

Quels que soient a, b et c.	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
• $a+b=b+a$ [commutativité] ;	oui	oui	oui	oui	oui
• $(a+b)+c=a+(b+c)$ [associativité] ;	oui	oui	oui	oui	oui
• $a+0=a$ [0 est neutre] ;	oui	oui	oui	oui	oui
• il existe a' tel que $a+a'=0$ [a' est l'opposé de a].	NON	oui	oui	oui	oui

$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{D},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{R},+)$, sont des groupes commutatifs.

Multiplication

Quels que soient a, b et c.	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
• $a \times b=b \times a$ [commutativité] ;	oui	oui	oui	oui	oui
• $(a \times b) \times c=a \times (b \times c)$ [associativité] ;	oui	oui	oui	oui	oui
• $a \times 1=a$ [1 est neutre] ;	oui	oui	oui	oui	oui
• si $a \neq 0$ il existe a' tel que $a \times a'=1$ [a' est l'inverse de a].	NON seul 1 a un inverse	NON seuls 1 et -1 ont un inverse	NON certains décimaux ont un inverse, d'autres pas	oui	oui

Zéro n'a pas d'inverse

$(\mathbb{Q}^*,\times)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$ sont des groupe commutatifs.

4.2 Conséquences.

Dans ce qui suit, a, b et c sont des éléments quelconques de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{D}$, de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{R}$.

• si $a+c=b+c$, alors $a=b$;

• $-(a+b)=-a+(-b)$;

• il existe x unique tel que

$$b+x=a\ ;$$

c'est la différence de a et de b : c'est

$$a+(-b).$$

Dans ce qui suit, a, b et c sont des éléments quelconques de $\mathbb{Q}^*$ ou de $\mathbb{R}^*$. ILS SONT DONC DISTINCTS DE 0.

• si $a \times c=b \times c$, alors $a=b$;

Remarque : l'égalité $a \times 0 = b \times 0$ ne permet pas d'affirmer que $a = b$.

• $\dfrac{1}{a \times b}=\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{b}$;

• Il existe x unique tel que

$$b \times x=a\ ;$$

c'est le quotient de a et de b : c'est

$$a \times \frac{1}{b}.$$

Remarque : on ne peut pas diviser par 0.

4.3 Distributivité de la multiplication sur l'addition.

Quels que soient les nombres a, b et c (dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$, ou dans $\mathbb{R}$),

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c\,.$$

On peut se servir de cette propriété pour démontrer que

le produit d'un nombre par 0 et 0 ;

si a et b sont deux nombres relatifs, alors $(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)$;

multiplier un nombre relatif par -1 revient à prendre l'opposé de ce nombre.

4.4 Ordre et opérations.

Addition	Multiplication
• Quels que soient les réels a et b, si $a \leqslant b$, alors $-b \leqslant -a$.	• Quels que soient les réels NON NULS a, b, c et d, si $a \leqslant b < 0 < c \leqslant d$, alors $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{c}$.
• Quels que soient les réels a, b et c, si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.	• Quels que soient les réels a, b et c, si $c \geqslant 0$ et $a \leqslant b$ alors $ac \leqslant bc$; si $c \leqslant 0$ et $a \leqslant b$ alors $bc \leqslant ac$.

Rappelons enfin que

le produit de deux réels de même signe est un réel positif,

le produit de deux réels de signes différents est un réel négatif.

un peu d'histoire

Bernhard BOLZANO.

Bernhard Bolzano est né à Prague en 1781, et y est mort en 1848. Prague avait été autrefois la capitale du royaume de Bohème ; mais depuis 1620, la Bohème était une province de l'empire d'Autriche-Hongrie et subissait la domination des Autrichiens. Ce n'est qu'en 1918, à l'issue de la guerre de 1914-1918, que la Tchécoslovaquie put être constituée, avec Prague pour capitale.

De la naissance à la mort de Bolzano, les Français ont vu se succéder Louis XVI, la première République, Napoléon 1er, Louis XVIII et Charles X, et, après la révolution de 1830, Louis-Philippe.

Le désir de voir se réaliser une plus grande justice s'est beaucoup développé en Europe à la fin du 18ème siècle ; c'est ainsi que Bolzano choisit d'être prêtre (catholique) pour contribuer à répandre le bien. Il fut nommé professeur de religion à l'université de Prague ;

mais il a été chassé de l'université en 1819 parce que ses idées libérales déplaisaient au pouvoir autoritaire.

Parallèlement à son activité religieuse, Bolzano fut mathématicien. Il a été l'un des tous premiers à essayer de donner une définition rigoureuse de $\mathbb{R}$; mais il fallut attendre 1872 pour que le mathématicien allemand Dedekind donne une construction parfaitement correcte de $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$.

Signalons qu'il fut le premier à donner une définition mathématique des ensembles infinis. Il a également écrit un important livre de logique, *la théorie de la science.*

Bolzano était malheureusement très isolé de la vie scientifique de son temps, et ses œuvres n'ont pas eu toute l'influence qu'elles auraient mérité d'avoir.

exercices et problèmes

1. Voici une liste de nombres : 0 ; $4{,}75$; -7 ; $-\pi$; $\frac{8}{3}$; $-\frac{8}{5}$; $\sqrt{3}$; $\frac{8}{2}$.

Pour chacun de ces nombres, indique s'il appartient, ou non, à chacun des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$.

2. *Trace une droite* d. *Place sur cette droite deux points* I *et* J *tels que la longueur du segment* IJ *soit* 2 cm. *Soit* g *la graduation de repère* (I, J).

1. *Marque sur la droite* d *les points* A, B, C *et* D *tels que*
$g(A) = 2$; $g(B) = 3{,}4$; $g(C) = -1$; $g(D) = -1{,}2$.

2. *Calcule* $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ *et* $\overline{DA}$.

3. Appelons U le milieu du bipoint (A, B) et V celui du bipoint (C, D).
Place les points U *et* V *sur ton dessin.*

4. Soit M le point de d tel que $\overline{AM} = 4{,}2$ et N le point de d tel que $\overline{ND} = -3$.
Quelles sont les abscisses des points M *et* N *?*
Place les points M *et* N *sur ton dessin.*

3. Soit d une droite graduée par $\mathbb{R}$. Soit A, B, C et D quatre points de d.

1. *Démontre que* $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.
Déduis-en que $AD + BC = BD + AC$.

2. On appelle I le milieu de (A, B) et J celui de (C, D). Remarque que $\overline{AD} = \overline{AI} + \overline{IJ} + \overline{JD}$.
Démontre que $AD + BC = 2IJ$.

4. Le réel x est tel que $2{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}6$. On a ainsi écrit un encadrement du réel x.
Ecris un encadrement des réels $3{,}5 + x$, $x - 7$, $5x$ *et* $-2x$.

5. *Trace une droite* d. *Place sur cette droite deux points* S *et* T *tels que la longueur du segment* ST *soit* 3 cm.

Appelons h la graduation de repère (S, T).

1. *Marque sur la droite* d *les points* A, B, C, D, E, F *et* G *tels que :* $h(A) = 3$, $h(B) = -2$, $h(C) = \frac{13}{3}$, $h(D) = -\frac{1}{3}$, $h(E) = 4\sqrt{2}$, $h(F) = 4 + \sqrt{2}$ *et* $h(G) = 4 - \sqrt{2}$.

2. *Calcule* $\overline{BA}$, $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{EF}$ *et* $\overline{GF}$.

3. On appelle I le milieu de (A, B), J celui de (A, C), K celui de (C, D) et L celui de (F, G).
Calcule h(I), h(J), h(K) et h(L).
Place les points I, J, K *et* L *sur ton dessin.*

4. *En t'aidant de ton dessin, range les réels suivants du plus petit au plus grand :* 3 ; -2 ; $\frac{13}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $4\sqrt{2}$; $4 + \sqrt{2}$; $4 - \sqrt{2}$; $0{,}5$; $\frac{11}{3}$; 2 *et* 4.

6. Nous avons admis dans [R1, page 205] les propriétés suivantes de l'ordre dans $\mathbb{R}$.

Propriété 1 : si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.
Propriété 2 : si $a \leqslant b$ et si c est positif, alors $ac \leqslant bc$.

D'autre part, puisque la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre, nous avons aussi la propriété suivante.

Propriété 3 : la relation $\leqslant$ est transitive, c'est-à-dire
si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$.

1. Soit x, y, z et t des nombres réels.
Justifie ce qui suit.

Si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$;
si $z \leqslant t$, alors $y + z \leqslant y + t$;
si $x + z \leqslant y + z$ et $y + z \leqslant y + t$ alors $x + z \leqslant y + t$.

Tu viens de démontrer que, si x, y, z et t sont des réels tels que $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$, alors $x + z \leqslant y + t$.

2. *Démontre que si* x, y, z *et* t *sont des réels positifs tels que* $x \leqslant y$ *et* $z \leqslant t$, *alors* $xz \leqslant yt$.

3. *Penses-tu que la propriété suivante soit vraie ?*
Si x, y, z et t sont des réels quelconques tels que $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$, alors $xz \leqslant yt$.

7. Soit u un nombre réel.
Donne une autre écriture des réels suivants.

$u^4 \times u^2$; $u^{12} \times u^{13}$; $u^6 \times u$; $u^3 \times u^5$; $u^1 \times u^4$.

8. Soit x un réel.
Donne une écriture plus simple des réels suivants.

$-5x \times 8$; $-0{,}5 \times (-1{,}2x^2)$; $4x^4 \times 0{,}25$; $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}\,x^3)$; $\frac{4}{5} \times \frac{10}{3}x$; $-2 \times (-\frac{1}{3}x^9)$.

9. Soit x un réel.
Donne une écriture plus simple des réels suivants.

$-6x^4 \times 4x$; $-0{,}1x^3 \times (-0{,}01x^5)$; $\frac{1}{\sqrt{2}}x^7 \times \sqrt{2}\,x^7$; $5x^6 \times \frac{2}{7}x^3$; $\frac{2}{7}x^9 \times (-\frac{21}{5}x^2)$.

10. *Calcule* 3^4 ; -3^4 ; $(-3)^4$; 2×5^2 ; $(2 \times 5)^2$; $8 - 6^2$; $(8-6)^2$.

11. Soit t un réel.
Donne une écriture plus simple des réels suivants.
$(7t)^2$; $(-8t)^2$; $(\frac{2t}{9})^2$; $(3\sqrt{2}\,t)^2$; $(\sqrt{2})^4$; $(-\frac{1}{2}t)^5$.

12. Soit x, y, z et t des réels.
Développe $5(3x-6)$; $(6x+1)(-y)$; $-8x(6y-1{,}5)$; $13x(-2y-1)$; $-3(-7+3x-4y)$; $(-11x-12y+3t)(-5z)$; $0{,}25x(4y-8z+16t-32)$.

13. Soit x un réel.
Développe $3x(2x-5)$; $-4x^2(3x^2-2x+1)$; $12x^3(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6})$; $-2x^3(-6+3x^2+1{,}5x^4)$; $-\sqrt{2}\,x(\sqrt{2}\,x^2 + 3\sqrt{2}\,x - 1)$.

14. Soit t un réel.
Donne une écriture plus simple des réels suivants : $7t^2+6-9t-3t^2-2t+4t$; $4t^3+3t^4-6t^2+10t+3t^3+5+6t^4-1$; $3{,}1t^2-2{,}5t^2-2t-7{,}2t^4+t^2+8{,}9t+7+3{,}5t^4-9{,}4$; $\frac{1}{3}t - \frac{3}{7}t^2 + \frac{7}{3}t^3 - t - \frac{1}{2} - \frac{5}{6}t^3 - \frac{4}{7}t^2 + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}t^3$.

15. Soit u un réel.
Donne une écriture plus simple des réels suivants.
$(-3u^4-2u^3+5u-12)+(2u^5-u^4-3u^3+2u^2-7)$; $(3-u+5u^2)-(-6-2u+3u^2)+(-7-u+6u^2)$; $-5u^2+2u+1+(3u^4+5u-2u^3-5)-(2u^2+u^3-u^4)$; $(3u^2-\frac{1}{2}u+\frac{5}{7})-(-2u^2-\frac{3}{2}u-\frac{2}{7})$.

16. Soit a, b et c des réels.
Factorise $6a+6b+6c$; $4a-8b+12$; $75a-25$; $3ab+2ac$; $6abc-5bc$; $2ac-6bc$; $-8a+12ab-16abc$; $28abc-14ac+56bc$; a^3b+a^2c ; $28a^3-14a^2-7a$; $9a^3+3a^2b-6a^4c$; $15a^3b^2c^4-25a^2b^3c^5+10a^4b^4c^3$.

17. Soit y un réel.
Développe et réduis les expressions suivantes : $2(3y^2-5y+1)-3(-2y^2+6y-12)$; $4y(3y^2+2)-3(-y^2-2y)-5y^2(-y+6)$.

18. Soit x et y deux réels.
Développe $(2x+1)(3y+4)$; $(-5x-6)(-3y+2)$; $(6-3y)(11y+5)$; $(1{,}5x-2)(-1+0{,}1y)$; $(\frac{1}{3}x-\frac{2}{5})(\frac{4}{7}y+\frac{1}{2})$.

19. Soit x un réel.
Développe et réduis $(x+2)(-x+1)$; $(-2x+1)(-7+3x)$; $(2x-x^2)(2+5x)$; $(3+13x^2)(x+5)$; $(\frac{2}{5}x-3)(\frac{3}{6}x+7)$; $(3-2x+5x^2)(7+6x)$; $x(x-1)(x+2)$.

