Chapitre C* : OPERATIONS ET ORDRE

Document C* 1

PUISSANCES DE DIX

I – INTRODUCTION.

Si 1,52 est la mesure d'une longueur en mètres, tu sais que la mesure de ce même segment en centimètres est 152.

Tu as obtenu ce second nombre en multipliant le premier par 100.

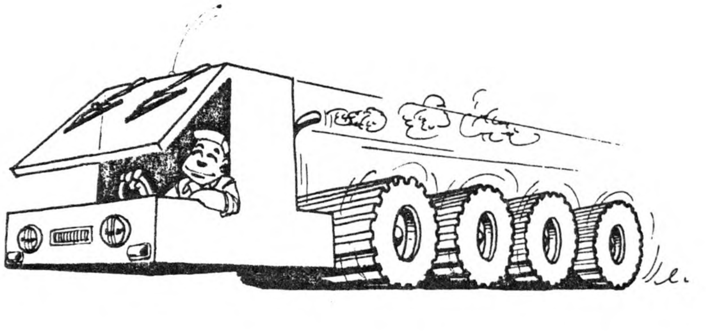
Si 123,2 est la mesure d'une longueur en mm, quelle est la mesure de ce même segment en km ?

14,125 est la mesure d'une surface en m^2.

Quelle est la mesure de cette surface en cm^2 ?

Comment as-tu obtenu ce nombre à partir du premier ?

Les puissances de dix ont donc un rôle important à jouer dans l'étude des nombres décimaux.



II – LES PUISSANCES DE DIX A EXPOSANT ENTIER.

2.1 Exercice.

Donne une autre écriture de

10^2, 10^3, 10^4, 10^6.

Remarque.

Si n est un entier naturel non nul, 10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros.

Si a est un entier relatif non nul,

$$a^0 = 1.$$

Donc
$$10^0 = 1.$$

2.2 Exercice.

Ecris sous forme d'une seule puissance de dix les nombres suivants :

$10^4 \times 10^5$; $10^2 \times 10^6$; $10^3 \times 10^0 \times 10^2$; $10^2 \times 10^3 \times 10^2$.

Tu sais que si n et p sont des entiers naturels,

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}.$$

2.3 Exercice.

Tu sais que

$10^4 = 10\,000$,
$10^3 = 1\,000$, et
$10^2 = 100$.

Chaque nombre est le dixième du précédent : 10 est le dixième de 100 ; tu sais qu'on peut l'écrire 10^1. Et 1 est le dixième de 10 ; il était donc raisonnable de l'écrire 10^0.

Puisque 0,1 est le dixième de 1, il est raisonnable de l'écrire 10^{-1}.

Comment proposes-tu d'écrire 0,01 ; 0,001 ; 0,000 001 ?

Voici un tableau qui résume ces écritures :

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
10 000	1 000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Exercice.

Calcule :

10×10^{-1} ; $10^2 \times 10^{-2}$; $10^5 \times 10^{-5}$.

Remarque :

Si n est un entier naturel non nul,

$$10^n \times 10^{-n} = 1.$$

Si n est un entier naturel non nul, 10^{-n} s'écrit avec 1 précédé de n zéros (n'oublie pas qu'il y a une virgule immédiatement après le premier zéro).

Exemple : $10^{-5} = 0{,}000\,01$.

2.4 Au paragraphe 2.2, on a vu une propriété des puissances de dix à exposants positifs.

Nous allons voir si nous avons cette propriété avec les puissances de dix à exposant relatif.

Etudions par exemple $10^{-5} \times 10^2$:

$$10^{-5} = 0{,}000\,01 \quad \text{et} \quad 10^2 = 100.$$

Donc

$$10^{-5} \times 10^2 = 0{,}000\,01 \times 100\,,$$
$$10^{-5} \times 10^2 = 0{,}001\,,$$
$$10^{-5} \times 10^2 = 10^{-3}.$$

Remarque bien que $-5 + 2 = -3$.

Calcule de même $10^{-2} \times 10^{-4}$, $10^6 \times 10^{-3}$.

On pourrait montrer de façon générale que si n et p sont des entiers relatif,

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p}.$$

Nous admettrons cette propriété.

2.5 Exercice.

Calcule :

$10^{-4} \times 10^{7}$; $10^{-7} \times 10^{-5} \times 10^{2}$.

III – GROUPE DES PUISSANCES DE DIX A EXPOSANT DANS $\mathbb{Z}$.

Appelons E_{10} l'ensemble des puissances de 10 à exposant dans $\mathbb{Z}$.

Ecris quelques éléments de E_{10} ; est-ce que 10^{-7} est un élément de $\mathbb{Z}$? Et -10^{7} ? Et 10^{7} ?

3.1 Loi interne.

On a vu dans le paragraphe I que si n et p sont des entiers relatifs,

$$10^{n} \times 10^{p} = 10^{n+p}.$$

Donc le produit de deux éléments de E_{10} est un élément de E_{10}.

On dit que la multiplication est une loi interne dans E_{10}.

3.2 Commutativité.

Soit n et p des éléments de $\mathbb{Z}$:

$10^{n} \times 10^{p} = 10^{n+p}$ et $10^{p} \times 10^{n} = 10^{p+n}$.

Tu sais que si n et p sont des entiers relatifs,

$$n + p = p + n.$$

Donc $10^{n} \times 10^{p} = 10^{p} \times 10^{n}$.

L'opération multiplication dans E_{10} est commutative.

3.3 Associativité.

Soit, n, p et q des éléments de $\mathbb{Z}$.

$(10^{n} \times 10^{p}) \times 10^{q} = 10^{n+p} \times 10^{q} = 10^{(n+p)+q}$

$10^{n} \times (10^{p} \times 10^{q}) = 10^{n} \times 10^{p+q} = 10^{n+(p+q)}$.

Tu sais que si n, p et q sont des entiers relatifs,

$$(n + p) + q = n + (p + q).$$

Donc

$$(10^{n} \times 10^{p}) \times 10^{q} = 10^{n} \times (10^{p} \times 10^{q})$$

L'opération multiplication dans E_{10} est associative.

