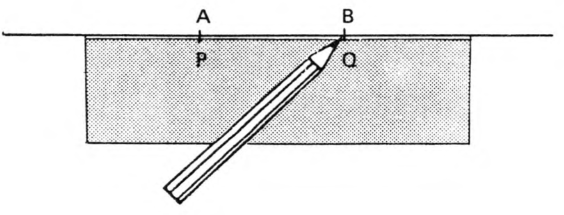
Chapitre C : ENTIERS ET DECIMAUX

Document C 1

DES ECHELLES

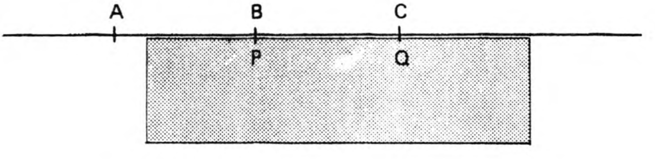
I – OBSERVATION D'ECHELLES REGULIERES.

Dessine une droite matérielle et marque sur celle-ci deux points A *et* B. *Sur le bord d'une bande de papier reproduis en* P *et* Q *les emplacements des points* A *et* B *comme sur la figure suivante :*



Fais glisser la bande le long de la droite matérielle, de façon à faire coïncider P *et* B.

La nouvelle position de la bande permet de placer un point C sur la droite matérielle en face du point Q.



Fais alors glisser à nouveau la bande de façon que P *et* C *coïncident, et place un point* D *en face de* Q *; et ainsi de suite.*

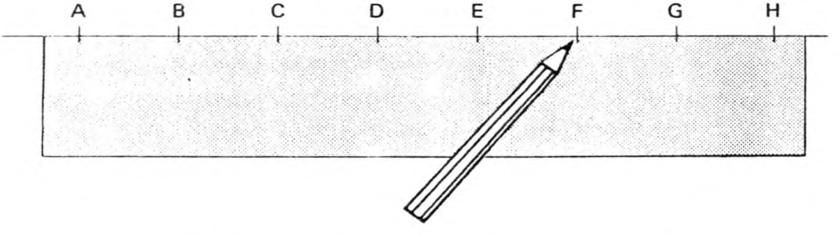
Tu as tracé une ECHELLE sur une droite matérielle.

Les points A, B, C, D, ... marqués sur la droite matérielle sont les BARREAUX de l'échelle et nous appellerons ECHELON le segment matériel compris entre deux barreaux successifs.

1.1 Première manipulation.

— *Trace une échelle sur une droite matérielle en utilisant la méthode précédente.*

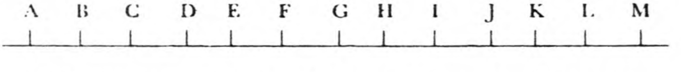
— *Reporte cette échelle sur le bord rectiligne d'une bande de papier comme sur cette figure :*



— *L'échelle et sa copie étant mises en coïncidence comme sur la figure, qu'observes-tu si tu glisses la bande de un ou plusieurs échelons vers la droite ou vers la gauche ?*

1.2 Deuxième manipulation.

Voici une échelle :



— *Construis sur une bande de papier une copie de cette échelle.*

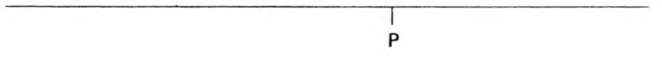
— *Mets l'échelle et sa copie en coïncidence, puis fais glisser la copie de trois échelons vers la droite ou vers la gauche. Que peux-tu observer ? Recommence en faisant glisser la copie de un ou deux échelons.*

L'échelle utilisée dans la première manipulation est une ECHELLE REGULIERE, celle de la seconde manipulation est une échelle qui n'est pas régulière.

Comment vérifieras-tu qu'une échelle est régulière ?

Exercice.

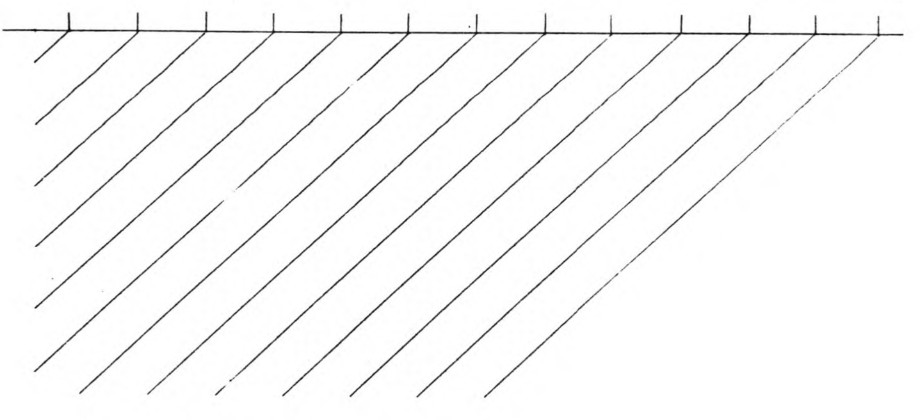
Sur cette droite matérielle on a dessiné une échelle régulière dont P *était l'un des barreaux ; par la suite les barreaux ont été effacés à l'exception de* P. *Que suffirait-il de connaître pour reconstituer la même échelle ?*



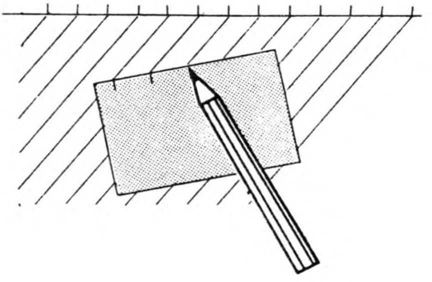
1.3 Troisième manipulation.

Voici une échelle sur une droite. Par les barreaux de cette échelle on a fait passer des droites parallèles.

Vérifie que cette échelle est régulière.



— Place une bande de papier comme sur la figure suivante de façon que ces parallèles coupent son bord rectiligne et marque au crayon les points où sont situés les croisements. Tu obtiens une échelle.



L'échelle obtenue est-elle régulière ?

Recommence avec une nouvelle bande de papier placée dans une position différente.

Enonce les résultats de ces observations.

II – COMMENT DESIGNER LES BARREAUX D'UNE ECHELLE REGULIERE ?

Nous avons maintenant à notre disposition des échelles régulières et la dernière observation nous permet d'en construire facilement plusieurs sur des bandes de papier ; nous pouvons alors les reproduire sur la feuille.

Pour désigner les barreaux d'une échelle on peut placer un signe à côté de chaque trait comme sur les dessins suivants :

Echelle n°1 :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Echelle n°2 :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Echelle n°3 :	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
Echelle n°4 :	-3	-4	-1	5	0	2	1	3	4	7	8	6

Exercice.

Observons l'échelle numéro 1. Les couples de barreaux (B, E) et (G, J) ont une propriété commune : si, par glissement d'une copie de l'échelle, la copie du barreau B vient en face du barreau G, la copie du barreau E vient en face du barreau J.

Nous dirons que les couples de barreaux (B, E) et (G, J) sont SUPERPOSABLES.

Trouve d'autres couples de barreaux superposables sur l'échelle numéro 1.

Sur l'échelle numéro 2 les couples de barreaux (2,7) et (4,9) sont superposables

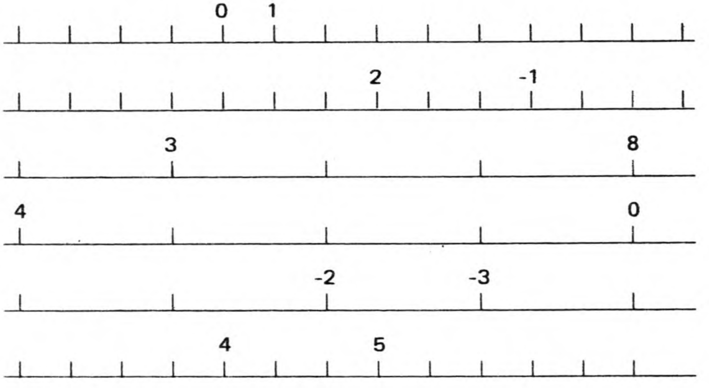
Compare 7 - 2 *et* 9 - 4.

Fais un calcul analogue pour d'autres couples de barreaux superposables des échelles numéro 2 et numéro 3.

Tu as constaté pour les échelles numéro 2 et numéro 3 que si (a, b) et (c, d) sont des couples de barreaux superposables, b - a = d - c. Nous dirons que les échelles régulières numéro 2 et numéro 3 sont GRADUEES.

L'échelle numéro 4 est-elle graduée ?

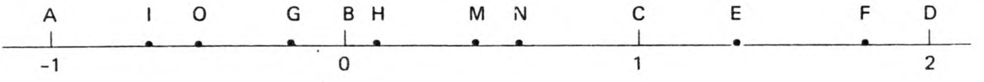
Est-il possible de graduer les échelles régulières ci-dessous en utilisant pour les points marqués les nombres déjà écrits ? Si oui, recopie-les et fais-le.



CODAGES

I – CODAGE DE BARREAUX.

On a dessiné une droite matérielle sur laquelle on a marqué les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N et O.



Les points A, B, C, D sont les barreaux d'une échelle régulière. On a codé ces quatre points :

points	A	B	C	D
codes	-1	0	1	2

Le point M n'est pas un barreau. Il est entre B et C ; au point M on fait correspondre le couple (0,1). Le point F n'est pas un barreau, il est entre les barreaux C et D ; on lui fait correspondre le couple (1,2).

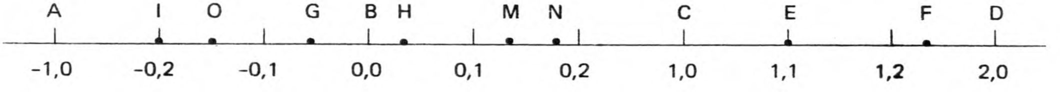
Quel couple peut-on faire correspondre aux points E, G, H, I, M, N *et* O *?*

Tu peux observer qu'aux points M et N, on a fait correspondre le même couple. Pourtant ces points sont distincts.

Si on te dit qu'aux deux points M *et* N *correspond le même couple* (0, 1) *peux-tu dire, sans regarder le dessin, si les points sont rangés dans l'ordre* B, M, N, C *ou dans l'ordre* B, N, M, C *?*

II – DE NOUVEAUX BARREAUX.

2.1 On a reproduit le dessin ci-dessus, puis on a ajouté des barreaux.



On a ainsi une nouvelle échelle pour laquelle les barreaux sont codés : -1,0 ; ... ; 0,0 ; 0,1 ; ... ; 1,1 ; 1,2 ; ... ; 2,0 et on a maintenant le codage suivant :

points	A	B	C	D
codes	-1,0	0,0	1,0	2,0

Parmi les points E, F, G, H, I, M, N, O *quels sont ceux qui sont des barreaux de cette nouvelle échelle ? Quel est leur code ?*

Quel couple peux-tu faire correspondre aux points qui ne sont pas des barreaux ?