20. Soit a un réel.
Développe $(a+3)^2$; $(5+4a)^2$; $(2{,}5a+0{,}4)^2$; $(\frac{2}{5}a+11)^2$; $(a-5)^2$; $(9a-2)^2$; $(0{,}2-a)^2$; $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a)^2$; $(a-1)(a+1)$; $(3a+2)$; $(1{,}2-a)(1{,}2+a)$; $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$.

21. Soit t un réel.

Factorise $t^2 + 10t + 25$; $9t^2 + 24t + 16$; $121t^2 + 22t + 1$; $t^2 - 14t + 49$; $t^2 - 64$; $4t^2 - 4t + 1$; $4t^2 - 20t + 25$; $16t^2 - 9$; $100 - 49t^2$.

22. *Donne une autre écriture des nombres suivants.*

$\dfrac{9\sqrt{3}}{10\sqrt{2}} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$; $\dfrac{\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)}{\left(\dfrac{2}{3}\right)}$; $\dfrac{4\sqrt{6}}{\left(\dfrac{1}{4}\right)}$; $\dfrac{\left(\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)}$; $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{\pi}{10}$.

23. Soit a un naturel pair ; le reste dans la division euclidienne de a par 2 est donc 0 ; tu pourras appeler x le naturel tel que $a = 2x$.

Démontre que a^2 *est un naturel pair.*

Soit b un naturel impair ; le reste dans la division euclidienne de b par 2 est donc 1 ; tu pourras appeler y le naturel tel que $b = 2y + 1$.

Démontre que b^2 *est un naturel impair.*

Soit n un naturel tel que n^2 soit pair.

Le naturel n *peut-il être impair ? Pourquoi ?*

Le naturel n est donc pair.

Tu as démontré une propriété que nous avions admise dans [R1, page 199] :

soit n un naturel ; si n^2 est pair, alors n est pair.

24. Tu sais que les nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont tels que $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Calcule $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$. *Que peux-tu dire des nombres* $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ *et* $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ *?*

25. Soit d une droite graduée par $\mathbb{R}$; soit A et B deux points de d. On appelle I le milieu du bipoint (A, B). Soit M un point de d.

La relation de Chasles permet d'écrire que $\overline{MA} = \overline{MI} + \overline{IA}$ et que $\overline{MB} = \overline{MI} + \overline{IB}$.

1. *Montre que* $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$.

2. *Montre que* $(\overline{MA})^2 - (\overline{MB})^2 = 2\,\overline{AB} \times \overline{IM}$.

26. *Résous dans* $\mathbb{R}$ *les équations en* x *suivantes :* $x - 2{,}5 = -1{,}2$; $x + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$; $5x = 0$; $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{7} = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{11}{7}$; $-7x = 2$; $\dfrac{2}{3}x = -\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}x$.

27. *Résous dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations en* x *suivantes :* $x + 6{,}8 < 8{,}2$; $5x + \dfrac{7}{3} \leqslant 4(x - \dfrac{1}{3})$; $(1 + \sqrt{2})\,x > \sqrt{2}\,x$; $\dfrac{2}{7}x + \dfrac{1}{4} \geqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{9}{7}x$.

28. Soit f et g les applications ainsi définies.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 6x^2 + 9x - 6 \qquad x \longmapsto 2x^3 + 15x^2 + 6x - 7$$

Calcule les images des nombres 0 ; 1 ; -1 ; -2 ; $\dfrac{1}{2}$ et $\sqrt{2}$ *par les applications* f *et* g *(pour calculer* $g(\sqrt{2})$, *tu pourras utiliser la remarque suivante :* $(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$*).*

Les applications f *et* g *sont-elles des bijections ?*

29. *Calcule* $\left|4{,}7 - |1{,}5 - 7{,}8|\right|$; $\left|\dfrac{1}{3} - \left|\dfrac{2}{9} - 4\right|\right|$; $\left||1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|\right|$.

30. *Quelles sont les valeurs absolues des réels suivants ?*

$-3-4{,}2$; $7-9{,}1$; $1-\frac{5}{4}$; $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$; $\frac{-3}{5}\times\frac{8}{-9}$; $-6\times\frac{4}{5}$.

31. *Quel est l'ensemble des réels* x *tels que* $|x|=x$?
Quel est l'ensemble des réels x *tels que* $|x|=-x$?
Quel est l'ensemble des réels x *tels que* $|-x|=x$?
Quel est l'ensemble des réels x *tels que* $|-x|=-x$?

32. *Résous dans* IR *les équations en* u *suivantes :* $|u|=4$; $|u|=-4$; $|-u|=4$.

33. *Résous dans* IR *les équations en* x *suivantes :* $|x-2|=2{,}5$; $|3-x|=5$; $|x-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$.

34. *Trace une droite* d. *Place sur cette droite deux points* K *et* L *tels que la longueur du segment* KL *soit* 3 cm.

Appelons s la graduation de repère (K, L).

1. *Marque sur la droite* d *les points* A, B, C, D *et* E *tels que* $s(A)=2$; $s(B)=\frac{4}{3}$; $s(C)=-\frac{5}{3}$; $s(D)=\sqrt{2}$ *et* $s(E)=-\sqrt{2}$.

2. *Calcule* $d(A,B)$; $d(B,C)$; $d(A,D)$ *et* $d(K,D)$.

35. *Compare* $\frac{15}{17}$ *et* $\frac{9}{10}$; $\frac{27}{14}$ *et* $\frac{49}{25}$; $\frac{987\,432\,193}{987\,432\,192}$ *et* $\frac{103\,402}{103\,403}$; $\frac{113}{983}$ *et* $\frac{10}{87}$.

36. La valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de π est 3,141 ; celle de $\sqrt{2}$ est 1,414 et celle de $\sqrt{3}$ est 1,732.

Compare π *et* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

37. *Quelles sont les valeurs approchées à* 10^{-1} *près, à* 10^{-2} *près, à* 10^{-3} *près, à* 10^{-5} *près, à* 10^{-8} *près par défaut des rationnels suivants :* $\frac{69}{11}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{40}{1{,}3}$ *et* $\frac{415}{1\,111}$?

38. *Donne une écriture plus simple des nombres suivants.*

$10^4\times10^{-5}$; $10^{-2}\times10^{-3}$; $10^5\times10^3$; $10^{-2}\times10$; 10×10^{-1}.

Ecris chacun des nombres obtenus sous sa forme décimale.

39. *Donne une écriture plus simple des nombres suivants :* $10^2\times10^{-3}\times10^4$; $10^4\times10^{-7}\times10^{13}\times10^{-3}$; $10^7\times10^0\times10^5\times10^3$; $10^{-2}\times10^{-3}\times10^{-7}\times10^{-1}$

40. La plupart des voitures automobiles ont un compteur kilométrique sur leur tableau de bord ; un tel compteur indique combien de kilomètres la voiture a parcouru depuis qu'elle fonctionne, à 1 kilomètre près. Par exemple, si on lit 25 367 au compteur et si on note d la distance en kilomètres parcourue par cette voiture depuis qu'elle fonctionne, on sait que

$$25\,367 \leqslant d < 25\,368.$$

On a ainsi écrit un encadrement du nombre d.

Avant de partir le matin, un automobiliste lit sur son compteur kilométrique 37 827. A son retour le soir, l'automobiliste lit 38 130.

Si on appelle a *la distance en kilomètres parcourue dans la journée, donne un encadrement de ce nombre* a.

41. **Eclair et tonnerre.**

Les sons se déplacent dans l'air à la vitesse de 340 mètres par seconde. Par exemple, si tu tapes dans tes mains et qu'un camarade se trouve à 34 mètres de toi, il entendra ton claquement de main 0,1 seconde après toi. Par contre il verra ton geste pratiquement en même temps que toi. (En fait environ 0,000 000 1 seconde après toi ; nous négligerons cette différence).

Ton camarade aura l'impression que tu as tapé dans tes mains, puis que le claquement s'est produit un moment après.

1. *Si tu es à 640 mètres d'une personne qui tire au pistolet, combien de temps après le tireur entendras-tu le coup de feu ? Et si tu es à 1 kilomètre ?*

2. Dans un orage, un observateur mesure, en secondes, le temps t qui sépare un éclair, qu'il voit, du tonnerre, qu'il entend. Il trouve que

$$12 < t < 14.$$

Il a ainsi écrit un encadrement de t.

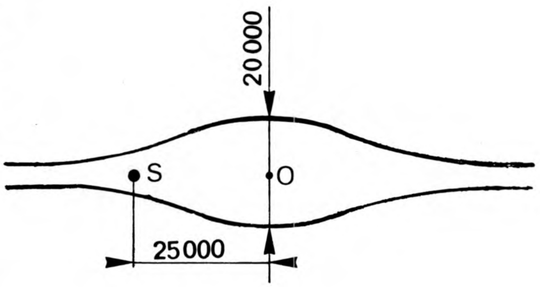
Donne un encadrement de la distance, exprimée en mètres, qui séparait l'observateur de l'éclair qu'il a observé.

3. La vitesse du son de 340 mètres par seconde est en fait la vitesse par temps calme, à la température de 15°. Mais la vitesse du son dépend du vent et de la température ; si on note v la vitesse du son, exprimée en mètres par seconde, dans les conditions habituelles d'orage

$$310 < v < 370 .$$

Reprends la deuxième question en tenant compte de cet encadrement.

42. Le système solaire fait partie d'un système plus vaste appelé «galaxie». La voie lactée que tu peux voir par de belles nuits est une partie de cette galaxie. Celle-ci a une forme de disque. Le dessin ci-contre montre ce disque vu par la tranche. Les nombres donnent des distances mesurées en années-lumière ; une année lumière mesure $9{,}5 \times 10^{12}$ km ; le point O désigne le centre du disque et le point S désigne le soleil.



La galaxie tourne sur elle-même autour du centre O. Le soleil S se déplace donc sur un cercle de centre O.

1. *Détermine en kilomètres la longueur du cercle sur lequel se déplace le soleil. (Tu sais que la longueur d'un cercle est égal au produit de π par la longueur de son diamètre ; ici tu pourras prendre 3 comme valeur approchée de π).*

2. Les astronomes ont mesuré la vitesse de déplacement du soleil sur ce cercle ; cette vitesse est 250 kilomètres par seconde.

Quel est le temps mis par le soleil pour couvrir le cercle entier ? Quelle fraction de ce cercle le soleil a-t-il parcouru depuis 2000 ans ?

Le soleil et la terre existent depuis plus de 4 millards d'années. Combien de tours le soleil a-t-il fait en 4 millards d'années ?

symétrie centrale et repérage

SR1 Rotations matérielles

I – UNE NOUVELLE TRANSFORMATION MATERIELLE.

1.1 Observons.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 8a, la figure rouge est la transformée de la figure bleue par une transformation matérielle. Le point A′ est le transformé du point A et le point C est transformé en lui-même.

Prends une feuille de calque et la feuille de manipulation 11b. *Reproduis sur ce calque le dessin numéro* 3 *de la feuille de manipulation : tu obtiens un calque-cible. Pose le centre de ce calque cible sur le point* C *; fais coïncider le rayon* 0 *avec la demi-droite* CA. *Reproduis sur le calque la figure bleue.*

Quel est le numéro du rayon de la cible qui coïncide avec la demi-droite CA′ *?*

Comment dois-tu déplacer la cible pour que le dessin que tu viens de faire recouvre la figure rouge ?

Marque un point M *sur la feuille de papier. Comment vas-tu utiliser la cible pour trouver son transformé* M′ *?*

On appelle une telle transformation une ROTATION MATERIELLE. Dans le cas que nous venons d'étudier, la rotation matérielle est déterminée par le point C et par les deux rayons de la cible numérotés 0 et 150.

On dit que C est le CENTRE de la rotation.

Y a-t-il d'autres points que C *confondus avec leur transformé ?*

1.2 Transformée d'une figure.

Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 8a, la figure rouge numérotée 2 est la transformée de la figure rouge numérotée 1 par une rotation matérielle de centre C.

Dessine la transformée de la figure bleue.

Prends une feuille de calque. Reproduis la figure rouge numérotée 1 *sur ce calque. Peux-tu faire coïncider ce dessin avec la figure rouge numérotée* 2 *? Faut-il retourner le calque ? Rappelle-toi ce* *que tu as fait pour les pliages.*

Penses-tu qu'une rotation matérielle soit une isométrie ?

1.3 Remarque.

Dans ce qui précède, nous avons utilisé une cible contenant 16 rayons. Nous ne pouvions donc étudier que des rotations matérielle qui peuvent être déterminées à l'aide de ces 16 rayons. Il est évidemment possible d'étudier d'autres rotations en utilisant d'autres cibles.

II – SYMETRIE CENTRALE MATERIELLE.

2.1 Une rotation matérielle particulière.

La rotation matérielle déterminée par le point C et le couple de rayons (0 ; 200) est aussi appelée SYMETRIE CENTRALE matérielle de CENTRE C.

Remarque que les rayons 0 et 200 sont portés par la même droite.

Dessine trois points C, M *et* N. *A l'aide du calque cible, place le point* M' *transformé du point* M *par la symétrie centrale de centre* C.

Comment sont placés les points M, C *et* M' ?

Refais le même travail pour le point N.

2.2 Symétrie centrale et parallélogramme.

Sur la figure que tu viens de dessiner, vérifie que $\{M, N, M', N'\}$ est un parallélogramme de sommets opposés M et M'.

Pourquoi peut-on affirmer que dans ce parallélogramme, les segments MM' *et* NN' *ont même milieu ?*

Dessine un parallélogramme $\{A, B, C, D\}$ *de sommets opposés* A *et* C.

