SOMMAIRE

Mai 1978

Graffiti prémonitoires

En France, à cause des événements de Mai 68, le téléphone ne fonctionnait déjà plus pendant les années précédentes.

J. Prévert, Imaginaires.

PRELIMINAIRE LAPIDAIRE

Matchinettes 2 concerne encore et toujours les utilisateurs de calculettes «quat'z'opérations - une mémoire».

Les objectifs contiennent ceux du premier «Matchinettes», des thèmes sont repris et suivis dans les deux brochures.

Nous avons essayé, par des présentations différentes d'algorithmes et de programmes, de faire le lien entre le non programmable (c'est-à-dire «l'inqualifiable») et le programmable (qu'il soit dans la poche ou sur piédestal). Ceux qui n'ont jamais fait d'informatique trouveront ici une base de cette activité : l'organisation des calculs qui permet, par simple traduction de langage, le passage sur ordinateur ; les autres pourront constater que les calculettes et les ordinateurs relèvent d'une démarche semblable.

Le mécréant: ... je voulais simplement vous dire que le hasard, malencontreux ou non, ou la chance, bonne ou mauvaise, m'ont fait connaître et voir nombre de gens de lettres, de mots, de phrases et de livres qui se disent créateurs alors qu'ils sont, sans vouloir le savoir, tout bonnement des ordinateurs.
Machines à écrire, machines à lire, à relire et à retenir tout ce qui déjà a été écrit, machines à retenir, transformer, rejeter et choisir.
Machines à se laver, à s'accuser, se disculper et se porter en triomphe discret.
Souvent machines à se mentir et à se repentir et à se démentir et à cacher qu'ils ne peuvent se sentir.
J'en connais d'autres qui en connaissent d'autres qui en connaissent d'autres qui tout simplement et fort heureusement sont des désordonnateurs.

Le créant: Vous jouez sur les mots, c'est facile.

Le mécréant: Je ne joue pas sur les mots, je joue parfois avec et j'ajoute que sans moi ou d'autres, ils jouent très bien tout seuls.
Les mots sont les enfants du vocabulaire, il n'y a qu'à les voir sortir des cours de création et se précipiter dans la cour de récréation. Là ils se réinventent et se travestissent, ils éclatent de rire et leurs éclats de rire sont les morceaux d'un puzzle, d'une agressive et tendre mosaïque.
Contre les maîtres mots, les mots tabou, c'est le tam-tam des mots-mots.
Et les mots sacrés se désacralisent et les mots secrets se créent.

Le créant: Les mots, toujours les mots.

J. Prévert, Imaginaires.

CHOIX D'UNE CALCULETTE ET MODELE DE FONCTIONNEMENT

Le choix d'une calculette est lié au modèle de fonctionnement que l'on peut en établir. Nous allons enfoncer des portes ouvertes pour donner quelques points de repères aux collègues désireux de faire un choix dans la gamme existante.

I – CONSTATS LIMINAIRES.

Observons une calculette type.

1 - **Les touches.** : seules «entrées» dont la signification est en général explicite, excepté toutefois pour la touche M (comme Mémoire) sur laquelle nous reviendrons.

2 - **L'affichage** : «sortie» unique, généralement 8 cases permettant de lire des nombres.

Cette affichage peut être :

– rouge (les chiffres sont alors en général petits et la lecture se fait à travers des loupes incorporées à l'écran).

– vert, plus lisible que le rouge mais consommant plus d'électricité. A n'accepter que si l'on travaille sur accus rechargeables ou sur blocs secteurs.

– à cristaux liquides, consommation très faible mais prix encore élevés (au moins 50 % plus cher que le même matériel ayant un affichage à diode).

3 - **Premières opérations.**

Ces petites machines sont construites pour que l'on traite les calculs comme on les écrit à la main (cette écriture s'appelle algébrique directe en opposition avec la polonaise inversée proposée par un seul constructeur par ailleurs absent de cette gamme).

Lorsque l'on fait une opération, 2 + 3 par exemple, on constate les affichages successifs suivants :

Touches	Affichage
2	2
+	2
3	3

On peut formuler 2 hypothèses :

1 - le 2 qui a «disparu» de l'affichage est «quelque part» dans la machine ; on dira qu'il est dans un registre baptisé «Réserve».

2 - le + est enregistré dans la machine qui s'en «souvient» lors de la pression de la touche =.

Ces deux hypothèses nous conduisent à transformer le schéma précédent de la façon suivante :

Touches	Affichage	Réserve	Mémoire des signes
2	2	0	
+	2	2	+
3	3	2	+

Partie visible de la machine — Modèle pour la partie «boîte noire»

On sera amené à vouloir connaître le contenu du registre «Réserve».

Certains constructeurs ont prévu cet éventualité et l'on trouve parfois les touches : EX (échange) ou X ⟷ Y (X affichage et Y réserve) ou REV qui permettent d'échanger les contenus de l'affichage et de la réserve. L'intérêt pédagogique d'un tel matériel est évident et il faudra refuser toute machine ne possédant pas une touche ayant cet effet. Une question, alors, se pose : «Que deviennent les contenus des registres Affichage et Réserve lors de la pression de la touche $\boxed{=}$? ».

Il n'y a pas de réponse générale à cette question et selon le type de machine le contenu du registre réserve sera :

1) le premier nombre entré (ici 2)
2) le second nombre entré (ici 3)
3) le résultat de l'opération (ici 5)
4) 0.

Les deux premiers cas sont bien sûr les plus intéressants car ils permettent de réitérer l'opération uniquement par la pression de la touche $\boxed{=}$.

Notons que pour la même machine deux types d'opérations différents (+ et X par exemple) peuvent avoir des effets différents quant au contenu du registre réserve.

Dans la plupart des cas, la pression d'une deuxième touche opératoire (à la place du $\boxed{=}$) effectue l'opération déjà «emmagasinée» mais certains matériels ont des «priorités» (il s'agit de priorités de la multiplication ou division sur l'addition ou la soustraction). Sur ces calculettes les pressions :

$\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ donnent 14 pour résultat.

Matériel sans priorité :

Touches	Affichage
2	2
+	2
3	3
X	5
4	4
=	20

Matériel avec priorité :

Touches	Affichage
2	2
+	2
3	3
X	3
4	4
=	14

Les machines ayant des priorités ont, en général, des parenthèses (avec plusieurs niveaux) ce qui permettra de résoudre tous les problèmes courants.

On pourra, bien entendu, employer d'autres modèles pour cerner le fonctionnement des calculettes ; l'exemple du début peut se décrire ainsi :

$$(0, 0, *) \xrightarrow{\boxed{2}} (2, 0, *) \xrightarrow{\boxed{+}} (2, 2, +) \xrightarrow{\boxed{3}} (3, 2, +) \xrightarrow{\boxed{=}} (5, 3, +).$$

II – AUTRES TOUCHES, DANGERS IMMEDIATS.

– Touche $\boxed{\%}$

Certaines sont une escroquerie : elles font uniquement une division par 100 ! Celles pouvant présenter un intérêt doivent effectuer sans problèmes des opérations du type :

$\boxed{S}$ $\boxed{+}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$ c'est-à-dire $S + \dfrac{S \times x}{100}$

$\boxed{S}$ $\boxed{-}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$ c'est-àdire $S - \dfrac{S \times x}{100}$

– **Facteur constant.**

On dispose sur certaines machines de la possibilité de «stocker» un nombre et une opération ; cette particularité s'appelle «facteur constant» et elle est souvent symbolisée par K. Il faut une expérience assez grande pour pouvoir en tirer profit.

– **Touche** $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Remplace le nombre affiché par sa racine carrée. Il faut vérifier que cette opération ne transforme pas les contenus de la réserve ou de la mémoire ; pour cela essayez de faire le calcul $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, vérifier le résultat, regarder si le contenu de la mémoire a changé.

Un certain nombre de machines affichent - 2 quand on veut faire $\sqrt{-4}$. Ce problème n'est pas primordial dans les critères de choix d'une machine.

III – MEMOIRE.

N'achetez pas une mémémoire*. Pour cela il faut pouvoir

– échanger l'affichage et la mémoire

(touche X $\longleftrightarrow$ M ou M EX ou M REV)

– faire des opérations directement en mémoire :

$\boxed{M}$ $\boxed{+}$, $\boxed{M}$ $\boxed{-}$ et si possible $\boxed{M}$ $\boxed{\times}$, $\boxed{M}$ $\boxed{\div}$

– effectuer toutes les opérations sans que le contenu du registre mémoire soit affecté.

IV – ECRITURE DES NOMBRES.

On préfèrera les machines qui alignent les nombres à droite :

```
----------------- 125
-------------------- 37
---------------- 7739
```

à celles qui alignent les nombres à gauche :

```
125 -----------------
37 -------------------
7739 --------------
```

pour des raisons pédagogiques évidentes.

La notation scientifique est liée à l'existence des fonctions log et exp.

* *une mémoire à l'ancienne = une mémémoire.*

La plupart des machines tronquent les résultats. Certaines arrondissent au nombre le plus proche :

– sans conserver d'autres chiffres que ceux affichés,
– en travaillant sur 1 ou 2 chiffres de plus que ceux affichés.

Pour s'en rendre compte il suffira d'effectuer un calcul semblable à celui-ci :

Touches	Affichage
2	2
÷	2
3	3
=	.66666667
–	.66666667
.6666667	.6666667
=	
X	
1000000	
=	

Observez les résultats et conclure.

V – PILES - SECTEURS ACCUS.

Il n'y a pas de réponse générale à cette interrogation. Il semble qu'une alimentation à l'aide de deux grosses piles de 4,5 volts (dites de «ménage»), extérieures et reliées à la machine par une prise «JACK» ad hoc soit la moins onéreuse, bien que peu esthétique, et la moins dangereuse dans le cas d'une utilisation dans les classes. Mais bien sûr, si les possesseurs d'un fer à souder veulent bricoler une alimentation, alors tout est possible...

DIVERTISSEMENTS.

I – QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES.

On a souvent besoin d'avoir de grosses opérations «chez soi». En voici quelques unes :

* $48\,309\,178\,743\,961\,352\,657 \times 207 = \underbrace{999 \ldots 9}_{22 \text{ chiffres } 9}$

* $2\,821\,109\,907\,456 : 1\,679\,616 = 1\,679\,616$

* $112\,107\,492\,512\,009\,024\,364\,616\,104 : 908\,070\,696\,867 = 123\,456\,789\,101\,112$

* $720^8 = 10^8 \times 72\,220\,392\,308\,736$

* $\dfrac{1}{23} = 0{,}0\underbrace{43\,478\,260\,869\,565\,217\,391\,30}_{\text{période de longueur } 22}4\,347\;\;826\,086 \ldots$

Remarque : on vérifiera que $\underbrace{11 \ldots 1}_{22 \text{ chiffres}}$ est un multiple de 23. Plus généralement, pour p premier distinct de 2, 3, 5, si T est la longueur de la période du développement décimal de $\frac{1}{p}$, le nombre formé de T chiffres 1 est multiple de p.

II – DIVERTISSEMENT EN π.

• $\pi = 4 \sum_{0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (obtenu par développement en série de Arctg x),

$\pi = 2 + \sum_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 0{,}25}$ (obtenu ainsi : $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{2n+1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right)$)

- $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$ (obtenu en développant en série de Fourier la fonction de période 2π égale à $|x|$ pour $|x| < \pi$)

  $\dfrac{\pi^2}{12} = \sum\limits_1^\infty \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ (obtenu en développant en série de Fourier la fonction de période 2π égale à x^2 pour $|x| < \pi$)

- $\dfrac{\pi^4}{96} = \sum\limits_{p=0}^\infty \dfrac{1}{(2p+1)^4}$ (obtenu en appliquant la formule de Parseval à la fonction de période 2π valant $|x|$ pour $|x| < \pi$)

- $\dfrac{\pi - \theta}{2} = \sum\limits_1^\infty \dfrac{\sin n\theta}{n}$ $\left\{\begin{array}{l}\theta \text{ en radian} \\ 0 < \theta < 2\pi\end{array}\right.$ (developpement en série entière de $\log(1 - z)$)

- $\pi = \alpha + \sin\alpha + \sin(\alpha + \sin\alpha) + \sin(\alpha + \sin\alpha + \sin(\alpha + \sin\alpha))$ (obtenu à partir de la suite $u_{n+1} = u_n + \sin u_n$).

On pourra comparer les vitesses de convergence des séries proposées et avant de conclure, faire les calculs d'erreurs dans chaque cas.

« Trois étant le sujet sur quoi nous raisonnons —
C'est un chiffre des plus commodes à poser —
Nous ajoutons sept à dix, puis multiplions
Le total par, de huit, mille diminué.

« Le résultat ainsi obtenu, voyez-vous,
Nous le divisons par neuf cent quatre-vingt-douze;
Nous soustrayons dix-sept : la réponse doit être
Absolument exacte et parfaitement juste.

Lewis Carroll, La chasse au Snark

CALCUL DE PUISSANCES AVEC DEPASSEMENT DE CAPACITE

Nous avons voulu calculer des puissances dépassant la capacité de la calculatrice. Nous avons emprunté des chemins différents selon les caractéristiques des machines : avec ou sans la touche «Log».

I – MACHINE SANS LA FONCTION LOGARITHME.

Calculons par exemple 1227^{49}

$$1227^{49} = (1{,}227)^{49} \times 10^{147}$$

et

$$(1{,}227)^{49} = 1{,}227 \times (1{,}227)^{16} \times (1{,}227)^{32}$$

$$= 22562{,}298.$$

D'où $1227^{49} = 2{,}2562298 \times 10^{151}$.

Les calculs ci-dessus sont faits avec une machine qui travaille avec huit chiffres, sans arrondi. L'erreur d'affichage ϵ_1 est donc majorée par une unité du dernier chiffre affiché. Mais nous faisons une autre erreur car les facteurs du produit ne sont pas connus exactement. Rappelons que si a et b sont entachés des erreurs ϵ et ϵ' l'erreur ϵ_2 sur $a \times b$ est de l'ordre de $a \times \epsilon' + b \times \epsilon$.

(*) *Nous laissons au lecteur le soin de programmer ce calcul, en utilisant la réserve ou la mémoire ;* a^{2^n} *se calcule par* n *pressions successives sur une touche* x^2.