2.2 On a reproduit en plus petit dans la marge le dessin du paragraphe précédent. On a ainsi une nouvelle échelle pour laquelle les barreaux sont codés : -1,00 ; ... ; 0,00 ; 0,01 ; ... ; 0,10 ; 0,11 ; 0,12 ; ... ; 2,00 ; 2,01.

et on a maintenant le codage suivant :

points	A	B	C	D
codes	-1,00	0,00	1,00	2,00

Parmi les points marqués quels sont ceux qui sont des barreaux de cette nouvelle échelle ? Quel est leur code ?

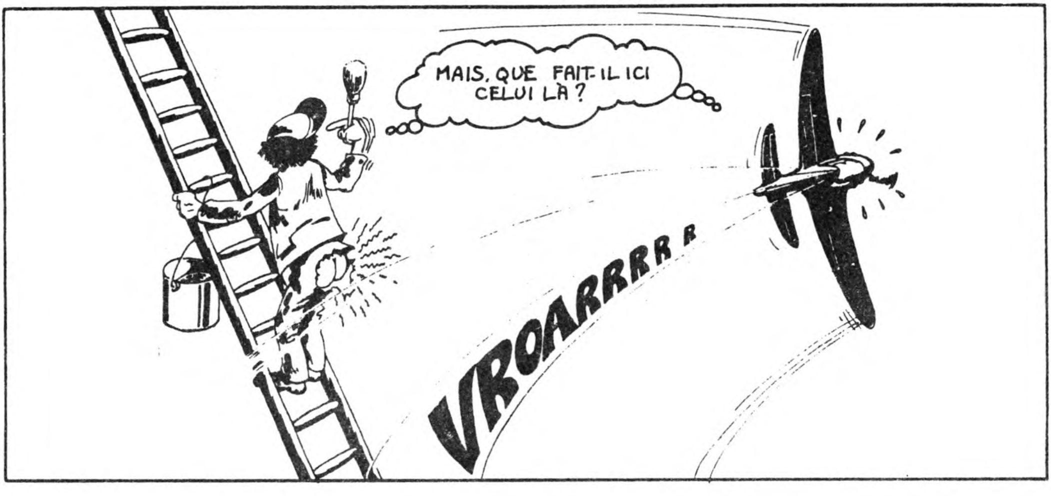
Quel couple peux-tu faire correspondre aux points qui ne sont pas des barreaux ?

2.3 *Reproduis le dessin du paragraphe 2.2. Ajoute des barreaux de façon analogue. Code-les.*

Tu auras ainsi une nouvelle échelle régulière.

2.4 *Reprends l'échelle du paragraphe* I. *Le point* O *est le milieu de l'échelon* AB.

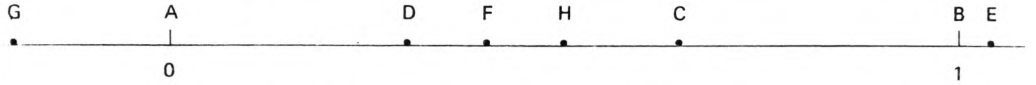
Penses-tu qu'en construisant des échelles par le procédé précédent (division des échelons en 3) on arriverait à en trouver une pour laquelle O *serait un barreau ?*



NOUVEAUX CODAGES

I – SUR UNE ECHELLE.

On a dessiné une droite matérielle sur laquelle on a marqué les points A, B, C, D, E, F, G, et H.



Les points A et B sont les barreaux d'une échelle régulière. On les a codés :

points	A	B
codes	0	1

Le point D n'est pas un barreau. Il est entre A et B. Au point D on fait correspondre le couple (0, 1).

Quels couples peut-on faire correspondre aux points C, E, F, G *et* H *?*

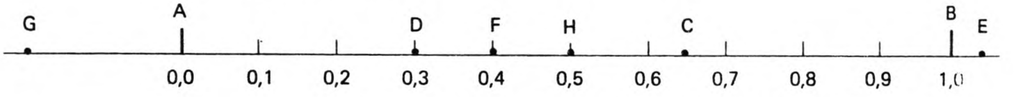
Remarque qu'aux points C et D on a fait correspondre le même couple ; pourtant ces points sont distincts.

On ne peut donc trouver sans regarder le dessin si les points sont rangés dans l'ordre A, D, C, B ou A, C, D, B.

II – CODAGE AVEC DES DECIMAUX.

2.1 Pour pouvoir déceler l'ordre de ces quatre points, on a reproduit le dessin ci-dessus, puis on a ajouté des barreaux.

Nous avons dessiné une autre échelle régulière telle que entre A et B il y ait 10 échelons.



Nous avons codé les barreaux dessinés avec les nombres : 0,0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; ... ; 0,9 ; 1,0.

Nous noterons $\mathbb{D}_1$ l'ensemble des décimaux qui peuvent s'écrire avec au plus un seul chiffre après la virgule.

Exemples :

$0,1 \in \mathbb{D}_1$; $23,4 \in \mathbb{D}_1$; $-4,8 \in \mathbb{D}_1$; $33 \in \mathbb{D}_1$; $-42,73 \notin \mathbb{D}_1$; $4,05 \notin \mathbb{D}_1$
$1\,732,1 \in \mathbb{D}_1$; $0 \in \mathbb{D}_1$.

Exercices :

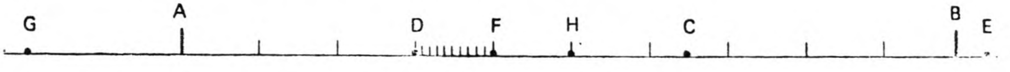
Indique parmi les nombres suivant ceux qui sont éléments de $\mathbb{D}_1$:
7,8 ; 0,13 ; 81,90 ; -43 ; 102,0 ; -81,304 ; 7,10 ; -8,91 ; 0,07 ; 13 245.

Observons la nouvelle échelle : tu peux remarquer que les points D et F sont des barreaux de cette nouvelle échelle.

Vérifie que le point G *est un barreau de cette échelle. Quel est son code ?*

Quel est le couple associé au point C *? au point* E *?*

2.2 Nous avons reproduit le dessin ci-dessus et nous avons divisé l'échelon **DF** en dix. A partir de ces nouveaux barreaux, tu pourrais dessiner une nouvelle échelle régulière sur la droite AB.



Pour cette nouvelle échelle dans l'échelon DF, les barreaux seraient codés par les nombres : 0,30 ; 0,31 ; 032 ; 0,33 ; ... ; 0,38 ; 0,39 ; 0,40.

Tous les codes que tu trouverais pour cette nouvelle échelle seraient des nombres décimaux pouvant s'écrire avec au plus deux chiffres après la virgule.

Nous noterons $\mathbb{D}_2$ l'ensemble des décimaux qui peuvent s'écrire avec deux décimales (deux chiffres après la virgule).

Exercice :

Quels sont les éléments de $\mathbb{D}_2$ *parmi les décimaux suivants :* 0,01 ; 40,3 ; 75,321 ; -42,300 ; -8,7 ; -8,9307 ?

2.3 S'il nous était possible de marquer les points d'un très extrêmement fin, on pourrait alors diviser chaque échelon de cette nouvelle échelle en dix.

Les codes de ces nouveaux barreaux seraient alors des éléments de $\mathbb{D}_3$.

Il serait matériellement impossible de diviser en dix les nouveaux échelons obtenus ; on peut pourtant imaginer une échelle plus fine, dont les barreaux seraient codés par des éléments de $\mathbb{D}_4$. Si n est un entier supérieur à 4, on peut même imaginer une échelle extrêmement fine dont les barreaux seraient codés avec des décimaux qui peuvent s'écrire avec au plus n chiffres après la virgule ; autrement dit, ces barreaux seraient codés avec des éléments de $\mathbb{D}_n$. Bien entendu, il est tout à fait impossible de dessiner une telle échelle.

ENCADREMENT DE SOMMES ET DE PRODUITS

I – ARTHUR ET SON JARDIN.

Devant la maison d'Arthur, il y a un jardin magnifique dans lequel poussent toutes sortes de plantes extraordinaires : petits pois, carottes, poireaux,....

Ce jardin cause bien du souci à Arthur depuis que son ami Eusèbe lui a demandé :
«ton jardin, il est grand comment ? »

Arthur a été bien embêté et il n'a pas su répondre. Depuis, il a beaucoup réfléchi et puisque son jardin est rectangulaire, il a décidé d'appeler L sa longueur et ℓ sa largeur.

Mais cela n'a rien arrangé du tout, bien au contraire. Depuis ce jour-là, les choses n'ont fait qu'empirer et il arrive même que la nuit, Arthur fasse des cauchemars où il est poursuivi par des grand L et des petits ℓ.

Aussi, un beau mercredi matin où il faisait du soleil et où il n'avait pas de devoir de mathématique à faire, Arthur a décidé d'en avoir le cœur net. Il allait enfin savoir et pour cela il allait mesurer son jardin.

Après un copieux petit déjeuner bien nécessaire avant de partir pour une telle aventure, Arthur se mit à la recherche d'un instrument de mesure. Les choses commençaient mal. Il ne réussit qu'à trouver un vieux double décimètre à peine entier et pas mal ébréché.

Arthur alla s'asseoir sur le banc qui se trouve sous le pommier au fond du jardin et se mit à réfléchir. Il se dit que mesurer le jardin avec cet ustensile allait être un travail très éprouvant et tout à coup, il eut une idée : il allait mesurer le jardin avec ses pas.

Dans le sens de la largeur, il trouva 35 pas. Il recommença plusieurs fois et il trouvait à chaque coup 35 pas.

Il décida de remplacer ℓ par le nombre 35 et il écrivit sur son carnet :

$$\ell = 35.$$

S'il avait été très savant, il aurait dit que 35 était la mesure en pas de la largeur de son jardin.

Dans le sens de la longueur, avec 57 pas, il n'arrivait pas tout à fait au bout du jardin, mais il ne restait pas assez de place pour faire encore un pas.

Arthur se gratta la tête deux ou trois fois et il écrivit sur son carnet :

$$57 \leqslant L \leqslant 58.$$

Il avait donné un encadrement de L.

Tout cela avait conduit un Arthur très satisfait de lui jusqu'au diner, et c'est avec bon appétit qu'il se mit à table. Tout à coup, au moment où il allait attaquer son dessert (une glace à la pistache...) une idée affreuse le poignarda :

«et si les pas que j'ai fait ce matin n'avaient pas tous la même longueur... ? ».

Il fallait contrôler cela tout de suite. Laissant la glace à la pistache fondre dans son assiette, sous le regard ahuri de ses parents, Arthur se précipita dans le jardin. Sur l'allée très dure qui traverse le jardin, il marqua toute une série de ses pas et les mesura avec son vieux double décimètre. Catastrophe ! il n'y en avait pas deux pareils.

Le plus court mesurait 0,63 m et le plus long 0,68 m.

Arthur décida d'imaginer un nombre p, mesure théorique de son pas en mètres, et il écrivit sur son carnet

$$0{,}63 \leqslant p \leqslant 0{,}68\,,$$

puis il retourna s'asseoir sur son banc. Il avait donné un encadrement de p.

Arthur appela ℓ' la mesure de la largeur du jardin en mètres, L' la mesure de la longueur du jardin en mètres, et découvrit qu'il ne connaissait toujours par ℓ' et L'. Par contre, il pouvait faire quelque chose de beaucoup plus amusant et calculer un encadrement de ℓ' et un encadrement de L'.