Vérifie que les segments matériels AC *et* BD *ont même milieu. Appelle* I *ce point.*

Par la symétrie centrale matérielle de centre I, *quel est le transformé du point* A ? *Du point* B ? *Du point* C ? *Du point* D ?

2.3 Transformée d'une figure.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 8b, la figure rouge numérotée 2 est la transformée de la figure rouge numérotée 1 par une symétrie centrale.

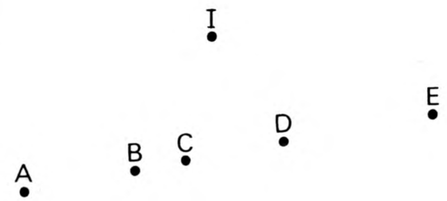
Dessine la figure transformée de la figure bleue par cette symétrie centrale.

2.4 Transformés de points alignés.

Reproduis le dessin de la page suivante. (Les points A, B, C, D *et* E *sont alignés).*

Dessine les transformés des points A, B, C, D *et* E *par la symétrie centrale matérielle de centre* I. *Que constates-tu ?*

Choisis un point F' *aligné avec* A' *et* B'. *Dessine le point* F *dont* F' *est le transformé par cette symétrie. Qu'observes-tu ?*

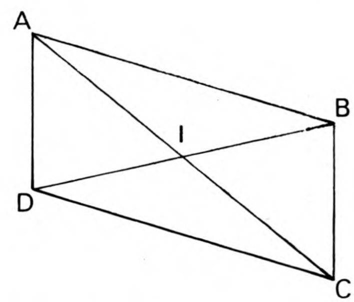


2.5 Centre de symétrie d'une figure.

Reprenons une figure comme celle que tu as dessinée au paragraphe 2.2.

Par la symétrie centrale matérielle de centre I, le parallélogramme ABCD se transforme en lui-même.

On dit que I est un CENTRE DE SYMETRIE pour ce parallélogramme.



Exercices.

1. *Reprends le dessin numéro* 2 *de la feuille de manipulation* 5a. *Cherche les lettres qui ont un centre de symétrie.*

2. *Dessine un segment matériel. A-t-il des centres de symétrie ?*

3. *Dessine une droite matérielle. A-t-elle des centres de symétrie ?*

4. *Dessine un cercle. A-t-il des centres de symétrie ?*

5. *Dessine un triangle équilatéral. A-t-il des centres de symétrie ?*

III – SYMETRIE CENTRALE ET TRANSLATION.

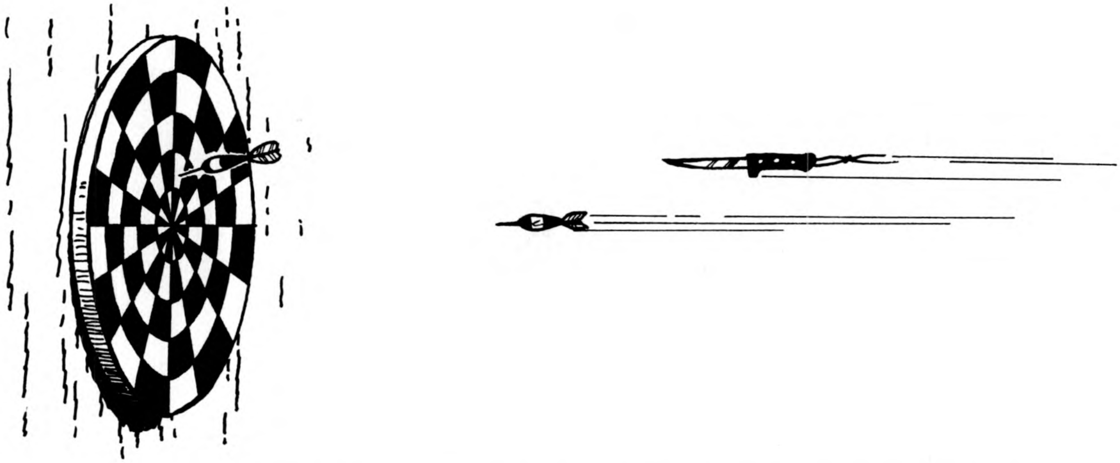
3.1 Deux symétries centrales matérielles.

Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 8b, nous avons placé cinq points A, M, N, I et J.

Appelle A', M' *et* N' *les transformés de* A, M *et* N *par la symétrie centrale de centre* I. *Dessine les points* A', M' *et* N'.

Appelle A'', M'' *et* N'' *les transformés de* A', M' *et* N' *par la symétrie centrale de centre* J. *Dessine les points* A'', M'' *et* N''.

Vérifie que $\{A, A'', M'', M\}$ *est un parallélogramme de sommets opposés* A *et* M''. *Fais le même travail pour* $\{M, M'', N'', N\}$.



Nous pouvons donc affirmer que A'', M'' et N'' sont les transformés de A, M et N par une même translation matérielle que nous pouvons appeler translation (A, A'').

Choisis un point R. *Dessine le transformé* R' *de* R *par la symétrie de centre* I, *puis le transformé* R'' *de* R' *par la symétrie de centre* J.

Vérifie que R'' *est le transformé de* R *par la translation* (A, A'').

Il en serait de même pour tout point du plan et nous pouvons donc écrire que la symétrie de centre I suivie de la symétrie de centre J est la translation (A, A'').

Penses-tu qu'on aurait obtenu le même résultat si on avait fait : symétrie de centre J *suivie de symétrie de centre* I *?*

Compare les longueurs des segments matériels AA'' *et* IJ.

3.2 Décomposition d'une translation.

Prends le dessin numéro 3 *de la feuille de manipulation* 8b. *Vérifie que la figure* 2 *est la transformée de la figure* 1 *par une translation matérielle.*

Nous appellerons cette translation la translation (A, A'').

Sur le dessin on a placé un point I.

Dessine la transformée de la figure 1 par la symétrie de centre I. *Appelle-la figure 3. Appelle* A' *le transformé du point* A *et* J *le milieu du segment matériel* $A'A''$.

Dessine la transformée de la figure 3 par la symétrie de centre J. *Que constates-tu ?*

Tu viens de constater que la translation (A, A'') est égale à la suite des deux symétries centrales de centre I et J. Nous dirons que la translation matérielle se décompose dans la suite de ces deux symétries centrales.

Dans cet exercice, nous avions placé le point I sur le dessin.

Penses-tu qu'on aurait pu choisir un autre point I *que celui dessiné ?*

SR2 Milieux

I – AXIOME DES DROITES.

1.1 Rappels.

Soit d une droite matérielle.

Dans [R1], nous avons vu que

il existe des bijections de d sur $\mathbb{R}$;

certaines de ces bijections nous ont été suggérées par des échelles régulières ; nous les avons appelées graduations ;

si O et I sont deux points de d, il existe une graduation et une seule de repère (O, I).

Choisissons une graduation de d. Soit M et N deux points de d et J le milieu de (M, N).

Dans [R2], nous avons vu que

$\overline{MJ} = \overline{JN}$;

$\text{abscisse de } J = \dfrac{\text{abscisse de } M + \text{abscisse de } N}{2}$.

1.2 Axiome des droites.

Pour que notre théorie corresponde à nos observations, nous admettrons que pour chaque droite d du plan mathématique, il existe des bijections de d sur $\mathbb{R}$.

Soit d une droite, f l'une des bijections de d sur $\mathbb{R}$. Soit M un point de d.
L'image du point M par f est un nombre réel. Tu sais qu'on peut noter ce nombre f(M). Nous dirons aussi que f(M) est l'ABSCISSE du point M pour la bijection f.

Soit U et V deux points de d. Nous noterons $\overline{UV}$ le nombre f(V) – f(U).

1.3 Milieu d'un bipoint pour une bijection.

Soit d une droite mathématique et f une des bijections de d sur $\mathbb{R}$.

Soit A et B deux points de d. Nous appellerons MILIEU du bipoint (A, B) le point I ainsi défini :

$$f(I) = \frac{f(A) + f(B)}{2}.$$

On démontrerait, comme sur une droite matérielle, qu'il revient au même de dire que $\overline{AI} = \overline{IB}$.

Remarque que le milieu de (A, B) que nous venons de définir dépend de la bijection f que nous avions choisie. Si nous avions pris une autre bijection, nous aurions peut-être trouvé un autre milieu.

II – AXIOME DU MILIEU.

2.1 Quelques observations.

Sur les dessins numéro 2, 3 et 4 de la feuille de manipulation 3b, nous avons tracé deux droites d et d'. Sur la droite d, nous avons placé deux points A et B, et le point M milieu de (A, B). Sur la droite d', nous avons placé deux points A' et B' tels que les droites AA' et BB' soient parallèles.

Sur chaque dessin, trace la droite qui passe par M *et qui est parallèle à la droite* AA'. *Qu'observes-tu ?*

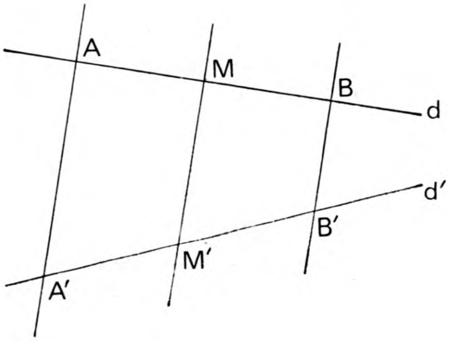
Examine le dessin numéro 5. *Qu'en penses-tu ?*

2.2 Axiome du milieu.

Ces observations nous conduisent à imposer une propriété au plan mathématique.

On peut munir chaque droite mathématique d d'une bijection de d sur IR de façon que la propriété suivante soit vraie.

Soit d et d' deux droites quelconques.



Dans la situation illustrée par la figure,

si M est le milieu de (A, B) ,
alors M' est le milieu de (A', B').

Nous appellerons cette propriété axiome du milieu.

A l'avenir, lorsque nous parlerons du plan mathématique, il faudra toujours penser que

chaque droite d est munie d'une bijection de d sur IR de façon que l'axiome du milieu soit vérifié.

Si d est une droite mathématique, nous appellerons GRADUATION **de d la bijection ainsi associée à d.**

2.3 Remarque.

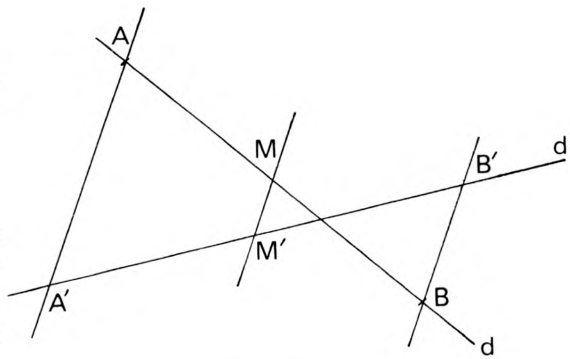
Appelons δ la direction commune des droites AA', BB' et MM'. Les droites d et d' n'appartiennent pas à δ.

Les points A', B' et M' sont les images des points A, B et M dans la projection de direction δ de la droite d sur la droite d'.

Pour retenir notre axiome, nous dirons que le milieu se conserve par projection.

2.4 Examen de plusieurs situations.

* $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $M \neq M'$.

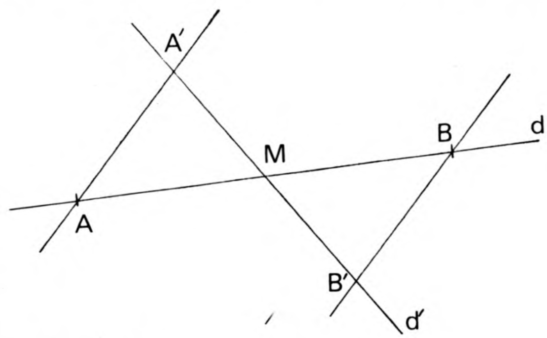


Dans ce cas, on peut énoncer l'axiome du milieu de la façon suivante.

Soit
d et d' deux droites,
A et B deux points de d et A' et B' deux points de d' tels que les droites AA' et BB' soient parallèles ;
M le milieu du bipoint (A, B) et M' un point de d'.

Si les droites MM' et AA' sont parallèles, alors M' est le milieu du bipoint (A', B').

* $M = M'$.

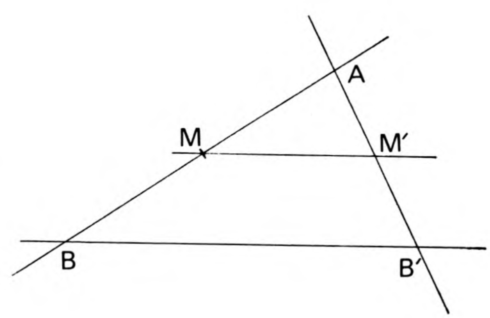


Dans ce cas, on ne peut pas parler d'une droite MM'. Le point M a pour image M dans la projection définie au paragraphe précédent. On peut énoncer l'axiome du milieu sous la forme suivante.

Soit
deux droites d et d' sécantes en un point M,
A et B deux points de d et A' et B' deux points de d' tels que les droites AA' et BB' soit parallèles.

Si M est le milieu du bipoint (A, B), alors M est aussi le milieu du bipoint (A', B').

* $A = A'$.



Dans ce cas, le point A a pour image A dans la projection considérée. On peut énoncer l'axiome du milieu sous la forme suivante.

Soit un triangle $\{A, B, B'\}$, M le milieu de (A, B) et M' un point de la droite AB'.