Rassemblons ces résultats sur l'exemple précis :

Calcul effectué	Résultat affiché	ϵ_1	$\epsilon_2 = a \times \epsilon' + b \times \epsilon$	$\epsilon_T = \epsilon_1 + \epsilon_2$
$(1{,}227)^2$	1,505529	0	0	0
$(1{,}227)^4$	2,2666175	10^{-7}	0	10^{-7}
$(1{,}227)^8$	5,1375548	10^{-7}	$5{,}4 \times 10^{-7}$	$6{,}4 \times 10^{-7}$
$(1{,}227)^{16}$	26,394469	10^{-6}	$10{,}2 \times 6{,}4 \times 10^{-7}$ $\simeq 7 \times 10^{-6}$	8×10^{-6}
$(1{,}227)^{32}$	696,66799	10^{-5}	43×10^{-5}	$4{,}4 \times 10^{-4}$
$1{,}227 \times (1{,}227)^{16} \times (1{,}227)^{32}$	22562,298	10^{-3}	$[27 \times 4{,}4 \times 10^{-4} + 697 \times 10^{-5}] \times 1{,}2$	$2{,}3 \times 10^{-2}$

C'est-à-dire :

$$(1{,}227)^{49} = 22562{,}298 \pm (2{,}3 \times 10^{-2})$$

$$1227^{49} = (2{,}2562298 \times 10^{151}) \pm (2{,}3 \times 10^{145}).$$

On ne peut faire un tel calcul que dans la mesure ou l'exposant n'est pas trop élevé ; pour 6^{22570} le calcul est trop long et l'erreur trop importante.

II – MACHINE AYANT UNE TOUCHE «Log».

Reprenons 1227^{49} et posons :

$$1227^{49} = 10^x$$

On obtient : $x = \log_{10} 1227^{49}$

$$x = 49 \log_{10} 1227$$

La machine nous donne :

$$x = 151{,}35338$$

$$x - 151 = 0{,}3533853$$

$$1227^{49} = 10^{151} \times 10^{0{,}3533853} = 2{,}2562310 \times 10^{151}$$

Pour calculer $10^{0,3533853}$, on peut utiliser l'inverse de la fonction log, ou la touche y^x.

Evaluons l'erreur commise :

$$49 \times \log_{10} 1227 - 151 = 0{,}3533853 \pm 10^{-7}$$

$$10^{0{,}3533853 \pm 10^{-7}} = (2{,}2562308 \pm 10^{-7}) \times \left\{ \begin{array}{l} 1{,}0000002 \\ \text{ou} \\ 0{,}9999997 \end{array} \right.$$

D'où :

$$1227^{49} = 2{,}2562308 \times 10^{151} \pm 10^{145}$$

Un autre calcul d'erreur est à faire lorsque, pour obtenir $\log_{10} x$, il faut diviser $\log_e x$ par $\log_e 10$.

Avec la touche «Log», on peut calculer 6^{22570}, ce qui donne avec une TI 30 :

Touche	Affichage
6	6
Log	0,77815125
X	0,77815125
22570	22570
=	17562,874
-	17562,874
17562	17562
=	0,873719
INV Log	7,4768557

Résultat : $6^{22570} = 7{,}4768557 \times 10^{17562}$

Nous avons considéré des dépassements de capacité dans un seul sens. Le lecteur pourra adapter les calculs au cas où y^x est très petit.

Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir, ou, en d'autres termes : plus ça rate, plus on a de chances que ça marche. (

Principes de logique Shadock.

OU L'ON VOIT QUE LE FACTEUR CONSTANT PEUT ETRE UTILISE COMME MEMOIRE

I – P.G.C.D. DE DEUX NOMBRES.

Pour calculer le p.g.c.d de 2 nombres a et b par l'algorithme d'Euclide on peut parcourir la suite de calculs suivante :

1 – $A \longleftarrow a$; $B \longleftarrow b$

2 – $R \longleftarrow A - B \times \text{int}(A \div B)$

3 – Si $R \neq 0$ alors
- $A \longleftarrow B$
- $B \longleftarrow R$
- aller en 2

4 – Sinon Ecrire B

Si l'on possède une machine ayant l'échange entre l'affichage et la réserve, et entre l'affichage et la mémoire on pourra utiliser le programme donné page 17, dans «Matchinettes» (février 1977).

Patrick Ancillon nous a signalé un programme différent adapté à une machine ayant seulement l'échange affichage - mémoire (EXC) et un facteur constant (K), ce dernier étant utilisé comme seconde mémoire. Un tel programme est délicat à construire car tout signe opératoire modifie le facteur constant.

Touche	Affichage	Mémoire	Facteur constant	Commentaires
b	b	0		introduire b
X	b	0		on stocke b dans le facteur constant
K	b	0	X b	
a	a	0	X b	introduire a
STO	a	a	X b	on stocke a dans la mémoire
1/x	1/a	a	X b	
=	b/a	a	X b	
1/x	a/b	a	X b	
				noter la partie entière de l'affichage int(a/b) = q
q	q	a	X b	réécrire q
=	b X q	a	X b	
+/-	– b X q	a	X b	
SUM	– b X q	a – b X q	X b	notation : r = a – bq
1	1	r	X b	
=	b	r	X b	b «revient» de la case K
EXC	r	b	X b	échange la mémoire et l'affichage
				si l'affichage est égal à 0 **alors** aller à la **fin**
X	r	b		on stocke r dans le facteur constant
K	r	b	X r	
RCL	b	b	X r	
FIN				faire EXC et lire le pgcd à l'affichage

II – CALCUL DES VALEURS D'UN POLYNOME.

Pour des polynômes ayant de faibles coefficients entiers, le «facteur constant» permettra de conserver la valeur de x et de calculer le polynôme en suivant les puissances croissantes de x. Par exemple :

$$f(x) = x^7 + x^4 + 2x^3 + 8$$

Touche	Affichage	Mémoire	Facteur constant
8	8	0	
STO	8	8	
x	x	8	
X K	x	8	X x
=	x^2	8	X x
=	x^3	8	X x
SUM	x^3	$8 + x^3$	X x
SUM	x^3	$8 + 2x^3$	X x
=	x^4	$8 + 2x^3$	X x
SUM	x^4	$8 + 2x^3 + x^4$	X x
=	x^5	$8 + 2x^3 + x^4$	X x
=	x^6	$8 + 2x^3 + x^4$	X x
=	x^7	$8 + 2x^3 + x^4$	X x
SUM	x^7	f(x)	X x
RCL	f(x)	f(x)	X x

On pourra modifier ces calculs pour des polynômes plus compliqués. Cela dépendra surtout de la machine utilisée et de ses inhibitions.

Notes :

UNE RECETTE DE CALCUL

«La cuisine est un art»
Anthelme Brillat-Savarin

I – LA RECETTE.

Pour calculer y^x avec une calculette possédant les 4 opérations et la touche $\sqrt{\ }$, on nous a indiqué la recette suivante :

Introduire y, puis appuyer 11 fois sur la touche $\sqrt{\ }$. Retirer 1, puis multiplier le tout par x. Ajouter alors 1, puis appuyer 11 fois successivement sur les touches X et = (ou 11 fois sur la touche X^2 s'il y en a une). Lire alors y^x à l'affichage.

II – LUCULUS AU TRAVAIL.

Un minimum d'expérience culinaire (les plats exécutés en suivant scrupuleusement une recette ne donnent parfois qu'une approximation du résultat prévu) nous a incité à exécuter cette recette.

Choisissons ici : y = 2,3 et x = 0,37. Essayons avec deux matériels différents : une machine A, affichant et travaillant avec 8 chiffres, une machine B, travaillant avec 10 chiffres et affichant 8 chiffres.

Action de l'opérateur	Affichage sur A	Affichage sur B
– Introduire 2,3	2,3	2,3
– Appuyer 11 fois sur la touche $\sqrt{\ }$	....	....
	1,0004066	1,0004068
– Retrancher 1	0,0004066	0,0004068
– Multiplier par 0,37	0,0001504	0,0001505
– Ajouter 1	1,0001504	1,0001505
– Appuyer 11 fois sur les touches X, =	....	....
	1,3605664	1,3609934

Le résultat à 10^{-7} près est : $2{,}3^{0{,}37} = 1{,}3609410$

III – ANALYSE DE LA RECETTE.

Pour dominer notre étonnement face à cette magie, nous avons essayé de comprendre, en nous posant trois questions.

1 – Pourquoi 11 fois ?

2 – Est-ce que cela «marche» pour tout y positif et tout x ?

3 – Peut-on estimer l'erreur faite ?

Bien sûr, une réponse possible est : Pourquoi pas 11 fois ? Mais elle ne nous satisfait pas ; nous avons alors essayé d'autres nombres à la place de 11. Voici ce que cela donne pour 9 et 13 :

	Affichage sur A	**Affichage sur B**
2,3 9 fois $\sqrt{\ }$ ⋮ Résultat final (avec 9 fois X et =)	2,3 .... 1,0016280 1,3610533	2,3 .... 1,0016281 1,3611554
2,3 13 fois $\sqrt{\ }$ ⋮ Résultat final	2,3 .... 1,0001016 1,3594501	2,3 .... 1,0001017 1,3609456

On remarque que le meilleur résultat est obtenu pour «11 fois» sur le matériel A et pour «13 fois» sur le matériel B (dans le calcul de $2{,}3^{0{,}37}$). Pour avoir une opinion plus précise, on peut faire d'autres expériences.

Pour répondre aux questions posées, passons par les chemins du calcul algébrique, toujours dans le cas y = 2,3 et x = 0,37 (les calculs ci-dessous se généralisent à tout y positif et à tout x).

Le modèle mathématique de la recette est donné par la formule suivante :

$$X = \left[\left(y^{\frac{1}{2^{11}}} - 1\right) x + 1\right]^{2^{11}} .$$

Lorsqu'on exécute cette recette, ce qu'on lit à l'affichage est une valeur approchée de X.

Notons M une égalité au sens d'une calculette usuelle, c'est-à-dire :

a M b si et seulement si a et b ont leurs 8 premiers chiffres significatifs égaux.

On a alors :

$$y^{2^{\frac{1}{11}}} = y^{\frac{1}{2048}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha\,!} \left(\frac{\log y}{2048}\right)^{\alpha}$$

Soit :

$$2{,}3^{\frac{1}{2048}} \approx 1 + \frac{\log 2{,}3}{2048} \qquad \text{puisque} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\log 2{,}3}{2048}\right)^2 = 1{,}5 \times 10^{-8}$$

D'où :

$$(2{,}3^{\frac{1}{2048}} - 1)\ 0{,}37 + 1 \approx 1 + \frac{0{,}37 \log 2{,}3}{2048}$$

Or pour $|u| < 1$, on a

$$(1 + u)^n = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p\,!}\, u^p$$

Ce qui donne ici :

$$\left(1 + \frac{0{,}37 \log 2{,}3}{2048}\right)^{2048} \approx 1 + \sum_{p=1}^{p=5} \frac{2048 \times 2047 \times \dots \times (2048 - p + 1)}{p\,!} \left(\frac{0{,}37 \log 2{,}3}{2048}\right)^p$$

D'autre part :

$$Y = 2{,}3^{0{,}37} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(0{,}37 \log 2{,}3)^p}{p\,!}$$

$$Y \approx \sum_{p=0}^{5} \frac{(0{,}37 \log 2{,}3)^p}{p\,!}$$

$$Y - X \approx \sum_{p=0}^{5} \left[1 - \frac{2048 \times 2047 \times \dots \times (2048 - p + 1)}{2048^{p-1}}\right] (0{,}37 \log 2{,}3)^p$$

Soit : $|Y - X| \leqslant 5 \times 10^{-4}$

Le calcul montre que le résultat est d'autant meilleur que $y \log x$ est petit, $(y^{2^{\frac{1}{11}}} - 1)$ devant être de l'ordre de 5×10^{-5} pour avoir suffisamment de chiffres significatifs (ceci pour le matériel A).

Conclusion : Pour rendre la soupe meilleure, il faut un minimum.
Et ne pas oublier d'adapter la recette au chaudron.

Tu m'as dit si tu m'écris
Ne tape pas tout à la machine
Ajoute une ligne de ta main

Blaise Cendrars

ECRITURES DE NOMBRES

I – REMARQUES PRELIMINAIRES.

1 – Si un nombre entier n s'écrit en base b : $a_k \dots a_i \dots a_0$, cela signifie que :

$$n = a_k b^k + \dots + a_i b^i + \dots + a_0$$

D'où $n/b^i = A \times b + a_i + C/b^i \quad \begin{cases} A \in \mathbb{N} \\ C \in \mathbb{N} \\ C < b^i \end{cases}$

Donc a_i est le reste de la division par b de la partie entière de n/b^i.

De même, si d est un réel positif plus petit que 1 s'écrivant $0, a_1 a_2 \dots a_i \dots$ en base b :

$$d = a_1/b + a_2/b^2 + \dots + a_i/b^i + \dots$$

$$b^i \times d = B \times b + a_i + D/b^i \quad \begin{cases} B \in \mathbb{N} \\ D \in \mathbb{R} \\ D < b^i \end{cases}$$

et

a_i est le reste de la division par b de la partie entière de $b^i \times d$.

2 – Pour diviser (resp. multiplier) un nombre par b^i, on peut diviser (resp. multiplier) i fois successivement par b.

3 – Nous considèrerons dans la suite l'écriture de nombres en base b, lorsque b admet un caractère de divisibilité simple et lorsqu'on peut calculer le reste d'une division par b sans la faire. Par exemple $b = 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25, 50\dots$

II – ECRITURE D'UN ENTIER EN BASE b A L'AIDE D'UNE CALCULETTE.

Exemple : On suppose qu'on dispose d'une calculette ayant un facteur constant pour la division et qu'on a déjà «programmé» la division par 5.

Ecrivons alors 1883 en base 5.

Touche	Affichage	Notes	Remarque
1883	1883	3	$1883 = 5Q_1 + 3$ $Q_1 \neq 0$
=	376,6	13	$376 = 5Q_2 + 6$ $Q_2 \neq 0$
=	75,32	013	$75 = 5Q_3 + 0$ $Q_3 \neq 0$
=)	15,064	0013	$15 = 5Q_4 + 0$ $Q_4 \neq 0$
=	3,0128	30013	$3 = 5 \times Q_5 + 3$ $Q_5 = 0$

FIN
(car $Q_5 = 0$)

Résultat : le nombre qui s'écrit 1883 en base 10 s'écrit 30013 en base 5.

Si la machine ne possède pas de facteur constant, la touche = doit être remplacée par ÷, 5, ÷ la première fois puis par 5,÷ les autres fois, ou systématiquement par ÷, =, suivant les caractéristiques du matériel utilisé.