Arthur était enchanté. Si bien qu'il appela :

P la mesure du périmètre du jardin en mètres, et

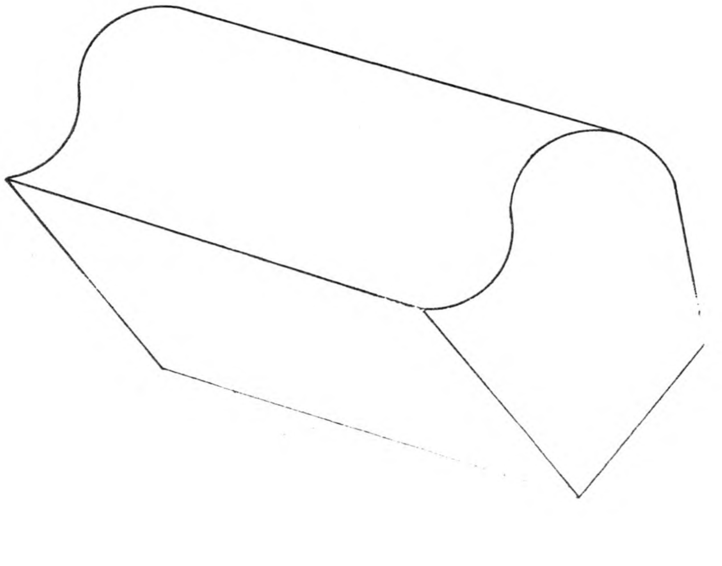
S la mesure de la surface du jardin en mètres carrés,

et qu'il calcula un encadrement de P et un encadrement de S.

Fais les mêmes calculs qu'Arthur et donne des encadrements des nombres ℓ', L', P *et* S.

II – ARTHUR, EUSEBE ET LE GADGET.

A quelque temps de là, Arthur reçut la visite de son ami Eusèbe. Celui-ci avait trouvé un objet très curieux. C'était fermé, en métal, lourd, et impossible à décrire ; aussi en voici un dessin :



Les deux amis étaient très intrigués. Ils tournèrent cet objet dans tous les sens un certain nombre de fois sans arriver à deviner à quoi cela pouvait bien servir.

«Un truc comme ça, dit Eusèbe au bout d'un moment, cela ne peut servir à rien. Cela doit être un gadget qu'on trouve avec les paquets de lessive. Il n'y a qu'à le jeter».

Mais Arthur était d'un autre avis. Il avait vu un jour dans son dictionnaire qu'on pouvait trouver le nombre qui mesure le volume d'un objet. Pour cela, il suffisait de :

– choisir une unité pour mesurer les longueurs, et par conséquent une unité pour mesurer les surfaces et une unité pour mesurer les volumes ;
– connaître le nombre qui mesure la surface de la base de l'objet ;
– connaître le nombre qui mesure la hauteur de l'objet ;
– multiplier ces deux nombres.

De plus Arthur avait envie de faire profiter Eusèbe de ses connaissances toutes neuves en matière d'encadrement. Il proposa donc à son ami de chercher un encadrement du nombre qui mesure le volume du gadget.

Cette idée n'enthousiasmait pas particulièrement Eusèbe, mais après tout puisque ce jour là il pleuvait, autant faire cela que de passer une après-midi devant la télévision.

Arthur alla chercher un vieux parchemin transparent qu'il avait trouvé par hasard dans une malle du grenier en cherchant un instrument de mesure. Ce parchemin avait dû être rapporté par sa tante Gertrude à la suite d'une de ses périlleuses expéditions en Transvalachie.

Nous t'avons donné sur la feuille de manipulation C 5 une copie (en meilleur état) de ce parchemin transparent.

Les deux amis décidèrent de choisir :

– comme unité de longueur : la longueur du côté d'un carré du quadrillage numéro 3 ; ils appelèrent u cette unité.

La longueur du côté d'un carré du quadrillage numéro 2 est donc 2u ; celle du côté d'un carré du quadrillage numéro 1 est 4u.

— Comme unité de surface : la surface d'un carré du quadrillage numéro 3. Ils appelèrent u^2 cette unité.

Combien d'unités u^2 *mesure la surface d'un carré du quadrillage numéro 2 ? Du quadrillage numéro 1 ?*

— Comme unité de volume : le volume d'un cube dont une face est un carré du quadrillage numéro 3. Ils appelèrent u^3 cette unité.

Ils appelèrent :

— h le nombre qui mesure en unités u la hauteur du gadget ;
— s le nombre qui mesure en unités u^2 la surface de la base du gadget ;
— v le nombre qui mesure en unités u^3 le volume du gadget.

Et ils trouvèrent :

— un encadrement de h ;
— plusieurs encadrements de s ;
— et donc plusieurs encadrements de v.

Nous allons faire comme eux.

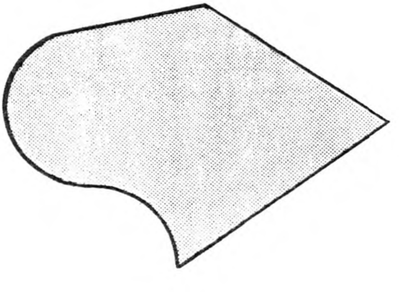
Encadrement de h.

Voici un segment qui a même longueur que la hauteur du gadget :

Utilise un côté du quadrillage numéro 3 pour trouver un encadrement de h.

Premier encadrement de s et de v.

Voici un dessin de la base du gadget, en vraie grandeur.



Pose le quadrillage numéro 1 sur ce dessin.

Compte tous les carreaux que tu vois entièrement gris.

Compte tous les carreaux que tu vois entièrement ou en partie gris.

Avec tes camarades, écrivez au tableau la double liste des résultats que vous avez trouvés.

Choisissez un encadrement de s. ***(Pour cela, il ne faut pas oublier que*** s ***est mesuré en unités*** u^2***).***

Déduis-en un encadrement de v.

Deuxième encadrement de s et de v.

Recommence en utilisant le quadrillage numéro 2.

Choisis de la même façon, avec tes camarades, un encadrement de s.

Déduis-en un encadrement de v.

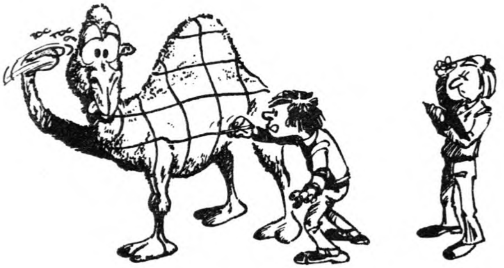
Troisième encadrement de s et v.

Recommence en utilisant le quadrillage numéro 3.

Choisissez un nouvel encadrement de s.

Déduis-en un encadrement de v.

Quelles observations fais-tu sur les trois encadrements de v ***que tu as trouvés ?***



DIVISION DES NOMBRES DECIMAUX

I – EXERCICES.

1.1 Le graphique sur papier millimétré de la feuille de manipulation C 5 indique la correspondance entre les nombres qui mesurent une distance en miles anglais et en kilomètres.

Le trait rouge t'indique que 100 miles correspondent à 160 km. Cela signifie que, pour deux voitures, l'une de marque française, l'autre de marque anglaise, lorsque le compteur totalisateur de la première indique 160, le compteur totalisateur de la seconde indique 100.

En utilisant ce graphique, donne le nombre de miles qui correspond à 80 km. ***Divise le nombre trouvé par 80.***

Même question pour 240 km, 40 km, 280 km. Que constates-tu ?

En utilisant ce graphique, donne le nombre de kilomètres qui correspondent à 25 miles. ***Divise le nombre trouvé par 25.***

Même question pour 125 miles, 75 miles. Que constates-tu ?

Calcule à quoi correspond : 1 mile ; 47 miles ; 12,3 miles.

Tu viens de trouver que 1 mile correspond à 1,6 kilomètre.

Calcule à quoi correspondent : 35 kilomètres ; 14,1 kilomètres ; 1 kilomètre.

Pour savoir à quoi correspond 1 kilomètre, tu as sans doute divisé 1 par 1,6 et tu as trouvé 0,625. Donc :

$$0{,}625 \times 1{,}6 = 1.$$

On dit que 0,625 est **l'inverse** de 1,6 et que 1,6 est l'inverse de 0,625.

Pour savoir à quoi correspondent 35 kilomètres, il est possible que dans la classe, vous ayez utilisé les deux méthodes suivantes :

— diviser 35 par 1,6 ;

— calculer à quoi correspond 1 kilomètre en divisant 1 par 1,6 puis multiplier 35 par 0,625.

Vérifie que les deux méthodes donnent le même résultat.

Donc diviser par 1,6 ou multiplier par son inverse 0,625 donnent le même résultat.

Remarque.

Dans cet exercice, nous avons supposé que 1 mile anglais correspond à 1,6 kilomètre soit 1 600 mètres. Ceci n'est pas la valeur exacte du mile anglais et nous l'avons choisie pour simplifier l'exercice. Sur ton dictionnaire, tu peux lire une valeur approchée plus précise du mile anglais : 1 609 mètres.

Quant au mille marin, une valeur approchée en est 1 852 mètres.

1.2 Dans le premier tableau de la page 2 de la feuille de manipulation C 5, on a donné en millions d'habitants la population des différents continents en 1 920, en 1 961 et une prévision pour l'an 2 000.

A la première ligne, on a voulu savoir par combien il fallait multiplier la population de l'Asie en 1 920 pour obtenir la population prévue en l'an 2 000. Pour cela nous avons posé la division :

3 720	960
840	3,87
720	
48	

Nous avons arrêté cette division lorsque nous avons trouvé la 2ème décimale. On dit que 3,87 est le **quotient approché à 0,01 près par défaut** de 3 720 et 960. Cela signifie que si les prévisions sont bonnes, la population de l'Asie en l'an 2 000 sera approximativement la population de 1 920 multipliée par 3,87

Fais le même calcul pour les autres continents. Partagez-vous le travail dans la classe.

1.3 Tu sais peut-être que lorsque le ministre des finances établit le budget de la nation, il prévoit plusieurs sources pour les recettes, par exemple : les impôts sur les revenus, la T.V.A., etc...

Sur le deuxième tableau de la feuille de manipulation, nous avons indiqué, en milliards de francs, le montant de certains de ces postes pour le budget de 1 972.

A la dernière ligne, nous avons indiqué le montant total des recettes prévues : 200,3 milliards.

A la première ligne, nous avons calculé ce que représente en pourcentage l'impôt sur les revenus par rapport au total des recettes de l'état. Pour cela nous avons divisé 34,26 par 200,3 ce qui revient à diviser 342,6 par 2 003.

Voici cette division :

342,6	2 003
142 30	0,171 0
02 090	
0 0870	

Nous avons arrêté cette division lorsque nous avons trouvé la quatrième décimale. On dit que 0,171 0 est le quotient approché à 0,000 1 près par défaut de 34,26 et de 200,3.

Cela signifie que sur 1 F de recette, la part qui provient de l'impôt sur le revenu est 0,171 0 F.

L'habitude est de donner cette part pour 100 F ; elle est ici de 17,10 F.

Fais les mêmes calculs pour les autres lignes. Partagez-vous le travail dans la classe.