Si MM' est parallèle à la droite BB', alors M' est le milieu de (A, B').

Tu reconnais là une propriété que nous avions admise provisoirement, pour faire une démonstration, dans [DP2].

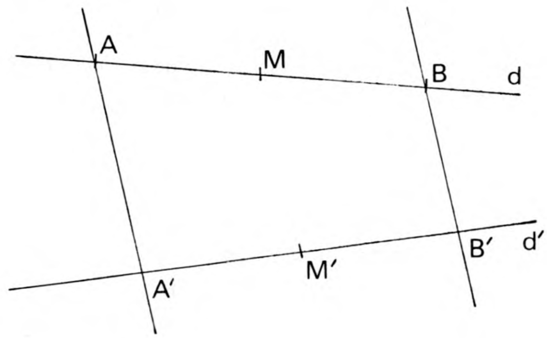
III – RECIPROQUE DE L'AXIOME DU MILIEU.

3.1 Soit

d et d' deux droites ;

A et B deux points de d, et A' et B' deux points de d' tels que les droites AA' et BB' soient parallèles ;

M le milieu du bipoint (A, B) et M' un point de d'.



Remarque bien que nous avons énoncé la situation étudiée exactement de la même façon que dans l'énoncé de l'axiome du milieu au début du paragraphe 2.5.

Supposons maintenant que M' soit le milieu du bipoint (A', B').

A ton avis, quelle propriété doit vérifier la droite MM' *?*

Démontrons-le.

Il existe une seule droite qui passe par M et qui est parallèle à la droite AA' ; appelons-la m. La droite m passe par le milieu de (A', B') d'après l'axiome du milieu. Ce milieu est M'.

La droite MM' est donc égale à la droite m, elle est parallèle à la droite AA'.

3.2 Cas du triangle.

C'est le cas étudié à la fin du paragraphe 2.5.

Tu vois aisément qu'on peut énoncer notre nouvelle propriété de la manière suivante.

Soit un triangle $\{A, B, B'\}$, M le milieu de (A, B) et M' un point de la droite AB'.

Si le point M' est le milieu de (A', B'), alors la droite MM' est parallèle à la droite BB'.

Remarque bien que là encore, l'énoncé de la situation étudiée est exactement le même que dans l'énoncé de l'axiome du milieu à la fin du paragraphe 2.5.

Tu as aussi reconnu une propriété que nous avions admise provisoirement dans [DP3].

IV – ETUDE D'UN PROBLEME.

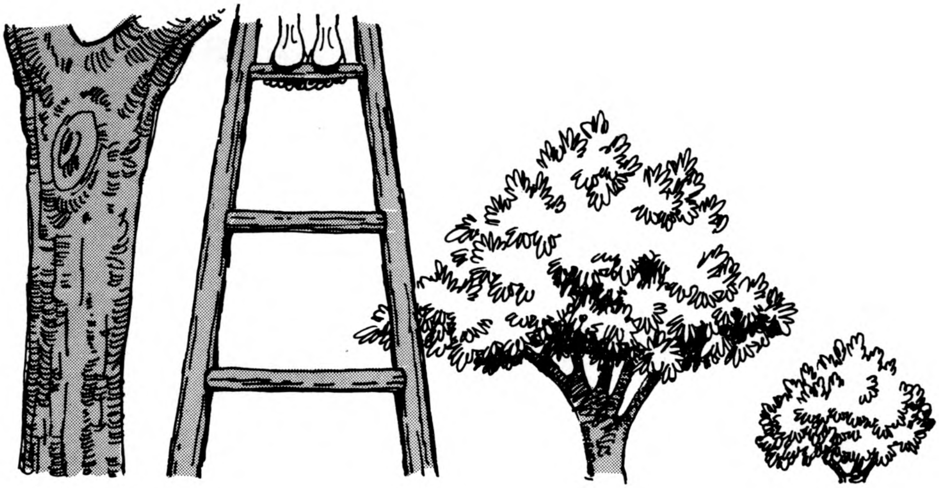
Enoncé du problème.

Soit un triangle $\{A, B, C\}$.

Appelons **I** le milieu de **(A, B)**, **J** le milieu de **(A, C)**.

La parallèle à la droite **CI**, qui passe par **J**, coupe la droite **AB** en un point **K**.

1. Montre que **K** est le milieu de **(A, I)**.

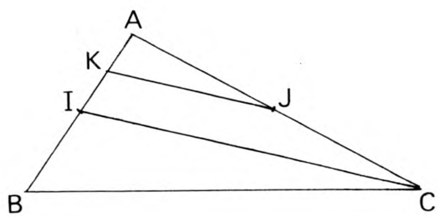


2. La parallèle à la droite **BJ** qui passe par **I** coupe la droite **AC** en un point **L.** Montre que les droites **KL** et **BC** sont parallèles.

Etude de la première question.

Dans le triangle AIC,
le point J est le milieu de (A, C),
la droite KJ est parallèle à la droite IC.

Qu'en déduis-tu pour le point K *?*

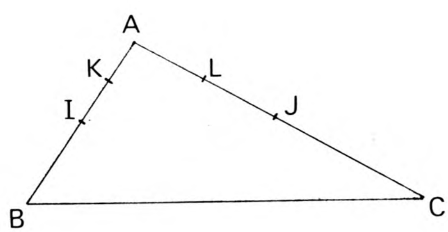


Etude de la seconde question.

Pourquoi peut-on affirmer que le point L *est le milieu du bipoint* (A, J) *?*

Dans le triangle {A, B, C},
le point I est le milieu de (A, C),
le point J est le milieu de (A, C).

Qu'en déduis-tu pour la droite IJ *?*



Dans le triangle {A, I, J},
le point K est le milieu de (A, I) et le point L est le milieu de (A, J).

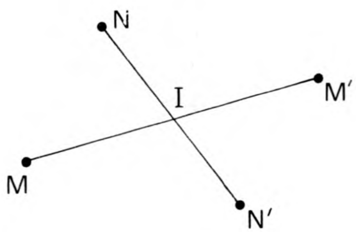
Qu'en déduis-tu pour la droite KL *?*
Termine le problème.

SR3 Symétrie centrale et parallélogramme

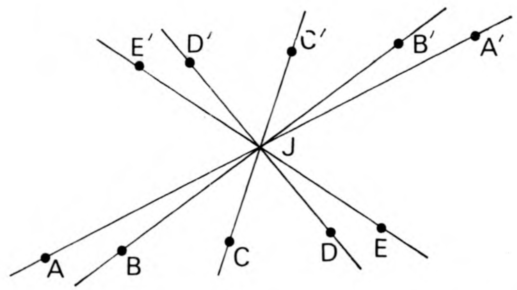
I – SYMETRIE CENTRALE.

1.1 Rappel de quelques observations.

Dans [SR1], nous t'avons proposé d'étudier une symétrie centrale matérielle. Rappelons deux observations.



Si M' et N' sont les transformés de M et N, alors $\{M, N, M', N'\}$ est un parallélogramme de sommets opposés M et M'.



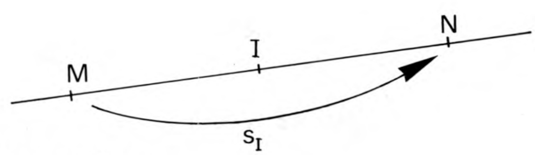
Les transformés de points alignés sont des points alignés.

1.2 Définition.

On appelle SYMETRIE CENTRALE de CENTRE I l'application qui, à tout point M, associe le point N ainsi défini :

I est le milieu de (M, N).

On peut noter s_I cette application.



On dit que N est le SYMETRIQUE de M par rapport à I.

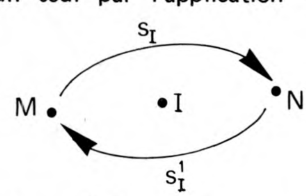
1.3 Propriétés.

Soit I un point. Nous allons étudier des propriétés de l'application s_I.

Soit N un point. Le point N a un antécédent et un seul par l'application s_I.

Quel est ce point ?

Appelons-le M.



Tu sais qu'on traduit cette propriété en disant que s_I est une bijection ; donc s_I a une réciproque ; on la note s_I^{-1}.

Si $N = s_I(M)$, alors $M = s_I^{-1}(N)$.

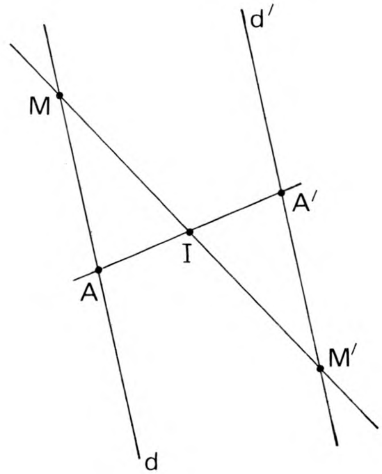
Soit P un point quelconque.

Ce que tu as fait ci-dessus permet d'affirmer que $s_I(P) = s_I^{-1}(P)$. On peut donc conclure que $s_I^{-1} = s_I$.

Quelle est l'image du point I *par l'application* s_I *?*

Tu sais qu'on traduit cette propriété en disant que I est invariant par s_I. Il est facile de comprendre pourquoi il n'y a pas d'autre point invariant.

1.4 Image d'une droite par une symétrie centrale.



Soit d une droite et I un point qui n'est pas sur d.

Soit A un point de d et A' son image par la symétrie centrale de centre I. Appelons d' la droite qui passe par A' et qui est parallèle à d.

Soit M un point de d et M' le point d'intersection de la droite MI et de la droite d'. Tu reconnais une situation étudiée dans [SR2].

Les droites AM et A'M' sont parallèles et le point I est le milieu de (A, A'). On peut donc affirmer que I est aussi le milieu de (M, M'), c'est-à-dire que $M' = s_I(M)$.

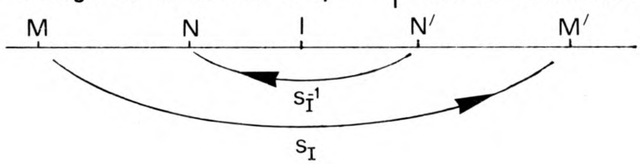
Nous avons démontré que tout point de d a son image sur d'.

Soit N' un point de d'. Puisque $s_I^{-1} = s_I$, on pourrait démontrer exactement de la même façon que l'antécédent de N' est sur d.

Autrement dit, tout point de d' est l'image d'un point de d.

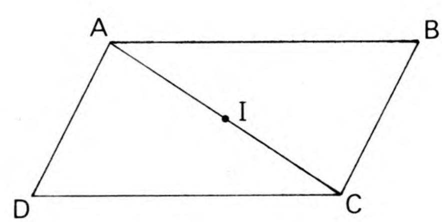
On traduit ces deux propriétés en disant que l'image de la droite d par s_I est la droite d'.

Soit maintenant une droite d et un point I qui appartient à d. Il est facile de comprendre pourquoi l'image de la droite d par s_I est d elle-même.



II — PARALLELOGRAMME.

2.1 Parallélogramme et symétrie centrale.



Soit {A, B, C, D} un parallélogramme de sommets opposés A et C. Appelons I le milieu de (A, C).

Dans la symétrie centrale de centre I, l'image de la droite AB est la droite CD.

Pourquoi ?

L'image de la droite CB est la droite DA.

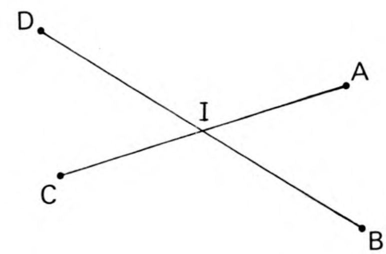
Pourquoi ?

Le point B appartient à la fois à la droite AB et à la droite CB. Son image doit donc être sur la droite CD et sur la droite AD : c'est le point D.

Qu'en déduis-tu pour les points B, D *et* I *?*

Nous avons montré que les bipoints (A, C) et (B, D) ont le même milieu.

2.2 Réciproque de cette propriété.



Soit A, B, C et D quatre points tels que

trois d'entre eux ne soient pas alignés,

les bipoints (A, C) et (B, D) aient le même milieu, notons I ce milieu.

Dans la symétrie centrale de centre I*, quelle est l'image du point* A *? Du point* B *? De la droite* AB *? Qu'en déduis-tu pour les droites* AB *et* DC *?*

Démontre de même que les droites AD *et* BC *sont parallèles.*

Tu viens de montrer que $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et C.

2.3 Récapitulons.

Enonçons ce que nous venons de démontrer.

Soit A, B, C et D quatre points tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

les droites AB et DC sont parallèles et les droites BC et AD sont parallèles,
les bipoints (A, C) et (B, D) ont le même milieu.

Cela signifie que ces deux propriétés sont ou toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses.

Mais dans [TR], nous avons étudié trois autres propriétés équivalentes. Rappelons ces propriétés :

$t_{(A,B)} = t_{(D,C)}$,
les bipoints (A, B) et (D, C) sont équipollents,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2.4 Cas du parallélogramme aplati.

Soit M, M$'$, A et D quatre points non alignés tels que les droites MM$'$ et AD soient parallèles. Tu sais que M et M$'$ définissent une translation. Appelons B l'image de A et C l'image de D dans cette translation.

Fais une figure illustrant cette situation.
Explique pourquoi les points A, B, C *et* D *sont alignés.*

Tu sais que dans cette situation, on peut écrire que

$t_{(A,B)} = t_{(D,C)}$,

les bipoints (A, B) et (D, C) sont équipollents,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Nous dirons encore dans ce cas que $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et C. C'est un PARALLELOGRAMME APLATI.