Donnons l'organisation des calculs de l'écriture d'un nombre A en base b :

	Remarques calculettes
1 - $I \longleftarrow 0$, $A \longleftarrow n$, $B \longleftarrow 0$	Initialisations
2 - $A \longleftarrow A/b$	Réalisé par la pression du signe =
3 - $C \longleftarrow$ INT A	Ces lignes se calculent «de visu»
4 - $D \longleftarrow C-(\text{INT } C/b) \times b$	
5 - $B \longleftarrow 10^I \times D + B$	Ecrire un chiffre de plus à gauche du précédent
6 - $I \longleftarrow I + 1$	Sur le papier ou dans la tête
7 - Si $D \neq C$ aller a 2	Dans l'exemple on s'arrête lorsque $Q_5 = 0$
8 - FIN : n s'écrit B en base b	

Cette systématisation peut apparaître superfétatoire au fanatique de la calculette. Elle constitue une analyse du travail effectué qui permettra de transférer cet algorithme sur d'autres matériels et de passer au programmable.

III – ECRITURE D'UN REEL POSITIF PLUS PETIT QUE 1 EN BASE b.

Exemple : Ecrivons en base 5 le réel qui, en base 10, s'écrit 0,14823.

La division par 5 a été programmée.

Touche	Affichage	Notes
0,14823	0,14823	0,
=	0,74115	.. 0
=	3,70575	 3
=	18,52875	 3
=	92,64375	 2
=	463,21875	 3
=	2316,0938	 1
=	11580,469	 0
=	57902,355	 2
=	289511,72	 1
=	1447558,6	 3
=	7237793	 3

L'écriture en base 5 de 0,14823 est : 0,03323102133

Le programme est dans ce cas.

1 - I $\longleftarrow$ 1, A $\longleftarrow$ n, B $\longleftarrow$ 0

2 - A $\longleftarrow$ bA

3 - C $\longleftarrow$ INT A

4 - D $\longleftarrow$ C - (INT C/b)b

5 - B $\longleftarrow$ $10^{-I} \times D + B$

6 - I $\longleftarrow$ I + 1

7 - Si A $\neq$ C aller en 2

8 - FIN, n s'écrit B en base b.

Des questions se posent alors :
- tous les chiffres obtenus sont-il exacts ?
- combien de chiffres exacts peut-on obtenir ?

Nous laissons au lecteur le soin de se rendre compte de ce qu'on peut obtenir suivant le matériel (affichage à 8 chiffres, calculs par arrondis ou par défaut). Nous donnons dans le paragraphe suivant des cas où les questions ci-dessus se résolvent bien.

IV – DES CAS OU TOUT S'ARRANGE.

1) Développement en base b d'un nombre rationnel q tel que :

$$q < 1$$

$$10^7 \times q \in \mathbb{N}.$$

Nous indiquons sur un exemple une méthode qui permet d'avoir autant de chiffres que l'on veut. Il s'agit ici d'écrire 0,77777 en base 3.

Touche	Affichage	Notes	Remarque
0,77777	0,77777	0,	
=	2,33331	.. 2	
=	6,99993	 0	
=	20,99979	 2	
=	62,99937	 2	
=	188,99811	 2	
=	566,99433	 2	Le nombre inscrit à l'affichage a 8 chiffres et en multipliant par 3, on obtient un nombre ayant 9 chiffres
0,99433	0,99433		
=	2,98299	.. 2	
=	8,94897	 2	
=	26,84691	 2	
=	80,54073	 2	
=	241,62219	 1	
=	724,86657	 1	On retranche encore la partie entière.
0,86657	0,86657		
=	2,59971	.. 2	
=	7,79913	 1	
=	23,39739	 2	
=	70,19217	 1	
=	210,57651	 0	
=	631,72953	 1	

Résultat : 0,77777 s'écrit en base 3 : 0,202222 222211 212101...

2) Calcul de $1/p$ lorsque p est premier.

Le développement de $1/p$ est périodique à partir d'un certain rang, la période étant un diviseur de $p - 1$. De plus, si p est premier avec b, le développement de $1/p$ est périodique dès le départ.

Exemple : La machine affiche 0,1428571 pour 1/7. La période de 1/7 est au plus égale à 6, donc il suffit d'appuyer 6 fois sur la touche =. Avec : $b = 5$, on note : 0,032412 ; donc 1/7 s'écrit en base 5 : 0,032412...032412...

On remarquera que si on continue les calculs sur machine on trouve :

0,032412032332000...0

L'erreur commise est de l'ordre de 5^{-10}.

Exemple : De même 1/5 s'écrit en base 9 : 0,1717...17...

«... l'éducation
ne se comporte pas autrement
que si l'on s'avisait d'équiper des gens
pour une expédition polaire
avec des vêtements d'été
et une carte
des lacs italiens».

Sigmund Freud

Opus cité dans «Le Concombre Masqué», Mandryka

TRAVAUX EN CLASSE (CM1 – CM2)

Nous donnons ici le plan de quelques séances de travail avec des calculettes dans la classe de CM1 - CM2 de l'école d'Herbeys* ; cet article ne décrit pas l'ensemble des directions prises par notre travail dans les classes, c'est seulement le récit partiel d'une action précise.

Le rite institué était le suivant :

1) En début de séance (chacune d'une durée de 45 mn environ) chaque élève ou groupe d'élèves devait :

– dire quel était son projet,

– dire quels moyens (livres, documentation, etc...) leur semblaient nécessaires pour atteindre le but fixé par le projet.

2) Chaque groupe devait transmettre à l'ensemble de la classe les étapes de son travail, toutes les 2 séances environ. Chaque élève de la classe avait à sa disposition une calculatrice «4 opérations et une mémoire». Nous avions déjà travaillé 2 séances de façon plus directive, et nous ne sommes intervenus dans les choix des projets qu'au niveau de leurs reformulations.

Les différents groupes ont travaillé sur un des thèmes suivants, pendant 4 ou 5 séances.

1 – *Titre* : Grosses opérations.

Projet : Comment faire à la machine des calculs avec plus de 8 chiffres ?

Effectifs : 2 groupes de 2 élèves.

Résultats : Les élèves sont arrivés à trouver une solution au problème d'une manière presque «mécanique». La justification semblant avoir peu d'importance et même apparaissant à certains comme une complication inutile.

(*) Nous remercions Georges Robin d'avoir travaillé avec nous et de nous avoir accueilli dans sa classe.

2 — *Titre* : **Mémoire.**

Projet : Utilisation de la mémoire. Construction d'un «modèle» pour en comprendre le fonctionnement.

Effectif : 2 groupes de 2 élèves au début, fondus en 1 groupe de 4 élèves à la fin.

Résultats : Les élèves ne sont parvenus que très difficilement à trouver la manière dont la mémoire de la machine fonctionne. Certains items du fonctionnement étaient bien compris (M + et M —), mais d'autres furent plus difficiles, par exemple la différence entre MR (rappel de mémoire sans la «vider») et MT (rappel de mémoire en la remettant à 0). Les élèves ont eu beaucoup de difficultés à mettre au point des processus expérimentaux leur permettant de tirer des conclusions quant au fonctionnement. Il semble qu'une façon de surmonter ces difficultés soit de développer et de systématiser une dialectique de la validation.

3 — *Titre* : **Ecrire avec une calculette.**

Projet : Faire inscrire des mots sur le cadran de la machine.

Effectif : 2 groupes de 3 élèves.

Résultats : Les élèves ont apporté des réponses aux questions suivantes :

1) La lecture du cadran doit-elle se faire la calculette tenue à l'endroit ou «à l'envers» ?

2) Quelles lettres, quels mots peut-on écrire ?

3) A partir d'un mot pouvant être écrit, élaborer une histoire pour le construire.

Les 2 groupes ont explicité très mathématiquement les problèmes. Par exemple, applications de l'ensemble des chiffres dans l'ensemble des lettres, de l'ensemble des chiffres «à l'envers» dans l'ensemble des lettres, travail combinatoire sur les mots possibles à 2 et 3 lettres, etc...

Ce projet «littéraire», inspiré par l'environnement, s'est révélé plus riche que que nous ne le pensions.

4 – *Titre* : **Problèmes.**

Projet : Créer des énoncés de problèmes, trouver leurs solutions à l'aide des calculatrices.

Effectif : 1 groupe de 3 élèves.

Résultats : Le groupe s'est inventé des énoncés sur les parcs de voiture et a ensuite calculé les bénéfices réalisés par la coopérative lors de la vente de tableaux de clous et de fils réalisés par la classe.

Les réflexions, au niveau des résultats donnés par les calculettes furent surtout sur le nombre de décimales et sur les ordres de grandeur des résultats.

5 – *Titre* : **Soustractions (et opérations «interdites»).**

Projet : Au départ faire effectuer toutes les soustractions que l'on veut, ensuite faire des opérations non connues et essayer de comprendre les résultats.

Effectif : 1 groupe de 2 élèves.

Résultats : Construction expérimentale d'entiers négatifs, travail sur les résultats des divisions, le projet s'ouvrait sur de vastes horizons...

CONCLUSION.

Ces divers thèmes ne sont là que pour raconter le travail effectué dans une classe et donner envie à d'autres d'en renvoyer aussi des échos.

Il est sûr que les temps de mise en commun étaient, par essence, encore plus intéressants que les projets, puisqu'il reflétaient la manière dont les enfants prenaient possession à la fois d'une calculette et d'un savoir.

En somme, ces temps communs permettaient de passer de l'interdit à l'inter-dit.

Составьте программу вычисления числа e по формуле, где e представляется бесконечной непрерывной дробью:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{6}{7 + \dots}}}}}}}$$

Цикл ограничить 6 повторениями.

FRACTIONS CONTINUES

I – PREMIERS CONTACTS.

On s'intéresse à des écritures de ce type :

$$x = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{\cdots\cdots}{u_{n-1} + \cfrac{1}{u_n}}}}$$

avec comme conditions :

$u_i \in \mathbb{N}$

si $i \neq 0$ alors $u_i \neq 0$

Nous noterons $(u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ le nombre x.

Exemple :

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}$$

A la machine les calculs se feront

– soit avec des parenthèses,
– soit en commençant «par la fin».

Voici un exemple de travail possible avec une machine :

	Machine	Opérateur
1	C/CE	
2	u_n	← introduire u_n
3	1/x	
4	+	
5		$n \longleftarrow n - 1$ (enlever 1 à n) si $n \geqslant 0$ aller en 2 sinon écrire le résultat

Par l'exemple donné nous obtiendrons :

$$x = 2.2901234$$

et si l'on fait les calculs «à la main» : $x = \dfrac{371}{162}$.

On appelle **fractions réduites** ou **réduites** les nombres (u_0), (u_0, u_1), (u_0, u_1, u_2), ... $(u_0, u_1, ..., u_i)$ mis sous forme de **fractions** irréductibles :

$$u_0 = \frac{p_0}{q_0} \quad ; \quad u_0 + \frac{1}{u_1} = \frac{p_1}{q_1} \quad ; \quad u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2}} = \frac{p_2}{q_2} \qquad \text{etc...}$$

Dans l'exemple, si $x = (2, 3, 2, 4, 5)$, les réduites seront :

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1} \quad ; \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{7}{3} \quad ; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{16}{7} \quad ; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{71}{31} \quad ; \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{371}{162}.$$

Une question se pose alors :

Etant donné un nombre rationnel positif, comment trouver les termes u_i avec une calculatrice ?

Les différents calculs peuvent être décrits de la façon suivante :

$$A \longleftarrow \frac{371}{162}$$

$$n \longleftarrow 0$$

tant que $A \neq \mathrm{INT}(A)$

$$u(n) \longleftarrow \mathrm{INT}(A)$$

Ecrire $u(n)$

$$n \longleftarrow n + 1$$

$$A \longleftarrow \frac{1}{A - \mathrm{INT}(A)}$$

fin tant que

Un tel programme se traduit sur une TI 30 par la séquence suivante :

Machine	Opérateur
371	k ⟵ 0
÷	
162	
=	Noter la partie entière de l'affichage : u(0)
−	
u(k)	introduire le dernier u(k) trouvé k ⟵ k + 1 ; Noter k
=	
1/x	Si affichage non entier, noter sa partie entière : u(k) sinon fin

Sur une machine ne possédant pas la touche 1/x, mais possédant une touche EXC, échangeant affichage et registre, on remplacera 1/x par la suite de touches : ÷, 1, EXC, =.

En fait ce programme nous donne la feuille de résultats suivante :

Affichage	k	u(k)
2.2901235	0	2
3.4468085	1	3
2.2380952	2	2
4.2	3	4
4.9999991	4	

Il se pose à ce niveau des problèmes d'arrondi. A 10^{-6} près, la dernière valeur affichée est égale à 5. Il y a de «fortes chances» que la valeur exacte, correspondant aux calculs effectués, soit 5. Si on veut le vérifier, il suffit de faire le programme page 36. Regardons ce que la machine fait (avec plus ou moins de précision) :

0,290...

$371 = 162 \times 2 + 47$ d'où $\dfrac{371}{162} = 2 + \dfrac{1}{\dfrac{162}{47}}$

u_0

0,446...

$162 = 47 \times 3 \times 21$ d'où $\dfrac{162}{47} = 3 + \dfrac{1}{\dfrac{47}{21}}$

u_1

0,238...

$47 = 21 \times 2 + 5$ d'où $\dfrac{47}{21} = 2 + \dfrac{1}{\dfrac{21}{5}}$

u_2

0,2...

$21 = 5 \times 4 + 1$ d'où $\dfrac{21}{5} = 4 + \dfrac{1}{\dfrac{5}{1}}$

u_3

4,99

$5 = 5 \times 1 + 0$ d'où $\dfrac{5}{1} = 5$

u_4

Ces lignes font apparaître un lien entre l'algorithme d'Euclide et l'écriture d'un rationnel sous forme de fraction continue (un travail sur cet algorithme est décrit dans «Matchinettes», février 77).

