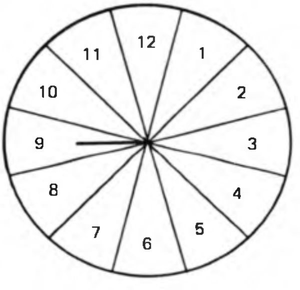
CHAPITRE A : GROUPES

Document A 1

DES JEUX POUR DES GROUPES

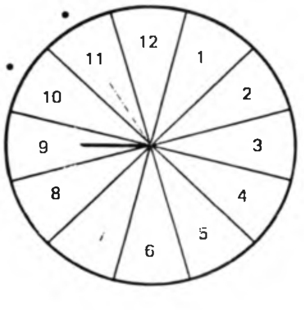
I – EN REGARDANT UNE MONTRE.

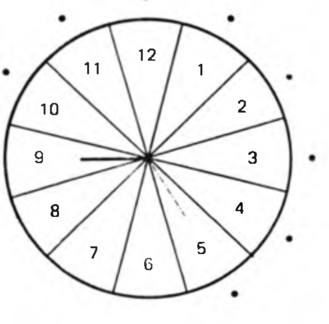
1.1 Imaginons une montre simplifiée dont le cadran ne comporte qu'une seule aiguille, elle indique les heures. Le cadran est gradué comme l'indique le dessin. Nous dirons qu'il est 9 heures si l'aiguille est sur la région numérotée 9.



La montre indique 9 heures.

Quelle heure sera-t-il dans 2 heures ? Dans 8 heures ?





Désignons par H l'ensemble des nombres écrits sur le cadran :

$$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Ce que nous avons fait est un exemple d'une opération dans l'ensemble H. Nous noterons cette opération par le symbole $*$ (tu liras : «étoile»).

$$9 * 2 = 11,$$
$$9 * 8 = 5.$$

Reproduis maintenant la table ci-dessous.

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9		11						5				
10												
11												
12												

Tu remarques que dans la colonne de gauche, lue de haut en bas, et dans la ligne du haut, lue de gauche à droite, les éléments de H sont inscrits dans le même ordre.

Tu vas remplir ta table en respectant la règle suivante : le premier élément de l'opération se lit dans la colonne de gauche, le deuxième élément de l'opération se lit dans la ligne du haut, le résultat se lit en face de chacun des éléments précédents.

1.2 *Que remarques-tu dans la dernière colonne de ce tableau ? Dans la ligne du bas ?*

Tu en déduis :
Le nombre 12 est **neutre** pour l'opération $*$ dans H.

Complète les égalités suivantes :

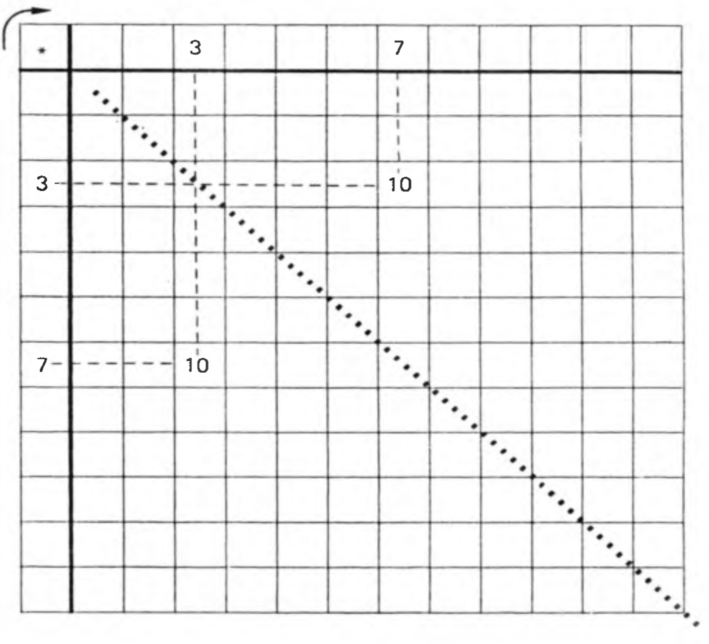
$5 * \ldots\ldots = 12$; $\ldots\ldots * 5 = 12$.

Nous dirons que le nombre 7 est le **symétrique** de 5.

Vérifie que tout nombre de H *possède un symétrique.*

Tu remarques que $7 * 3 = 10$ et $3 * 7 = 10$.

Regarde comment ces deux résultats sont inscrits sur la table :



Tu vois que si tu pliais la feuille de papier autour du trait ponctué, les deux cases correspondant à $7 * 3$ et $3 * 7$ viendraient l'une sur l'autre.

Tu vois, de plus, que dans ces deux cases on a écrit le même résultat : 10.