Sur ton dessin, marque le milieu du bipoint (A, C) *et le milieu du bipoint* (B, D). *Que constates-tu ? Et tes camarades ?*

Ce que nous venons de faire nous incite à penser que le plan mathématique possède la propriété suivante.

Soit A, B, C et D quatre points alignés : alors $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et C si et seulement si les bipoints (A, C) et (B, D) ont le même milieu.

Nous admettrons cette propriété.

Enfin dans [R2], nous avons montré la propriété suivante.

Soit d une droite matérielle graduée et A, B, C et D quatre points de cette droite ; les bipoints (A, C) et (B, D) ont le même milieu si et seulement si $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Une droite mathématique munie de sa graduation possède la même propriété.

Nous venons de trouver cinq propriétés des parallélogrammes aplatis. Regroupons-les.

Soit A, B, C et D quatre points alignés. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes.

$t_{(A,B)} = t_{(D,C)}$,

les bipoints (A, B) et (D, C) sont équipollents,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,

les bipoints (A, C) et (B, D) ont le même milieu,

$\overline{AB} = \overline{DC}$.

2.5 Exercices.

Soit A, B, C et D quatre points alignés. Les abscisses de ces points sont –3 ; –7 ; 2 et 6.

Calcule les abscisses des milieux de (A, C) *et de* (B, D). *Que peux-tu en conclure ?*
Fais un dessin.

Soit A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Montre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. *Que peux-tu en conclure ?*

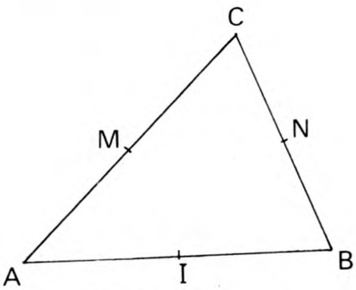
Soit A, B, C et D quatre points tels que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Pourquoi peut-on dire que les points A, B *et* C *sont alignés ? Pourquoi peut-on dire que les points* B, C *et* D *sont alignés ?*

Que peut-on dire de $\{A, B, C, D\}$ *?*

2.6 Milieu et vecteurs.



Soit A et B deux points et I le milieu de (A, B).

Nous allons essayer de montrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Soit C un point qui n'appartient pas à la droite AB ; soit M le milieu de (C, A) et N le milieu de (C, B).

Montre que {M, N, I, A} *est un parallélogramme de sommets opposés* M *et* I, *et que par conséquent* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AI}$. *Montre que* {M, N, B, I} *est un parallélogramme de sommets opposés* M *et* B *et que par conséquent* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IB}$. *Termine.*

Soit maintenant un point H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HB}$. Nous allons montrer que H est nécessairement le milieu de (A, B), c'est-à-dire que H = I.

Nous savons que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; donc $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Justifie les égalités suivantes.

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH} \ ;$$
$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{HB} \ ;$$
$$\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HI} \, .$$

Nous avons démontré que $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{HI}$. Le vecteur $\overrightarrow{IH}$ est égal à son opposé ; le seul vecteur égal à son opposé est le vecteur nul ; donc $\overrightarrow{IH} = \theta$ et H = I.

Concluons.

Soit A, B et I trois points. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

I est le milieu du bipoint (A, B) ;

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Nous connaissions déjà deux autres propriétés équivalentes à ces propriétés.

$\overline{AI} = \overline{IB}$;

$$\text{abcisse de I} = \frac{\text{abscisse de A} + \text{abscisse de B}}{2} \, .$$

III – CENTRE DE SYMETRIE D'UNE FIGURE.

3.1 Soit {A, B, C, D} un parallélogramme de sommets opposés A et C. Appelons I le milieu commun des bipoints (A, C) et (B, D).

Quelles sont les images des points A, B, C *et* D *dans la symétrie centrale de centre* I *?*

Tu vois donc que l'image du parallélogramme ABCD, dans cette symétrie, est le parallélogramme ABCD.

On traduit cette propriété en disant que I est un CENTRE DE SYMETRIE pour le parallélogramme.

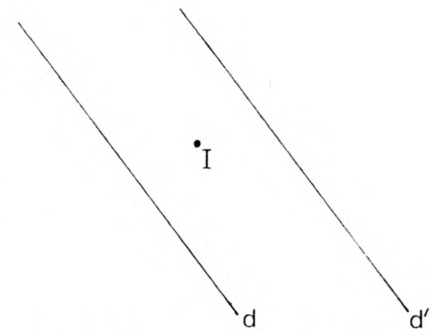
Un parallélogramme est donc un ensemble de quatre points qui a un centre de symétrie.

Soit d une droite et I un point de cette droite. On a vu à la fin du paragraphe 1.4 que l'image de d par s_I est d. Le point I est un centre de symétrie pour la droite d.

3.2 Soit d une droite et I un point qui n'appartient pas à d. On a vu dans le paragraphe 1.4 que l'image de d par la symétrie de centre I est une droite d' parallèle à d.

Appelons e la figure formée des droites d et d' ; autrement dit $e = d \cup d'$.

Tu vois que l'image de e par s_I est e : le point I est un centre de symétrie pour e.



3.3 Soit A, B et C trois points.

Est-il possible que l'ensemble $\{A, B, C\}$ ait un centre de symétrie ?

IV – SYMETRIES CENTRALES ET TRANSLATION.

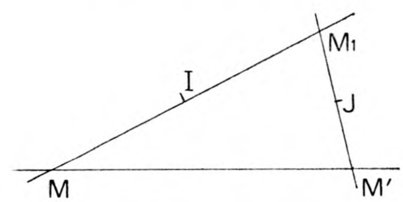
Dans [SR1], nous avons étudié la suite de deux symétries centrales matérielles et nous avons constaté que c'était une translation matérielle.

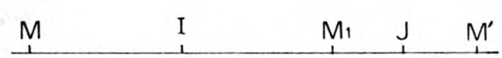
Nous allons démontrer la propriété correspondante dans le plan mathématique.

Soit I et J deux points.

Soit M un point quelconque. Appelons M_1 le symétrique de M par rapport à I et M' le symétrique de M_1 par rapport à J.

Les deux figures ci-contre illustrent cette situation.





Le point I est le milieu de (M, M_1), donc $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM_1}$; le point J est le milieu de (M_1, M'), donc $\overrightarrow{M_1J} = \overrightarrow{JM'}$.

Justifie les égalités suivantes.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J} + \overrightarrow{JM'} \ ;$$
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J} + \overrightarrow{M_1J} \ ;$$
$$\overrightarrow{MM'} = (\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J}) + (\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J}) \ ;$$
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} \, .$$

Tu vois que le point M' est l'image du point M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ}$. Tout point du plan a donc même image par les applications $s_J \circ s_I$ et $t_{\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}}$. Donc $s_J \circ s_I = t_{\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}}$.

Nous avons démontré que la composée de deux symétries centrales est une translation.

Est-ce que $s_J \circ s_I = s_I \circ s_J$?

SR4 Des parallélogrammes qui se plient

I – DROITES DE SYMETRIE D'UN PARALLELOGRAMME.

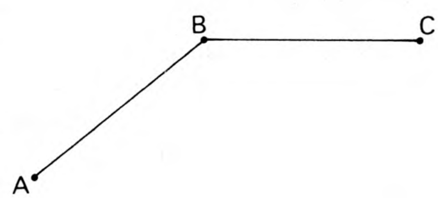
Nous avons démontré dans [SR3] qu'un parallélogramme a un centre de symétrie. Nous allons, ici, faire de nouvelles observations.

Crois-tu qu'il existe des parallélogrammes particuliers, dans un plan matériel, qui aient en plus d'un centre de symétrie, des droites de symétrie ? Fais des essais, dessine, plie, discutes-en avec tes camarades.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de voir les choses d'une autre façon.

II – LOSANGE.

2.1 Sur le dessin ci-contre, on a choisi les points A, B et C de façon que les segments matériels AB et BC aient même longueur.



Fais un dessin analogue.

Dessine le point D *tel que* {A, B, C, D} *soit un parallélogramme de sommets opposés* A *et* C.

On dit que le parallélogramme ABCD est un LOSANGE.

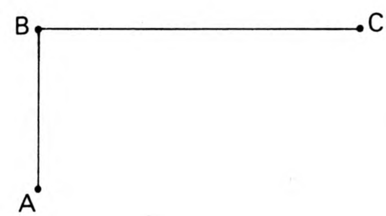
Compare les longueurs des segments matériels AB, BC, CD *et* DA. *Qu'observes-tu à propos des droites* AC *et* BD *?*

2.2 *Dessine deux droites orthogonales* d *et* d′ *; appelle* I *leur point commun. Place sur* d *deux points* A *et* C *tels que* I *soit le milieu du segment* AC. *Place sur* d′ *deux points* B *et* D *tels que* I *soit le milieu du segment* BD.

Vérifie que {A, B, C, D} *est un losange. Penses-tu qu'un losange ait des droites de symétrie ?*

III – RECTANGLE.

3.1 Sur le dessin ci-contre, les droites AB et BC sont orthogonales.



Fais un dessin analogue.

Dessine le point D *tel que* {A, B, C, D} *soit un parallélogramme de sommets opposés* A *et* C.

On dit que le parallélogramme ABCD est un RECTANGLE.

Vois-tu d'autres droites orthogonales ? Penses-tu qu'un rectangle ait des droites de symétrie ? Compare les longueurs des segments matériels AC *et* BD.

3.2 *Dessine quatre points* A, B, C *et* D *de façon que les segments matériels* AC *et* BD *aient même milieu et même longueur.*

Vérifie que {A, B, C, D} *est un rectangle. Appelle* I *le point commun aux droites* AC *et* BD. *Trace le cercle de centre* I *qui passe par* A. *Qu'observes-tu ?*

Dans [DP5], tu avais observé une propriété du triangle rectangle. Rapproche-la de celle que tu viens d'observer ici pour le rectangle.

IV – CARRÉ.

Dessine un parallélogramme qui soit à la fois un losange et un rectangle. Donne deux moyens pour faire un tel dessin.

On dit que ce parallélogramme est un CARRÉ.

Quelles sont les droites de symétrie d'un carré ?

SR 5 Repérage dans un plan matériel

I – COORDONNEES D'UN POINT.

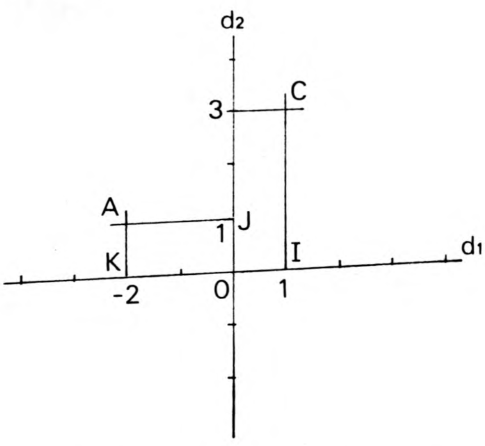
1.1 A un point correspond un couple de nombres.

Examine le dessin ci-contre.

Tu y vois deux droites concourantes d_1 et d_2. Nous avons appelé O leur point commun et placé un point I sur d_1 et un point J sur d_2.

Tu sais qu'il existe une graduation unique de d_1 de repère (O, I) et une graduation unique de d_2 de repère (O, J).

Sur le dessin, nous avons placé le point A.



L'unique droite qui passe par A et qui est parallèle à d_2 coupe d_1 en un point K. Dans la graduation de repère (O, I), l'abscisse de K est –2.

L'unique droite qui passe par A et qui est parallèle à d_1 coupe d_2 en J. Dans la graduation de repère (O, J), l'abscisse de J est 1.

Par ce procédé, nous avons associé au point A le couple (-2 ; 1).
On dit que
(O, I, J) est un REPERE du plan matériel,
(-2 ; 1) est le COUPLE DE COORDONNEES de A dans le repère (O, I, J).

Nous pourrions aussi associer un couple de nombres réels à tout point du plan matériel.

Quel est le couple de coordonnées du point C *?*

Au point O on peut aussi associer un couple de coordonnées.
Que proposes-tu ? Et pour les points I *et* J *?*

Exercice.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 12a, nous avons dessiné un repère (O, I, J).

Donne les couples de coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, K, L *et* M *dans ce repère.*

1.2. A un couple de nombres, correspond un point.

Voici un couple de nombres réels : (3 ; -2).
Sur le dessin numéro 2 *de la feuille de manipulation* 12a
place le point A_1*, de la droite* d_1*, qui a pour abscisse* 3,
place le point A_2*, de la droite* d_2*, qui a pour abscisse* -2,
trace la droite qui passe par A_1 *et qui est parallèle à* d_2,
trace la droite qui passe par A_2 *et qui est parallèle à* d_1

Ces deux droites se coupent en un point. Appelons-le A.

Au couple de réels (3 ; -2), on a ainsi associé un point unique du plan matériel : le point A. Le point A a évidemment pour couple de coordonnées (3 ; -2).

Recommence avec d'autres couples que tu choisiras toi-même. Recommence avec les couples (-2 ; 0) ; (3 ; 0) ; (0 ; -3) ; (0 ; 2) ; (0 ; 4).

Tu vois que lorsqu'on a choisis un repère dans un plan matériel, le procédé ci-dessus permet d'associer à tout couple de nombres réels, un point unique.

Remarque.

Au lieu d'écrire «A a pour couple de coordonnées (3 ; -2)», nous écrirons souvent «A a pour coordonnées 3 et -2» ou encore, plus simplement,

A : (3 ; -2) .

Exercice.