Travaillons sur un autre exemple : $\dfrac{682}{295}$

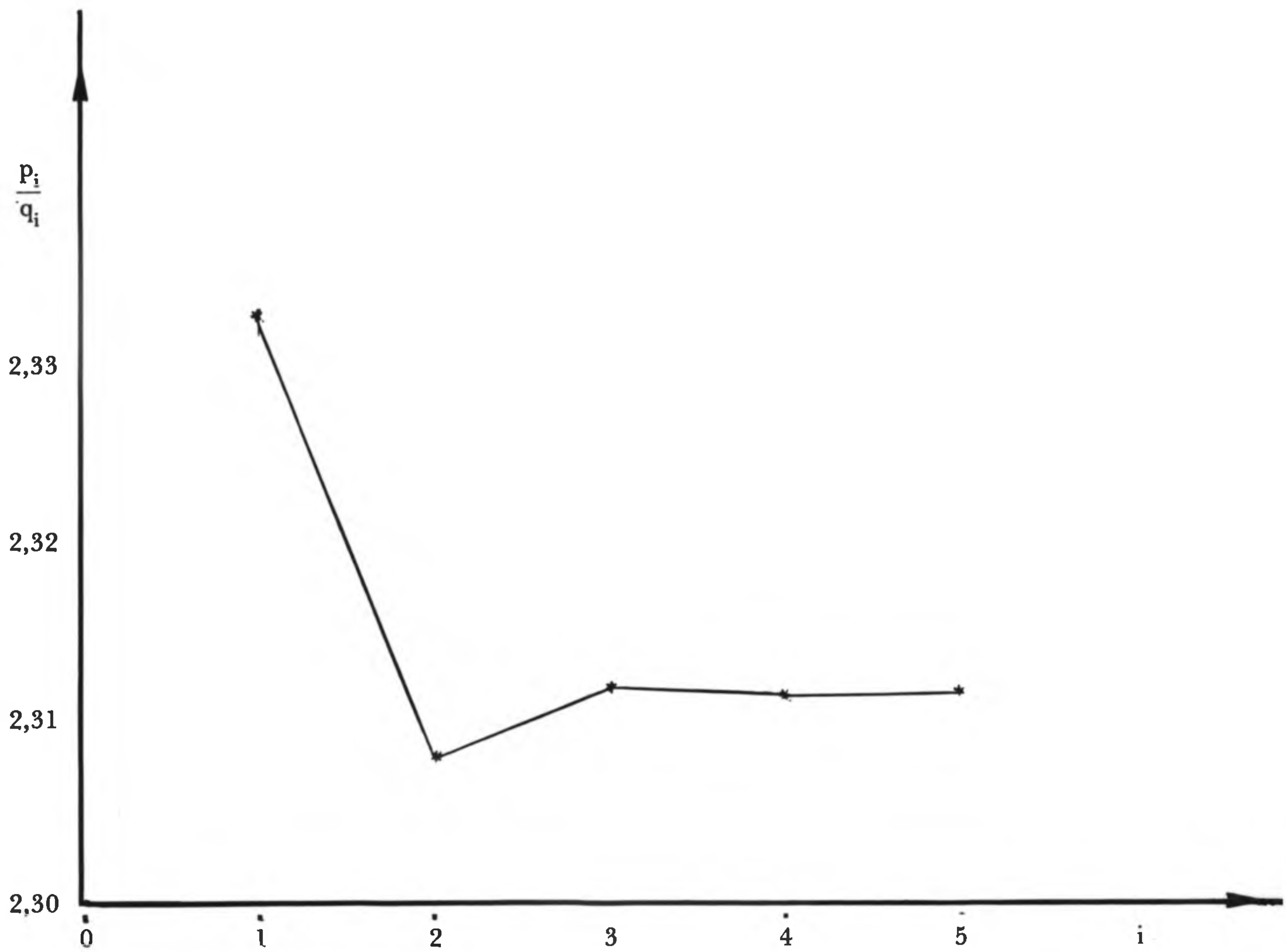
1) Calculons les u_i

2) Calculons les réduites.

Ecrivons les résultats sous la forme d'un tableau ; on pourra chercher des relations entre les nombres p_k, q_k, leurs prédécesseurs et les nombres

u_i, $0 \leqslant i \leqslant k+1$; de telles relations pourraient induire un algorithme pour le calcul des réduites...

i	u_i	p_i	q_i	p_i/q_i	Valeur approximative de p_i/q_i
0	2	2	1	2	2.
1	3	7	3	7/3	2.3333333
2	4	30	13	30/13	2.3076923
3	1	37	16	37/16	2.3125
4	5	215	93	215/93	2.311828
5	3	682	295	682/295	2.3118644



II – CAS INFINI.

* A toute fonction homographique f, nous associerons une matrice $M(f)$:

$$f : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d} \qquad M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le calcul montre que

$$M(f \circ g) = M(f) \times M(g).$$

* Soit (u_n) une suite d'entiers positifs telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, u_n soit strictement positif. A cette suite, associons la suite de fonctions homographiques (f_n), avec

$$f_n : x \longmapsto u_n + \frac{1}{x}$$

et la suite (F_n) avec $F_n = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$.

$$F_n(x) = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{\ddots \, u_n + \cfrac{1}{x}}}$$

Nous appellerons réduite d'ordre n la fraction continue

$$\mathcal{R}_n = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{\ddots \, u_{n-1} + \cfrac{1}{u_n}}}$$

et nous noterons $\frac{p_n}{q_n}$ la forme irréductible de $\mathcal{R}_n$.

Nous avons :

$$(1) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = \mathcal{R}_n \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0} F_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_{n-1}(x) = \mathcal{R}_{n-1} \end{cases}$$

D'autre part, si $M(F_n) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, les nombres a_n, b_n, c_n, d_n vérifient :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} u_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} u_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit, en considérant les déterminants :

$$(2) \qquad a_n d_n - b_n c_n = (-1)^{n+1}$$

Les nombres a_n et b_n d'une part, c_n et d_n d'autre part sont donc premiers entre eux*.

De (1), on déduit :

$$\mathcal{R}_n = \frac{a_n}{c_n}$$

$$\mathcal{R}_{n-1} = \frac{b_n}{d_n} \quad (\text{si } n \geqslant 2,\ d_n > 0).$$

D'où : $\quad a_n = p_n \qquad c_n = q_n$

$\qquad\qquad b_n = p_{n-1} \qquad d_n = q_{n-1}$

et la relation (2) se note :

$$(2') \qquad p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$$

En écrivant $F_{n+1} = F_n \circ f_{n+1}$ soit :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

les relations suivantes apparaissent :

$$(3) \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n u_{n+1} + p_{n-1} \\ q_{n+1} = q_n u_{n+1} + q_n \end{cases}$$

Ces relations permettent de calculer les réduites $\frac{p_n}{q_n}$ tant que p_n et q_n ne dépassent pas la capacité de la machine employée et montrent de plus que les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes, et vérifient pour tout n :

$$p_n \geqslant n \qquad \text{et} \qquad q_n \geqslant n.$$

Considérons la série associée à la suite $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\mathcal{R}_n = \frac{p_0}{q_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \right)$$

En utilisant (2'), nous avons :

$$\mathcal{R}_n = \frac{p_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{i+1}}{q_i q_{i-1}}$$

(*) *«Bezout is good for you»*

La série de terme général $\frac{(-1)^{i+1}}{q_i q_{i-1}}$ est convergente (elle est alternée et $\frac{1}{q_i q_{i-1}}$ tend vers 0 en décroissant).

Ce résultat peut s'écrire :

Toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs définit un réel $\mathcal{R}$ tel que :

$$\mathcal{R} = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{\ddots \; u_i + \cfrac{1}{u_{i+1} + \ddots}}}$$

La réciproque, à savoir que tout nombre réel est «développable en fraction continue» est vraie mais ne sera pas démontrée ici.

Exemple 1.

Appliquons au nombre $\sqrt{2}$ l'algorithme décrit page 37. Il donne, sur une TI 30 :

Affichage	k	u(k)
1.4142136	0	1
2.4142136	1	2
2.4142136	2	2
2.4142136	3	2
2.4142132	4	2

En regardant les résultats, on peut avoir l'idée de comparer $\sqrt{2}$ et le nombre réel A défini par la fraction continue associée à la suite 1, 2, 2, 2, ..., 2, ...

Remarquons alors que A vérifie :

$$A > 0 \qquad \text{et} \qquad A = 1 + \frac{1}{1 + A}$$

D'où : $A = \sqrt{2}$.

Exemple 2.

Le développement en fraction continue de e sur une TI 30 donne les premiers termes suivants :

u(0)	u(1)	u(2)	u(3)	u(4)	u(5)	u(6)	u(7)	u(8)	u(9)	u(10)	u(11)
2	1	2	1	1	4	1	1	6	1	1	8

Il semble que l'on ait la suite :

2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ..., 1, 1, n, 1, 1, n+2, ...

Mais en poursuivant les calculs sur la même machine, nous obtenons :

u(12) = 2 u(13) = 1 u(14) = 5

Que peut-on en penser ?

Exemple 3.

Pour le nombre π, on trouve :

u(0) = 3 u(1) = 7 u(2) = 15 u(3) = 1

D'où les premières réduites du développement de π en fraction continue :

$\pi_0 = 3$ $\pi = 3{,}1415927 \pm 10^{-7}$

$\pi_1 = \dfrac{22}{7}$ $\pi_1 = 3{,}1428571 \pm 10^{-7}$

$\pi_2 = \dfrac{333}{106}$ $\pi_2 = 3{,}1415094 \pm 10^{-7}$

$\pi_3 = \dfrac{355}{113}$ $\pi_3 = 3{,}1415929 \pm 10^{-7}$

Remarquons à ce propos que les calculs faits dans les pages précédentes permettent de montrer que, si $\dfrac{p}{q}$ est une réduite de la fraction continue égale à π , on a :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$$

Ce qui permet d'estimer l'erreur faite en remplaçant π par ses réduites, ainsi :

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant \frac{1}{49} \qquad \left|\pi - \frac{333}{106}\right| \leqslant 10^{-4} \qquad \left|\pi - \frac{355}{113}\right| \leqslant 8 \times 10^{-5}$$

Exemple 4.

On pourra s'essayer à d'autres bricolages, en partant non plus de nombres, mais de suites.

Par exemple la suite 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., 1, 2, 3, ... détermine un réel x vérifiant :

$$x > 0 \qquad \text{et} \qquad x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}}$$

Soit $\quad x = \dfrac{4 + \sqrt{37}}{7} \qquad x = 1{,}4403946 \pm 10^{-7}$

x se calcule facilement en utilisant le programme indiqué page 36. On trouve ainsi :

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2) = 1{,}4493927$$

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2) = 1{,}4403333$$

III – UNE APPLICATION.

Une application particulière :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n : $u_n = 1$. Les réduites sont de la forme :

$$\mathcal{R}_n = \frac{p_n}{q_n} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} p_n = p_{n-1} + p_{n-2} & n \geqslant 2 \\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2} & n \geqslant 2 \\ p_0 = 1 \quad p_1 = 2 \\ q_0 = 1 \quad q_1 = 1 \end{cases}$$

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, c'est-à-dire la suite définie par :

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$

Alors : $\quad p_n = a_{n+1}$

$\quad q_n = a_n$

De plus, pour toute fraction continue déterminée par la suite $(u_n)_n$ finie ou non, on a, avec les mêmes notations :

$$(4) \qquad \begin{cases} p_n \geqslant a_{n+1} & q_n \geqslant a_n & \text{si} \quad u_0 \neq 0 \\ p_n \geqslant a_n & q_n \geqslant a_{n-1} & \text{si} \quad u_0 = 0 \end{cases}$$

Remarque : Les inégalités sont strictes dès que : $\exists i \geqslant 0$, (resp $\exists i > 0$), $u_i > 1$, c'est-à-dire dès qu'on n'a pas : $(p_n, q_n) = (a_{n+1}, a_n)$ (resp $(p_n, q_n) = (a_n, a_{n-1})$).

* **Algorithme d'Euclide :**

Nous allons donner une majoration du nombre n de divisions à faire pour calculer le pgcd de deux entiers a et b, $a \geqslant b$, par l'algorithme d'Euclide.

Soient $q'_0, q'_1, \ldots, q'_{n-1}$ les n quotients successifs dans l'algorithme.

$$\begin{matrix} q'_0 \geqslant 1 \\ q'_n \geqslant 1 \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} = q'_0 + \cfrac{1}{q'_1 + \cfrac{1}{\ddots\; q'_{n-2} + \cfrac{1}{q'_{n-1}}}}$$

$\frac{a}{b}$ est aussi égal à la fraction continue déterminée par $u_0, u_1, \ldots, u_n$ avec :

$$\begin{cases} u_i = q_i & 0 \leqslant i \leqslant n-2 \\ u_{n-1} = q'_{n-1} \\ u_n = 1 \end{cases}$$

D'après les relations (4) : $\begin{cases} p_n \geqslant a_{n+1} \\ q_n \geqslant a_n \end{cases}$

Or $\quad a = p_n \times \text{pgcd}(a, b)$

$\quad\quad b = q_n \times \text{pgcd}(a, b)$

Soit $\begin{cases} a \geqslant a_{n+1} \\ b \geqslant a_n \end{cases}$

On en déduit, en tenant compte de la remarque page 44 :

Si $b < a_n$ ou $a < a_{n+1}$, le nombre de divisions dans l'algorithme d'Euclide donnant le pgcd de a et b, avec $a \geqslant b$, est strictement inférieur à n.

Si $b = a_n$ et $a = a_{n+1}$, le nombre de divisions est égal à n.

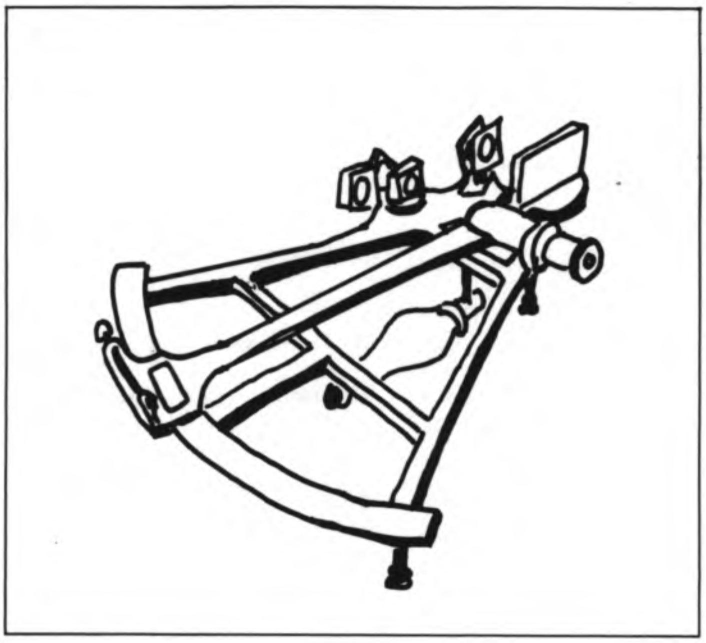
Si $b = a_n$ ou $a = a_{n+1}$, avec $(a, b) \neq (a_n, a_{n+1})$, le nombre de divisions est strictement inférieur à n.