II – REFLEXIONS SUR LES EXERCICES PRECEDENTS.

2.1 Dans les trois exercices précédents, on a fait des divisions de nombres entiers ou de nombres décimaux en cherchant des quotients approchés.

Certaines de ces divisions nous ont donné un quotient entier ou décimal et un reste nul.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 1,6 \\ \cline{2-2} 40 & 0,625 \\ 80 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$$

1er exercice : calcul du nombre de miles correspondant à 1 kilomètre.

2ème exercice : rapport entre la population de l'an 2 000 et celle de 1 972 pour l'Océanie.

Pour d'autres divisions, nous nous sommes arrêtés à la deuxième décimale (2ème exercice) ou à la quatrième (3ème exercice) pour des raisons pratiques alors que le reste de la division n'était pas nul.

Nous ne nous sommes pas posé la question de savoir si «en poursuivant la division assez loin» il était possible de trouver un reste nul.

Pour certaines de ces divisions, on pourrait le constater sans effort excessif.

Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 35 & 1,6 \\ \cline{2-2} 30 & 21,875 \\ 140 & \\ 120 & \\ 080 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14,1 & 1,6 \\ \cline{2-2} 130 & 8,81 \\ 020 & \\ 4 & \end{array}$$

1er exercice : nombre de miles correspondant à 35 kilomètres.

1er exercice : nombres de miles correspondant à 14,1 kilomètres.

$$\begin{array}{r|l} 420 & 160 \\ \cline{2-2} 100 & 2,62 \\ 40 & \\ 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3\,720 & 960 \\ \cline{2-2} 840 & 3,87 \\ 720 & \\ 48 & \end{array}$$

2ème exercice : rapport entre la population de l'an 2 000 et celle de 1 920 pour l'U.R.S.S.

2ème exercice : rapport entre la population de l'an 2 000 et celle de 1 920 pour l'Asie.

Termine toi-même ces divisions.

Tu vois que

$$35 = 1,6 \times 21,875 \quad ;$$
$$14,1 = 1,6 \times 8,8125 \quad ;$$
$$420 = 160 \times 2,625 \quad ;$$
$$3\,720 = 960 \times 3,875.$$

Soit a et b deux nombres décimaux :

si la division de a par b tombe juste c'est qu'il existe un nombre décimal q tel que $a = b \times q$,

s'il existe un nombre décimal q tel que $a = b \times q$, alors la division de a par b tombe juste.

On peut se poser la question : est-ce que toute division de nombres décimaux tombe juste ?

Dans le paragraphe suivant nous allons donner une réponse à cette question dans le cas où le deuxième nombre a un inverse.

2.2 Soit a et b deux nombres décimaux tels que

b a un inverse.

Appelons c cet inverse.

Supposons qu'il existe un décimal q tel que

$$a = b \times q.$$

Justifie les égalités suivantes.

$c \times (b \times q) = c \times a$;
$c \times (b \times q) = (c \times b) \times q$;
$(c \times b) \times q = 1 \times q$;
$1 \times q = q$;
$q = c \times a$.

Nous avons montré que s'il existe un nombre q tel que $a = b \times q$, nécessairement

$$q = c \times a.$$

Considérons les nombres décimaux 35 et 1,6 :

1,6 a un inverse (1er exercice).

Cet inverse est 0,625.

Supposons qu'il existe un décimal q' tel que

$$35 = 1,6 \times q'.$$

Justifie les égalités suivantes.

$0,625 \times (1,6 \times q') = 0,625 \times 35$;
$0,625 \times (1,6 \times q') = (0,625 \times 1,6) \times q'$;
$(0,625 \times 1,6) \times q' = 1 \times q'$;
$1 \times q' = q'$;
$q' = 0,625 \times 35$.

Nous avons montré que s'il existe un nombre q' tel que $35 = 1,6 \times q'$, nécessairement

$$q' = 0,625 \times 35.$$

Il n'y a donc pas d'autre nombre q que le nombre $c \times a$ pour lequel $a = b \times q$.

Il faut maintenant chercher si le nombre $c \times a$ répond à la question

Montre que

$a = b \times (c \times a)$.

Il n'y a donc pas d'autre nombre q' que le nombre 0625×35 pour lequel $35 = 1{,}6 \times q'$.

Ce nombre répond à la question. En effet tu as déjà constaté dans le premier exercice qu'il revient au même de diviser par 1,6 ou de multiplier par 0,625 ; en particulier

$35 = 1{,}6 \times (0{,}625 \times 35)$.

Nous venons de montrer que,

si a et b sont des nombres décimaux et si b a un inverse, il existe un nombre unique q tel que $a = b \times q$; ce nombre est le produit de a par l'inverse de b ;

donc, dans ce cas, la division de a par b tombe juste (il suffit de poursuivre l'opération assez loin).

Dans le cas où b n'a pas d'inverse, on ne sait pas encore répondre à la question posée à la fin du paragraphe précédent.

Exercice :

Montre que toute division par 2 *tombe juste si on la poursuit assez loin. Même question pour* 5, *pour* 4 *et pour* 8.

III — INVERSE D'UN NOMBRE DECIMAL.

3.1 Exemple 1.

Cherchons si le nombre 3 a un inverse. Pour cela, posons la division de 1 par 3 :

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 0{,}3 \end{array}$$

Est-ce que 0,3 *est l'inverse de* 3 *?*

Le reste de cette division est 1. Pour trouver le chiffre suivant, on va ajouter 0 au reste, c'est-à-dire le multiplier par 10.

Quel chiffre va-t-on trouver au quotient ? Quel sera le nouveau reste ? Que va-t-il se passer si on continue la division ? Le nombre 3 *a-t-il un inverse ?*

3.2 Exemple 2.

Cherchons si le nombre 7 a un inverse. Pour cela posons la division de 1 par 7.

1	7

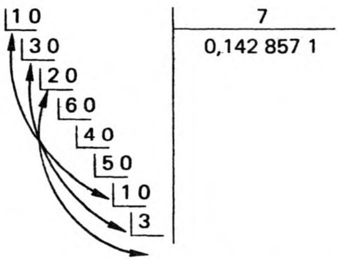
On est amené à diviser 10 par 7. Le reste est 3. On doit alors diviser 30 par 7. Le reste est 2. Arrêtons-nous là pour le moment.

Sans continuer la division, peux-tu dire quels sont les restes possibles pour ces divisions successives ? Pourquoi ?

Supposons qu'on soit arrivé à la sixième décimale du quotient et qu'on n'ait toujours pas trouvé 0 comme reste.

Pourquoi est-on assuré que la division suivante donnera pour reste un nombre déjà trouvé ?

Vérifions :



Tu vois donc qu'on ne pourra pas trouver 0 comme reste si loin qu'on poursuive la division. On est assuré que 7 n'a pas d'inverse : en effet, on sait que lorsqu'un nombre a un inverse, toute division par ce nombre tombe juste lorsqu'on poursuit assez loin.

On a de plus trouvé qu'on peut écrire le quotient approché à 10^{-n} près par défaut sans poursuivre la division. Ainsi :

— le quotient approché à 10^{-6} près par défaut de 1 par 7 est : 0,142 857 ;

— le quotient approché à 10^{-7} près par défaut de 1 par 7 est : 0,142 857 1 ;

— le quotient approché à 10^{-8} près par défaut de 1 par 7 est : 0,142 857 14.

Ecris les quotients approchés à 10^{-13} près, à 10^{-17} près par défaut de 1 par 7.

3.3 Exemple 3.

Dans l'exemple précédent, on a vu que dans la division de 1 par 7, il n'était possible de trouver que 6 restes différents et différents de 0. En fait, on les a tous trouvés.

Cherchons si 37 a un inverse. En raisonnant comme ci-dessus, on peut affirmer que dans la division de 1 par 37, il n'est pas possible de trouver plus de 36 restes différents et différents de 0.

Mais avant d'effectuer cette division, on ne peut pas savoir si ces 36 restes apparaissent effectivement.

Effectue la division de 1 *par* 37. *Tu arrêteras cette division :*

— soit si tu trouves comme reste 0 *;*

— soit lorsque tu penses avoir trouvé tous les restes possibles.

Le nombre 37 *a-t-il un inverse ?*

Remarque :

Les trois exemples précédents nous montrent qu'il existe des couples de nombres décimaux (a, b) tels que la division de a par b ne se termine pas.

Pour ces couples, il n'existe pas de nombre décimal q tel que

$$a = b \times q.$$

On n'est jamais dans cette situation si b a un inverse.

3.4 Nombres décimaux ayant un inverse.

Dans un des exercices précédents nous avons vu que 16 a un inverse, qui est 0,062 5. Donc

$$16 \times 0{,}062\,5 = 1\ ;$$
$$(16 \times 0{,}062\,5) \times 10^4 = 1 \times 10^4\ ;$$
$$16 \times (0{,}062\,5 \times 10^4) = 10^4.$$

Mais
$$0{,}062\,5 \times 10^4 = 625.$$

Donc
$$16 \times 625 = 10^4.$$

Ceci montre que 10^4 est divisible par 16.

Soit b un nombre entier ayant un inverse. On pourrait montrer comme ci-dessus qu'il existe un entier naturel n tel que 10^n soit divisible par b.

Inversement.

Soit b un nombre entier. Supposons qu'il existe un nombre entier naturel n tel que 10^n soit divisible par b.

Soit alors p l'entier tel que

$$b \times p = 10^n.$$

Justifie les égalités suivantes :

$$(b \times p) \times 10^{-n} = 10^n \times 10^{-n} \;;$$
$$b \times (p \times 10^{-n}) = 1\,.$$

Cette dernière égalité montre que b a un inverse décimal.

Exemples :

1 000 est divisible par 8, donc 8 a un inverse ;
100 est divisible par 25, donc 25 a un inverse ;
10 000 est divisible par 400, donc 400 a un inverse.

Calcule ces inverses.

Exercices :

Soit r et s deux entiers naturels.

Est-ce que 2^r *a un inverse ?*

Est-ce que 5^s *a un inverse ?*

Est-ce que $2^r \times 5^s$ *a un inverse ?*

Remarque :

Si b est un entier qui a un inverse décimal alors, si $p \in \mathbb{Z}$, le décimal $b \times 10^p$ a aussi un inverse décimal.

Exemples :

Calcule les inverse de 4 ; 0,4 ; 0,04 ; 40.

Calcule l'inverse de 0,08.

Calcule l'inverse de 25.

3.5 Conclusion.

Il résulte de ce qu'on a fait dans le paragraphe III que :
- certains nombres décimaux ont un inverse, d'autres pas ;
- on sait reconnaître les nombres décimaux qui ont un inverse.

En effet si on écrit un nombre décimal sous la forme :

$$a \times 10^p \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{Z}\,,$$

ce nombre a un inverse, si et seulement si, il existe un entier naturel n tel que 10^n soit divisible par a.

INTERVALLES ET ENCADREMENTS

I – DEFINITIONS.

1.1 Voici trois nombres décimaux :

1,31 , -4,5 , 3,1 .

Range-les par ordre de grandeur croissante. Tu remarques que :

$-4{,}5 < 1{,}31$ *et* $1{,}31 < 3{,}1$.