Sur le dessin numéro 1 *de la feuille de manipulation* 12a*, place les points* N, P, Q, R *et* S.

N : (-5,3 ; 2,7) ; P : (-5,3 ; 0) ; Q : (6,7 ; -4,2) ; R : (-3,5 ; -3,5) ; S : (0 ; 4,2) .

1.3 Un point de vocabulaire.

Soit (O, I, J) un repère d'un plan matériel.
Soit M un point. Appelons x_M et y_M ses coordonnées :

$$M : (x_M \,; y_M)\,.$$

Pour distinguer ces deux coordonnées, on dit souvent que
x_M est l'ABSCISSE du point M,
y_M est l'ORDONNEE du point M.

La droite OI est appelée DROITE DES ABSCISSES. Tous les points de cette droite ont pour ordonnée 0 et ce sont les seuls qui ont cette propriété.

La droite OJ est appelée DROITE DES ORDONNEES. Tous les points de cette droite ont pour abscisse 0 et ce sont les seuls qui ont cette propriété.

II – COORDONNEES DU MILIEU D'UN BIPOINT.

2.1 Milieu d'un bipoint.

Sur le dessin numéro 1 de la feuille de manipulation 12b, le point H est le milieu du bipoint (A, B).

Quels sont les couples de coordonnées des points A *et* B *? Quel est le couple de coordonnées du point* H *?*

Calcule $\dfrac{\text{abscisse de A} + \text{abscisse de B}}{2}$ *et* $\dfrac{\text{ordonnée de A} + \text{ordonnée de B}}{2}$.

Que constates-tu ?

Recommence le même travail avec deux points que tu choisiras toi-même. Compare avec tes camarades.

2.2 Problème inverse.

Quels sont les couples de coordonnées des points C *et* D *?*

Calcule $\dfrac{\text{abscisse de C} + \text{abscisse de D}}{2}$ *et* $\dfrac{\text{ordonnée de C} + \text{ordonnée de D}}{2}$.

Place sur ton dessin le point dont le couple de coordonnées est le couple de nombres que tu viens de trouver. Que constates-tu ? Recommence le même travail avec deux points que tu choisiras toi-même. Compare avec tes camarades.

2.3 Concluons.

Appelons (M, N) l'un des bipoints que nous venons d'étudier, x_M et y_M les coordonnées de M, et x_N et y_N les coordonnées de N. Soit I un point de coordonnées x_I et y_I.

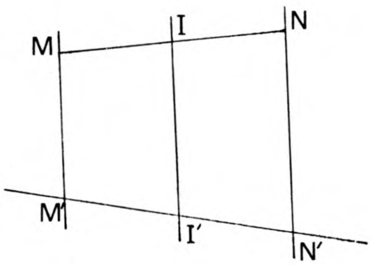
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes
le point I est le milieu du bipoint (M, N) ;

$$x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_M + y_N}{2}\,.$$

Nous admettrons que cette propriété est vraie pour tous les bipoints d'un plan matériel muni d'un repère.

2.4 Pour mieux comprendre.

Voici deux propriétés du plan mathématique qui te permettront de mieux comprendre ce résultat.



Soit (M, N) un bipoint, I son milieu et d une droite. Soit M', N' et I' les points de d tels que les droites MM', NN' et II' soient parallèles.

Nous savons que le point I' est le milieu du bipoint (M', N'). D'autre part, pour la graduation que nous avons décidé d'associer à d,

abscisse de $I' = \dfrac{\text{abscisse de } M' + \text{abscisse de } N'}{2}$.

2.5 Exercice.

Soit (O, U, V) un repère, M le point de coordonnées -2 et 3 et I le point de coordonnées 1 et 1. Soit N le point tel que I soit le milieu du bipoint (M, N).

Fais un dessin.

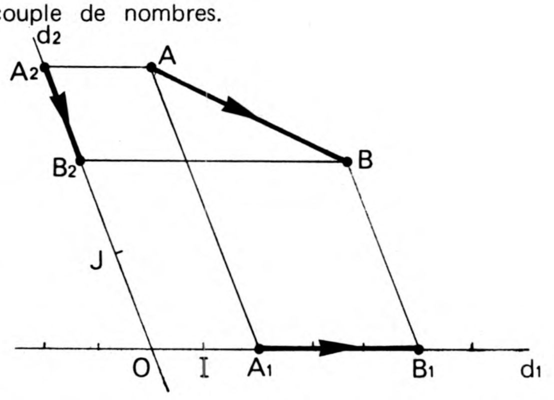
Quelles sont les coordonnées de N *?*

Pour répondre à cette question, tu as peut-être utilisé ton dessin ; voici une autre façon de procéder. Nous ne connaissons pas encore l'abscisse de N. Appelons-la provisoirement x_N. Puisque I doit être le milieu de (M, N) nous pouvons écrire que $1 = \dfrac{-2 + x_N}{2}$.

Résous cette équation en x_N. ***Cela correspond-il à ce que tu avais trouvé ? Fais le même travail pour l'ordonnée du point*** **N.**

III – COORDONNEES D'UN BIPOINT.

3.1 A un bipoint, on peut associer un couple de nombres.



Regarde bien le dessin ci-contre.

Au bipoint (A, B), nous avons associé

le bipoint (A_1, B_1) de la droite d_1,

le bipoint (A_2, B_2) de la droite d_2.

Mais

$\overline{A_1B_1} = 5 - 2 = 3$ et $\overline{A_2B_2} = 2 - 3 = -1$.

Donc, au bipoint (A, B), nous avons associé le couple (3 ; -1). On dit que (3 ; -1) est le couple de coordonnées du bipoint (A, B) dans le repère (O, I, J).

D'une manière générale, soit M et N deux points ; soit x_M et y_M les coordonnées de M, et x_N et y_N les coordonnées de N. Le COUPLE

§ DE COORDONNEES DU BIPOINT (M, N) est le couple $(x_N - x_M, y_N - y_M)$.

3.2 Exercices.

Prends le dessin numéro 2 *de la feuille de manipulation* 12b. *On a dessiné un repère* (O, I, J).

Trouve les couples de coordonnées des bipoints (A, B), (A, C), (C, A), (B, C), (D, C), (I, J), (A, A), (O, B), (O, C), (D, A), (A, D), (D, D).

Tu contrôleras tous les résultats sur la figure.

Compare les coordonnées de (O, B) *et de* B. *Même question pour* (O, C) *et* C. *Penses-tu que ce résultat soit général ?*

Soit E un point tel que le couple de coordonnées du bipoint (A, E) soit (2 ; 1).

Quel est le couple de coordonnées du point E *?*

Tu as peut-être répondu à cette question en utilisant ton dessin ; voici une autre façon de procéder. Nous ne connaissons pas encore l'abscisse de E. Appelons-la provisoirement x_E. Puisque la première coordonnée du bipoint (A, E) est 2, nous pouvons écrire que $x_E - (-1) = 2$.

Résous cette équation en x_E. *Cela correspond-il à ce que tu avais trouvé ? Fais le même travail pour l'ordonnée de* E.

Soit F le point tel que le couple de coordonnées du bipoint (F, B) soit (–2 ; 4).

Quel est le couple de coordonnées de F *?*

IV — EXERCICES.

4.1 Soit (O, I, J) un repère et A, B, C et D les points ainsi définis :

A : (–1 ; 3) ; B : (2 ; 5) ; C : (1 ; –4) ; D : (4 ; –2) .

Fais un dessin.

Calcule les coordonnées du milieu du bipoint (A, D) *et les coordonnées du milieu du bipoint* (B, C). *Que remarques-tu ?*

Comme {A, B, C, D} est un parallélogramme de sommets opposés A et D, on dit, comme dans la théorie mathématique, que les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents.

Quels sont les couples de coordonnées des bipoints (A, B) *et* (C, D) *? Que constates-tu ?*

4.2 Soit (O, I, J) un repère et A, B et C les points ainsi définis :

A : (2 ; 1) ; B : (4 ; –1) ; C : (2 ; –1) .

Calcule les coordonnées du milieu S *de* (B, C). *Quelles sont les coordonnées du point* D *symétrique de* A *par rapport à* S *? Pourquoi* (A, C) *et* (B, D) *sont-ils équipollents ? Quels sont les couples de coordonnées des bipoints* (A, C) *et* (B, D) *? Qu'observes-tu ?*

4.3 *Sur une feuille de papier quadrillé, dessine un repère* (O, I, J). *Dessine plusieurs bipoints qui aient pour couple de coordonnées* (3 ; 5). *Qu'observes-tu ?*

faisons le point

Dans ce chapitre, nous avons

étudié de nouvelles propriétés de notre théorie ; certaines ont été admises (elles correspondaient à des observations dans un plan matériel) ; d'autres ont été démontrées ;

fait encore des observations, que nous n'avons pas traduites pour le moment par des propriétés de la théorie.

I – LES PROPRIETES DE LA THEORIE.

1.1 Axiome des droites.

Pour chaque droite d du plan, il existe des bijections de d sur IR.

Soit d une droite et f une des bijections de d sur IR. Soit A et B deux points de d. Nous avons appelé milieu de (A, B) pour la graduation f le point I défini par l'égalité

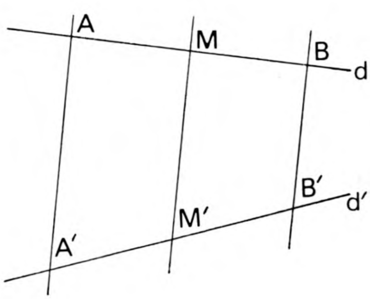
$$f(I) = \frac{f(A) + f(B)}{2}.$$

Il revient au même de dire que $\overline{AI} = \overline{IB}$.

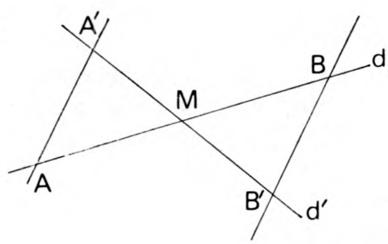
1.2 Axiome du milieu.

On peut munir chaque droite du plan d'une bijection pour laquelle l'axiome du milieu est vrai ; cette bijection est appelée la graduation de la droite.

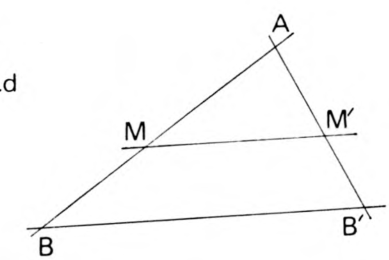
Nous avons donné plusieurs énoncés de cet axiome ; les situations décrites par ces énoncés peuvent être illustrées par les figures suivantes.



Le point M est le milieu de (A, B).
Si les droites MM', AA' et BB' sont parallèles, alors M' est le milieu de (A'B').



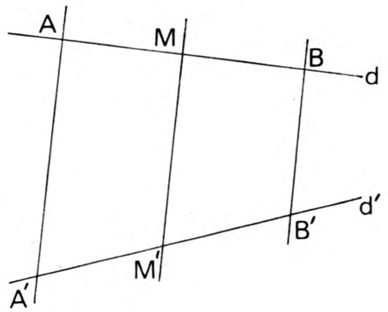
Si M est le milieu de (A, B), alors M est le milieu de (A', B').

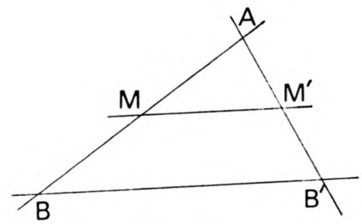


Le point M est le milieu de (A, B).
Si la droite MM' est parallèle à la droite BB', alors M' est le milieu de (A, B').

1.3 Réciproque de l'axiome du milieu.

Dans les situations illustrées par les figures suivantes, nous pouvons énoncer ce qui suit.



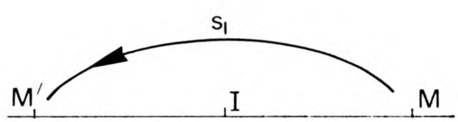


Le point M est le milieu de (A, B) ; les droites AA' et BB' sont parallèles.
Si M' est le milieu de (A', B') alors les droites MM' et AA' sont parallèles.

Le point M est le milieu de (A, B).
Si M' est le milieu de (A, B') alors la droite MM' est parallèle à la droite BB'.

1.4 Symétrie centrale.

Soit I un point du plan ; la symétrie centrale de centre I est l'application qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que I soit le milieu de (M, M').



Soit I un point du plan et s_I la symétrie de centre I :

s_I est une bijection du plan sur lui-même et $s_I^{-1} = s_I$;

le seul point confondu avec son image est I ;

l'image d'une droite d par s_I est une droite parallèle à d ; elle est confondue avec d si I est sur d.

1.5 Milieu et vecteurs.

Soit A, B et I trois points. Le point I est le milieu de (A, B) si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

1.6 Centre de symétrie.

Soit F un ensemble de points (c'est-à-dire une figure), et I un point. Si l'ensemble des images des points de F par la symétrie de centre I est la figure F elle-même, on dit que F admet I comme centre de symétrie.

Ainsi, si $\{A, B, C, D\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et C, le milieu commun des bipoints (A, C) et (B, D) est un centre de symétrie pour ce parallélogramme.

1.7 Symétrie centrale et translation.

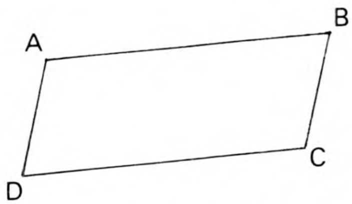
Soit I et J deux points du plan. Nous avons montré que la composée des symétries de centres I et J est la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ}$.

$$s_J \circ s_I = t_{\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}}\,.$$

1.8 Parallélogramme.

On peut regrouper les propriétés du parallélogramme étudiées dans [TR] et [SR], et énoncer les propriétés suivantes.