Donnons quelques cas numériques, en utilisant le fait que a_n est l'entier le plus proche de $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$b \leqslant 75025$: pour tout a, le pgcd de a et b se calcule avec moins de 25 divisions.

$b \leqslant 10^{10}$: pour tout a, le pgcd de a et b se calcule avec moins de 50 divisions.

$b \leqslant 3 \times 10^{20}$: pour tout a, le pgcd de a et b se calcule avec moins de 100 divisions.

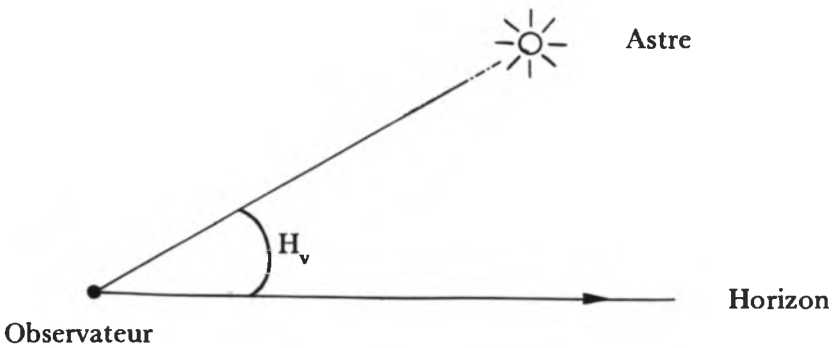


NAVIGATION AVEC UNE CALCULATRICE

Le point astronomique se détermine de la façon suivante :

1 - On estime les coordonnées du point où l'on se trouve (sa latitude L et sa longitude)

2 - On observe un astre au sextant, en mesurant l'angle H_v, hauteur vraie, entre la direction de l'horizon et celle de l'astre observé et on note l'heure exacte de l'observation.



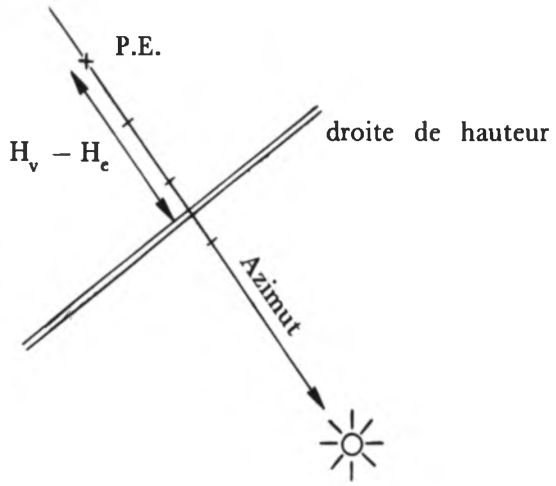
3 - A partir de l'estimation 1 et en fonction de l'heure du 2 on lit sur des tables, appelés Ephémérides Nautiques, trois clefs :

- la latitude estimée L
- la déclinaison D
- l'angle horaire AHL

4 - Ces trois clefs permettent de déterminer :

- l'azimut Z, c'est-à-dire la direction théorique de l'astre pour le lieu estimé et l'heure de l'observation.
- la hauteur estimé H_e de l'astre observé.

Sur la carte, à partir du point estimé P.E., on trace la droite de direction Z ; sur cette droite, à partir du point estimé, on porte en miles la différence $H_v - H_e$ exprimée en minutes (1 minute d'angle égale 1 mile) vers l'astre ou en sens contraire selon que cette différence est positive ou non. La perpendiculaire à l'azimut au point obtenu s'appelle droite de hauteur. On présume être sur cette droite (c'est en fait une portion de cercle).



Pour «faire le point» il faudra :

* soit effectuer les mesures à peu près simultanées de plusieurs étoiles (figure A),

* soit faire 2 observations à quelques heures d'intervalle et «transporter» la première observation en estimant le trajet parcouru (figure B).

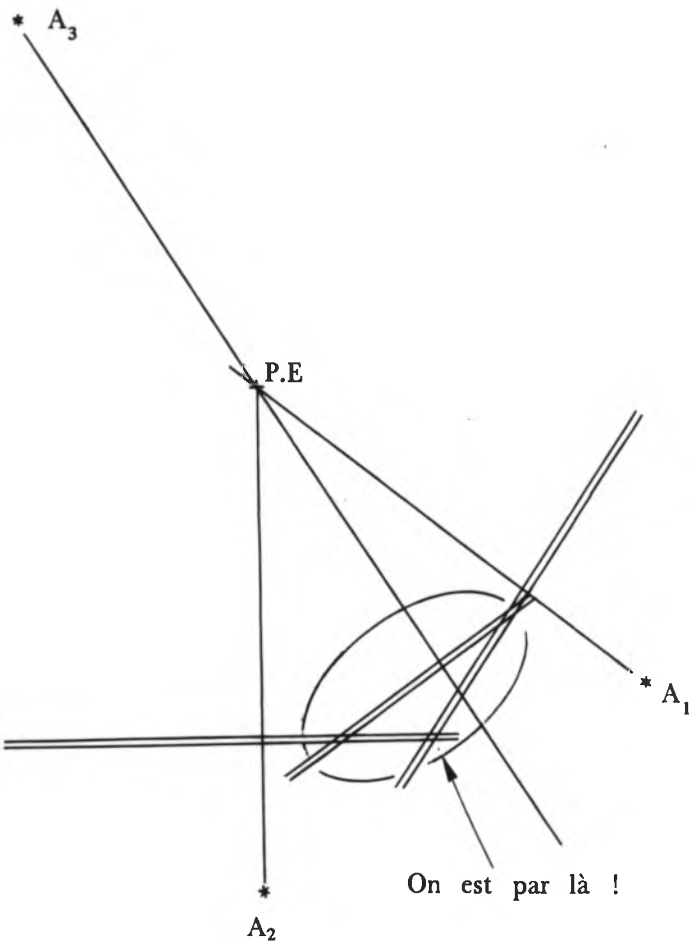


figure A

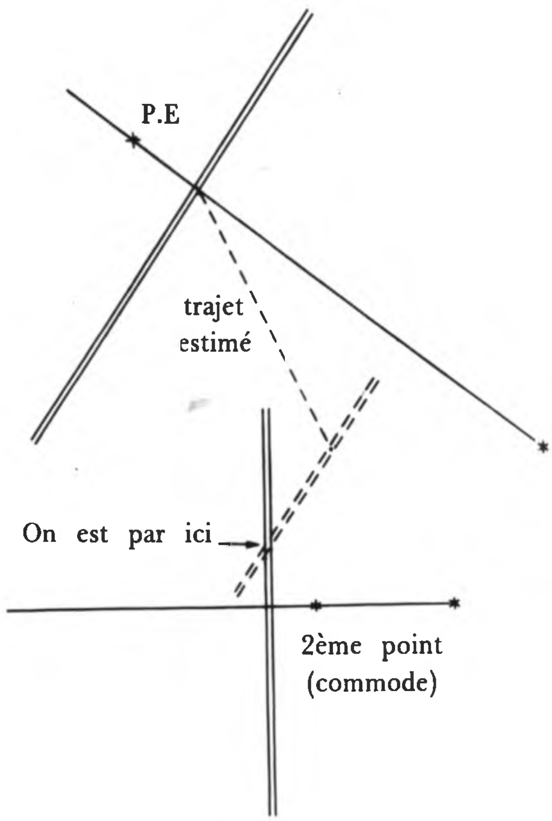


figure B

Une calculatrice programmable lisant des données sur cartes magnétiques permettra à son utilisateur de se passer de tables (durant le temps ou elle est en état de marche ; une table d'éphémérides sèche mieux qu'une machine !).

Une calculette qui possède les fonctions trigonométriques et leurs inverses permettra de calculer l'azimut et la hauteur estimée à l'aide des formules :

$$\sin H_e = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos AHL$$

$$\operatorname{tg} Z = \frac{\sin P}{\cos L \operatorname{tg} D - \sin L \cos P}$$

Remarques :

1 - Z, L, D, H_e et AHL sont les notations du texte.

2 - P est l'angle au pôle, c'est-à-dire AHL si AHL $< 180°$, son complément à 360° sinon.

3 - Traditionnellement ces calculs se font à l'aide de tables.

4 - D'autres formules peuvent être utilisées.

5 - Les termes employés par les navigateurs sont repris dans ce texte. Ils ne manquent pas d'ambiguités ; par exemple se méfier d'«azimut», il risque de vous faire perdre la tête.

Explicitons l'exemple suivant :

$$\left.\begin{array}{l} L = 41° 12' \quad N \\ \text{longitude} = 3° 17' \quad E \end{array}\right\} \text{estimation}$$

Heure GMT 09 h 32 mn 16 s (15 août 76)

Les éphémérides donnent :

D = 13° 57,5′ N

AHL = 325° 14,9′

La machine que nous utilisons ne travaille pas sur les minutes d'angle. On va donc transformer les 3 angles avant de les utiliser.

On trouve ainsi

L = 41,2° D = 13,958333° AHL = 325,248333°

On peut alors écrire la suite des calculs :

Touches	Affichage	Mémoire	Commentaires
L	L		Introduire L
sin	sin L		
X	sin L		
D	D		Introduire D
STO	D	D	
sin	sin D	D	
=	sin L sin D	D	
EXC	D	sin L sin D	
cos	cos D	sin L sin D	
X	cos D	sin L sin D	
L	L	sin L sin D	Introduire L
cos	cos L	sin L sin D	
X	cos L cos D	sin L sin D	
AHL	AHL		Introduire AHL
cos	cos AHL		
=	cos L cos D cos AHL		
SUM	cos D cos D cos AHL	sin L sin D + cos L cos D cos AHL	
EXC	sin L sin D + cos L cos D cos AHL		
INV SIN	H_e		

Nous détaillons ce programme dans le cas de l'exemple considéré :

Touches	Affichage	Mémoire	Commentaires
41.2	41.2	0	Introduction de L
sin	.65868946	0	
X	.65868946	0	
13.958333	13.958333	0	Introduction de D
STO	13.958333	13.958333	
sin	.24121621	13.958333	
=	.15888658	13.958333	
EXC	13.958333	.15888658	
cos	0.9704714	.15888658	
X	0.9704714	.15888658	
41.2	41.2	.15888658	Introduction de L
cos	.75241491	.15888658	
X	.73019715	.15888658	
325.24833	325.24833	.15888658	Introduction de AHL
cos	.82163036	.15888658	
=	.59995215	.15888658	
SUM	.59995215	.75883873	
RCL	.75883873	.75883873	
INV SIN	49.36193	.75883873	La partie entière de Z = 49°
–	49.36193	.75883873	
49	49	.75883873	
=	.36192955	.75883873	
X	.36192955	.75883873	
6	2.1715773	.75883873	Z = 49° 21,7′

On fera un travail analogue pour trouver Z, et vogue la galère.

Bornes du χ^2 pour f degrés de liberté

$f \backslash P$	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01
1	0,00016	0,00098	0,00393	0,01579	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490
2	0,00201	0,00506	0,10259	0,21072	4,60517	5,99147	7,37776	9,21034
3	0,11483	0,21580	0,35185	0,58438	6,25139	7,81473	9,34840	11,3449
4	0,29711	0,48442	0,71072	1,06362	7,77944	9,48773	11,1433	13,2767
5	0,55430	0,83121	1,14548	1,61031	9,23635	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,87209	1,23735	1,63539	2,20413	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,23904	1,68987	2,16735	2,83311	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,64648	2,17973	2,73264	3,48954	13,3616	15,5073	17,5346	20,0902
9	2,08781	2,70039	3,32511	4,16816	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	15,9871	18,3070	20,4831	23,2093
11	3,0535	3,8158	4,5748	5,5778	17,275	19,675	21,920	24,725
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	18,549	21,026	23,337	26,217
13	4,1069	5,0087	5,8919	7,0415	19,812	22,362	24,736	27,688
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,064	23,685	26,119	29,143
15	5,2294	6,2621	7,2604	8,5468	22,307	24,996	27,488	30,578
16	5,812	6,908	7,962	9,312	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,408	7,564	8,672	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,015	8,231	9,390	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,633	8,907	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,260	9,591	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,897	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,542	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,00	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89

LE KHI-DEUX, QU'EST-CE ?

I – SITUATIONS.

1) Nous avons les appréciations du travail de 300 élèves de 6ème. Elles sont classées dans le tableau ci-dessous en fonction de l'année de naissance.

Tableau 1 :

appréciation \ année de naissance	1966	1967	1968	
Très bien	20	35	5	60
Bien	59	108	33	200
Pas bien	21	7	12	40
	100	150	50	300

Pouvons-nous conclure de ce tableau que l'âge influe sur les résultats scolaires de ces 300 élèves ou sur l'appréciation qui en est faite. ?

– Si l'âge n'avait aucune influence, le tableau obtenu aurait «de grandes chances» d'être «compatible» avec le tableau ci-dessous (tableau théorique).

Tableau 2 :

appréciation \ année de naissance	1966	1967	1968	
Très bien	$100 \times \frac{60}{300}$	$150 \times \frac{60}{300}$	$50 \times \frac{60}{300}$	60
Bien	$100 \times \frac{200}{300}$	$150 \times \frac{200}{300}$	$50 \times \frac{200}{300}$	200
Pas bien	$100 \times \frac{40}{300}$	$150 \times \frac{40}{300}$	$50 \times \frac{40}{300}$	40
	100	150	50	300

Nous allons définir une mesure de la différence relative entre ces deux tableaux, ces derniers étant considérés comme des vecteurs V_1 et V_2 de $\mathbb{R}^9$.

V_1 = (20, 35, 5, 59, 108, 33, 21, 7, 12)

V_2 = (20, 30, 10, 67, 100, 33, 13, 20, 7)

Soient X(i) et Y(i) les coordonnées respectives de V_1 et V_2, i = 1, 2, ..., 9. On pourrait prendre entre autre l'une des deux mesures suivantes :

$$D(V_1, V_2) = \frac{|Y(1) - X(1)|}{Y(1)} + \ldots + \frac{|Y(9) - X(9)|}{Y(9)}$$

$$D'(V_1, V_2) = \frac{(Y(1) - X(1))^2}{Y(1)} + \ldots + \frac{(Y(9) - X(9))^2}{Y(9)}$$

On utilise la seconde car c'est celle qu'on sait le mieux étudier statistiquement. Il s'agit de la distance du χ_4^2 à 4 degrés de libertés (les quatre nombres 20, 35, 59, 108 suffisent à déterminer le tableau 1, le tableau 2 étant fixé, puisque la somme de chaque ligne et de chaque colonne doit être la même dans les deux cas).