3.4 Elément neutre.

Soit 10^n un élément de E_{10} :

$$10^n \times 10^0 = 10^n.$$

Donc 10^0, qui s'écrit aussi 1, est élément neutre pour la multiplication dans E_{10}.

3.5 Inverse.

Soit 10^n un élément de E_{10}.

On a vu que

$$10^n \times 10^{-n} = 10^0.$$

On dit que 10^{-n} est l'inverse de 10^n.

Exercices.

Quels sont les inverses de 10^2 ; 10^{-3} ; 10^0 ; 10^{-8} ; 10^{-6} ?

L'opération multiplication dans E_{10} possède les propriétés suivantes :

– elle est associative ;
– 10^0 est élément neutre ;
– tout élément de E_{10} a un inverse ;
– elle est commutative.

Nous dirons que $(E_{10}, \times)$ est un groupe commutatif.

IV – DEUX GROUPES.

On vient de voir que $(E_{10}, \times)$ est un groupe commutatif.

Tu sais que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.

Voici un tableau où sont écrites des propriétés de ces groupes : soit n, p et q trois éléments de $\mathbb{Z}$:

$(n+p)+q = n+(p+q)$: l'addition dans $\mathbb{Z}$ est associative.	$(10^n \times 10^p) \times 10^q = 10^n \times (10^p \times 10^q)$: la multiplication dans E_{10} est associative.

$n + 0 = 0 + n = n$: 0 est élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{Z}$.	$10^n \times 10^0 = 10^0 \times 10^n = 10^n$: 10^0 est élément neutre pour la multiplication dans E_{10}.
$n + (-n) = 0$: tout élément de $\mathbb{Z}$ a un opposé.	$10^n \times 10^{-n} = 10^0$: tout élément de E_{10} a un inverse.
$n + p = p + n$: l'addition dans $\mathbb{Z}$ est commutative.	$10^n \times 10^p = 10^p \times 10^n$: la multiplication dans E_{10} est commutative.

L'examen de ce tableau nous amène à étudier l'application suivante :

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow E_{10}$$
$$n \longmapsto 10^n$$

Tu vois facilement que tout élément 10^n de E_{10} a un antécédent ; nous admettrons que cet antécédent est unique ;

f est donc une bijection.

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{Z}$.

Calcule :

$f(n)$; $f(p)$; $f(n + p)$; $f(n) \times f(p)$.

Compare les deux derniers nombres.

Remarque.

Grâce à f on aurait pu déduire toutes les propriétés de $(E_{10}, \times)$ qui sont dans le tableau à partir de celles de $(\mathbb{Z}, +)$.

Par exemple :

On sait que si n est un élément de $\mathbb{Z}$,

$$n + (-n) = 0 ;$$

d'autre part,

$$f(n) = 10^n ; \quad f(-n) = 10^{-n} \quad \text{et} \quad f(0) = 10^0 ;$$

donc, puisque $f(n + (-n)) = f(n) \times f(-n)$,

$$10^0 = 10^n \times 10^{-n}.$$

L'ENSEMBLE $\mathbb{D}$. ECRITURE DES NOMBRES DECIMAUX

I – NOMBRES A VIRGULE.

1.1 Dans les documents précédents, on a utilisé des nombres à virgule et on a introduit les ensembles $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_3$; de façon générale, si n est un entier naturel, on peut définir $\mathbb{D}_n$.

Ainsi :

$4,5 \in \mathbb{D}_1$; $-0,57 \in \mathbb{D}_2$ et $341,174\,1 \in \mathbb{D}_4$.

Tu peux remarquer que

$$4,5 = 4,50 = 4,500,$$

et $4,5 \in \mathbb{D}_2$, $4,5 \in \mathbb{D}_3$; et pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire : $4,5 \in \mathbb{D}_n$.

De même on peut écrire :

$$12 = 12,0 = 12,00 \;;$$

donc 12, qui est un élément de $\mathbb{Z}$, peut aussi s'écrire sous forme de nombre à virgule et :

$12 \in \mathbb{D}_1$, $12 \in \mathbb{D}_2$, et pour tout entier naturel n on peut écrire : $12 \in \mathbb{D}_n$.

Nous pouvons, pendant un moment, noter $\mathbb{D}_0$ l'ensemble $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{D}_3 .$$

Exercices.

Ecris des nombres qui appartiennent à $\mathbb{D}_0$. *Appartiennent-ils à* $\mathbb{D}_1$? $\mathbb{D}_2$? $\mathbb{D}_3$?

Ecris des nombres qui appartiennent à $\mathbb{D}_1$ *sans appartenir à* $\mathbb{D}_0$. *Appartiennent-ils à* $\mathbb{D}_2$? *A* $\mathbb{D}_3$?

Ecris des nombres qui appartiennent à $\mathbb{D}_2$ *sans appartenir à* $\mathbb{D}_1$. *Appartiennent-ils à* $\mathbb{D}_3$? *A* $\mathbb{D}_0$?

1.2 Rappelons qu'on appelle $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

$$14{,}371 \in \mathbb{D}_3 \quad \text{et} \quad 14{,}371 \in \mathbb{D}.$$

De même tout élément de $\mathbb{D}_3$ appartient à $\mathbb{D}$, donc $\mathbb{D}_3 \subset \mathbb{D}$.

Plus généralement, si n est un entier naturel, $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{D}$.

II – AUTRES ECRITURES DES NOMBRES DECIMAUX.

2.1 Reprenons le nombre décimal 4,5. Il appartient à $\mathbb{D}_1$ mais il n'appartient pas à $\mathbb{D}_0$. On peut écrire :

$$4{,}5 = 45 \times 0{,}1.$$

On a vu dans le document C 4 que 0,1 pouvait s'écrire 10^{-1}.

Donc : $$4{,}5 = 45 \times 10^{-1}.$$

Dans ce produit 45 est un entier dont le chiffre des unités n'est pas 0.

Choisis un nombre de $\mathbb{D}_1$ *qui n'appartient pas à* $\mathbb{D}_0$. *Ecris-le sous la forme* $a \times 10^{-1}$ *avec* a *entier. Recommence avec d'autres nombres de* $\mathbb{D}_1$.