Soit A, B, C et D quatre points tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés.



Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

$t_{(A,\,B)} = t_{(D,\,C)}$;

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

les bipoints (A, B) et (D, C) sont équipollents ;

les bipoints (A, C) et (B, D) ont le même milieu ;

les droites AB et DC sont parallèles, ainsi que les droites AD et BC.

Soit A, B, C et D quatre points alignés.

Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

$t_{(A,\,B)} = t_{(D,\,C)}$;

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

les bipoints (A, B) et (D, C) sont équipollents ;

les bipoints (A, C) et (B, D) ont le même milieu ;

$\overline{AB} = \overline{DC}$.

II – LES OBSERVATIONS.

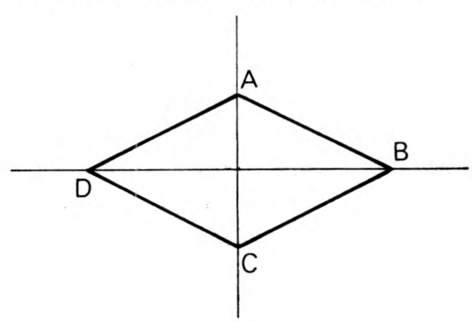
2.1 Symétrie centrale et translation.

Nous avons étudié une translation matérielle et nous l'avons décomposée en une suite de deux symétries centrales.

2.2 Parallélogrammes particuliers.

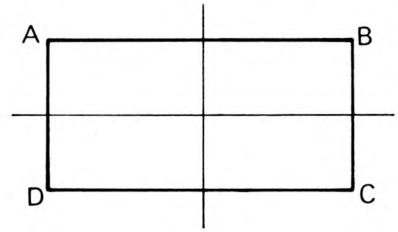
Un parallélogramme {A, B, C, D} est un losange si les quatre segments AB, BC, CD et DA ont la même longueur.

Un losange a deux droites de symétrie (il n'en a pas plus de deux s'il n'est pas un carré).



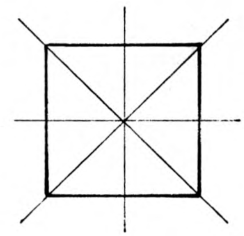
Un parallélogramme $\{A, B, C, D\}$ est un rectangle si les droites AB et AD sont perpendiculaires.

Un rectangle a deux droites de symétrie (il n'en a pas plus de deux s'il n'est pas un carré).



Un carré est à la fois un losange et un rectangle.

Un carré a quatre droites de symétrie.



2.3 Repérage.

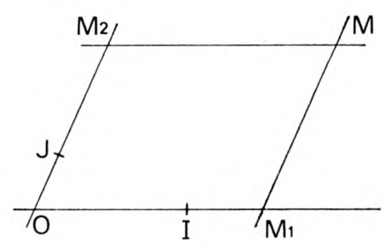
Lorsqu'on dit «soit (O, I, J) un repère», on veut dire que
les droites OI et OJ sont sécantes en O,
ces droites sont graduées par $\mathbb{R}$,
le bipoint (O, I) est le repère de la droite OI,
le bipoint (O, J) est le repère de la droite OJ.

Soit (O, I, J) un repère d'un plan matériel :

à tout point M du plan, correspond un couple unique de nombres réels (x_M, y_M),

à tout couple (x_M, y_M) de nombres réels, corespond un point M unique du plan.

Les nombres x_M et y_M sont les coordonnées du point M, x_M est l'abscisse de M et y_M et l'ordonnée de M.



$x_M = \overline{OM}_1$
$y_M = \overline{OM}_2$

Soit (O, I, J) un repère. Soit A le point de coordonnées x_A et y_A et B le point de coordonnées x_B et y_B : le couple $(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A)$ est le couple de coordonnées du bipoint (A, B).

Soit M le point de coordonnées x_M et y_M. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

le point M est le milieu du bipoint (A, B) ;

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

un peu d'histoire

DESCARTES.

René Descartes est un philosophe, mathématicien et physicien français. Il est né en Touraine en 1596, et a beaucoup voyagé en Europe ; il a vécu 20 ans en Hollande, et il est mort en Suède en 1650.

Pour t'aider à le situer, voici quelques repères.

Descartes a 14 ans à la mort de Henri IV ; quand il meurt, Louis XIV a 12 ans et règne depuis 7 ans, avec Mazarin pour premier ministre. Descartes a donc vécu essentiellement sous le règne de Louis XIII ; il est de quelques années l'ainé de d'Artagnan, le quatrième mousquetaire.

L'œuvre de Descartes se situe donc tout au début de ce qu'on appelé le grand siècle : à sa mort Corneille a 44 ans, Molière a 28 ans, et le musicien Marc Antoine Charpentier probablement une quinzaine d'années ; tu sais que c'est Charpentier qui a composé le Te Deum dont le début sert d'indicatif à l'Eurovision. Descartes a été le contemporain de Poussin et de De La Tour, deux peintres dont tu as peut-être vu des œuvres reproduites.

Descartes s'est intéressé à tous les problèmes physiques qui se posaient à son époque. Il a travaillé à un ouvrage, *le traité du monde et de la lumière,* dans lequel il a donné une place importante aux problèmes de la lumière. Dans son livre, il expliquait que la terre tourne autour du soleil ; il ne publia pas son traité parce que, en 1633, Galilée avait été condamné par l'église catholique pour avoir défendu cette idée.

Descartes a été l'un des principaux savants qui ont mis au point les principes de l'optique géométrique, utilisée pour la mise au point et l'étude des appareils d'optique : miroirs, jumelles, télescopes, microscopes, etc...

Avec Fermat, qui était son contemporain, il a créé la géométrie analytique, que tu as commencé d'étudier dans [SR5, *repèrage*]. C'est pourquoi on parle parfois de repère cartésien, et de coordonnées cartésiennes.

Dans son ouvrage *le discours de la méthode* Descartes nous propose trois éléments pour construire la science :

- ne retenir que quelques principes simples et peu nombreux mais évidents (en mathématique, nous dirions des axiomes) ;
- progresser par raisonnement mathématique ;
- expérimenter, pour choisir entre les différentes explications possibles d'un même phénomène.

Ces idées, apparues à cette époque, sont une des bases du développement de la science moderne. Descartes a permis une clarification de ces idées.

exercices et problèmes

1. Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 4b, nous avons tracé deux droites sécantes d_1 et d_2 et trois points A, M et N. Nous avons appelé O le point d'intersection des droites d_1 et d_2.

1. *Dessine les transformés des points* A, M *et* N *par le pliage autour de la droite* d_1. *Appelle-les* A', M' *et* N'.
Dessine les transformés des points A', M' *et* N' *par le pliage autour de la droite* d_2. *Appelle-les* A'', M'' *et* N''.
Choisis un point R, *et dessine le transformé de* R *dans le pliage autour de* d_1. *Appelle-le* R' *; puis dessine le transformé de* R' *dans le pliage autour de* d_2. *Appelle-le* R''.

2.. *Prends le calque cible que tu as fait à l'aide de la feuille de manipulation* 11b *et vérifie que*
la droite d_2 *est la transformée de la droite* d_1 *par la rotation déterminée par le point* O *et le couple de rayons* (0 ; 75) *;*
les points A'', M'', N'' *et* R'' *sont les transformés de* A, M, N *et* R *par la rotation déterminée par le point* O *et le couple de rayons* (0 ; 150).

3. *Penses-tu qu'on aurait trouvé le même résultat si on avait cherché les transformés des points* A, M, N *et* R *par le pliage autour de* d_2 *suivi du pliage autour de* d_1 *?*

2. 1. *Prends le dessin le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation* 6b.
On a dessiné deux droites orthogonales d_1 et d_2. On a appelé O leur point d'intersection.
Dessine la transformée de la figure numérotée 1 *par le pliage autour de la droite* d_1. *Appelle figure* 2 *la figure obtenue. Dessine la transformée de la figure* 2 *par le pliage autour de la droite* d_2. *Appelle figure* 3 *la figure obtenue.*
Dessine la transformée de la figure 1 *par la symétrie centrale matérielle de centre* O.
Qu'observes-tu ?

2. *Penses-tu que tu aurais trouvé le même résultat si tu avais cherché la transformée de la figure* 1 *par le pliage autour de* d_2 *suivi du pliage autour de* d_1 *?*

3. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. La parallèle à la droite AB qui passe par C et la parallèle à la droite AC qui passe par B se coupent en E. La parallèle à la droite BC qui passe par A coupe
la droite EC en F,
la droite EB en G.
Fais un dessin qui illustre cette situation.

1. ***Démontre que*** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$ ***et que*** $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BC}$.

2. ***Démontre que*** A ***est le milieu de*** (G, F).

3. ***Démontre que*** B ***est le milieu de*** (G, E) ***et que*** C ***est le milieu de*** (E, F).

4. *Trace la droite qui passe par* A *et qui est orthogonale à la droite* BC *; trace la droite qui passe par* B *et qui est orthogonale à la droite* AC *; trace la droite qui passe par* C *et qui est orthogonale à la droite* AB. *Qu'observes-tu ? Peux-tu l'expliquer ?*

4. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Soit C' le milieu de (A, B). La parallèle à la droite BC qui passe par C' coupe la droite AC en B'. La parallèle à la droite AB qui passe par B' coupe la droite AB en A'.

Démontre que la parallèle à la droite AC *qui passe par* A' *passe par* C'.

5. 1. Soit deux droites sécantes d et d'.

L'ensemble $d \cup d'$ *admet-il un centre de symétrie ? Plusieurs centres de symétrie ?*

2. Soit deux droites parallèles d et d'.

L'ensemble $d \cup d'$ *admet-il un centre de symétrie ? Plusieurs centres de symétrie ?*

6. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Soit A' le milieu de (B, C), B' le milieu de (A, C) et C' le milieu de (A, B).

Quels sont les sous-ensembles de $\{A, B, C, A', B', C'\}$ *qui sont des parallélogrammes ?*

7. Soit A, B, C et D quatre points. Soit E et F les points ainsi définis : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$.

1. *Démontre que les bipoints* (A, D), (B, E) *et* (C, F) *ont le même milieu. Démontre que* $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$.

2. *Démontre que l'ensemble* $\{A, B, C, D, E, F\}$ *a un centre de symétrie.*

8. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle, A' le milieu de (B, C), B' le milieu de (A, C) et C' le milieu de (A, B). Appelons J le point commun aux droites $B'C'$ et AA'.

1. *Démontre que* $\{A, A', B', C'\}$ *est un parallélogramme de sommets opposés* A *et* A'.

2. *Démontre que* J *est le milieu de* (C', B').

9. Soit $\{A, B, C, D\}$ un parallélogramme de sommets opposés A et C ; soit J son centre de symétrie. Soit M un point de la droite BC et N le point d'intersection des droites MJ et AD.

1. *Démontre que la droite* AD *est l'image de la droite* BC *dans la symétrie de centre* J. *Déduis-en que* J *est le milieu de* (M, N).

2. *Démontre que* $\{A, M, C, N\}$ *et* $\{B, M, D, N\}$ *sont des parallélogrammes.*

10. Soit $\{A, B, C, D\}$ un parallélogramme de sommets opposés A et C. Soit M le milieu de (A, B), N le milieu de (B, C), P le milieu de (C, D) et Q le milieu de (A, D). Soit K le centre de symétrie du parallélogramme $\{A, B, C, D\}$.

1. *Démontre que la droite* QN *est parallèle à la droite* AB.
   Démontre que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AQ}$.
   Déduis-en que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{QD}$ *et que* K *est le milieu de* (N, Q).

2. *Démontre que* $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DP}$ *et que* K *est le milieu de* (M, P).

3. *Démontre que* $\{M, N, P, Q\}$ *est un parallélogramme.*

11. Soit A, B, C et D quatre points alignés tels que (A, D) et (B, C) ont le même milieu K. Soit E un point qui n'appartient pas à la droite AB, et soit F le point ainsi défini : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

1. *Démontre que les bipoints* (A, F) *et* (B, E) *ont le même milieu. Appelle* I *ce point.*

2. *Démontre que la droite* IK *est parallèle à la droite* EC.

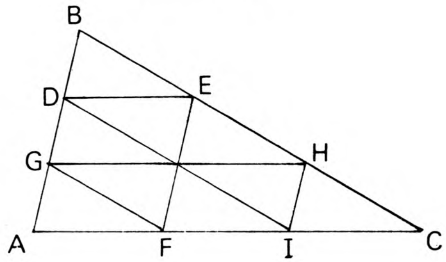
3. *Démontre que la droite* IK *est parallèle à la droite* FD.

4. *Déduis-en que* $\{E, C, D, F\}$ *est un parallélogramme de sommets opposés* C *et* F. *Démontre que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Tu as démontré que si A, B, C et D sont quatre points alignés tels que (A, D) et (B, C) ont le même milieu, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Remarque que nous avons admis cette propriété dans le cours.

12. Soit ABC un triangle. Soit D et G les points de la droite AB tel que $\overline{BD} = \overline{DG} = \overline{GA}$.
Les parallèles à la droite AC qui passent par D et G coupent la droite BC en E et H ; les parallèles à la droite AB qui passent par E et H coupent la droite AC en F et I.

1. Voici un dessin qui illustre cette situation.
Qu'observes-tu pour les droites GF, DI *et* BC ? *Et pour les droites* EF, GH *et* DI ?