Faisons l'hypothèse suivante : il n'y a pas d'influence de l'âge sur la réussite scolaire et son évaluation, pour ces 300 élèves. Si elle est vérifiée, on peut lire sur la ligne 4 de la table figurant page 52 qu'il y a 99 chances sur 100 pour que : $\chi_4^2 \geqslant 0{,}297$ et 1 chance sur 100 pour que $\chi_4^2 \geqslant 11{,}345$

avec : $\chi_4^2 = D'(V_1, V_2)$

ici : $\chi_4^2 = 5^2(1/30 + 1/10 + 1/7) + 8^2(1/67 + 1/100 + 1/13) + 13^2/20$

$\chi_4^2 = 21{,}87$

Avec l'hypothèse faite, on avait moins de 1 chance sur 100 d'obtenir cette répartition de «très bien», «bien», «pas bien» pour les 100, 150, 50 élèves nés en 1966, 1967, 1968. L'hypothèse est rejetée au seuil 0,01. C'est-à-dire qu'on conclue, avec moins de 1 chance sur 100 de se tromper, qu'il y a influence de l'âge pour ces 300 élèves*.

2) Les résultats de 120 lancés d'un dé sont :

Tableau 1 :

Face	1	2	3	4	5	6	
Nombre d'apparitions	15	21	25	19	14	16	120

Que peut-on conclure quant à l'équiprobabilité de l'apparition de chaque face ?

Faisons l'hypothèse d'équiprobabilité. Le tableau théorique du nombre d'apparitions de chaque face est :

Tableau 2 :

Face	1	2	3	4	5	6	
Nombre d'apparitions	20	20	20	20	20	20	120

(*) Le problème de savoir si ce résultat peut être généralisé est beaucoup plus complexe. Cele dépend surtout de la méthode selon laquelle ont été choisis les 300 élèves ; trouver une méthode de choix réalisable et permettant la généralisation des résultats est ici très délicat. Ceux que cela intéresse pourront se reférer à l'ouvrage suivant : Théorie des sondages, par Desabie, édité chez Dunod.

Le χ^2_5 à 5 degrés de libertés correspondant à cet exemple vaut 6,2. On lit dans la table qu'il y a 90 chances pour que : $\chi^2_5 \geqslant 1{,}610$ et 10 chances sur 100 pour que : $\chi^2_5 \geqslant 7{,}779$.

L'hypothèse d'équiprobabilité est accepté au seuil 0,10.

3) Dire 200 chiffres parmi 0, 1, ..., 9 et tester l'équiprobabilité de l'apparition de chaque chiffre (les résultats sont souvent surprenants !).

II – A PROPOS DU χ^2 :

1 – Les nombres figurant dans le tableau théorique doivent être tous supérieurs à 10 (les tables sont faites en utilisant des approximations non justifiables si cette condition n'est pas remplie).

2 – Un test du χ^2 se fait à partir d'un tableau à n lignes et p colonnes. Le degré de liberté d se calcule ainsi :

$n \neq 1$ et $p \neq 1$ $\quad d = (n-1) \times (p-1)$

$n = 1$ $\quad d = p - 1$

$p = 1$ $\quad d = n - 1$

3 – Le seuil α, en cas de rejet de l'hypothèse, signifie qu'on a une probabilité α de la rejeter à tort.

4 – Le seuil α, en cas d'acceptation de l'hypothèse, signifie qu'on n'a pas pu rejeter l'hypothèse au seuil α ; la probabilité d'accepter à tort n'est pas calculable : elle est bien sûr d'autant plus forte que α est petit.

5 – Les seuils usuellement considérés en statistique sont

$\alpha = 0{,}01, \quad \alpha = 0{,}05, \quad \alpha = 0{,}10.$

III – CALCULS.

1 - Cas du χ^2 à un degré de liberté.

Nous nous trouvons devant un tableau de ce type :

	a	b
	c	d

Remarquons que si a', b', c', d' sont les éléments du tableau théorique associé, on a :

$$a' = \frac{(a+b)\,(a+c)}{a+b+c+d} \qquad \alpha = a' - a$$

$$b' = b - \alpha$$

$$c' = c - \alpha \qquad \chi^2 = \alpha^2 \left[\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'}\right]$$

$$d' = d + \alpha$$

Nous donnons, à titre d'exemple, un programme possible de calcul sur TI 30, destiné à être amélioré et adapté à d'autres matériels.

Touche	Affichage	Mémoire	Remarque
a	a	0	Introduire a
+	a	0	
b	b	0	Introduire b
=	$a + b$	0	
STO	$a + b$	$a + b$	
×	$a + b$	$a + b$	
(	$a + b$	$a + b$	
a	a	$a + b$	Réintroduire a
+	a	$a + b$	
c	c	$a + b$	Réintroduire c
SUM	c	$a + b + c$	
)	$a + c$	$a + b + c$	
=	$(a + b)(a + c)$	$a + b + c$	
EXC	$a + b + c$	$(a + b)(a + c)$	
+	$a + b + c$	$(a + b)(a + c)$	
d	d	$(a + b)(a + c)$	Introduire d
=	$a + b + c + d$	$(a + b)(a + c)$	
EXC	$(a + b)(a + c)$	$a + b + c + d$	
÷	$(a + b)(a + c)$	$a + b + c + d$	
RCL	$a + b + c + d$	$a + b + c + d$	
=	a'	$a + b + c + d$	Noter a' par sécurité
1/x	$1/a'$	$a + b + c + d$	
STO	$1/a'$	$1/a'$	
1/x	a'	$1/a'$	
−	a'	$1/a'$	
a	a	$1/a'$	Réintroduire a
=	α	$1/a'$	
$\left.\begin{matrix}-\\K\end{matrix}\right\}$	α	$1/a'$	
b	b	$1/a'$	Réintroduire b
=	b'	$1/a'$	
1/x	$1/b'$	$1/a'$	
SUM	$1/b'$	$1/a' + 1/b'$	
c	c	$1/a' + 1/b'$	Réintroduire c
=	c'	$1/a' + 1/b'$	
1/x	$1/c'$	$1/a' + 1/b'$	
SUM	$1/c'$	$1/a' + 1/b' + 1/c'$	
d	d	$1/a' + 1/b' + 1/c'$	Réintroduire d
+/−	$-d$	$1/a' + 1/b' + 1/c'$	
=	$-d'$	$1/a' + 1/b' + 1/c'$	
+/−	d'	$1/a' + 1/b' + 1/c'$	
1/x	$1/d'$	$1/a' + 1/b' + 1/c'$	
SUM	$1/d'$	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	
0	0	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	
=	α	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	
X^2	α^2	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	
×	α^2	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	
RCL	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	
=	X^2	$1/a' + 1/b' + 1/c' + 1/d'$	

2 - Cas général.

Nous donnons un organisation des calculs à faire, à partir d'un tableau T à n lignes et p colonnes, ($np < 30$). Il est tout à fait justifié de faire l'approximation suivante : tous les nombres considérés le seront à 10^{-2} près (donc ne jamais inscrire, soit sur l'affichage d'une calculette, soit à partir d'un affichage, plus de 2 chiffres après la virgule).

1) Calculer les sommes S_1, ..., S_n de chaque ligne, et en même temps, grâce à la mémoire de la calculette, la somme S de tous les éléments de T. Noter S_1, ..., S_n et laisser S en mémoire jusqu'à la fin de la partie 2.

2) Remplir chaque colonne du tableau théorique T', en suivant par exemple le programme ci-dessous, ou b_1, ..., b_n (resp a_1, ..., a_n) désignent les éléments de la i$^{\text{ème}}$ colonne de T' (resp T) :

a_1, +, a_2, ..., a_n, =, ÷, RCL, X, K, S_1, =, S_2, =, ..., S_n, =,

inscrire b_1 inscrire b_n

inscrire b_2

3) Calculer alors le χ^2 en exécutant np séquences analogues à la suivante (sur TI 30)

..., b_i, ÷, (, −, a_i,) , X^2, =, 1/X, SUM

Le problème de l'organisation des calculs est ici primordial, et, suivant la calculette dont on dispose, il est évident qu'il y en a de plus ou moins économiques. Cependant, s'il est théoriquement possible de calculer un χ^2 à 30 degrés de liberté, la probabilité de se tromper est très forte. Il parait raisonnable de ne pas dépasser 10 degrés de liberté et cela permet quand même de traiter les cas usuels ou de première urgence.

[...] les animaux se divisent en :
a) appartenant à l'Empereur,
b) embaumés
c) apprivoisés
d) cochons de lait,
e) sirènes,
f) fabuleux,
g) chiens en liberté,
h) inclus dans la présente classification,
i) qui s'agitent comme des fous,
j) innombrables,
k) dessinés avec un pinceau très fin en poils de chameau,
l) *et caetera,*
m) qui viennent de casser la cruche,
n) qui de loin ressemblent à des mouches.

Encyclopédie chinoise
Décrite par Borges.

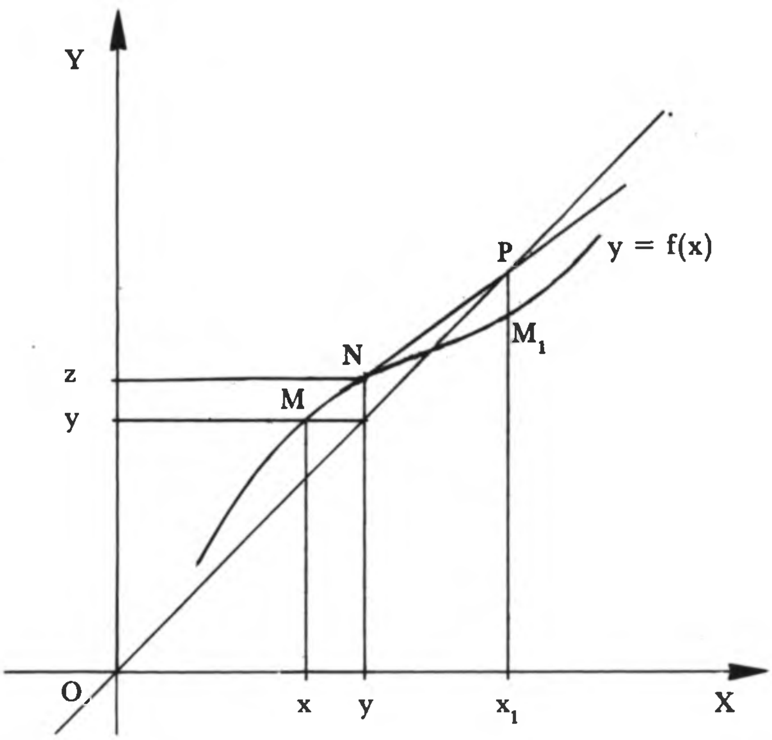
UNE METHODE D'ACCELERATION DE CONVERGENCE

I – DESCRIPTION DE LA METHODE.

L'objectif est la résolution dans $\mathbb{R}$ d'une équation de la forme $x = f(x)$, dont on sait qu'elle admet une solution dans un intervalle $[a, b]$.

Pour cela, à partir d'un nombre x de $[a, b]$, on calcule $y = f(x)$, $z = f(y)$. Soit P l'intersection de la 1ère bissectrice et de la droite passant par les points $M(x, y)$ et $N(y, z)$. On remplace alors x par l'abscisse de P et on recommence...

Avant de voir des cas ou cette méthode «réussit», quels sont ses avantages et ses inconvénients, traduisons-là sur une figure et en un programme :



Programme : (avec N itérations programmées) :

1 – I ⟵ O

2 – T ⟵ x

3 – X ⟵ T

4 – Y ⟵ f(X)

5 – Z ⟵ f(Y) Si Z = Y, aller à 8

6 – T ⟵ $(Y^2 - X \times Z)/(2 \times Y - X - Z)$

7 – I ⟵ I + 1 Si $I \leqslant N$, aller à 3

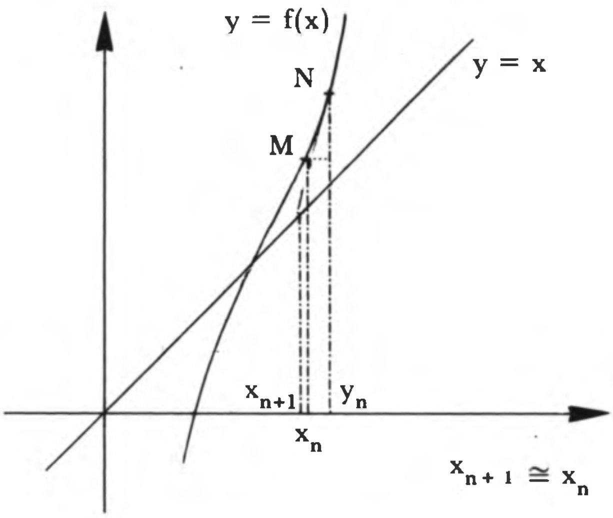
8 – Lire I, X, Y, Z

9 – Fin. Z est une approximation du point fixe.

II – CONSIDERATIONS DIVERSES.

Un premier regard montre que la méthode donnée ne peut fonctionner que si les droites MN successives ne sont pas parallèles à la première bissectrice. Ceci est assuré dès que par exemple la fonction f a une dérivée nettement différente de 1 en tout point.

De même, si la fonction croît, ou décroît, très fortement, la méthode est visiblement peu performante* : (voir la figure ci-dessous).