Les deux cases correspondant à $2 * 9$ *et* $9 * 2$ *viennent-elles aussi l'une sur l'autre ? Contiennent-elles le même résultat ?*

La droite rouge est appelée DIAGONALE PRINCIPALE de la table.

On dit que la table est SYMETRIQUE PAR RAPPORT A SA DIAGONALE PRINCIPALE si, dans le pliage autour de cette droite, deux cases qui viennent l'une sur l'autre contiennent le même résultat.

Vérifie que ta table est symétrique par rapport à sa diagonale principale, c'est-à-dire que si a *et* b *désignent des éléments de* H ,

$$a * b = b * a .$$

L'opération $*$ est **commutative** dans H .

On peut écrire les égalités suivantes :

$(3 * 12) * 8 = 3 * 8$, $\quad 3 * (12 * 8) = 3 * 8$,

$(3 * 12) * 8 = 11$, $\quad 3 * (12 * 8) = 11$,

donc $$(3 * 12) * 8 = 3 * (12 * 8) .$$

De façon analogue,

$(5 * 4) * 9 = 9 * 9$, $\quad 5 * (4 * 9) = 5 * 1$,

$(5 * 4) * 9 = 6$, $\quad 5 * (4 * 9) = 6$,

donc $$(5 * 4) * 9 = 5 * (4 * 9) .$$

Crois-tu que si a , b *et* c *désignent des éléments de* H, *on a toujours*

$$(a * b) * c = a * (b * c) ?$$

Combien de vérifications faudrait-il faire pour en être sûr ?

Nous admettrons le résultat.

L'opération $*$ est **associative** dans H.

Bilan :

Nous avons défini dans l'ensemble H, une opération notée $*$ et possédant les propriétés suivantes.

— L'opération $*$ est associative.
— Il y a un élément neutre pour l'opération $*$ (c'est 12).
— Tout élément de H a un symétrique pour l'opération $*$.

Nous résumerons ces trois propriétés en disant que le couple $(H, *)$ est un **groupe**. Comme de plus, l'opération $*$ est commutative, nous dirons que $(H, *)$ est un **groupe commutatif.**

1.3 Considérons l'égalité suivante,

$$7 * x = 7 * y,$$

où x et y désignent des éléments de H.

Le symétrique de 7 est 5. On peut écrire

$$5 * (7 * x) = 5 * (7 * y);$$

comme la loi $*$ est associative, on peut donc écrire

$$(5 * 7) * x = (5 * 7) * y,$$

et puisque $5 * 7 = 12$,

$$12 * x = 12 * y;$$

comme 12 est élément neutre de la loi $*$,

$$x = y.$$

De l'égalité $7 * x = 7 * y$, nous pouvons donc déduire l'égalité $x = y$.

Forme d'autres exemples analogues.

Soit maintenant l'égalité

$$9 * x = 4,$$

où x désigne un élément de H. Le symétrique de 9 est 3.

Justifie les égalités suivantes :

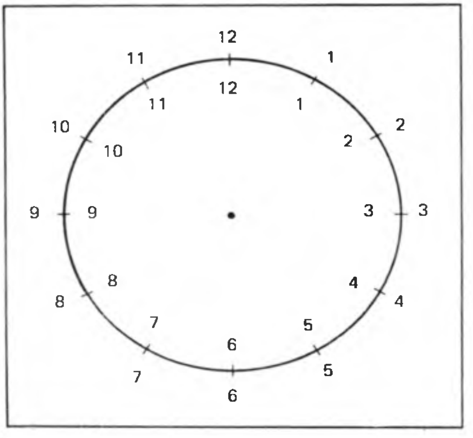
$$\begin{aligned} 3 * (9 * x) &= 3 * 4; \\ (3 * 9) * x &= 7 \\ 12 * x &= 7; \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Est-ce que $9 * 7 = 4$ *?*

Tu aurais aussi pu trouver x *à l'aide de ta table ; comment ?*

II – CONSTRUCTION D'UNE REGLE A CALCULS.

Voici maintenant la description d'un petit appareil qui effectue l'opération * dans l'ensemble H et qui peut donc remplacer ta table.



Sur une feuille de carton, tu dessines un carré de 10 cm de côté et tu marques son centre. En plaçant la pointe du compas en ce point, tu traces un cercle de 4 cm de rayon; à l'aide du rapporteur, tu disposes régulièrement sur ce cercle les 12 éléments de H. *Tu découpes un disque en carton de 4 cm de rayon et tu disposes régulièrement sur le pourtour les éléments de* H, *dans le même ordre que précédemment. Tu perces le carton carré et le disque mobile en leurs centres et tu les relies par une attache parisienne.*

La règle à calculs est prête à fonctionner.

Pour calculer 9 * 8, *tu peux procéder ainsi.*

Tu amènes le 12 du disque mobile en face du 9 du carré. La réponse est le nombre qui se trouve écrit sur le carré en face du 8 du disque mobile.