2. Tu vas démontrer que les droites GF, DI et BC sont parallèles.

a) *Démontre que* E *est le milieu de* (B, H) *et que* H *est le milieu de* (E, C).

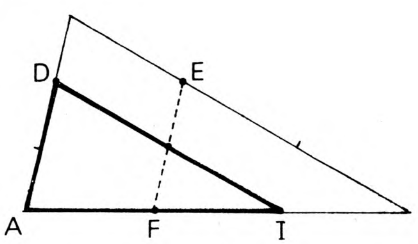
b) *Démontre que* I *est le milieu de* (F, C) *et que* F *est le milieu de* (A, I).

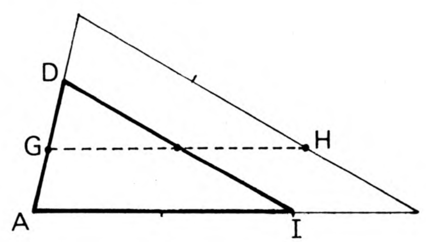
c) *Démontre que les droites* GF *et* DI *sont parallèles.*
Démontre que les droites DI *et* BC *sont parallèles.*

3. Tu vas démontrer que les droites EF, GH et DI sont concourantes.

a) *Montre que la droite* EF *passe par le milieu de* (D, I).

b) *Montre que la droite* GH *passe par le milieu de* (D, I).





b) *Déduis-en que les droites* EF, GH *et* DI *sont concourantes.*

4. Appelons K le milieu de (D, I).
Les points A, B, C, D, E, F, G, H, I et K permettent de définir des bipoints.

a) *Nomme parmi ces bipoints ceux qui sont équipollents à* (B, D).

b) *Nomme ceux qui sont équipollents à* (D, E).

c) *Nomme ceux qui sont équipollents à* (B, K).

13. Soit d une droite. Soit f sa graduation. Soit A, B, C et D les points de d ainsi définis :

$$f(A) = 2 \quad ; \quad f(B) = 5 \quad ; \quad f(C) = 1{,}8 \quad ; \quad f(D) = -1{,}2 .$$

1. *Démontre que* $\{A, B, C, D\}$ *est un parallélogramme.*

2. Soit E le milieu de (A, B), F le milieu de (B, C), G le milieu de (C, D) et H le milieu de (D, A).
Démontre que $\{E, F, G, H\}$ *est un parallélogramme.*

14. Soit $\{A, B, C, D\}$ un parallélogramme de sommets opposés A et C. Soit M un point du plan. Soit N, Q, R et S les points ainsi définis : $N = s_A(M)$; $Q = s_B(N)$; $R = s_C(Q)$; $S = s_D(R)$.

1. *Fais une figure qui illustre cette situation. Qu'observes-tu ?*

2. *Justifie les égalités suivantes.*

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}.$$
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NB}.$$
$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.$$

Démontre que $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$.

3. *Démontre que* $\overrightarrow{MS} = \theta$.

15. Soit d une droite ; soit f sa graduation. Soit A, B et C les points de d ainsi définis :

$$f(A) = 1{,}5 \quad ; \quad f(B) = -3 \quad ; \quad f(C) = 1.$$

1. Soit D le point de la droite d tel que $\{A, B, C, D\}$ soit un parallélogramme de sommets opposés A et C.

Quelle est l'abscisse du point D *?*

2. Soit E le point de la droite d tel que $\{A, B, C, E\}$ soit un parallélogramme de sommets opposés A et E.

Quelle est l'abscisse du point E *?*

16. Soit p et q deux droites parallèles. Soit A et B deux points de p, et C et D deux points de q.
On désigne par E le milieu de (A, C), par F le milieu de (B, D), par G le milieu de (B, C) et par H le milieu de (A, D).

Montre que les droites EF, EG *et* FH *sont parallèles.*
Qu'en déduis-tu pour les points E, F, G *et* H *?*

17. Soit d et d' deux droites sécantes. Soit M un point qui n'appartient ni à d ni à d'.
Nous allons chercher deux points A et A' tels que
A est un point de d,
A' est un point de d',
M est le milieu de (A, A').

C'est un problème difficile. Nous allons t'aider à le résoudre.

Le point A doit appartenir à la droite d, donc le point A' doit appartenir à une droite parallèle à d.

Quelle est cette droite ?

Appelons-la d_1. Les droites d' et d_1 sont sécantes.

Pourquoi ?

Nous venons de montrer que si A' existe, il ne peut être que le point d'intersection de d' et d_1. Appelons donc A' ce point d'intersection.

Où se trouve le symétrique de A' *par rapport à* M *?*

Avons-nous répondu à la question ?

18. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle, A' le milieu de (B, C) et B' le milieu de (A, C). Soit M un point.
On appelle P le symétrique de M par rapport à A',
Q le symétrique de M par rapport à B'.

1. *Montre que les droites* PQ *et* AB *sont parallèles.*

2. Un exercice que nous avons fait dans [SR3] nous permet d'affirmer que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'A'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'A'}.$$

Déduis-en que $\{A, B, P, Q\}$ *est un parallélogramme de sommets opposés* A *et* P.

3. On appelle R le symétrique de M par rapport au milieu C' de (A, B).

Trouve par analogie deux autres parallélogrammes. Déduis-en que (A, P), (B, Q) *et* (C, R) *ont même milieu. Appelle* I *ce milieu commun.*

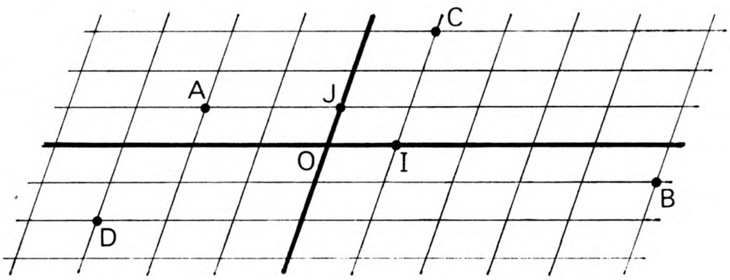
4. *Dans la symétrie centrale de centre* I, *quel est le transformé du triangle* ABC ?

19. Nous avons dessiné un repère (O, I, J) d'un plan matériel et quatre points A, B, C et D.

1. *Donne les couples de coordonnées des points* A, B, C *et* D.

2. *Donne les couples de coordonnées des bipoints* (O, A), (O, B), (O, C) *et* (O, D).

3. *Donne les couples de coordonnées des bipoints* (J, A), (C, D) *et* (D, B).



20. Soit (O, I, J) un repère d'un plan matériel, et soit A le point de coordonnées (–2 ; 3). Soit B, C et D les points tels que

le couple (A, B) a pour coordonnées (2 ; 0),
le couple (A, C) a pour coordonnées (4 ; 2),
le couple (A, D) a pour coordonnées (2 ; 2).

1. *Fais un dessin.*

2. *Détermine les coordonnées des points* B, C *et* D.

3. *Détermine les coordonnées du milieu de* (A, C) *et celles du milieu de* (B, D). *Que constates-tu ?*

4. *Détermine les coordonnées de* (A, B) *et celles de* (D, C). *Que constates-tu ?*

21. Soit (O, I, J) un repère d'un plan matériel. Soit A le point de coordonnées (0 ; 1,5), B le point de coordonnées (3 ; 0) et C le point de coordonnées (–1 ; 1).

1. *Fais un dessin.*

2. *Place sur ton dessin les transformés des points* A, B *et* C *par la translation matérielle déterminée par le couple* (O, I).

Compare le couple de coordonnées de chacun des points A, B *et* C *avec celui de son transformé.*

3. Soit D le point de coordonnées (–3 ; 2).

Place sur ton dessin le point D' *de coordonnées* (–2 ; 2). *Vérifie que* D' *est le transformé de* D *par la translation matérielle déterminée par le couple* (O, I).

22. Soit (O, I, J) un repère d'un plan matériel. Soit les points A, B et C ainsi définis :

A : (2 ; 3) , B : (–5 ; 1) , C : (–2 ; –1) .

1. Soit X le milieu de (A, B) ; soit Y le milieu de (B, C) et Z le milieu de (A, C).
Calcule les coordonnées des points X, Y *et* Z.

2. *Calcule les coordonnées du milieu de* (X, C) *et les coordonnées du milieu de* (Y, Z). *Que constates-tu ? Que peux-tu dire de l'ensemble* $\{X, Y, Z, C\}$ *?*

23. Soit (O, I, J) un repère du plan matériel. Soit A, B, C et D les points ainsi définis :

A : (2 ; 1) , B : (–1 ; 2) , C : (1 ; 4) , D : (4 ; 3) .

1. *Calcule les coordonnées du milieu de* (A, C) *et celles du milieu de* (B, D). *Que peux-tu dire de l'ensemble* $\{A, B, C, D\}$ *?*

2. Soit M le milieu de (A, B), N le milieu de (B, C), P le milieu de (C, D) et Q le milieu de (D, A).
Calcule les coordonnées de M, N, P *et* Q.

3. *Calcule les coordonnées des bipoints* (M, N) *et* (Q, P). *Que constates-tu ? Que peux tu dire de l'ensemble* $\{M, N, P, Q\}$ *?*

24. Soit (O, I, J) un repère d'un plan matériel. Soit les points A, B, C et D ainsi définis :

A : (2 ; 1) , B : (4 ; 1) , C : (5 ; 2) , D : (3 ; 3) .

1. *Calcule les couples de coordonnées des bipoints* (A, B), (B, C) *et* (C, D).

2. Soit E le point tel que le bipoint (E, D) et le bipoint (A, B) sont équipollents.
Calcule le couple de coordonnnées de E.

Soit F le point tel que le bipoint (A, F) et le bipoint (C, D) sont équipollents.
Calcule le couple de coordonnées de F.

3. *Calcule les coordonnées des bipoints* (C, B) *et* (E, F). *Que constates-tu ?*

4. *Calcule les coordonnées du milieu de* (A, D), *du milieu de* (B, E) *et du milieu de* (C, F). *Que constates-tu ?*

25. ***Recopie et complète le tableau suivant de sorte que*** $x + y = 20$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	19																		

Dessine un repère (O, I, J). *Place le point de couple de coordonnées* (1 ; 19) *; place de même les points qui correspondent aux autres couples ainsi obtenus. Qu'observes-tu ?*

26. *Recopie et complète le tableau suivant de sorte que* $xy = 36$.

x	1	2	3	4	6	9	12	18	36
y	36								

Dessine un repère (O, I, J). *Place le point de couple de coordonnées* (1 ; 36) *; place de même les points qui correspondent aux autres couples ainsi obtenus.*

27. Soit (O, I, J) un repère d'un plan matériel. Soit A et B les points ainsi définis :

A : (–2 ; 1) et B : (2 ; 3) .

1. Soit A' le point symétrique de O par rapport à A ; soit B' le point symétrique de O par rapport à B.

Calcule les coordonnées de A' et les coordonnées de B'.

2. *Calcule les coordonnées du bipoint* (A, B) *et du bipoint* (A', B'). *Qu'observes-tu ?*

28. **Apprenons à faire un problème.**

ENONCE DU PROBLEME.

Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Soit D le symétrique de A par rapport à B.
La parallèle à la droite BC qui passe par D coupe la droite AC en E.
La parallèle à la droite AB qui passe par E coupe la droite BC en F.
La parallèle à la droite AC qui passe par F coupe la droite AB en G.

Démontre que G est le symétrique de B par rapport à A.

ETUDE DU PROBLEME.

Essayons de comprendre l'énoncé et d'organiser nos données.

Dessine un triangle $\{A, B, C\}$.

Le point D est le symétrique de A par rapport à B, donc B doit être le milieu du bipoint (A, D).

Place le point D *sur ta figure.*

Nous savons que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$.

Trace maintenant les droites décrites par l'énoncé.

Tu dois voir apparaître deux parallélogrammes. *Lesquels ?*

A ton avis, est-ce que les données du problème permettent de démontrer qu'il s'agit bien de parallélogrammes ?

Tu sais que lorsqu'on a des parallélogrammes, on a envie d'écrire des égalités de vecteurs.

On veut nous faire démontrer que G est le symétrique de B par rapport à A ; cela signifie qu'on veut nous faire démontrer que A est le milieu du bipoint (B, G).

On peut essayer de montrer que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AG}$.

Mais $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF}$; *pourquoi ?* Et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DB}$; *pourquoi ?*

On doit avoir tout ce qu'il faut pour finir. *Fais-le.*

Nous allons maintenant REDIGER cette démonstration comme on le ferait «au propre» sur une copie. Pour cela, nous allons faire une phrase pour chacune des propriétés du cours qu'on a utilisées.

REDACTION.

Le point B est le milieu de (D, A), donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DB}$.

Les droites DB et EF sont parallèles ainsi que les droites BF et DE, donc $\{D, B, F, E\}$ est un parallélogramme de sommets opposés B et E, et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EF}$.

Les droites EF et AG sont parallèles ainsi que les droites AE et GF, donc $\{A, G, F, E\}$ est un parallélogramme de sommets opposés A et F, et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF}$.

Puisque $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$, nous pouvons écrire que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AG}$.

Puisque $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AG}$, le point A est le milieu de (B, G) ; autrement dit le point G est le symétrique de B par rapport à A.

Remarque : pour traiter ce problème, nous t'avons proposé une démarche. Il y a d'autres façons de le démontrer, par exemple en utilisant l'axiome du milieu. Tu peux essayer de le faire.

INDEX

I — MOTS.

SYMBOLES

II – SYMBOLES