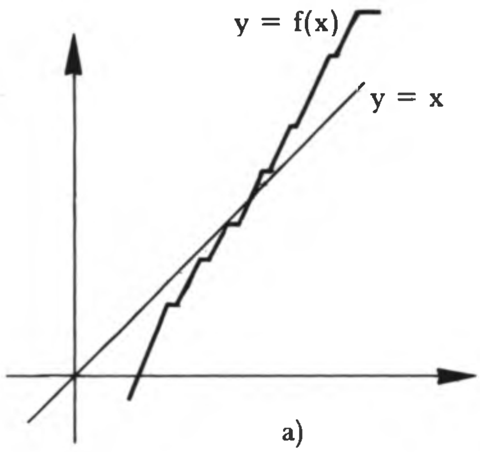


Nous n'allons pas justifier la méthode indiquée, mais donner les conclusions que ses usagers ont élaborées :

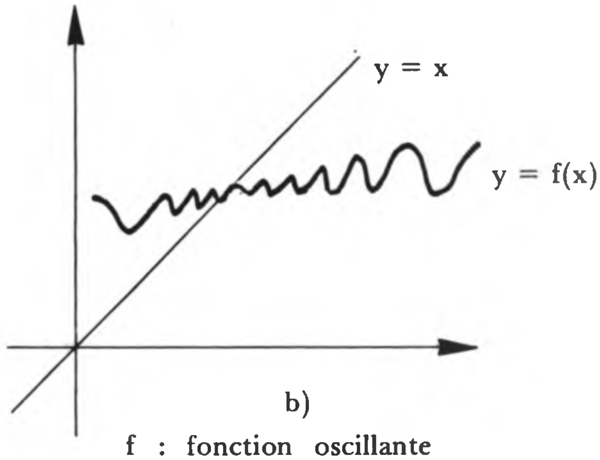
1 – Cette méthode «marche bien» chaque fois que la méthode itérative simple $x_n = f(x_{n-1})$ converge, et plus vite que cette dernière ; on dit qu'on a accéléré la convergence (voir exemple 1)

* *Il peut arriver dans un tel cas, compte tenu de la précision de la machine, qu'elle affiche les mêmes valeurs pour* x *et pour l'abscisse de* P.

2 — Elle ne nécessite pas que f soit dérivable (voir figure a) ; si f′ existe, elle est meilleure que la méthode de Newton en cas d'oscillations (voir figure b), et souvent plus facile à exécuter puisqu'elle ne nécessite pas le calcul de valeurs prises par f′.

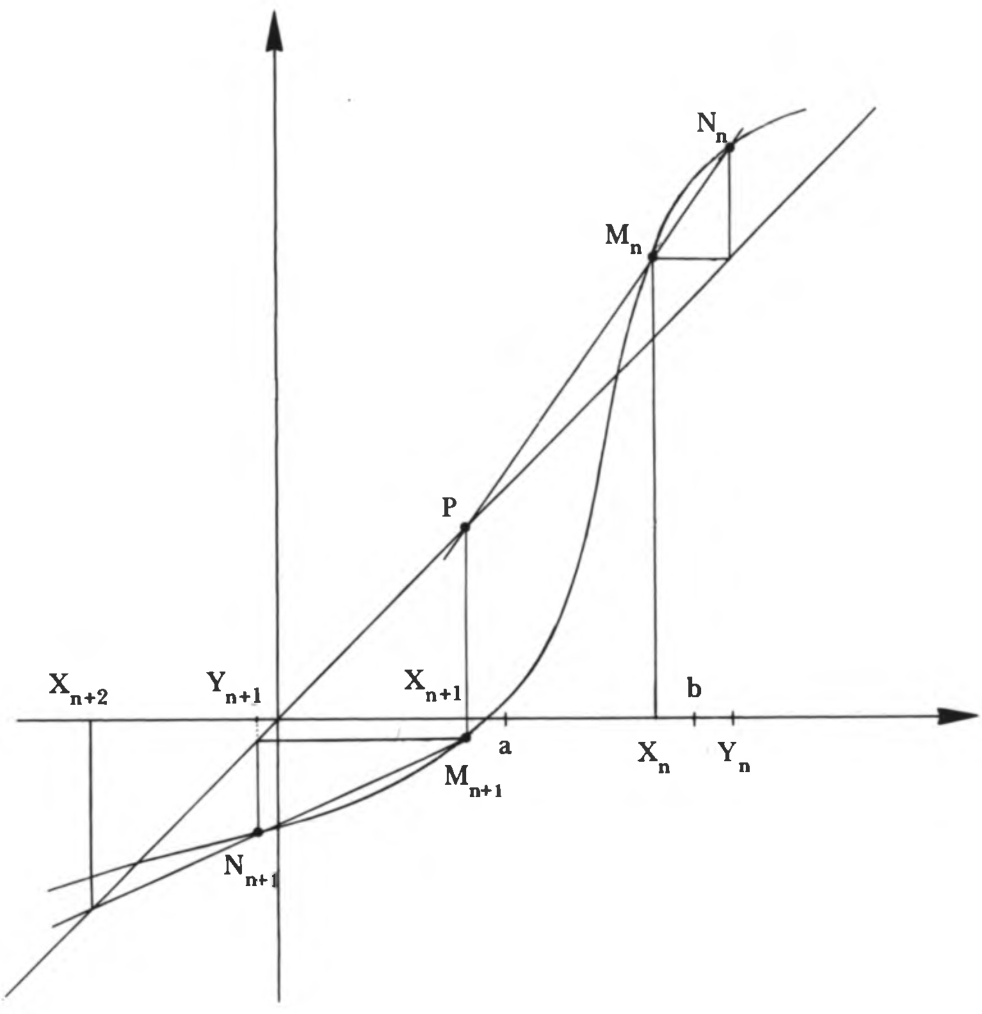


a)
f non dérivable

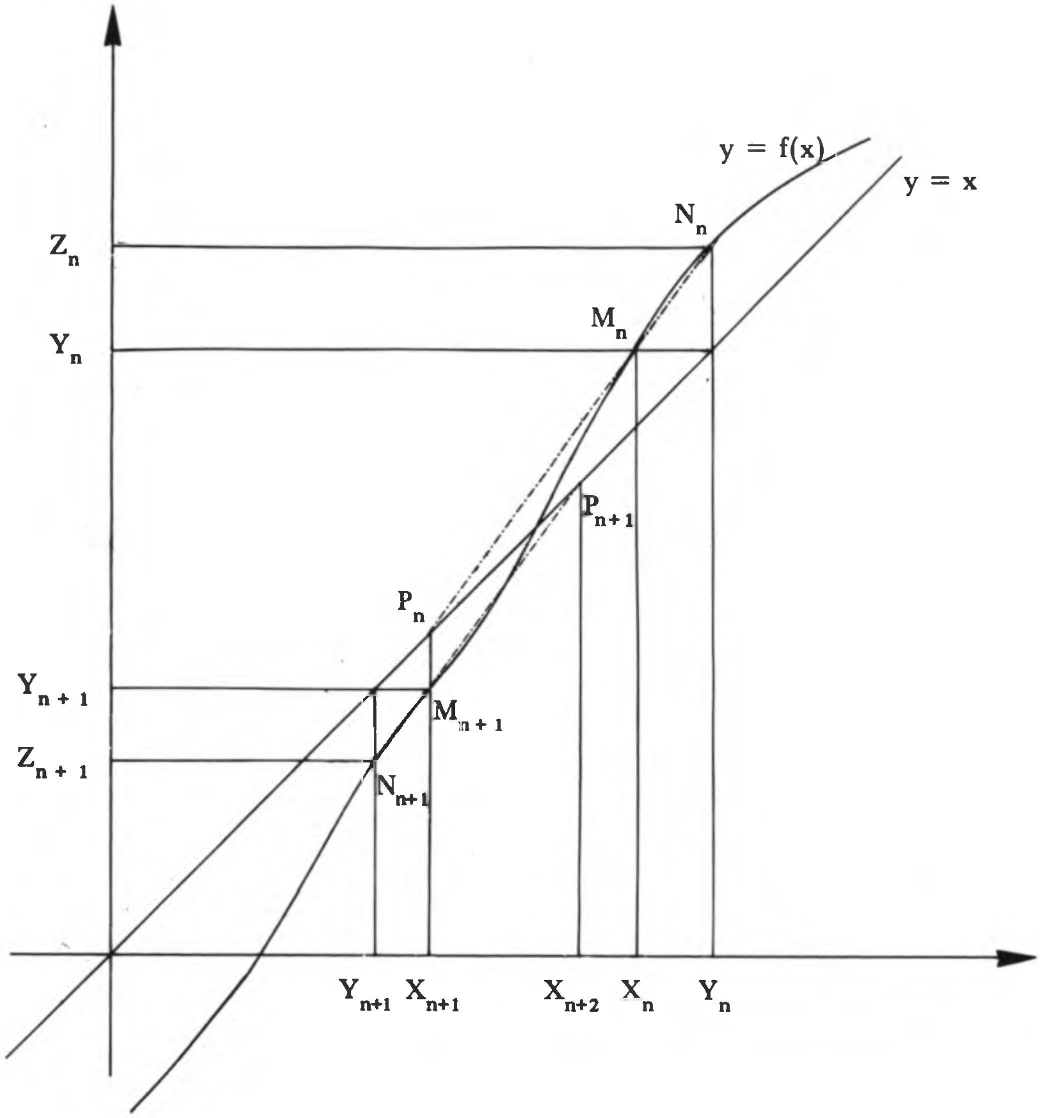


b)
f : fonction oscillante

3 — Si l'équation x = f(x) admet plusieurs solutions dans ℝ, dont une dans un intervalle [a, b], on peut très bien en partant d'un point x de [a, b] trouver une solution n'appartenant pas à cet intervalle, comme l'indique la figure ci-dessous :



4 – Il arrive que cette méthode donne le résultat là où la méthode itérative simple diverge. La figure et les exemples ci-dessous illustrent ce cas*.



** Ce cas est celui qui justifie la présence de cette méthode dans une brochure sur les calculettes ; le phénomène d'accélération de convergence, très spectaculaire dans des cas compliqués, n'apparait pas nettement dans les cas que l'on peut traiter ici et il est «compensé» par la longueur du calcul donnant «T».*

III – EXEMPLES.

1 – On veut résoudre l'équation $x = e^x - 2$. On sait, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il y a une solution dans l'intervalle $[0,3/2]$, une autre dans l'intervalle $[-2,0]$.

* Prenons $x = 0$.

Les 2ème et 3ème itérations donnent

I	X	Y	Z
2	- 1,846683	- 1,8422404	- 1,8415380
3	- 1,8414060	- 1,8414057	- 1,8414057

La troisième itération donne une solution à 10^{-7} près. La méthode itérative simple demande 11 itérations à partir de $x = 0$ pour obtenir la même précision de résultat. En fait il y a la même quantité de calculs dans les deux cas.

* Prenons $x = 1,5$

On a une solution à 10^{-4} près à la 5ème itération :

I	X	Y	Z
5	1,1461936	1,1461943	1,1461967

La méthode itérative simple, en partant de $x = 1,5$, diverge fortement (il y a dépassement de capacité à la 4ème itération car $f^3(1,5) = 21191,527$).

2 – Cherchons la racine du polynôme $x^6 - 2x^5 - x + 1$ située dans l'intervalle $[2,3]$. Pour ne pas risquer au cours des calculs le phénomème décrit page 60, nous procédons de la manière suivante, en commençant par une lapalissade* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{1\} \qquad x = f(x) \Longleftrightarrow x = \frac{\lambda f(x) + x}{1 + \lambda}$$

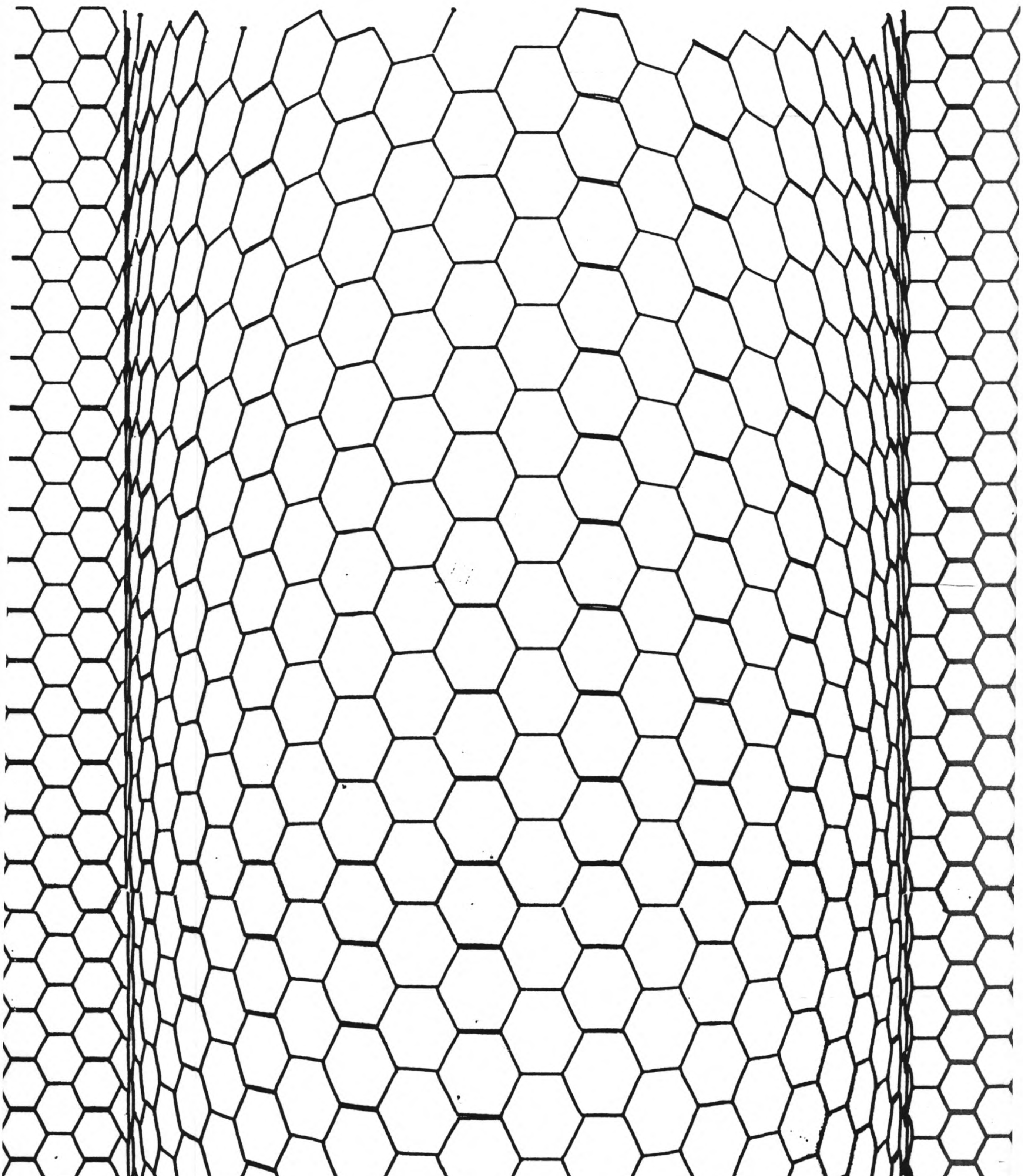
Prenons ici $\lambda = 0,01$ et résolvons l'équation

$$x = \frac{0,01(x^6 - 2x^5 - 1) + x}{1,001}$$

A la 4ème itération, on a la solution suivante :

$x = 2,0792 \pm 10^{-4}$

(*) *Cette lapalissade et la nouvelle formulation de l'équation qui en découle est indispensable lorsque* f(x) *peut prendre de grandes valeurs (on choisit* λ *proche de 0) ou des valeurs voisines de 0 (on choisit alors* λ *grand).*



RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS

I – POSITION DU PROBLEME.