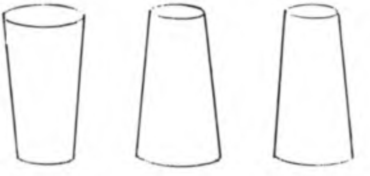
Imagine un autre procédé pour effectuer la même opération. Imagine un procédé permettant de trouver les symétriques avec cette règle.

III – JOUONS AVEC DES GOBELETS.

3.1 *Tu disposes de trois gobelets. Tu peux utiliser trois pots de yaourts vides et identiques ou bien trois gobelets de distributeur automatique de boissons.*

Tu poses ces trois gobelets sur ta table, en ligne, chacun étant droit ou renversé.

Voici, par exemple, deux dispositions.



Donne toutes les dispositions possibles.

Nous avons donc un ensemble de huit dispositions, que nous noterons E. Nous allons coder ces huit dispositions en utilisant les signe V et Λ. Ainsi les deux dispositions dessinées ci-dessus seront codées VVV et VΛΛ.

3.2 Sur chacun des tableaux de la feuille de manipulation A 1-a, nous avons recopié la liste des huit dispositions.

Sur le tableau 1, écris en face de chacune d'elles, la disposition obtenue en appliquant la consigne suivante :

«On échange le premier et le troisième gobelets sans toucher au second».

Ainsi, par exemple,

$$\underset{\text{disposition initiale}}{\Lambda VV} \xmapsto{\text{Application de la consigne}} \underset{\text{disposition finale}}{VV\Lambda}$$

Nous avons inscrit ce résultat sur le tableau 1.

Vérifie qu'à cette consigne, nous avons ainsi associé une bijection de E *dans* E.

Appelons S cette bijection. Nous pourrons donc noter l'exemple ci-dessus par

$$S : \Lambda VV \longmapsto VV\Lambda,$$

ou encore par

$$S(\Lambda VV) = VV\Lambda.$$

Ecris S(VΛV), *puis* S($\Lambda\Lambda$V).

3.3 *Recommence le même travail sur le tableau 2 avec la consigne suivante :*

«On prend le gobelet de gauche et on le place à droite sans le retourner».

Ainsi, par exemple,

$$\underset{\text{disposition initiale}}{\Lambda\Lambda V} \xmapsto{\text{Application de la consigne}} \underset{\text{disposition finale}}{\Lambda V\Lambda}$$

Nous avons inscrit ce résultat sur le tableau 2.

Vérifie qu'à cette consigne est encore associée une bijection de E *dans* E.

Nous l'appellerons D. On a

$$D(\Lambda\Lambda V) = \Lambda V\Lambda.$$

Ecris D(VVV), *puis* D(VΛV).

3.4 Nous allons maintenant appliquer successivement la bijection D et la bijection S. Pour cela, utilisons le tableau 1 de la feuille de manipulation A 1-b. Dans les deux premières colonnes, nous avons recopié la table de la bijection D.

Tu vois que D(VΛV) = ΛVV.

Sur la table de la bijection S, la disposition ΛVV figure à la 5ème ligne et tu vois que S(ΛVV) = VVΛ. C'est donc ce résultat que nous avons inscrit à la 3ème ligne du tableau.

De même, tu vois que D(ΛVV) = VVΛ.

Sur la table de la bijection S, la disposition $VV\Lambda$ figure à la 2ème ligne et tu vois que $S(VV\Lambda) = \Lambda VV$. C'est donc ce résultat que nous avons inscrit à la 5ème ligne du tableau.

Fais de même pour les 6 autres éléments de E.

A tout élément x de E, tu as associé un élément y de E.

Vérifie qu'on a défini ainsi une bijection de E *dans* E.

Appelons M cette nouvelle bijection.

Recopie le résultat obtenu sur le tableau 5 de la feuille de manipulation A 1-a.

Notation.

Nous avons écrit ci-dessus :

$$D(V\Lambda V) = \Lambda VV, \quad S(\Lambda VV) = VV\Lambda.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$S[D(V\Lambda V)] = VV\Lambda.$$

Vérifie que les égalités suivantes sont vraies :

$$D(\Lambda VV) = VV\Lambda,$$
$$S(VV\Lambda) = \Lambda VV,$$
$$S[D(\Lambda VV)] = \Lambda VV.$$

A tout élément x de E, on a donc associé par une bijection un élément de E, qui est $S[D(x)]$.

Nous noterons cette bijection $S \circ D$. Ainsi,

$$S \circ D(V\Lambda V) = VV\Lambda \ :$$

$$VV\Lambda \xleftarrow{\ S\ } \Lambda VV \xleftarrow{\ D\ } V\Lambda V$$

$$VV\Lambda \xleftarrow{\quad S \circ D \quad} V\Lambda V$$

Nous avons noté M la bijection $S \circ D$.