Tu peux constater qu'il n'y a qu'une façon de le faire et que a est un entier dont le chiffre des unités n'est pas 0.

Choisis des nombres qui appartiennent à $\mathbb{D}_4$ *sans appartenir à* $\mathbb{D}_3$. *Ecris-les sous la forme* $a \times 10^{-4}$ *avec* a *entier.*

Tu peux constater qu'il n'y a qu'une façon de le faire et que a est un entier dont le chiffre des unités n'est pas 0.

Dans le document C 4 nous avons rappelé que $10^0 = 1$; le nombre 31 peut donc s'écrire 31×10^0.

De même, le nombre -47 peut s'écrire $(-47) \times 10^0$.

Les nombres entiers 31 et -47 n'étaient pas terminés par un zéro. Choisissons maintenant un nombre entier terminé par des zéros, 3 000 par exemple.

$$3\,000 = 3 \times 1\,000 = 3 \times 10^3.$$

De même,

$$-120 = (-12) \times 10 = (-12) \times 10^1.$$

Choisis des nombres entiers positifs ou négatifs non nuls, dont certains sont terminés par des zéros. Ecris-les sous la forme $a \times 10^p$ *où* a *est un entier dont le chiffre des unités n'est pas* 0 *et* p *un élément de* $\mathbb{Z}$.

Tu peux constater que pour chacun d'eux, il y a une seule façon de le faire.

Peux-tu écrire 0 *sous la forme* $a \times 10^p$ *où* a *est un entier et* p *un élément de* $\mathbb{Z}$ *? Est-il possible de l'écrire sous cette forme si l'on impose que le chiffre des unités de* a *soit différent de zéro ?*

Conclusion :

Tout élément d de $\mathbb{D}$ différent de 0, qu'il soit entier ou non, peut s'écrire de façon unique

$$a \times 10^p,$$

* où a est un entier qui ne se termine pas par zéro ;
* où p est un entier
  - positif si d est entier,
  - strictement négatif si d n'est pas entier.

2.2 Le nombre 4,5 peut s'écrire 45×10^{-1} mais aussi :

$450 \times 0{,}01$,	ou encore	450×10^{-2} .,	ou encore
$0{,}45 \times 10$,	ou encore	$0{,}45 \times 10^1$,	ou encore
$0{,}004\,5 \times 1\,000$,	ou encore	$0{,}004\,5 \times 10^3$.	

Donne d'autres écritures de 4,5.

Donne de même plusieurs écritures des nombres suivante :

-0,057 ; 153 ; 1,400 ; - 1 310.

Tu vois donc qu'il y a plusieurs manière d'écrire un nombre décimal sous la forme $a \times 10^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{D}$.

2.3 Parmi les nombres du paragraphe précédent, trois sont positifs. Choisissons pour ces nombres les écritures suivantes :

$4{,}5 \times 10^0$; $1{,}53 \times 10^2$; $1{,}4 \times 10^0$.

Les nombres 4,5 , 1,53 et 1,4 sont des nombres compris entre 1 et 10.

Ecris de même les nombres

0,000 001 497 , 135 789 *et* 151,37

sous la forme $a \times 10^p$, *où* $p \in \mathbb{Z}$ *et* a *est un nombre décimal compris entre* 1 *et* 10.

ADDITION DES NOMBRES DECIMAUX

I – EXERCICES.

1.1 *Calcule mentalement :*

$(-3,8) + (+4) + (-0,2)$;
$(+5,7) + (-7,1) + (-0,7)$;
$(+13,85) + (-4,5) + (+0,15) + (-1,20) + (-0,30)$.

1.2 Voici deux nombres décimaux :

$4,37$; $13,78$.

Pose l'addition de ces deux nombres, et effectue-la.

Réfléchissons à ce que tu as fait.

Pour cela écris d'abord 4,37 *et* 13,78 *sous la forme* $a \cdot 10^{-2}$.

Donc, $4,37 + 13,78 = (437 \times 10^{-2}) + (1\,378 \times 10^{-2})$;
autrement dit $4,37 + 13,78 = (437 + 1\,378) \times 10^{-2}$;
donc $4,37 + 13,78 = 1\,815 \times 10^{-2}$;
et $4,37 + 13,78 = 18,15$.

Tu as donc fait l'addition des deux nombres entiers 437 et 1 378. La place de la virgule est déterminée par les propriétés précédentes.

1.3 *Fais un travail analogue pour*

1,5 *et* 12,31 .

II — PROPRIETES DE L'ADDITION DES DECIMAUX.

2.1 Dans les calculs précédents, tu as utilisé des propriétés de l'addition dans ID. Détaillons ces propriétés.

— Tu sais que $(4 + 7{,}2) + 1{,}5 = 4 + (7{,}2 + 1{,}5)$.

L'addition dans ID est associative. Cela signifie que si a, b et c sont trois nombres décimaux quelconques,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

— Le nombre 0 est l'élément neutre de l'addition dans ID. Cela signifie que si a est un nombre décimal quelconque,

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

— Tout nombre décimal b a un opposé que l'on note -b et

$$b + (-b) = (-b) + b = 0.$$

Exercice.

Quel est l'opposé de 0,47 *? De* -3,513 *?*

Tu sais que $(-1{,}7) + (+3{,}21) = (+3{,}21) + (-1{,}7)$.

L'addition dans ID est commutative. Cela signifie que si a et b sont deux nombres décimaux quelconques,

$$a + b = b + a.$$

On résume ces propriétés en disant que (ID, +) est un groupe commutatif.

2.2 Applications.

Soit a et b deux nombres décimaux. Calculons

$$(a + b) + [(-b) + (-a)].$$

Justifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(a + b) + [(-b) + (-a)] &= [(a + b) + (-b)] + (-a)\ ;\\
[(a + b) + (-b)] + (-a) &= [a + (b + (-b))] + (-a)\ ;\\
[a + (b + (-b))] + (-a) &= (a + 0) + (-a)\ ;\\
(a + 0) + (-a) &= a + (-a)\ ;\\
a + (-a) &= 0.
\end{aligned}$$

Tu as montré que

$$(a + b) + [(-b) + (-a)] = 0.$$

Tu vois que pour deux nombres décimaux quelconques a et b, les nombres

$$a + b \quad \text{et} \quad (-b) + (-a)$$

ont une somme nulle. Ils sont donc opposés.