On dit que 1,31 est compris strictement entre -4,5 et 3,1, ou encore que 1,31 est **encadré strictement** par -4,5 et 3,1.

Donne d'autres nombres encadrés strictement par -4,5 *et* 3,1.

L'ensemble des nombres décimaux encadrés strictement par -4,5 et 3,1 est appelé **intervalle ouvert** dans ID et noté

$]-4{,}5\,;\,3{,}1[$.

Pour un nombre décimal a, les deux propriétés suivantes sont donc équivalentes :

$-4{,}5 < a < 3{,}1$ et $a \in\,]-4{,}5\,;\,3{,}1[$.

Nous avons déjà écrit plusieurs fois de tels encadrements depuis le début de l'année.

1.2 On peut définir aussi l'ensemble des nombres encadrés par -4,5 et 3,1. Cet ensemble est appelé **intervalle fermé** dans ID et noté

$$[-4,5\ ;\ 3,1\,].$$

Les nombres -4,5 et 3,1 appartiennent à cet intervalle fermé.

Pour un nombre décimal a, les deux propriétés suivantes sont donc équivalentes :

$$-4,5 \leqslant a \leqslant 3,2 \quad \text{et} \quad a \in [-4,5\ ;\ 3,1\,].$$

1.3 Exercices.

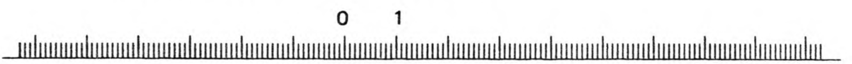
Calcule la différence des nombres 3,1 *et* -4,5.

Ce nombre est appelé **diamètre** de l'intervalle.

Montre que le nombre $\frac{-4,5 + 3,1}{2}$ *est un nombre décimal qui appartient à cet intervalle.*

Ce nombre est appelé **centre** de l'intervalle.

Voici une échelle régulière graduée :



Sur ce dessin, où se trouvent les barreaux correspondant à 3,1, *à* - 4,5 *et au centre de l'intervalle ?*

Ecris d'autres intervalles ouverts ou fermés.

Sous chacun d'eux, écris des nombres appartenant à l'intervalle, et calcule le diamètre et le centre de l'intervalle.

Pour l'un d'entre-eux, fais un dessin comme ci-dessus.

1.4 Exercices.

Voici deux intervalles de ID :

]4,7 ; 13,2[,]9,13 ; 15[.

Quelle est leur intersection ? Leur réunion ?

Fais un dessin.

Les ensembles que tu viens de trouver sont-ils des intervalles de ID ?

Mêmes questions pour les intervalles suivants :

]-5,2 ; 2[*et* [-3,7 ; -1] ;
]1,5 ; 4,37[*et*]5 ; 6,3[;
[6,41 ; 8,2] *et* [8,2 ; 10] ;
]6,41 ; 8,2[*et*]8,2 ; 10[.

1.5 Nous avons déjà utilisé la notion d'encadrement dans le document C 5 pour encadrer un nombre inconnu.

Ainsi, Arthur avait appelé P le nombre inconnu mesurant le périmètre de son jardin en mètres et il avait trouvé :

$$115{,}92 \leqslant P \leqslant 125{,}12.$$

On dit que 115,92 est une **valeur approchée par défaut de P, et** que 125,12 est une **valeur approchée par excès** de P.

Soit d un décimal qui appartient à]115,92 ; 125,12[.

Peut-on dire si d *est une valeur approchée par excès ou par défaut de* P *?*

Exercice.

Soit x un nombre décimal tel que

$$-2{,}571 \leqslant x \leqslant 1{,}73.$$

Donne une valeur approchée par défaut de x, *une valeur approchée par excès de* x.

Peux-tu dire si le centre de l'intervalle]-2,571 ; 1,73[*est une valeur approchée de* x *par excès ou par défaut ?*

1.6 Dans le document C 9 nous avons calculé l'inverse de 1,6 ; notons ce nombre $\frac{1}{1,6}$. Nous savons que $\frac{1}{1,6} = 0,625$.

On peut donc écrire que

$$0 \leqslant \frac{1}{1,6} < 1,$$

$$0,6 \leqslant \frac{1}{1,6} < 0,7,$$

$$0,62 \leqslant \frac{1}{1,6} < 0,63\,,$$

$$0,625 \leqslant \frac{1}{1,6} < 0,626\,,$$

$$0,625\,0 \leqslant \frac{1}{1,6} < 0,625\,1\,.$$

Ecris les deux double inégalités suivantes.

Les nombres 0 ; 0,6 ; 0,62 ; 0,625 ; 0,625 0 ; etc... sont des valeurs approchées par défaut de $\frac{1}{1,6}$.

On dit que ce sont des **valeurs approchées à 1 unité près, à 10^{-1} près, à 10^{-2} près** etc... Tu remarques que $\frac{1}{1,6}$ est égal à sa valeur approchée par défaut à 10^{-3} près.

Compare $\frac{1}{1,6}$ *et ses valeurs approchées par défaut à* 10^{-n} *près lorsque* $n \geqslant 3$.

Les nombres 1 ; 0,7 ; 0,63 ; 0,626 ; 0,625 1 , etc... sont des valeurs approchées par excès de $\frac{1}{1,6}$.

Compare-les avec $\frac{1}{1,6}$.

On dit que ce sont des valeurs approchées à 1 unité près, à 10^{-1} près, à 10^{-2} **près**, etc... Avec la convention choisie pour l'utilisation des signes $\leqslant$ et $<$, le nombre $\frac{1}{1,6}$ ne peut être égal à aucune des valeurs approchées par excès trouvées ici.

Remarque.

Dans ce qui précède, nous avons choisi d'écrire des valeurs approchées par défaut ou par excès à 10^{-1} près, 10^{-2} près, etc...

Bien entendu, il est possible d'écrire d'autres valeurs approchées de $\frac{1}{1,6}$.

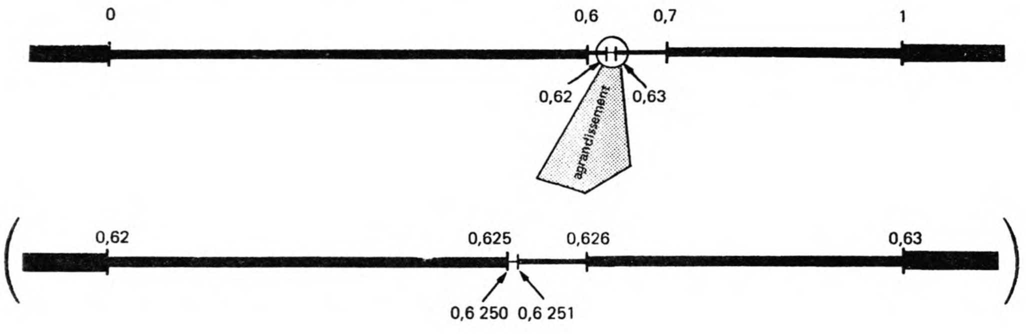
Ainsi, $$0,5 < \frac{1}{1,6} < 0,81.$$

Le nombre 0,5 est aussi une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1,6}$; le nombre 0,81 est aussi une valeur approchée par excès de $\frac{1}{1,6}$.

Ecrivons la suite d'intervalles :

[0 ; 1[;
[0,6 ; 0,7[;
[0,62 ; 0,63[;
[0,625 ; 0,626[;
0,625 0 ; 0,625 1[;
[0,625 00 ; 0,625 01[.

On pourrait continuer.



Sur la première figure nous avons représenté les 3 premiers intervalles.

Sur la deuxième figure nous avons représenté l'intervalle [0,62 ; 0,63[en grossissant 100 fois ce qu'on avait obtenu sur la première figure. Puis nous avons représenté les deux intervalles suivants.

Ecris le 8ème intervalle.

Calcule le diamètre de chaque intervalle. Qu'observes-tu ?

Quelle observation peux-tu faire sur les nombre de gauche ? Les nombres de droite ?

Enfin tu remarqueras que tout nombre de la colonne de gauche est inférieur à tout nombre de la colonne de droite.

Exercices.

Choisis un nombre dans la 6ème intervalle. Appartient-il aux intervalles précédents ?

Pour chacun des 6 intervalles, multiplie les deux nombres écrits par 1,6. Tu obtiens une nouvelle suite d'intervalles. Qu'observes-tu ?

1.7 Exercice.

Calcule l'inverse de 400.

Ecris une suite d'encadrements, puis d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite comme ci-dessus, en utilisant des valeurs approchées par défaut et par excès à 1 *unité prés, à* 10^{-1} *près, à* 10^{-2} *prés, etc...*

Peux-tu faire des observations analogues à celles du paragraphe précédent ?

1.8 Dans le document C 9, nous avons vu que le nombre 3 n'avait pas d'inverse. Nous avons posé la division de 1 par 3,

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 0,33 \\ 1 & \end{array}$$

et observé que lorsqu'on arrête la division, tous les chiffres du quotient qui suivent 0 sont des 3 et que le reste est 1. On sait que l'inverse de 3 n'existe pas dans ID : donc on ne peut pas parler d'encadrement de l'inverse de 3.

Ecrivons cependant la suite d'intervalles :

[0 ; 1[;

[0,3 ; 0,4[;

[0,33 ; 0,34[;

[0,333 ; 0,334[.

Ecris le 6ème intervalle.

Tu remarques qu'on peut faire sur ces intervalles les mêmes observations que sur les précédents :

— les diamètres de ces intervalles sont 1, 10^{-1}, 10^{-2}, etc... ;

— tout nombre de gauche est inférieur au nombre de gauche suivant ;

— tout nombre de droite est supérieur au nombre de droite suivant ;

— tout nombre de gauche est inférieur à tout nombre de droite.

Il y a cependant une différence. Dans les exercices précédents, à partir d'un certain rang, tous les nombres de gauche étaient égaux. Cela ne se produit pas ici.

Exercice.

Pour chacun des quatre intervalles, multiplie par 3 *les deux nombres écrits.*

Tu obtiens ainsi une nouvelle suite d'intervalles.

Qu'observes-tu ?

1.9 *Pose la division de* 141 *par* 37. *Arrête-toi lorsque tu penses avoir trouvé tous les restes possibles.*

Ecris alors une suite d'intervalles comme ci-dessus. Ecris-en 8 *par exemple.*

Peux-tu faire des observations analogues à celles du paragraphe précédent ?

II – ENCADREMENTS ET OPERATIONS.

2.1 Encadrements et addition.

Nous avons déjà réalisé un tel exercice dans le document C 5. Nous avions écrit :

$$22{,}05 \leqslant \ell' \leqslant 23{,}80$$
$$35{,}91 \leqslant L' \leqslant 39{,}44$$
$$22{,}05 + 35{,}91 \leqslant \ell' + L' \leqslant 23{,}80 + 39{,}44$$

et nous avons justifié ce résultat dans le document C 10.

Exercice.

Voici un encadrement d'un nombre inconnu x et un encadrement d'un nombre inconnu y :

$$-3{,}27 \leqslant x < -3{,}15 \ ;$$
$$2{,}4 \leqslant y < 2{,}5 \, .$$

Donne un encadrement du nombre $x + y$.

2.2 Encadrements et différence.

Exercice.