3.5 Nous allons définir de façon analogue la bijection $D \circ S$. Pour cela utilisons le tableau 2 de la feuille de manipulation A 1-b. Dans les deux premières colonnes, nous avons recopié la table de la bijection S.

Tu vois que $S(V\Lambda\Lambda) = \Lambda\Lambda V$.

Sur la table de la bijection D, la disposition $\Lambda\Lambda V$ figure à la 7ème ligne, et tu vois que $D(\Lambda\Lambda V) = \Lambda V\Lambda$. C'est donc ce résultat que nous avons inscrit à la 4ème ligne du tableau.

Fais de même pour les 7 autres éléments de E.

A tout élément x de E, tu as associé un élément y de E.

Vérifie qu'on a défini ainsi une bijection de E *dans* E.

Appelons N cette bijection.

Recopie le résultat obtenu sur le tableau 6 de la feuille de manipulation A1-a.

Notation.

Nous avons écrit :

$$S(V\Lambda\Lambda) = \Lambda\Lambda V, \quad D(\Lambda\Lambda V) = \Lambda V\Lambda.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$D[\,S(V\Lambda\Lambda)\,] = \Lambda V\Lambda.$$

Vérifie que les égalités suivantes sont vraies :

$$S(\Lambda\Lambda V) = V\Lambda\Lambda,$$
$$D(V\Lambda\Lambda) = \Lambda\Lambda V,$$
$$D[\,S(\Lambda\Lambda V)\,] = \Lambda\Lambda V.$$

A tout élément x de E, on a associé un élément y de E qui est $D[\,S(x)\,]$ par une bijection.

Nous noterons cette bijection $D \circ S$. Ainsi :

$$D \circ S(\Lambda\Lambda V) = \Lambda\Lambda V.$$

$$\Lambda\Lambda V \xleftarrow{D} V\Lambda\Lambda \xleftarrow{S} \Lambda\Lambda V$$

$$\Lambda\Lambda V \xleftarrow{\quad D \circ S \quad} \Lambda\Lambda V$$

Nous avons noté N la bijection $D \circ S$.

3.6 *Compare :* $S \circ D(VV\Lambda)$ *et* $D \circ S(VV\Lambda)$.

Tu sais que deux bijections de E dans E sont égales si, lorsqu'on les applique à un élément quelconque de E, elles en donnent la même image.

Les bijections $S \circ D$ *et* $D \circ S$ *sont-elles égales ?*

3.7 *Utilise de même le tableau 3 de la feuille de manipulation* A 1-b *pour dresser une table de l'application* $S \circ S$. *Recopie les résultats sur le tableau 3 de la feuille de manipulation* A 1-a.

Constate que $S \circ S$ *est une bijection de* E *dans* E.

Appelons I cette bijection.

Quelle consigne simplifiée correspond à la bijection I *?*

Que penses-tu des applications

$I \circ I$, $S \circ I$, $I \circ S$, $D \circ I$, $I \circ D$, $M \circ I$, $I \circ M$, $N \circ I$ *et* $I \circ N$ *?*

3.8 *Utilise le tableau 4 de la feuille de manipulation* A1-b *pour dresser une table de l'application* $D \circ D$. *Recopie les résultats sur le tableau 4 de la feuille de manipulation* A1-a.

Constate que $D \circ D$ *est une bijection.*

Appelons L cette bijection.

Que penses-tu des applications $I \circ L$ *et* $L \circ I$ *?*

IV — UN GROUPE DE BIJECTIONS.

4.1 Dans le paragraphe III, nous avons étudié l'ensemble E des 8 positions de 3 gobelets et nous avons défini 6 bijections de E dans E : I, D, L, S, N et M. Notons G l'ensemble {I, D, L, S, N, M}.

La feuille de manipulation A 1-a te donne la table de ces 6 bijections.

Regarde le tableau suivant :

∘	I	D	L	S	N	M
I						
D				N		
L						
S						
N						
M						

Nous avons noté N la bijection $D \circ S$. On lit D dans la colonne de gauche et S dans la ligne du haut. Le résultat N est lu en face des deux lettres précédentes.

4.2 Nous connaissons d'autres résultats. Reportons-les sur le tableau :

∘	I	D	L	S	N	M
I	I	D	L	S	N	M
D	D	L		N		
L	L					
S	S	M		I		
N	N					
M	M					

Recopie ce tableau.

Pour remplir les 21 cases qui restent, vous allez vous partager le travail dans la classe, de façon bien sûr à avoir tous les résultats nécessaires mais aussi à pouvoir contrôler ces résultats.

Par exemple, chacun d'entre vous peut calculer deux résultats. Pour cela, tu peux utiliser les tableaux 5 et 6 de la feuille de manipulation A 1-b.