Mais puisque l'addition est commutative,

$$(-b) + (-a) = (-a) + (-b).$$

On a montré la propriété suivante :

Si a et b sont deux nombres décimaux quelconques, $(-a) + (-b)$ est l'opposé de $a + b$.

Exercices.

Soit a et b des nombres décimaux.

Quel est l'opposé de

$$a + 1{,}2 \quad ; \quad a + (-3{,}71) \quad ; \quad a + (-b) \ ?$$

Soit a, b et c trois nombres décimaux quelconques ;
si $a + c = b + c$ alors $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$.

Justifie les égalités suivantes :

$$a + [c + (-c)] = b + [c + (-c)] \ ;$$
$$a + 0 = b + 0 \ ;$$
$$a = b.$$

On a montré la propriété suivante :

Soit a, b et c trois nombres décimaux quelconques ;

si $a + c = b + c$ alors $a = b$.

Soit a et b deux nombres décimaux quelconques. Supposons qu'il existe un nombre décimal x tel que

$$b + x = a.$$

Justifie les égalités suivantes :

$$(-b) + (b + x) = (-b) + a \ ;$$
$$[(-b) + b] + x = (-b) + a \ ;$$
$$0 + x = (-b) + a \ ;$$
$$x = (-b) + a \ ;$$
$$x = a + (-b).$$

Donc s'il existe un nombre x tel que $b + x = a$, ce nombre est unique et c'est $a + (-b)$.

Montre que $b + [a + (-b)] = a$.

Nous venons de montrer la propriété suivante :

si a et b sont deux nombres décimaux quelconques, il existe un nombre x unique tel que $b + x = a$. Ce nombre est $a + (-b)$.

On l'appelle **différence** de a et b, et on le note $a - b$.

Cela va nous permettre de simplifier des écritures.

Ainsi :

$$(+4{,}32) - (+1{,}7) = (+4{,}32) + (-1{,}7) \ ;$$

nous écrirons ce nombre $4{,}32 - 1{,}7$.

Exercice.

Simplifie de même

$(-3{,}71) - (-4{,}1)$ *et* $(-1{,}973) - (+3{,}75)$.

Comme dans $\mathbb{Z}$, l'opération qui permet de calculer la différence de deux nombres s'appelle la soustraction.

Exercices.

Calcule

$(+4{,}75) - (+0{,}371)$; $(-11{,}7) - (+4{,}54)$; $(-0{,}071) - (-0{,}029)$.

$(+13{,}17) - (+3{,}91) + (-1{,}731) + (-0{,}012) + (+15{,}47) - (-0{,}79)$.

Calcule le nombre décimal x *tel que*

$$x + 4{,}75 = -3{,}7.$$

Calcule le nombre décimal y *tel que*

$$-3{,}73 - y = 2.$$

Calcule le nombre décimal r *tel que*

$$r - 1{,}2 + 3 = 2{,}81.$$

MULTIPLICATION DES NOMBRES DECIMAUX

I – EXERCICES.

1.1 *Calcule mentalement*

$120 \times 7\,000$; $(+0{,}25) \times (-2{,}4) \times (+4)$; $0{,}125 \times (8 + 1{,}2)$.

1.2 Voici deux nombres décimaux :

$12{,}7$; $3{,}873$.

Pose la multiplication de ces deux nombres, et effectue-la.

Réfléchissons à ce que tu as fait.

Pour cela écris d'abord 12,7 *sous la forme* $a \,.\, 10^{-1}$ *et* 3,873 *sous la forme* $a \,.\, 10^{-3}$.

$$12{,}7 \times 3{,}873 = (127 \times 10^{-1}) \times (3\,873 \times 10^{-3}),$$

autrement dit

$$12{,}7 \times 3{,}873 = (127 \times 3\,873) \times (10^{-1} \times 10^{-3}) ;$$

donc

$$12{,}7 \times 3{,}873 = 491\,871 \times 10^{-4},$$

et

$$12{,}7 \times 3{,}873 = 49{,}187\,1 .$$

Tu as donc fait la multiplication de deux nombres entiers 127 et 3 873. La place de la virgule est déterminée par les propriétés précédentes.

II – PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION DES NOMBRES DECIMAUX.

2.1 Dans les calculs précédents, tu as utilisé les propriétés de la multiplication des nombres décimaux.

Détaillons ces propriétés.

Tu sais que $[(-0{,}63) \times (+4{,}1)] \times (-3{,}19) = (-0{,}63) \times [(+4{,}1) \times (-0{,}63)]$.

La multiplication dans ID est associative. Cela signifie que si a, b et c sont trois nombres décimaux quelconques

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

Le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication dans ID. Cela signifie que si a est un nombre décimal quelconque

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

Calcule $0 \times 4{,}73$; $0 \times (-2{,}1)$.

De façon générale, soit a un nombre décimal.

Calcule $a \times 0$.

Existe-t-il un décimal x *tel que* $x \times 0 = 1$ *?*

Penses-tu que (ID, $\times$) *soit un groupe ?*

Soit maintenant un nombre décimal quelconque non nul a. On peut se poser la question : existe-t-il un nombre décimal quelconque non nul a' tel que $a \times a' = 1$?

Nous répondrons à cette question dans le prochain document.

Tu sais que $(-0{,}741) \times (+3{,}2) = (+3{,}2) \times (-0{,}741)$.

La multiplication dans ID est commutative. Cela signifie que si a et b sont deux nombres décimaux quelconques

$$a \times b = b \times a.$$

2.2 *Calcule* $(7{,}3 \times 3{,}227) + (2{,}7 \times 3{,}227)$.

La **multiplication** dans ID est **distributive sur l'addition.** Cela signifie que si a, b et c sont trois nombres décimaux quelconques

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

2.3 Applications.

Soit a et b des nombres décimaux.

Compare $a \times b$ *et* $a \times (-b)$. *Que constates-tu ?*

Tu as montré que les nombres $a \times b$ et $a \times (-b)$ sont des nombres opposés. On pourrait montrer de même que $a \times b$ et $(-a) \times b$ sont des nombres opposés.