Voici deux encadrements de deux nombres inconnus x et y ;

$$3{,}41 \leqslant x \leqslant 3{,}45 \ ;$$
$$1{,}13 \leqslant y \leqslant 1{,}20 \, .$$

Donne un encadrement du nombre $x - y$.

Compare avec tes camarades.

Soit a, b, c et d des nombres décimaux.

Voici deux encadrements des nombres inconnus x et y :

$$a \leqslant x \leqslant b \; ;$$
$$c \leqslant y \leqslant d \, .$$

Justifie ce qui suit :

Si $c \leqslant y \leqslant d$, alors $-d \leqslant -y \leqslant -c$.
Si $a \leqslant x \leqslant b$ et $-d \leqslant -y \leqslant -c$, alors $a + (-d) \leqslant x + (-y) \leqslant b + (-c)$.
Si $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d$, alors $a - d \leqslant x - y \leqslant b - c$.

Est-ce bien ce que tu avais fait dans l'exercice précédent ?

Exercice.

Voici des encadrements de deux nombres inconnus x et y.

$$-2{,}7 \leqslant x \leqslant 1{,}03 \; ;$$
$$-4{,}1 \leqslant y \leqslant -0{,}16 \, .$$

Donne un encadrement de $x - y$.

2.3 Encadrements et multiplication.

Nous avons déjà réalisé un tel exercice dans le document **C 5.** Nous avions écrit :

$$22{,}05 \leqslant \ell \leqslant 23{,}80 \, ,$$
$$35{,}91 \leqslant L \leqslant 39{,}44 \, ,$$
$$22{,}05 \times 35{,}91 \leqslant \ell \times L \leqslant 23{,}80 \times 39{,}44 \, ,$$

et nous avons justifié ce résultat dans le document C 10.

Exercice.

Voici des encadrements de deux nombres inconnus x et y :

$$2{,}1 \leqslant x < 2{,}3 \; ;$$
$$1{,}7 \leqslant y < 1{,}8 \, .$$

Donne un encadrement de $x \times y$.

Tu remarqueras que tous les nombres écrits sont positifs.

Exercice.

Au paragraphe 1.8, la division de 1 par 3 nous a conduit à écrire une suite d'intervalles.

Ecris à nouveau les quatre premiers.

Ecris de même les quatre premiers intervalles obtenus de la même façon en divisant 1 *par* 7. *Tu peux utiliser le résultat trouvé dans le document C 9 au paragraphe 3.2.*

Ecris de même les quatre premiers intervalles obtenus de la même façon en divisant 1 *par* 21.

Nous avons écrit sur une même ligne, les intervalles de diamètre 1 , 10^{-1} et 10^{-2}.

Recopie ce tableau et complète-le.

division de 1 par 3 :	division de 1 par 7 :	division de 1 par 21 :
[0 ; 1 [	[0 ; 1 [	[0 ; 1 [
[0,3 ; 0,4 [	[0,1 ; 0,2 [	[0,0 ; 0,1 [
[0,33 ; 0,34 [	[0,14 ; 0,15 [	[0,04 ; 0,05 [

Indique pour chaque ligne si le nombre de gauche obtenu pour 21 *est le produit des nombres de gauche obtenus pour* 3 *et* 7.

Recommence pour les nombres de droites.

Exercice.

Nous avons divisé 1 par 6 et écrit les 4 premiers intervalles obtenus comme ci-dessus :

[0 ; 1 [,
[0,1 ; 0,2 [,
[0,16 ; 0,17 [,
[0,166 ; 0,167 [.

Choisis un nombre décimal qui appartient au quatrième intervalle.

Pour chacun de ces intervalles, nous avons multiplié les deux nombres écrits par 6. Nous avons obtenu quatre nouveau intervalles :

[0 ; 6 [,
[0,6 ; 1,2 [,
[0,96 ; 1,02 [,
[0,996 ; 1,002 [.

Multiplie par 6 le nombre que tu as choisi. Qu'observes-tu ?

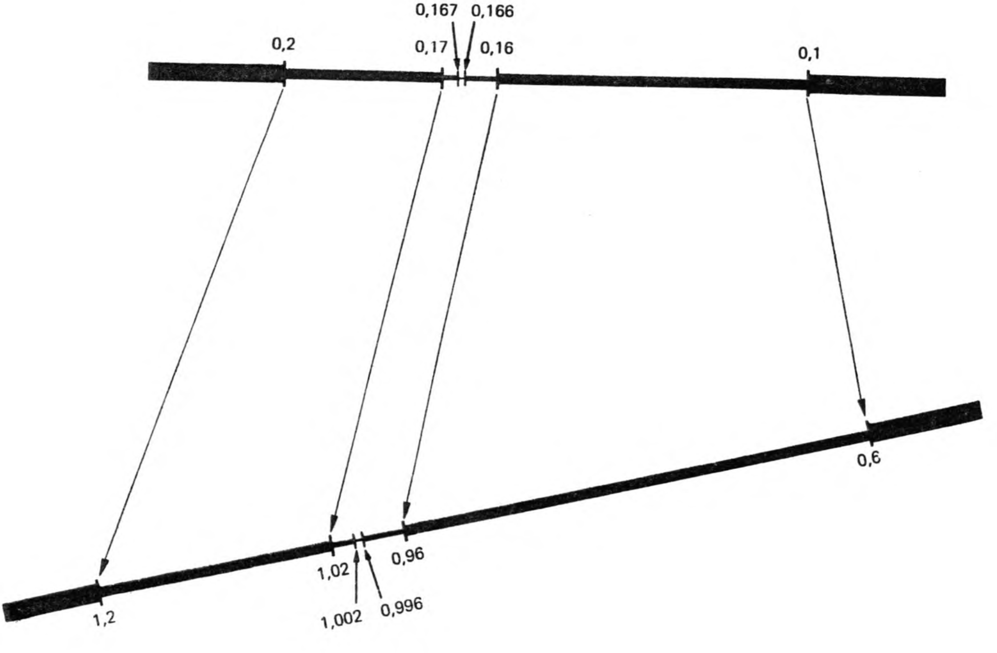
La figure suivante illustre cette situation.

Sur chacune des deux droites, nous avons représenté les trois derniers intervalles de chaque suite.

Les deux parties du dessin n'ont pas été faites à la même échelle. Un intervalle de diamètre 10^{-1} a été représenté.

– Sur la première droite matérielle par un segment de 10 cm de longueur ;

– Sur la deuxième droite matérielle par un segment de 2,5 cm de longueur.



2.4 Dans le paragraphe précédent, tous les nombres utilisés sont positifs.

Exercice.

Voici des encadrements de deux nombres décimaux inconnus x et y :

$$5{,}7 \leqslant x \leqslant 10{,}9 \ ;$$
$$-3 \leqslant y \leqslant -2 .$$

Donne un encadrement de $x \times y$. *Compare avec tes camarades.*

Ceci est essentiel, l'exercice suivant te montrera pourquoi.

RACINE CARREE D'UN NOMBRE DECIMAL

I – CARRE ET RACINE CARREE.

1.1 Notons A l'ensemble {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Soit B l'ensemble des carrés des éléments de A :

B = {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}.

Soit f l'application de A vers B qui à tout élément de A associe son carré. Nous pouvons donner la table de cette application :

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

L'application f *est-elle une bijection ?*

Cette table donne l'image de tout élément de A par f c'est-à-dire le carré de tout nombre appartenant à A.

Quel est le nombre de A *dont le carré est* 36 *?*

On dit aussi que 6 est **racine carrée** de 36.

La table permet d'associer une racine carrée à chaque élément de B.

1.2 Considérons maintenant l'application g de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui à tout nombre entier naturel associe son carré.

Pourquoi ne peut-on pas écrire la table de cette application ?

On peut cependant choisir deux nombres entiers quelconques a et b et écrire la table des carrés des nombres compris entre a et b.

Par exemple, voici la table des carrés des nombres compris entre 13 et 21

13	14	15	16	17	18	19	20	21
169	196	225	256	289	324	361	400	441

Cette table permet comme ci-dessus de trouver le carré d'un nombre de la première ligne, ou une racine carrée d'un nombre de la deuxième ligne.

Par exemple :

Quel est le carré de 17 *?*

Quelle est la racine carrée de 361 *dans l'ensemble des nombres compris entre* 13 *et* 21 *?*

Penses-tu que l'application g *de* $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{N}$ *soit une bijection ?*

Soit a et b des entiers naturels tels que $a < b$.

Montre que $a^2 < b^2$.

Penses-tu qu'un entier naturel puisse avoir plus qu'une racine carrée ?

1.3 Nous avons joint à ce document une table des carrés des nombres de 1 à 999.

Sur cette table, tu peux lire :

— à la première ligne, les carrés des nombres de 0 à 9 (de 00 à 09) ;

— à la deuxième ligne, les carrés des nombres de 10 à 19 ;

— à la deuxième ligne, les carrés des nombres de 20 à 29 ;

— etc...

Ainsi, voici un extrait de cette table :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
										—	
15.	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281	15.
16.	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561	16.
17.	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041	17.

27 889 est le carré de 167

Exercices.

Lis sur la table les carrés des nombres : 123 ; 421 ; 79.

Lis sur la table les racines carrées des nombres : 164 836 ; 5 476 ; 95 481.

1.4 *Calcule le carré de* 12 *; de* 1,2 *; de* 0,12 *; de* 0,012. *Que remarques-tu ?*

Soit b un nombre décimal qui appartient à $\mathbb{D}_n$ sans appartenir à $\mathbb{D}_{n-1}$.

Pour illustrer le raisonnement qui suit nous supposons que

b = 1,374.

Le nombre 1,374 appartient à $\mathbb{D}_3$ et n'appartient pas à $\mathbb{D}_2$.

Tu sais que b peut s'écrire sous la forme :

$$a \times 10^{-n}$$

où a est un entier dont le nombre des unités n'est pas 0.

Ainsi, 1,374 peut s'écrire

$$1\,374 \times 10^{-3}.$$

Le carré de b est $(a \times 10^{-n})^2$, soit encore $a^2 \times 10^{-2n}$.

Ainsi le carré de 1,374 est $(1\,374 \times 10^{-3})^2$, soit encore $1\,374^2 \times 10^{-6}$.

Le nombre 1 374 est terminé par un 4. Donc son carré est terminé par un 6 puisque $4^2 = 16$.

Le nombre $1\,374^2$ n'est donc pas terminé par un zéro.

Montre que le nombre a^2 est un nombre entier dont le chiffre des unités n'est pas zéro.

Le carré de b appartient donc à $\mathbb{D}_{2n}$ sans appartenir à $\mathbb{D}_{2n-1}$.

Ainsi le carré de 1,374 appartient à $\mathbb{D}_6$ et n'appartient pas à $\mathbb{D}_5$.

Si un nombre décimal écrit sous forme de nombre à virgule a n décimales dont la dernière n'est pas zéro, son carré a 2n décimales et la dernière n'est pas 0.

Ainsi 1,374 a 3 décimales ; son carré à 6 décimales.

Voici des nombres décimaux : 0,47 ; 19,5 ; 0,327 ; 4,81.

Dis combien le carré de chacun d'eux a de décimales.

Calcule ce carré en utilisant la table.