4.3 *Lorsque ton tableau sera rempli, constate que l'opération* $\circ$ *est une loi interne dans* G.

Combien de fois, un élément de G *figure-t-il dans chaque ligne de ton tableau ? Et dans chaque colonne ?*

Vérifie que la bijection I *est un élément neutre pour l'opération* $\circ$.

Considérons la bijection D. Nous constatons que

$$D \circ L = L \circ D = I.$$

La bijection L est donc symétrique de la bijection D pour l'opération $\circ$.

Vérifie que chaque bijection de l'ensemble G *admet une bijection symétrique.*

Remarque.

On appelle aussi **bijection réciproque** cette bijection symétrique.

Avec tes camarades, constate que les bijections $(S \circ D) \circ L$ *et* $S \circ (D \circ L)$ *sont égales.*

Nous écrirons plus simplement $S \circ D \circ L$, ce qui signifie que l'on applique d'abord la consigne correspondant à la bijection L, puis celle correspondant à D, puis celle correspondant à S.

Nous admettrons que si f, g et h désignent trois éléments de G,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Si tu voulais, le prouver combien de vérifications faudrait-il que tu fasses ?

En conclusion, l'opération $\circ$ est associative dans G. (Nous n'avons pas démontré complètement ce résultat).

Bilan :

$(G, \circ)$ est un groupe.

Est-ce un groupe commutatif ?

4.4 Exercices.

Simplifie les écritures suivantes :

$$D \circ D \circ D \circ S \circ D \,;$$
$$(D \circ S) \circ (S \circ D) \circ D \,;$$
$$D \circ (D \circ D) \circ (D \circ S) \circ (S \circ D \circ S) \circ D .$$

Pour chacune des égalités suivantes, détermine l'ensemble des bijections X pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

$$D \circ X = S \,;$$
$$L \circ X \circ M = D \,;$$
$$X \circ X = I \,;$$
$$X \circ X = D .$$

Cherchons l'ensemble des bijections X de l'ensemble G telles que $S \circ X = N$.

En regardant ta table, tu peux observer ceci :

$\circ$		L	
S		N	

Pourquoi peux-tu en conclure que cet ensemble est le singleton $\{L\}$ *?*

Nous pouvons maintenant procéder d'une autre manière pour chercher X tel que

$$S \circ X = N :$$

la bijection symétrique de S est S, et

$$S \circ (S \circ X) = S \circ N.$$

Justifie les égalités suivantes :

$$(S \circ S) \circ X = S \circ N ;$$
$$I \circ X = L ;$$
$$X = L.$$

Donc si X est tel que

$$S \circ X = N,$$

nécessairement $X = L$.

Vérifie que si $X = L$, *alors* $S \circ X = N$.

La question

«Quel est l'ensemble des éléments X de G tels que $S \circ X = N$?» S'appelle une **équation en X dans G.** Y répondre s'appelle **résoudre l'équation.**

Résous l'équation en X dans G

$$X \circ S = N.$$

D'AUTRES GROUPES

I – JOUONS ENCORE AVEC DES GOBELETS.

1.1 Comme dans le document A 1, nous disposons de trois gobelets identiques et nous notons E l'ensemble des huit dispositions possibles.

Nous conservons la consigne suivante :
«On prend le gobelet de gauche et on le met à droite sans le retourner».

Cette consigne conduit à une bijection de E dans E ; nous notons D cette bijection.

Tu as dressé la table de cette bijection sur le tableau numéro 2 de la feuille de manipulation A1-a.

Soit maintenant la nouvelle consigne :
«On retourne tous les gobelets sans les changer de place».
Ainsi par exemple

$$\underset{\text{disposition initiale}}{V\Lambda\Lambda} \xmapsto{\text{Application de la consigne}} \underset{\text{disposition finale}}{\Lambda VV}$$

Dresse la table correspondant à cette consigne.

Vérifie qu'à cette consigne est associée une bijection de E *dans* E.

Appelons R cette bijection :

$$R : V\Lambda\Lambda \longmapsto \Lambda VV,$$

ou encore

$$R(V\Lambda\Lambda) = \Lambda VV.$$

1.2 *Vérifie que les égalités suivantes sont vraies :*

$$D(VV\Lambda) = V\Lambda V\,;$$
$$R(V\Lambda V) = \Lambda V\Lambda.$$

Nous écrivons $R[D(VV\Lambda)] = \Lambda V\Lambda,$
ou encore $R \circ D(VV\Lambda) = \Lambda V\Lambda.$

Comme tu as appris à la faire dans le document A 1, dresse les tables des applications $R \circ D$ *et* $D \circ R$.

Vérifie que ces applications sont des bijections de E *dans* E *et que* $R \circ D = D \circ R$.