Remarque.

L'opposé de $a \times b$ se note évidemment $-(a \times b)$. On a donc montré que si a et b sont deux nombres décimaux quelconques,

$$a \times (-b) = -(a \times b) \quad \text{et} \quad (-a) \times b = -(a \times b).$$

Exercices.

Donne une autre écriture de :

$$(-1) \times b \ ; \ (-a) \times (-b).$$

Calcule :

$$(-3{,}1) \times (+4{,}5) \ ; \ (-2) \times (-5{,}1) \times (+2{,}7).$$

2.4 Exercice.

Soit a, b et c trois nombres décimaux.

Justifie les égalités suivantes :

$$a \times (b - c) = a \times [b + (-c)] \ ;$$
$$a \times [b + (-c)] = (a \times b) + [a \times (-c)] \ ;$$
$$(a \times b) + [a \times (-c)] = (a \times b) - (a \times c).$$

2.5 Exercice.

Calcule de la manière qui te semble la plus commode :

$2 \times (4{,}87 + 0{,}13)$; $10 \times (2{,}1 + 4{,}3)$; $4 \times (0{,}25 - 1{,}5)$; $(8 - 4) \times (0{,}25 - 1{,}5)$.

Soit a et b des nombres décimaux.

Donne une autre écriture de :

$2 \times (3{,}25 + a)$; $1{,}73 \times (a - 2)$; $(a + 2{,}5) \times (b + 1{,}2)$; $(0{,}1 - a) \times (b + 10)$; $(3{,}5 - a) \times (2 - b)$.

ORDRE SUR ID

I – UNE RELATION D'ORDRE SUR ID.

1.1 Exercices.

Dans l'exercice 1.3 du document précédent, tu as trouvé les nombres décimaux à deux décimales suivants :

17,10 ; 11,40 ; 5,76 ; 44,23 ; 2,02 ; 8,00 ; 4,81 ; 6,56.

Multiplie tous ces nombres par 100. *Tu trouves* 8 *nombres entiers. Range-les par ordre de grandeur croissante.*

Déduis-en un rangement par ordre de grandeur croissante des 8 nombres décimaux :

Voici une autre liste de nombres décimaux qui n'ont pas le même nombre de décimales.

35,47 ; -41 ; -41,003 7 ; -40,931 ; 35,471 ; 35,5.

En utilisant le même procédé, peux-tu ranger ces décimaux par ordre de grandeur croissante ?

Pouvais-tu ranger directement les nombres de chacune des listes précédentes ? Comment ?

1.2 Comparaison de deux nombres décimaux.

Exemple 1.

Compare les deux nombres décimaux 4,73 *et* −1,2

Comment compare-t-on deux nombres décimaux de signe contraire ?

Exemple 2.

Compare les deux nombres décimaux 14,73 *et* 11,214 7.

Comment compare-t-on deux nombres décimaux positifs n'ayant pas même partie entière ?

Exemple 3.

Compare les deux nombres décimaux −1,999 997 *et* −2,001.

Comment compare-t-on deux nombres décimaux négatifs n'ayant pas même partie entière ?

Exemple 4.

Compare les deux nombres décimaux 21,74 *et* 21,714 38.

Comment compare-t-on deux nombres décimaux positifs ayant même partie entière ?

Exemple 5.

Compare les deux nombres décimaux −6,49 *et* −6,489 75.

Comment compare-t-on deux nombres négatifs ayant même partie entière ?

1.3 Une relation d'ordre sur ID.

Nous admettons qu'il existe sur l'ensemble ID, une relation entre nombres décimaux notée $\leqslant$. La notation $x \leqslant y$ se lit : «x est inférieur à y».

Cette relation est :

— réflexive : cela signifie que pour tout nombre décimal a,

$$a \leqslant a \ ;$$

— antisymétrique : cela signifie que si a et b sont deux nombres décimaux quelconques,

si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$;

— transitive : cela signifie que si a, b et c sont trois nombres décimaux quelconques,

si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$.

Tu sais qu'une relation réflexive, antisymétrique et transitive est appelée relation d'ordre

Remarque :

Si a et b sont deux nombres décimaux tels que $a \leqslant b$ et $a \neq b$, on écrit $a < b$. La notation $x < y$ se lit : «x est strictement inférieur à y».

1.4 Une propriété de l'ordre sur $\mathbb{D}$.

Exercice.

En classe de 5ème tu as peut-être étudié sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers non nuls la relation «... est un diviseur de...».

Appelons $\mathcal{R}$ cette relation. Si a et b sont deux entiers naturels quelconques,

$a \mathcal{R} b$ si a est un diviseur de b.

Vérifie que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Tu as montré que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

Voici une liste d'éléments de $\mathbb{N}^*$: 36 ; 12 ; 108 ; 2 ; 6.

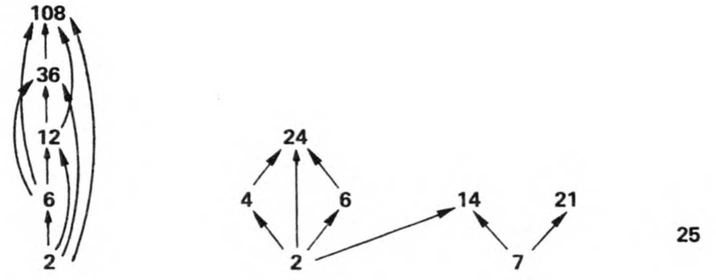
Peux-tu les ranger pour la relation $\mathcal{R}$?

Même question pour la liste suivante d'éléments de $\mathbb{N}^*$: 6 ; 7 ; 24 ; 21 ; 2 ; 4 ; 14 ; 25.

Tu vois qu'on ne peut pas ranger par exemple 6 et 7 parce que :

6 n'est pas un diviseur de 7 ;

et 7 n'est pas un diviseur de 6.



Par contre, quels que soient les nombres décimaux a et b,

$$a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant a.$$

On traduit cette propriété en disant que la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{D}$ est une relation d'ordre total.

1.5 Une autre propriété de l'ordre sur $\mathbb{D}$.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est aussi muni d'une relation d'ordre total qu'on a également noté $\leqslant$.