Les nombres 87,025 ; 7,399 0 *sont-ils les carrés de nombres décimaux ? Si oui, quelle est leur racine carrée ?*

II – ENCADREMENT DE LA RACINE CARREE D'UN NOMBRE DECIMAL.

Dans les exercices qui suivent, on considère un carré. On appelle a la mesure en décimètres du côté de ce carré et A la mesure en décimètres carrés de l'aire de ce carré.

Tu sais que $A = a^2$.

2.1 *Si* A = 98 596 , *calcule* a. 314

Si A = 9,859 6 , *calcule* a. 3,14

2.2 *Si* A = 0,16 , *calcule* a. 0,4

Si A = 9,886 4 , *calcule* a. 314,42 < a < 314,43

2.3 On suppose que A = 0,248 004.

Tu vois sur la table que 248 004 est le carré de 498, donc 0,248 004 est le carré de 0,498.

On peut, comme on l'a fait dans le document précédent, écrire des encadrements de a :

$$0 \leqslant a < 1$$
$$0,4 \leqslant a < 0,5$$
$$0,49 \leqslant a < 0,50$$
$$0,498 \leqslant a < 0,499$$
$$0,498\,0 \leqslant a < 0,498\,1$$

Ecris les deux encadrements suivants.

Peux-tu encore faire ici des observations analogues à celles que tu avais faites dans le document C 11 sur d'autres suites d'encadrement ?

Remarque.

Dans cette écriture, le 0 représente des décimètres, le 4 des centimètres, le 9 des millimètres et le 8 des dixièmes de millimètres.

Du point de vue pratique, il est sans doute plus raisonnable de dire que 0,49 ou 0,50 sont des valeurs approchées de a que de dire que a = 0,498.

Pourquoi ?

2.4 *Pourquoi* 1,3 *ne peut-il être le carré d'un nombre décimal ?*

Puisque $1^2 = 1$ et $2^2 = 4$,

$$1^2 < 1,3 < 2^2.$$

On dit que 1 est la **racine carrée approchée à une unité près par défaut** de 1,3, et que 2 est la **racine carré approchée à une unité près par excès** de 1,3.

Tu sais que $1,3\ dm^2 = 130\ cm^2$.

Vérifie sur la table que 121 *et* 144 *sont deux carrés consécutifs qui encadrent* 130.

Donc

$$121 < 130 < 144\,,$$
$$1,21 < 1,3 < 1,44\,, \quad \text{et}$$
$$(1,1)^2 < 1,3 < (1,2)^2.$$

On dit que 1,1 est **la racine carrée approchée à 10^{-1} près par défaut** de 1,3, et que 1,2 est la **racine carrée approchée à 10^{-1} près par excès** de 1,3.

Tu sais aussi que : $130\ cm^2 = 13\,000\ mm^2$.

Vérifie sur la table que 12 996 *et* 13 225 *sont deux carrés consécutifs qui encadrent* 13 000.

Donc

$$12\,996 < 13\,000 < 13\,225\,,$$
$$1,299\,6 < 1,3 < 1,322\,5\,, \quad \text{et}$$
$$(1,14)^2 < 1,3 < (1,15)^2.$$

On dit que 1,14 est **la racine carrée approchée à 10^{-2} près par défaut** de 1,3 et que 1,15 est **la racine carrée approchée à 10^{-2} près par excès** de 1,3.

Remarque.

Dans l'écriture 1,14, si le chiffre 1 représente des décimètres, le chiffre suivant représente des centimètres et le chiffre 4 représente des millimètres. Cela signifie que :

— si on a un carré dont le côté mesure 1,14 dm, l'aire de ce carré aura pour mesure en dm^2 un nombre inférieur à 1,3 ;

— si on a un carré dont le côté mesure 1,15 dm, l'aire de ce carré aura pour mesure en dm^2 un nombre supérieur à 1,3.

Avec une table plus grande que celle que tu as, on pourrait continuer ce calcul.

Voici des extraits de tables plus grandes ; tu utiliseras d'abord l'extrait I.

I

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1 13.	1 276 900	1 279 161	1 281 424	1 283 689	1 285 956	1 288 225	1 290 496	1 292 769	1 295 044	1 297 321	1 13.
1 14.	1 299 600	1 301 881	1 304 164	1 306 449	1 308 736	1 311 025	1 313 316	1 315 609	1 317 904	1 320 201	1 14.
11 39.	129 732 100	129 754 881	129 777 664	129 800 449	129 823 236	129 846 025	129 891 609	129 891 609	129 914 404	129 937 201	11 39.
11 40.	129 960 000	129 982 801	130 005 604	130 028 409	130 051 216	130 074 025	130 096 836	130 119 649	130 142 464	130 165 281	11 40.

II

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 34.	11 155 600	11 162 281	11 168 964	11 175 649	11 182 336	11 189 025	11 195 714	11 202 409	11 209 104	11 215 801
3 35.	11 222 500	11 229 201	11 235 904	11 242 609	11 249 316	11 256 025	11 262 736	11 269 449	11 276 164	11 282 881
33 45.	1 118 902 500	1 118 969 401	1 119 036 304	1 119 103 209	1 119 170 116	1 119 237 025	1 119 303 936	1 119 370 849	1 119 437 764	1 119 504 681
33 46.	1 119 571 600	1 119 638 521	1 119 705 444	1 119 772 369	1 119 839 296	1 119 906 225	1 119 973 156	1 120 040 089	1 120 107 024	1 120 173 961

Tu vois que :

$1\,299\,600 < 1\,300\,000 < 1\,301\,881$, donc $(1{,}140)^2 < 1{,}3 < (1{,}141)^2$;
$129\,982\,801 < 130\,000\,000 < 130\,005\,604$, donc $(1{,}140\,1)^2 < 1{,}3 < (1{,}140\,2)^2$.

Faisons l'inventaire de ce que nous avons trouvé :

— il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est 1,3 ;

— à ce nombre, nous avons pu associer la suite d'intervalles

$$]1\,;2[,$$
$$]1{,}1\,;1{,}2[,$$
$$]1{,}14\,;1{,}15[,$$
$$]1{,}140\,;1{,}141[,$$
$$]1{,}140\,1\,;1{,}140\,2[\ ;$$

— le diamètre de ces intervalles sont 1, 10^{-1}, 10^{-2}, etc...

— si on choisit un entier n quelconque, avec beaucoup de patience et une très grosse table, ou mieux encore avec une machine, on pourrait trouver un tel intervalle de diamètre 10^{-n} ;

— tout nombre de gauche est inférieur au suivant ;

— tout nombre de droite est supérieur au suivant ;

— tout nombre de gauche est inférieur à tout nombre de droite.

Remarques.

1) Ces résultats ressemblent beaucoup à ceux que nous avons trouvés dans le document C 9 lorsqu'on a divisé 1 par 3, ou 141 par 37.

Dans ces divisions, cependant, nous avons vu qu'à partir d'un certain moment, il était possible de prévoir les décimales suivantes. Ainsi :

— lorsqu'on a divisé 1 par 3, les cinq premières décimales étaient : 3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3 ;

— lorsqu'on a divisé 141 par 37, les sept premières décimales étaient : 8 – 1 – 0 – 8 – 1 – 0 – 8.

Nous n'avons rien observé d'analogue dans la recherche des racines carrées aprochées de 1,3 et nous ne savons donc pas ce qui se passerait si on continuait encore ce calcul.

2) Dans l'exercice 2.3, tu as remarqué qu'à partir d'un certain rang tous les nombres de gauche étaient égaux : 0,498 ; 0,498 0 ; 0,498 00 ; 0,498 000.

Tous ces nombres ont évidemment pour carré 0,248 004. On sait donc que si on écrit des intervalles suivants, les nombres de gauche seront encore égaux à la racine carrée de 0,248 004. Par exemple les deux suivant sont

0,498 000 0 et 0,498 000 00 .

Dans l'exercice 2.4, on n'a rien observé d'analogue. Les nombres écrits à gauche : 1 ; 1,1 ; 1,14 ; 1,140 ; 1,140 1 n'ont pas pour carré 1,3 puisque tu as montré que 1,3 n'a pas de racine carrée dans ID. On ne peut rien prévoir pour les intervalles suivants.

2.5 Exercice.

Pourquoi 11,2 *n'est-il pas le carré d'un nombre décimal ?*

A 11,2, *tu vas associer comme ci-dessus une suite de cinq intervalles.*

Tu vas d'abord chercher :

deux carrés consécutifs qui encadrent 11,2 *;*

deux carrés consécutifs qui encadrent 1 120 *;*

deux carrés consécutifs qui encadrent 112 000 *;*

deux carrés consécutifs qui encadrent 11 200 000 *;*

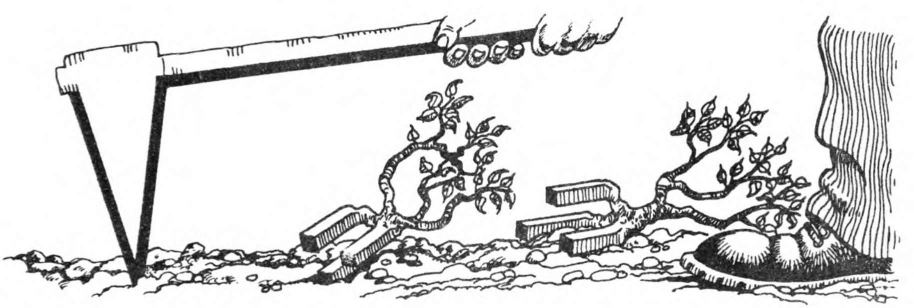
deux carrés consécutifs qui encadrent 1 120 000 000.

Pour cela, tu utiliseras ta table des carrés et l'extrait II de la page 46.

2.6 Exercices.

Donne la racine carrée approchée à 10^{-1} *près par défaut de* 62.

Donne la racine carrée approchée à 10^{-2} *près par défaut de* 8,3.



Chapitre C : ENTIERS ET DECIMAUX

SYNTHESE

I PUISSANCES DE 10.

Nous savions déjà que, si n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, 10^n est une écriture du produit de n facteurs égaux à 10.

Ainsi : $10^3 = 10 \times 10 \times 10$.

Nous avons convenu d'écrire

$10^1 = 10$; $10^0 = 1$; $10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$.

De façon générale, si n est un entier naturel non nul, 10^{-n} s'écrit avec 1 précédé de n zéros (y compris celui qui est avant la virgule).

Nous avons appelé E_{10} l'ensemble des puissances de 10, c'est-à-dire l'ensemble des nombres 10^p où p est un entier relatif.

Nous avons montré que

– si $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$, $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$;
– $(E_{10}, \times)$ est un groupe commutatif.

II – ENSEMBLE $\mathbb{D}$ DES NOMBRES DECIMAUX.

Nous avons étudié l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

1) Cet ensemble contient $\mathbb{Z}$.

2) Il est muni d'une addition, d'une multiplication et d'une relation d'ordre total telles que

- les nombres entiers s'additionnent dans $\mathbb{D}$ comme dans $\mathbb{Z}$;
- les nombres entiers se multiplient dans $\mathbb{D}$ comme dans $\mathbb{Z}$;
- les nombres entiers se rangent dans $\mathbb{D}$ comme dans $\mathbb{Z}$.