Appelons A cette bijection.

Vérifie que $R \circ R = I$. *Pouvais-tu prévoir ce résultat ?*

Dans le document A 1, tu as vérifié que $D \circ D$ était une bijection. Nous avons appelé L cette bijection.

On pourrait démontrer de même que $A \circ D$ est une bijection. Appelons-là C.

Nous avons donc un ensemble de six bijections de E dans E. Nous noterons G_1 cet ensemble :

$$G_1 = \{I, R, D, A, L, C\}.$$

1.3 Nous allons maintenant montrer que l'opération $\circ$ est une loi interne dans G_1.

Pour cela recopie la table suivante.

$\circ$	I	C	D	R	L	A
I						
C						
D				A		
R						
L						
A						

Nous avons noté A la bijection $D \circ R$. On lit D dans la colonne de gauche et R dans la ligne du haut. Le résultat est lu en face des deux lettres précédentes.

Inscris dans cette table tous les résultats qui sont déjà connus :

— ceux qui ont été calculés dans le document A 1 :

$D \circ D$, $L \circ L$, $L \circ D$, $D \circ L$, $D \circ I$, $I \circ D$, $L \circ I$, $I \circ L$, $I \circ I$;

— ceux qui ont été donnés ou calculés au début de ce document :

$R \circ R$, $R \circ D$, $D \circ R$, $A \circ D$.

Que penses-tu des applications :

$I \circ A$, $A \circ I$, $I \circ R$, $R \circ I$, $I \circ C$, $C \circ I$?

Inscris les résultats dans la table.

1.4 Pour terminer cette table il reste donc 17 cases à remplir. Nous l'avons fait pour toi. Voici la table complète.

∘	I	C	D	R	L	A
I	I	C	D	R	L	A
C	C	D	R	L	A	I
D	D	R	L	A	I	C
R	R	L	A	I	C	D
L	L	A	I	C	D	R
A	A	I	C	D	R	L

Constate que dans chaque ligne et chaque colonne de ta table, tu obtiens une fois et une seule chaque élément de G_1.

La bijection I joue-t-elle un rôle particulier vis à vis de l'opération ∘ ?

Tu constates que $D \circ B = B \circ D = I$.

La bijection B est donc symétrique de la bijection D pour l'opération ∘.

Vérifie que tous les éléments de G_1 *admettent un élément symétrique.*

Vérifie que

$$(D \circ B) \circ A \quad \textit{et} \quad D \circ (B \circ A).$$

Que peux-tu en conclure ?

Nous admettrons que le résultat reste vrai pour trois bijections quelconques de l'ensemble G_1 : si f, g et h désignent trois éléments de G_1,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Nous disons que l'opération $\circ$ est associative dans G_1. Par la suite nous pourrons donc nous dispenser de mettre des parenthèses.

Bilan :

$$(G_1, \circ) \text{ est un groupe.}$$

Montre que c'est un groupe commutatif.

1.5 Exercices :

Simplifie les écritures suivantes :

$D \circ R \circ A \circ L \circ D$; $D \circ D \circ D$;

$D \circ D \circ D \circ D \circ D \circ D \circ D$; $A \circ A \circ A \circ A \circ A \circ A \circ A$;

$(A \circ L) \circ C \circ (D \circ L)$; $(A \circ L) \circ (A \circ L) \circ (A \circ L)$.

Nous allons maintenant chercher l'ensemble des éléments X de l'ensemble G_1 qui vérifient l'égalité

$$L \circ X = R.$$

Rappelons que ce problème porte le nom d'équation.

Résous-le d'abord à l'aide de la table.

En supposant que $L \circ X = R$, *justifie maintenant les égalités suivantes :*

$$D \circ (L \circ X) = D \circ R ;$$
$$(D \circ L) \circ X = A ;$$
$$I \circ X = A ;$$
$$X = A.$$

Donc si l'on a $L \circ X = R$, alors $X = A$.

Vérifie que si $X = A$, alors $L \circ X = R$.

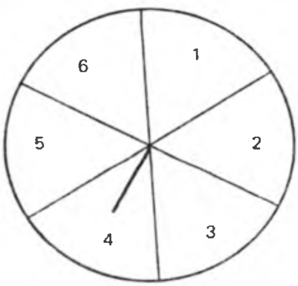
Nous pouvons affirmer que l'équation a une solution, unique, qui est A.

Résous les équations en X suivantes dans G_1 :

$$A \circ X = R \ ; \ C \circ X = D \ ;$$
$$A \circ X \circ L = R \ ; \ X \circ X = I \ ;$$
$$C \circ X = D \circ X \circ R.$$

II — UNE NOUVELLE MONTRE.

2.1 Imaginons une montre encore plus simple que celle que nous avons découverte dans le document précédent. Elle indique des tranches de deux heures. Son cadran n'est donc gradué que de 1 à 6.