Exercice 1.

Peux-tu donner la liste des entiers relatifs x *qui vérifient :*

$-3 \leqslant x$ *et* $x \leqslant 5$ *?*

Même question pour

$2 \leqslant x$ *et* $x \leqslant 3$.

Même question pour

$2 < x$ *et* $x < 3$.

On peut traduire ce dernier résultat en disant qu'il n'y a pas de nombre entier strictement compris entre 2 et 3.

Exercice 2.

Peux-tu donner la liste des nombres décimaux x *qui vérifient*

$-3 \leqslant x$ *et* $x \leqslant 5$ *?*

Donne 10 *nombres décimaux strictement compris entre* 2 *et* 3. *En existe-t-il d'autres ?*

Exercice 3.

Quelle est la demi-somme des décimaux 12,31 *et* 12,34 *?*

Range 12,31 , 12,34 *et leur demi-somme.*

Tu viens de constater qu'il existe un nombre décimal strictement compris entre 12,31 et 12,34.

En existe-t-il d'autres ?

Soit a et b deux nombres décimaux tels que $a < b$. Tu sais que 2 a un inverse, qui est 0,5 ; on écrira

$$\frac{a+b}{2} = 0{,}5(a+b).$$

Tu démontreras un peu plus loin que $a < \frac{a+b}{2} < b$; donc, si a et b sont deux nombres décimaux quelconques tels que $a < b$, il existe toujours un nombre décimal strictement compris entre a et b.

En existe-t-il d'autres ?

L'exercice 1 nous a montré que cette propriété n'était pas vérifiée sur $\mathbb{Z}$ puisque tu n'a pas trouvé de nombre entier strictement compris entre 2 et 3.

Exercice 4.

Donne un nombre décimal x *tel que*

$4{,}72 < x$ *et* $x < 4{,}724\,5$.

Compare avec tes camarades.

Même question pour

$4{,}722\,9 < x$ *et* $x < 4{,}73$

II – RELATION D'ORDRE ET ADDITION.

2.1 Les encadrements d'Arthur.

Dans le document C 5, Arthur avait découvert les notions d'encadrement. Il avait appelé ℓ' la mesure de son jardin en mètres et L' la mesure de la longueur de son jardin en mètres, et il avait réussi à obtenir les résultats suivants :

$$22{,}05 \leqslant \ell' \leqslant 23{,}80 \quad \text{et} \quad 35{,}91 \leqslant L' \leqslant 39{,}44\,.$$

Cela lui avait donné l'idée d'encadrer le nombre qui mesure le périmètre du jardin en mètres et il avait été conduit à écrire

$$22{,}05 + 23{,}80 \leqslant \ell' + L' \leqslant 26{,}25 + 39{,}44\,.$$

2.2 Exercices.

Choisis deux nombres décimaux. Compare-les.

Choisis un troisième nombre décimal. Additionne-le aux deux précédents. Compare les deux sommes obtenues. Que constates-tu ?

Compare les deux nombres décimaux $-5{,}01$ *et* $-4{,}973$.

Quel est le signe de la différence $(-4{,}973) - (-5{,}01)$ *?*

Ecris une liste de nombres décimaux. Range ces nombres décimaux par ordre croissant.

Ecris les opposés de ces nombres décimaux par ordre croissant. Que constates-tu ?

2.3 Réflexions sur les exercices précédents.

Dans ces exercices, on a utilisé la relation d'ordre et l'addition sur $\mathbb{D}$. Elles sont liées par la propriété suivante : soit a, b et c trois nombres décimaux quelconques :

$$\text{si} \quad a \leqslant b\,, \quad \text{alors} \quad a + c \leqslant b + c\,.$$

Cette propriété te permet de comprendre la constatation que tu as faite au premier exercice du paragraphe 2.2.

Soit a, b et c trois nombres décimaux quelconques.

Justifie ce qui suit :

$$\begin{array}{llll}
\text{si} & a + c \leqslant b + c, & \text{alors} & (a + c) + (-c) \leqslant (b + c) + (-c)\ ; \\
\text{si} & a + c \leqslant b + c, & \text{alors} & a + [c + (-c)] \leqslant b + [c + (-c)]\ ; \\
\text{si} & a + c \leqslant b + c, & \text{alors} & a + 0 \leqslant b + 0\,; \\
\text{si} & a + c \leqslant b + c, & \text{alors} & a \leqslant b.
\end{array}$$

Exercices.

Quel est l'ensemble des nombres décimaux x *qui vérifient*

$x + 13{,}81 \leqslant -3{,}2 + 13{,}81$?

Quel est l'ensemble des nombres décimaux x *qui vérifient*

$x + 4{,}71 \leqslant -5{,}6$?

Quel est l'ensemble des nombres décimaux x *qui vérifient*

$2x - 4{,}5 \leqslant x + 3{,}2$?

Soit a et b deux nombres décimaux.

Justifie ce qui suit :

$a \leqslant b$ si et seulement si $a + (-a) \leqslant b + (-a)$;
$a \leqslant b$ si et seulement si $0 \leqslant b - a$.

Tu viens de montrer que pour deux nombres décimaux a et b, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

— $a \leqslant b$;
— $b - a$ est un nombre positif.

Cette propriété permet de comprendre ce que tu as trouvé dans le deuxième exercice du paragraphe 2.2.

Montre que si a *et* b *sont deux nombres décimaux tels que* $a \leqslant b$, *alors* $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$.

Montre que si $a < b$, alors $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Soit a et b deux nombres décimaux tels que $a \leqslant b$.

Quel est le signe de la différence $b - a$?

Quel est le signe de la différence $(-b) - (-a)$?

Compare les deux nombres décimaux $(-a)$ *et* $(-b)$.

Cette propriété te permet de comprendre le résultat trouvé au troisième exercice du paragraphe 2.

Soit a, b, c et d quatre nombres décimaux.

Justifie ce qui suit :

si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$;

si $c \leqslant d$, alors $b + c \leqslant b + d$;

si $a + c \leqslant b + c$ et $b + c \leqslant b + d$, alors $a + c \leqslant b + d$;

si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.