3) L'ordre dans $\mathbb{D}$ possède une propriété que n'a pas l'ordre dans $\mathbb{Z}$:

Si a et b sont deux nombres décimaux quelconques tels que $a < b$, il existe toujours un nombre décimal strictement compris entre a et b.

4) Si a et b sont deux nombres décimaux tels que $a < b$, l'intervalle fermé $[a ; b]$ est l'ensemble des nombres décimaux compris entre a et b.

Si x est un élément de $[a ; b]$, on peut écrire

$$a \leqslant x \leqslant b ;$$

on dit que x est encadré par a et b.

5) Nous avons vu que tout élément de $\mathbb{D}$ peut s'écrire de plusieurs façons sous la forme $a \times 10^p$ où $a \in \mathbb{D}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Si le nombre décimal étudié est différent de zéro, il y a une seule écriture dans laquelle a est un entier qui ne se termine pas par zéro.

Si le nombre décimal étudié est strictement positif, il y a une seule écriture dans laquelle a est un nombre décimal compris entre 1 et 10.

Exemple.

$15{,}3 = 153 \times 10^{-1} = 1\,530 \times 10^{-2} = 15\,300 \times 10^{-3}$;
$\quad = 1{,}53 \times 10 = 0{,}153 \times 10^{2}$.
$1{,}53 \times 10$ vérifie $1 \leqslant 1{,}53 < 10$;
153×10^{-1} vérifie 153 est un entier qui ne se termine pas par zéro.

III – LE QUADRUPLET $(\mathbb{D}, +, \times, \leqslant)$.

L'expérience que nous avions des nombres décimaux, nous a conduit à donner des propriétés des opérations et de l'ordre de $\mathbb{D}$. Ces propriétés, nous ne les avons pas démontrées. Nous dirons que ce sont des axiomes.

Elle permettent d'organiser l'ensemble $\mathbb{D}$ muni de ses deux opérations et de sa relation d'ordre, c'est-à-dire le quadruplet $(\mathbb{D}, +, \times, \leqslant)$.

Rappelons ces propriétés.

1) $(\mathbb{D}, +)$ est un groupe commutatif.

Cela signifie que l'addition des décimaux est commutative, associative et possède un élément neutre ; tu sais que cet élément neutre est le nombre 0.

Chaque nombre décimal a un opposé.

2) La multiplication des décimaux est commutative, associative et possède un élément neutre ; tu sais que cet élément neutre est le nombre 1.

3) La multiplication est distributive sur l'addition. Cela signifie que si a, b et c sont des nombres décimaux quelconques,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

4) La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total. Cela signifie que si a, b et c sont trois nombres décimaux quelconques,

$$\begin{array}{ll} & a \leqslant a \; ; \\ \text{si} & a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a, \text{ alors } a = b \; ; \\ \text{si} & a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c, \text{ alors } a \leqslant c \; ; \\ & a \leqslant b \text{ ou } b \leqslant a. \end{array}$$

5) La relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication. Cela signifie que si a, b et c sont trois nombres décimaux quelconques,

$$\begin{array}{ll} \text{si} & a \leqslant b, \text{ alors } a + c \leqslant b + c \; ; \\ \text{si} & 0 \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant b, \text{ alors } 0 \leqslant ab. \end{array}$$

IV – CONSEQUENCES DE CES AXIOMES.

Ces propriétés nous ont permis d'en démontrer d'autres dont voici une liste.

1) Conséquences des propriétés du groupe $(\mathbb{D}, +)$.

– L'opposé de la somme de deux nombres décimaux a et b est la somme de leurs opposés :

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

— Soit a, b et c trois nombres décimaux quelconques ;

$$\text{si} \quad a + c = b + c, \quad \text{alors} \quad a = b.$$

— Soit a et b deux nombres décimaux quelconques ; il existe un nombre x tel que $b + x = a$. Ce nombre est la différence de a et b, et se note $a - b$.

2) Conséquences de la distributivité.

Soit a, b et c trois nombres décimaux quelconques :

$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b) \ ;$$

on note ce nombre $-ab$: c'est l'opposé du produit ab ;

$$(-1) \times a = -a \ ;$$

$$a(b - c) = ab - ac.$$

3) Ordre et addition.

Soit a, b, c, et d quatre décimaux quelconques :

$$\text{si} \quad a + c \leqslant b + c, \quad \text{alors} \quad a \leqslant b \ ;$$

$$\text{si} \quad a \leqslant b, \quad \text{alors} \quad -b \leqslant -a \ ;$$

$$a \leqslant b \quad \text{si et seulement si} \quad 0 \leqslant b - a \ ;$$

$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d, \quad \text{alors} \quad a + c \leqslant b + d.$$

Enfin cette propriété nous a permis de démontrer que si x et y sont deux nombres décimaux inconnus tels que

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

alors $$a + c \leqslant x + y \leqslant b + d.$$

4) Ordre et multiplication.

Soit a, b, c et d quatre nombres décimaux quelconques ;

$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c, \quad \text{alors} \quad ac \leqslant bc \ ;$$

$$\text{si} \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0, \quad \text{alors} \quad bc \leqslant ac \ ;$$

$$\text{si} \quad 0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d, \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant ac \leqslant bd.$$

Cette propriété nous a permis d'établir que si x et y sont deux nombres décimaux inconnus tels que

$$0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d,$$

alors $$ac \leqslant xy \leqslant bd.$$

V – INVERSES.

1) Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, seuls les nombres 1 et -1 ont un inverse.

2) Certains nombres décimaux ont un inverse, d'autres pas. Tu n'oublieras pas en particulier que le nombre 0 n'a pas d'inverse.

On sait reconnaître les nombres décimaux qui ont un inverse.
En effet, si on écrit un nombre décimal sous la forme

$$a \times 10^p \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{Z},$$

ce nombre a un inverse si et seulement si a divise une puissance positive de 10.

Ainsi par exemple le nombre 2,5 a un inverse parce qu'il peut s'écrire 25×10^{-1} et le nombre 100 qui est une puissance de 10 est divisible par 25.

3) Soit a et b deux nombres décimaux. Supposons que b ait un inverse. Notons c cet inverse ; cela signifie que $b \times c = c \times b = 1$. Il existe alors un nombre décimal q tel que

$$b \times q = a.$$

Le nombre q est appelé quotient de a par b et

$$q = a \times c.$$

Cela signifie que la division de a par b tombe juste si on la poursuit assez loin.

Soit a et b deux nombres décimaux. Supposons que b n'ait pas d'inverse. Il peut se faire que la division de a par b ne tombe pas juste.

Cela signifie qu'il n'existe pas de nombre décimaux q tel que

$$a = b \times q.$$

VI – RACINE CARREE.

Nous avons vu que si un nombre décimal écrit sous forme de nombre à virgule a n décimales, la dernière n'étant pas 0, son carré a 2n décimales, la dernière n'étant pas 0.

Cela nous a permis d'affirmer que certains nombres décimaux ont une racine carrée, d'autres pas.

Soit a un nombre décimal. Supposons que a ait une racine carrée et notons x cette racine carrée : alors $a = x^2$.

VII – SUITES D'INTERVALLES.

Dans l'étude de plusieurs problèmes, nous avons été conduit à écrire des suite d'intervalles. Rappelons trois de ces exemples.

Division de 1 par 1,6	Division de 1 par 3	Recherche de nombres dont le carré est voisin de 1,3
[0 ; 1 [	] 0 ; 1 [	] 1 ; 2 [
[0,6 ; 0,7 [	] 0,3 ; 0,4 [	] 1,1 ; 1,2 [
[0,62 ; 0,63 [	] 0,33 ; 0,34 [	] 1,14 ; 1,15 [
[0,625 ; 0,626 [	] 0,333 ; 0,334 [	] 1,140 ; 1,141 [
[0,625 0 ; 0,625 1 [	] 0,333 3 ; 0,333 4 [	] 1,140 1 ; 1,140 2 [
[0,625 00 ; 0,625 01 [		

Dans chacun de ces trois cas, on pouvait écrire des intervalles de rang quelconque.

Ces trois suites d'intervalles ont des propriétés communes :

– les diamètres des intervalles sont 1, 10^{-1}, 10^{-2}, etc...

– tout nombre de gauche est inférieur au nombre de gauche de la ligne suivante ;

– tout nombre de droite est supérieur au nombre de droite de la ligne suivante ;

– tout nombre de gauche est inférieur à tout nombre de droite.

Dans le premier cas, nous sommes assurés cependant qu'à partir d'un certain rang, tous les nombres de gauche seront égaux puisque 1,6 a pour inverse le nombre 0,625.

C'est pour cela d'ailleurs que nous avons écrit pour la première suite des intervalles fermés à gauche.

Enfin cette étude nous a permis de définir :

— le quotient approché par défaut ou par excès à 1 unité près, à 10^{-1} près, à 10^{-2} près, etc... de 2 nombres décimaux ;

— la racine carrée approchée à 1 unité près, à 10^{-1} près, à 10^{-2} près, etc... d'un nombre décimal.

UN PEU D'HISTOIRE

Emmy NOETHER.

Emmy Noether est née à Erlangen, en Allemagne, en 1 882 c'est-à-dire 1 an après Picasso et 8 ans avant le Général de Gaulle ; il y avait 11 ans que l'Allemagne avait été unifiée sous la direction de la Prusse.

Elle avait à peu près ton âge au moment des premières séances de cinéma des Frères Lumières en 1 895.

Son père était professeur de mathématiques à l'université. Pourtant ce n'est guère avant 40 ans qu'elle devient une mathématicienne célèbre.

En 1 900, elle est l'une des deux seules étudiantes de la faculté d'Erlangen, parmi près de 1 000 étudiants ; elle suit les cours sans passer d'examen car ce n'est qu'en 1 904 que l'université d'Erlangen autorise les étudiantes à présenter des examens.

Par la suite, elle entreprit des recherches mathématiques et en 1 916 (donc pendant la guerre de 1 914 - 1 918), elle s'installa à Göttingen. Là, un grand mathématicien, Hilbert, essaya longtemps, en vain, de la faire accepter comme professeur à l'université. Ce n'est qu'en 1 922 que le conseil de l'université accepte enfin qu'une femme devienne professeur.

Tu as vu que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{D}, +, \times)$ ont des propriétés communes : $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{D}, +)$ sont des groupes commutatifs, la multiplication de $\mathbb{Z}$ et celle de $\mathbb{D}$ sont associatives, distributives sur l'addition. On dit que ce sont des anneaux.

Etudier les anneaux en général, au lieu d'étudier $(\mathbb{Z}, +, \times)$ puis $(\mathbb{D}, +, \times)$ puis..., c'est faire de l'algèbre abstraite. C'est seulement à la fin du 19ème siècle que l'on a eu l'idée de faire des mathématiques aussi générales et aussi abstraites. Jusqu'en 1 933, Emmy Noether peut contribuer de façon très importante au développement de l'algèbre abstraite.

Mais Emmy Noether était juive : comme bien d'autres, en 1 933 elle dut quitter l'Allemagne pour échapper aux persécutions racistes du nazisme. Elle se réfugia aux Etats Unis où elle travailla encore deux ans avant de mourir subitement des suites d'une opération.

INDEX

1 — Mots

2 — Symboles