Si nous appelons période une tranche de deux heures, nous voyons que la montre indique la quatrième période.

Quelle période indiquera-t-elle dans 2 périodes ? Dans 4 périodes ?

Nous définissons ainsi une opération dans l'ensemble P des nombres inscrits sur le cadran.

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nous noterons cette opération par le symbole $*$:

$$4 * 2 = 6, \ 4 * 4 = 2.$$

Reproduis la table ci-dessous et remplis-la.

*	6	5	4	3	2	1
6						
5						
4			2		6	
3						
2						
1						

Que peux-tu dire de l'élément 6 ?

Les éléments de P *admettent-ils tous un symétrique ?*

Nous admettrons que la loi $*$ est associative ; nous pouvons donc dire que $(P, *)$ est un groupe.

Le groupe $(P, *)$ *est-il commutatif ?*

2.2 L'ensemble P comporte six éléments, tout comme l'ensemble G_1 du paragraphe précédent. Définissons une bijection de G_1 dans P de la façon suivante :

$$\begin{array}{llll} I \longmapsto 6 & & R \longmapsto 3 \\ C \longmapsto 5 & & L \longmapsto 2 \\ D \longmapsto 4 & & A \longmapsto 1. \end{array}$$

Prends un calque de la table du groupe $(P, *)$ *et pose le sur la table du groupe* $(G_1, \circ)$.

Que constates-tu pour deux éléments superposés ?

III — REGARDONS PLUS ATTENTIVEMENT LES GROUPES PRECEDENTS.

De la table du groupe $(P, *)$, nous pouvons tirer l'extrait suivant :

$*$	6	4	2
6	6	4	2
4	4	2	6
2	2	6	4

En posant $P' = \{6, 4, 2\}$, *vérifie que* $(P', *)$ *est un groupe commutatif.*

De la table du groupe $(G_1, \circ)$, nous pouvons tirer l'extrait suivant :

$\circ$	I	D	L
I	I	D	L
D	D	L	I
L	L	I	D

En posant $G_1' = \{I, D, L\}$, *vérifie que* $(G_1', \circ)$ *est un groupe commutatif.*

Trouve une bijection de P' *dans* G_1' *telle que le calque de la table de* $(P', *)$ *se superpose à la table de* $(G_1', \circ)$.

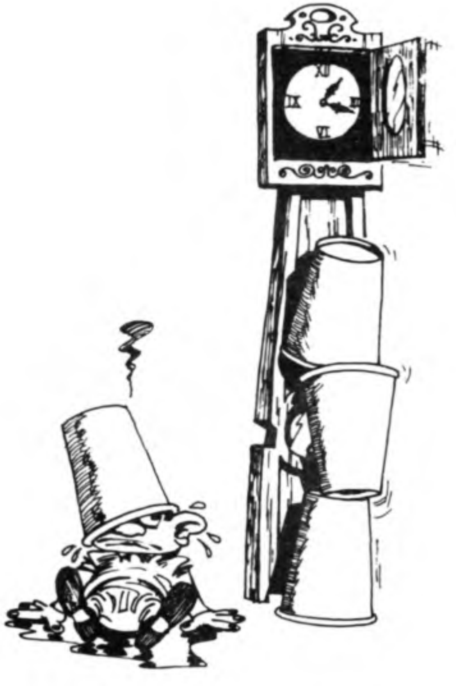
De la table du groupe (G, $\circ$) étudié dans le document A 1, nous pouvons tirer l'extrait suivant :

$\circ$	I	D	L
I	I	D	L
D	D	L	I
L	L	I	D

Posons $G' = \{I, D, L\}$.

Vérifie que $(G', \circ)$ est un groupe commutatif.

Peux-tu superposer sa table aux deux tables précédentes ?



IV — DES GROUPES RENCONTRES EN CLASSE DE 5ème.

Tu as étudié en classe de 6ème et de 5ème l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Il existe dans cet ensemble une opération appelée addition et notée $+$. Rappelons les propriétés de cette opération :

— le nombre 0 est élément neutre ;

— tout nombre de $\mathbb{Z}$ a un symétrique que l'on appelle son opposé ; si a est élément de $\mathbb{Z}$,

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 ;$$

— l'addition est associative :
si a, b et c désignent trois éléments de $\mathbb{Z}$,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Que peux-tu dire de $(\mathbb{Z}, +)$ *? Est-ce un groupe commutatif ?*

Pourquoi $(\mathbb{N}, +)$ *n'est-il pas un groupe ? Est-ce que* $(\mathbb{Z}, \times)$ *est un groupe ?*

Exercice :

Soit U l'ensemble $\{-1, +1\}$.