C'est cette propriété qu'a utilisée Arthur sans le savoir. En effet il avait trouvé que

$$22{,}05 \leqslant \ell' \quad \text{et} \quad 35{,}91 \leqslant L'.$$

Il en a déduit :

$$22{,}05 + 35{,}91 \leqslant \ell' + L'.$$

De même, il avait trouvé que

$$\ell' \leqslant 23{,}80 \quad \text{et} \quad L' \leqslant 39{,}44.$$

Il en a déduit :

$$\ell' + L' \leqslant 23{,}80 + 39{,}44.$$

Arthur serait-il un génie ?

2.4 Exercices.

Voici deux inégalités :

$$4{,}21 \leqslant 5{,}3 \quad \text{et} \quad 2{,}10 \leqslant 2{,}73.$$

Compare les différences : $4{,}21 - 2{,}10$ *et* $5{,}3 - 2{,}73$.

Même question pour les inégalités :

$$3{,}7 \leqslant 6{,}41 \quad \textit{et} \quad 1{,}45 \leqslant 5{,}73.$$

Penses-tu qu'on ait la propriété suivante :

soit a, b, c et d quatre nombres décimaux quelconques :

si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a - c \leqslant b - d$.

4.5 Exercice.

Reprenons l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers supérieurs à 0 et la relation $\mathcal{R}$: «... est un diviseur de...».

Range les entiers naturels 8 *et* 32 *par cette relation.*

Peux-tu ranger par cette relation les entiers $8+5$ *et* $32+5$ *?*

Penses-tu qu'on ait sur $\mathbb{N}^*$ *la propriété suivante :*

soit a, b et c trois entiers naturels :

si $a \mathcal{R} b$ alors, $(a+c) \mathcal{R} (b+c)$.

III – RELATION D'ORDRE ET MULTIPLICATION.

3.1 Et voilà de nouveau Arthur.

Arthur avait eu aussi l'idée d'encadrer le nombre qui mesure la surface de son jardin en mètres carrés. Il avait écrit :

$$22{,}05 \times 35{,}91 \leqslant \ell' \times L' \leqslant 23{,}80 \times 39{,}44.$$

3.2 Exercices.

Choisis deux nombres décimaux positifs. Multiplie-les l'un par l'autre. Quel est le signe du produit de ces deux nombres ?

Choisis deux nombres décimaux. Compare-les. Multiplie ces deux nombres par 3 et compare les produits obtenus.

Multiplie les deux nombres choisis par −2 et compare les produits obtenus. Que constates-tu ?

Choisis un nombre décimal positif. Multiplie-le par 2. Compare le produit obtenu et le nombre choisi.

Reprends le nombre choisi. Multiplie-le par 0,7. Compare le produit obtenu et le nombre choisi.

3.3 Réflexions sur les exercices précédents.

Dans ces exercices, on a utilisé la relation d'ordre et la multiplication sur $\mathbb{D}$. Elles sont liées par la propriété suivante :

Soit a et b deux nombres décimaux ;

si $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b$ alors $0 \leqslant ab$.

Le produit de deux nombres décimaux positifs est donc un nombre décimal positif.

C'est ce que tu as observé dans le premier exercice du paragraphe 3.2

Soit a, b et c trois nombres décimaux, où $0 \leqslant c$.

Justifie ce qui suit :

si $a \leqslant b$, alors $0 \leqslant b - a$;
si $0 \leqslant b - a$ et $0 \leqslant c$, alors $0 \leqslant c \times (b - a)$;
si $0 \leqslant c \times (b - a)$, alors $0 \leqslant (c \times b) - (c \times a)$;
si $0 \leqslant (c \times b) - (c \times a)$, alors $c \times a \leqslant c \times b$.

Tu as montré la propriété suivante :

Soit a et b deux nombres décimaux et c un nombre décimal positif ;

si $a \leqslant b$ alors $ac \leqslant bc$.

Démontre de même la propriété suivante :

Soit a et b deux nombres décimaux et c un nombre décimal négatif ;

si $a \leqslant b$ alors $bc \leqslant ac$.

Cette propriété te permet de comprendre ce que tu as observé dans le deuxième exercice du paragraphe 3.2.

Cette propriété permet aussi d'expliquer ce que tu as trouvé dans le troisième exercice du paragraphe 3.2. En effet :

Soit a un nombre décimal positif :

$1 \leqslant 2$, donc $1 \times a \leqslant 2 \times a$;
$0{,}7 \leqslant 1$, donc $0{,}7 \times a \leqslant 1 \times a$.

Exercices.

Quel est l'ensemble des nombres décimaux x *qui vérifient :*

$4x \leqslant 1{,}6$?

Quel est l'ensemble des nombres décimaux x *qui vérifient :*

$2x - 15{,}18 \leqslant -3{,}6$?

Quel est l'ensemble des nombres décimaux x *qui vérifient :*

$6x + 3{,}5 < 4x - 2{,}1$?

Soit a, b, c et d quatre nombres décimaux positifs.

Justifie ce qui suit :

si $a \leqslant b$, alors $ac \leqslant bc$;
si $c \leqslant d$, alors $bc \leqslant bd$;
si $ac \leqslant bc$ et $bc \leqslant bd$, alors $ac \leqslant bd$;
si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.

C'est cette propriété qu'a utilisé Arthur sans le savoir. En effet, il avait trouvé que

$$22{,}05 \leqslant \ell' \quad \text{et} \quad 35{,}91 \leqslant L',$$

et il en déduit que $22{,}05 \times 35{,}91 \leqslant \ell' \times L'$, car les nombre décimaux 22,05, 35,91, ℓ' et L' sont positifs.

De même, il avait trouvé que

$$\ell' \leqslant 23{,}80 \quad \text{et} \quad L' \leqslant 39{,}44,$$

et il en déduit que $\ell' \times L' \leqslant 23{,}80 \times 39{,}44$.

Il est donc bien certain qu'Arthur est un génie.

3.4 Exercice.

Voici deux inégalités :

$2,5 \leqslant 3,6$ et $-2 \leqslant -1,1$.

Compare les produits : $2,5 \times (-2)$ *et* $3,6 \times (-1,1)$.

Même question pour les inégalités :

$-3,2 \leqslant -1,5$;
$-1,1 \leqslant -0,7$.

Penses-tu qu'on ait la propriété suivante :

soit a, b, c et d quatre nombres décimaux quelconques :

si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.

3.5 Exercice.

Choisis deux nombres décimaux positifs. Compare-les.

Calcule le carré de ces deux nombres et compare les nombres obtenus. Que constates-tu ?

Peux-tu expliquer cette constatation ?

Penses-tu qu'on aurait eu le même résultat avec deux nombres négatifs ? Vérifie à l'aide d'un exemple.

IV – FAISONS LE POINT.

Dans ce document et les documents précédents, nous avons étudié l'ensemble ID.

4.1 Tu as vu que l'addition des nombres décimaux est associative et commutative.

Elle possède un élément neutre : le nombre 0, et tout nombre décimal possède un opposé. L'addition des entiers relatifs possède les mêmes propriétés.

Tu sais qu'on traduit ces propriétés en disant que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{D}, +)$ sont des groupes commutatifs.

Tu n'as pas oublié que $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de ID.

4.2 Tu as vu que la multiplication des nombres décimaux est associative, commutative et distributive sur l'addition.

Elle possède un élément neutre : le nombre 1.

La multiplication des entiers relatifs possède aussi ces propriétés.

Soit a un entier relatif différent de 1 et de -1.

Montre qu'on ne peut trouver un entier c *tel que*

$$a \times c = 1.$$

Il n'existe que deux entiers relatifs qui aient un inverse entier : 1 et -1.

Quel est l'inverse de $+1$ *? Celui de* -1 *?*

Dans le document C 9, tu as vu que certains nombres décimaux ont un inverse décimal et tu as appris à les reconnaître.

Tu as vu aussi que d'autres nombres décimaux n'ont pas d'inverse.

Donne des exemples.

4.3 Enfin dans ce document, nous avons vu que ID était muni d'une relation d'ordre total et que cette relation était liée à l'addition et à la multiplication par les propriétés suivantes :

Soit a, b et c trois nombres décimaux quelconques :

si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$;
si $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b$ alors $0 \leqslant a \times b$.

La relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$ a aussi ces propriétés.

Par contre, on a trouvé au paragraphe 1.5 une propriété de l'ordre sur ID qui n'est pas vérifiée par l'ordre sur $\mathbb{Z}$: si a et b sont deux nombres décimaux quelconques tel que $a < b$, il existe toujours un nombre décimal strictement compris entre a et b.

UN PEU D'HISTOIRE

Les algébristes italiens de la Renaissance.

Tu sais déjà ce qu'est une équation. Par exemple, l'équation $3x + 6 = 0$ en x admet une solution, qui est 2, car $3 \times 2 + 6 = 0$, et elle n'en a pas d'autre, car si $x \neq 2$ alors $3x + 6 \neq 0$.

On dit que l'équation $3x + 6 = 0$ est du premier degré, de même que les équations $5x - 0{,}5 = 0$ et $12x + 27 = 0$; l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ est dite du second degré, de même que $3x^2 - 11 = 0$; l'équation $8x^3 + 7x^2 - x + 12 = 0$ est du troisième degré et $x^4 + x^2 = 0$ est du quatrième degré, etc... Dans une équation de ce type, c'est le plus grand exposant qui donne le degré.

On sait résoudre depuis l'antiquité les équations du premier et du deuxième degré, mais il a fallu attendre la Renaissance pour qu'on sache résoudre les équations du troisième et du quatrième degré. Et ce n'est qu'au 19ème siècle que le Norvégien Niels Abel (1802-1829) et le Français Evariste Galois (1811-1832) ont complétement éclairci le problème des équations de degré quelconque.

Niccolo Fontana est né à Brescia, en Italie du nord, aux environs de 1500 et est mort en 1557 ; il avait douze ans quand des troupes françaises prirent la ville de Brescia et massacrèrent une partie de la population ; Niccolo Fontana fut grièvement blessé à la tête, et il en resta bègue le reste de sa vie ; aussi fut-il surnommé Tartaglia (le bègue).

La vie de Tartaglia illustre bien l'histoire de la Renaissance : la fin du 15ème siècle et la première moitié du 16ème siècle est une période qu'on appelle la Renaissance ; et en effet les arts et les sciences, et tout particulièrement l'algèbre, ont été très florissants pendant cette période en Europe occidentale ; en dehors des algébristes dont nous parlons ici, citons les artistes Léonard de Vinci (1452-1519) et Michel-Ange (1475-1564) ; et c'est aussi à cette époque que la plupart des chateaux de la Loire, comme ceux de Chambord ou Chenonceaux, ont été construits ou embellis.

Mais à côté de cela, l'Italie du nord subit presque sans interuption des guerres de 1495 à 1550 ; les Français, les Espagnols et les Italiens s'y affrontèrent ; c'est ainsi que François 1er gagna une bataille à Marignan en 1515, et qu'il en perdit une autre à Pavie en 1525 où il fut fait prisonnier (Marignan et Pavie sont l'une est l'autre proches de Milan).

En 1534, Tartaglia résout plusieurs problèmes qui reviennent à trouver la solution de certaines équations du troisième degré ; il ne publie pas ses résultats, suivant en cela l'exemple d'un autre algébriste italien Scipione di Floriano dal Ferro (1465-1526) qui n'avait pas pris la peine de divulguer sa résolution de l'équation en $x^3 + ax + b = 0$ (trouvée vers 1500).

Et c'est ici qu'intervient Girolamo Cardano (1501-1576), qui fut médecin, mécanicien, mathématicien, et même astrologue ! L'Inquisition le fit d'ailleurs mettre en prison parcequ'il avait établi l'horoscope du Christ. Cardano, qu'en France nous appelons Cardan, demanda en 1540 à Tartaglia de lui communiquer ses résultats, en lui promettant de ne pas les publier. Mais cinq ans plus tard, à la grande fureur de Tartaglia, Cardan publie la théorie complète de l'équation du troisième degré. Dans le même livre un de ses élèves, Ludovico Ferrari (1522-1565), indique comment trouver les solutions d'une équation du quatrième degré.

INDEX

1 — Mots.

2 — Symbole.