Montre que $(U, \times)$ *est un groupe commutatif.*

Chapitre A : GROUPES

SYNTHESE

I – NOTION DE GROUPE.

Dans les deux documents précédents, nous avons rencontré de nombreuses fois la situation suivante :
Un ensemble E est donné ; dans cet ensemble, il y a une opération qui, à deux éléments de E, fait correspondre un élément de E. Désignons cette opération par le symbole $*$.

– Cette opération est associative :
si a, b et c sont trois éléments de E,

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

– Il y a dans E un élément particulier qui est neutre pour l'opération $*$; notons e cet élément neutre :
si a est un élément de E,

$$a * e = e * a = a.$$

– Etant donné un élément a de E, il existe dans E un élément a', appelé symétrique de a, tel que :

$$a * a' = a' * a = e.$$

Chaque fois que nous avons rencontré cette situation nous avons dit que le couple $(E, *)$ était un groupe. En résumé, nous dirons que $(E, *)$ et un groupe si l'opération $*$ est interne à E et possède les propriétés suivantes :

1) L'opération $*$ est associative.

2) Il existe un élément neutre pour l'opération $*$.

3) Tout élément de E possède un symétrique pour l'opération $*$.

Si de plus, l'opération $*$ est commutative, nous dirons que le groupe $(E, *)$ est commutatif.

II — CALCULS DANS UN GROUPE.

— Soit $(E, *)$ un groupe dont l'élément neutre est e ; soit a, x et y trois éléments de E. On suppose que :

$$a * x = a * y.$$

L'élément a admet un symétrique ; notons-le a' :

$$\begin{aligned} a' * (a * x) &= a' * (a * y) \ ; \\ (a' * a) * x &= (a' * a) * y \ ; \\ e * x &= e * y \ ; \\ x &= y. \end{aligned}$$

Dans le groupe $(E, *)$, de l'égalité $a * x = a * y$, on peut toujours déduire l'égalité $x = y$.

— Soit a et b deux élément du groupe $(E, *)$. Cherchons s'il existe des éléments x de E tel que $a * x = b$.

Soit a' le symétrique de a ; si x est tel que $a * x = b$,

$$\begin{aligned} a' * (a * x) &= a' * b \ ; \\ (a' * a) * x &= a' * b \ ; \\ e * x &= a' * b \ ; \\ x &= a' * b. \end{aligned}$$

Donc si un élément x est tel que $a * x = b$, alors $x = a' * b$.
Et

$$\begin{aligned} a * (a' * b) &= (a * a') * b, \\ a * (a' * b) &= e * b, \\ a * (a' * b) &= b. \end{aligned}$$

Donc, dans le groupe $(E, *)$, le problème de la recherche des éléments x de E tel que,

$$a * x = b$$

admet toujours une solution, unique ; cette solution est $a' * b$ si a' désigne l'élément symétrique de a.

UN PEU D'HISTOIRE

Evariste GALOIS.

Ce mathématicien français, né en 1811, devait connaître une vie aussi agitée que courte. Génie précoce, il est refusé au concours d'entrée à l'école Polytechnique dans des circonstances obscures, puis admis à l'Ecole Normale Supérieure à 19 ans.

Chateaubriand et Lamartine sont alors en pleine gloire. Victor Hugo est déjà très connu. Alexandre Dumas connaît un certain succès avec ses pièces de théâtre mais il n'écrira «Les trois mousquetaires» qu'en 1844. C'est aussi l'époque où les machines à vapeur commencent à être utilisées de façon courante : par exemple, les premiers chemins de fer fonctionnent en Angleterre et en France.

Galois fait d'importantes découvertes sur les groupes et les équations mais il est poursuivi par la malchance : trois mémoires, qu'il a rédigés à l'intention de l'Académie des Sciences, sont égarés ou incompris.

A la même époque, Galois se lance dans la politique. Il participe à la révolution de Juillet qui, en 1830, écarte Charles X au bénéfice de Louis-Philippe. Cette activité politique le fait renvoyer de l'Ecole Normale ; en 1832, il est emprisonné puis relâché.

Une intrigue sentimentale le conduit à un duel. Pressentant l'issue de cette rencontre, il rédige dans la nuit précédente la partie essentielle de ses recherches mathématiques ; il est, de fait, mortellement blessé et meurt à 21 ans.

INDEX

1 — Mots.

	Document	page
Associative (opération —)	A 1	4
Commutative (opération —)	A 1	4
Diagonale principale (d'une table)	A 1	4
Equation	A 1	15
Groupe	A 1	5
Groupe commutatif	A 1	5
Neutre	A 1	3
Réciproque (bijection —)	A 1	13
Résoudre (une équation)	A 1	15
Symétrique	A 1	3
Symétrique par rapport à sa diagonale principale (table —)	A 1	4

2 — Symbole.

$\circ$	A 1	9