On veut résoudre un système tel que celui-ci :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

où f_1, f_2, f_3 sont trois applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Posons $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Résoudre le système proposé, c'est chercher les points fixes de Φ, c'est-à-dire les points X de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$X = \Phi(X)$$

Une propriété des applications permet de résoudre certains systèmes. Si cette propriété n'est pas vérifiée, on pourra souvent employer d'autres méthodes qui donnent les valeurs des points fixes existants.

II – APPLICATIONS CONTRACTANTES.

Rappelons quelques définitions et théorèmes à propos des applications contractantes.

* On prendra en général une des deux distances suivantes sur $\mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(X, Y) = \sup_{i \in \{1, 2, ..., n\}} |x_i - y_i| \qquad \text{(distance du sup)}$$

$$d_2(X, Y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(distance euclidienne)}$$

* Soit D une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et χ une application de D dans D, telle qu'il existe un réel k, $0 < k < 1$, vérifiant :

$$\forall X \in D, \quad \forall Y \in D \quad d(\chi(X), \chi(Y)) \leqslant k\, d(X, Y)$$

On dira alors que χ est une application contractante pour d sur D, de rapport k. (Tout réel k' avec $k' \leqslant k < 1$ est aussi rapport de contraction de χ sur D).

* Nous allons utiliser le théorème suivant :

Toute application contractante χ d'un fermé D de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet un point fixe.

De plus, si A est ce point, il vérifie

$$\forall Y \in D \qquad A = \lim_{n \to \infty} \chi^n(Y) \qquad \text{avec} \quad \chi^n = \underbrace{\chi \circ \chi \circ \dots \circ \chi}_{n \text{ fois}}$$

(Ce théorème se démontre en se servant du fait que $\mathbb{R}^n$ est complet).

Application.

Si, pour un système d'équations donné par une application ϕ on trouve un domaine D tel que :

— D soit stable par ϕ,
— la restriction de ϕ à D soit contractante,

alors le système admet une solution unique sur D et pour la trouver il suffit de partir d'un point Y et de calculer $\phi(Y)$, puis $\phi^2(Y)$, $\phi^3(Y)$... etc autant de fois qu'il est nécessaire pour atteindre la précision voulue. Pour connaître à l'avance ce nombre d'itérations il convient de majorer l'erreur commise à la $p^{\text{ième}}$ itération.

Soit A le point fixe dans D. Soient n et p deux entiers, avec $n > p$.

Majorons $d(X_n, X_p)$.

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad d(X_{p+1}, X_p) = d(\phi(X_p), \phi(X_{p-1})) \leqslant k\, d(X_p, X_{p-1}) \leqslant \dots \leqslant k^p\, d(X_1, X_0)$$

d'où

$$d(X_n, X_p) \leqslant d(X_n, X_{n-1}) + d(X_{n-1}, X_{n-2}) + \dots + d(X_{p+1}, X_p)$$
$$\leqslant (k^n + k^{n-1} + \dots + k^p)\, d(X_1, X_0).$$

Nous avons $k^p + k^{p+1} + \dots + k^n = k^p(1 + k + \dots + k^{n-p})$

$$= \left(\frac{1 - k^{n-p+1}}{1 - k}\right) k^p$$

donc $\quad k^p + k^{p+1} + \dots + k^n \leqslant \dfrac{k^p}{1 - k}$

d'où $\quad d(X_n, X_p) \leqslant \dfrac{k^p}{1 - k}\, d(X_1, X_0).$

Si on fixe p et que l'on fait tendre n vers l'infini, on en déduit :

$$d(A, X_p) \leqslant k^p \frac{d(X_1, X_0)}{1 - k}.$$

Nous avons, par conséquent, une évaluation de l'erreur pour la $p^{\text{ième}}$ itération.

Par exemple, si $k = 0{,}2$ et $\dfrac{d(X_1, X_0)}{1 - k} = 1$

l'erreur à la 5ème itération est de $3{,}2 \times 10^{-4}$.

En fait il arrive souvent que dans un tel cas on ait par exemple $d(X_5, X_4) \leqslant 10^{-5}$.

Dans ce cas en faisant un calcul analogue à celui qui est fait ci-dessus on trouve que :

$$d(A, X_5) \leqslant k \frac{d(X_5, X_4)}{1 - k}.$$

Avec les nombres donnés l'évaluation à postériori de l'erreur à la 5ème itération est de $0{,}25 \times 10^{-5}$.

III – APPLICATIONS.

A – Systèmes linéaires.

Le système suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} x = 0{,}2x + 0{,}07y + 0{,}54 \\ y = 0{,}08x - 0{,}1z + 0{,}72 \\ z = 0{,}01x + 0{,}09y + 0{,}74 \end{cases}$$

s'écrit :

$$\phi \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} X_1 = 0{,}2x_1 + 0{,}07x_3 + 0{,}54 \\ X_2 = 0{,}08x_1 - 0{,}1x_3 + 0{,}72 \\ X_3 = 0{,}01x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}74. \end{cases}$$

Prenons la distance du sup sur $\mathbb{R}^3$ et notons (X_1, X_2, X_3), (resp X'_1, X'_2, X'_3) les coordonnées de l'image par Φ d'un point X, (resp X'), de coordonnées (x_1, x_2, x_3), (resp (x'_1, x'_2, x'_3)). On a lors :

$$| X_1 - X'_1 | \leqslant (0{,}07 + 0{,}2)\ d_\infty (X, X')$$

$$| X_2 - X'_2 | \leqslant (0{,}08 + 0{,}1)\ d_\infty (X, X')$$

$$| X_3 - X'_3 | \leqslant (0{,}01 + 0{,}09)\ d_\infty (X, X')$$

d'où $\quad d_\infty(\Phi(X), \Phi(X')) \leqslant 0{,}27\ d_\infty(X, X')$.

Φ est donc contractante sur $\mathbb{R}$ et y admet un point fixe d'où une solution unique au problème proposé. En partant de l'origine, l'erreur à la 4ème itération est de l'ordre de : $(0{,}27)^4 \times \frac{0{,}74}{0{,}73} \cong 6 \times 10^{-3}$. Mais en faisant ces itérations, on trouve $d(X_4, X_3) \leqslant 2 \times 10^{-3}$,

donc : $d(A, X_4) \leqslant \frac{0{,}27}{0{,}73} \times 2 \times 10^{-3}$; la précision à cette itération parait, en fonction des données, bien suffisante.

Remarque 1 : En généralisant à un système de n équations à n inconnues écrit sous la forme :

$$i = 1, 2, ..., n \qquad x_i = \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j$$

Une condition suffisante pour qu'on ait une application associée contractante pour la norme du sup est que :

$$\forall i \quad i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

Remarque 2 : Certains systèmes peuvent être rendus équivalents à d'autres pour lesquels on peut appliquer la méthode ci-dessus, dite méthode des approximations successives. Ainsi

Système 2

$$12x_1 - x_2 + x_3 = 45$$
$$4x_1 - 7x_2 + x_3 = 8$$
$$8x_1 + x_2 + 4z_3 = 7$$

Poser $4x_1 = x_1'$

Système 3

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + 19x_3 = 2$$
$$2x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 3$$

Poser $x_1 = 3x_1'$

Système 4

$$\begin{cases} 130x_1 + 50x_2 + 8x_3 = 20 \\ 5x_1 + 70x_2 + 5x_3 = 42 \\ 3x_1 + 5x_2 + 80x_3 = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}3x_1 - 0{,}5x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}2 \\ x_2 = -0{,}05x_4 + 0{,}3x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}42 \\ x_3 = -0{,}03x_4 - 5x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}1 \end{cases}$$

Remarque 3 : Considérons le système suivant :

$$x_1 = 0{,}3x_2 + 0{,}7x_3 + 0{,}27$$
$$x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}03$$
$$x_3 = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}36$$

L'application Φ associée n'est pas contractante pour la norme du sup mais elle l'est pour la norme euclidienne car (en majorant $2|x_i - x_i'||x_j - x_j'|$ par $(|x_i - x_i'|^2 + |x_j - x_j'|^2)$

$$
\begin{aligned}
d(\Phi(X), \Phi(X') \leqslant\ & (x_1 - x_1')^2\ (0{,}1^2 + 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}5^2 + 0{,}5 \times 0{,}5) \\
& + (x_2 - x_2')^2\ (0{,}3^2 + 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}2^2 + 0{,}1 \times 0{,}2) \\
& + (x_3 - x_3')^2\ (0{,}7^2 + 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}2^2 + 0{,}1 \times 0{,}2) \leqslant 0{,}75\ d(X, X').
\end{aligned}
$$

La méthode des approximations successives est surtout intéressante pour les systèmes non linéaires, car pour ceux-ci il existe des méthodes souvent plus performantes (déterminants, éléminateurs...).

B — Systèmes non linéaires.

Système 1

$$
\left\{
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{6} \sin (x + y) + 0{,}27 \\
x &= \frac{1}{8} \sin (x - y) + 0{,}45.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules trigonométriques permettent de montrer que :

$$\forall\ X \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall\ X' \in \mathbb{R}^2 \qquad d_\infty(\Phi(X), \Phi(X')) \leqslant \frac{1}{3}\ d_\infty(X, X').$$

Φ est donc contractante sur $\mathbb{R}$ et le système proposé à une et une seule solution.

Nous avons été amenés, pour résoudre ce système sur une machine de la gamme TI 30, à construire un «programme».

Touche appuyée	Affichage	Mémoire	Commentaires
x_0	x_0	0	$n = 0$
STO	x_0	x_0	
$-$	x_0	x_0	
y_0	y_0	x_0	
SUM	y_0	$x_0 + y_0$	
=	$x_0 - y_0$	$x_0 + y_0$	
sin	$\sin(x_0 - y_0)$	$x_0 + y_0$	$i = i + 1$
$\times$	$\sin(x_0 - y_0)$	$x_0 + y_0$	
8	8	$x_0 + y_0$	
1/X	1/8	$x_0 + y_0$	
=	$1/8 \sin(x_0 - y_0)$	$x_0 + y_0$	
+	$1/8 \sin(x_0 - y_0)$	$x_0 + y_0$	
0,45	0,45	$x_0 + y_0$	
=	x_1	$x_0 + y_0$	noter y_i
EXC	$x_0 + y_0$	x_1	
sin	$\sin(x_0 + y_0)$	x_1	
$\times$	$\sin(x_0 + y_0)$	x_1	
6	6	x_1	
1/X	1/6	x_1	
=	$1/6 \sin(x_0 + y_0)$	x_1	
+	$1/6 \sin(x_0 + y_0)$	x_1	
0,27	0,27	x_1	
=	y_1	x_1	noter y_{i+1}
$-$	y_1	x_1	
EXC	x_1	y_1	
SUM	x_1	$x_1 + y_1$	
=	$y_1 - x_1$	$x_1 + y_1$	
+/-	$x_1 - y_1$	$x_1 + y_1$	

Système 3.

$$\begin{cases} x = \sqrt{x+2y} - 0{,}23 \\ y = \sqrt{x+y} + 1 \end{cases} \qquad \text{Posons} \begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases} \qquad \Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

Les applications φ_1 et φ_2 sont définies sur $\mathbb{R}^2$, différentiables sur $\mathbb{R}^2 - \{(x, y)\ ;\ x = -2y \text{ ou } x = -y\}$. Soit : $D = \{(x, y),\ x \geqslant 2,\ y \geqslant 2\}$. D est un fermé stable par Φ (c'est-à-dire : $\Phi(D) \subset D$) et on a, pour tous points (x, y) et (x', y') de D, comme conséquence de la formule des accroissements finis :

$$\varphi_1(x, y) - \varphi_1(x', y') \leqslant |x - x'| \sup_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \right| + |y - y'| \sup_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \right|$$

D'où ici, en notant X et X' les points (x, y) et (x', y') :

$$|\varphi_1(x, y) - \varphi_1(x', y')| \leqslant |x - x'| \sup_{(x \geqslant 1, y \geqslant 1} \frac{1}{2\sqrt{x+2y}} + |y - y'| \sup_{(x \geqslant 1, y \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{x+2y}}$$

$$|\varphi_1(x, y) - \varphi_1(x', y')| \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) d_\infty(X, X') \leqslant 0{,}62\ d_\infty(X, X')$$

De même :

$$|\varphi_2(x, y) - \varphi_2(x', y')| \leqslant 0{,}5\ d_\infty(X, X')$$

D'où $\quad d_\infty(\Phi(X), \Phi(X')) \leqslant 0{,}5\ d_\infty(X, X')$.

On peut donc appliquer la méthode des itérations successives pour trouver l'unique racine de l'équation, soit (x, y), qui vérifie : $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$. On peut partir de $X_0 = (2, 2)$, et faire un programme analogue à celui qui a été fait pour le système précédent.

Par exemple, sur IBICO 088 :

Touche appuyée	Affichage	Mémoire	Commentaires
x_0	x_0	0	$i = 0$
M, +	x_0	x_0	
y_0	y_0	x_0	
M, +	y_0	$x_0 + y_0$	$i = i + 1$
+	y_0	$x_0 + y_0$	
M =	$x_0 + y_0$	$x_0 + y_0$	
=	$x_0 + 2y_0$	$x_0 + y_0$	
$\sqrt{\ }$	$\sqrt{x_0 + 2y_0}$	$x_0 + y_0$	
-	$\sqrt{x_0 + 2y_0}$	$x_0 + y_0$	
0,23	0,23	$x_0 + y_0$	
=	x_1	$x_0 + y_0$	noter x_i
M, EX	$x_0 + y_0$	x_1	
$\sqrt{\ }$	$\sqrt{x_0 + y_0}$	x_1	
+	$\sqrt{x_0 + y_0}$	x_1	
1	1	x_1	
=	y_1	x_1	noter x_i

Système 3.

$$\begin{cases} x = x^{16} + y^{8} + 0{,}0235 \\ y = \dfrac{x^4}{8} + y^8 + 0{,}1156 \end{cases}$$

Posons $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x^{16} + y^{8} + 0{,}0235 \\ \dfrac{x^4}{8} + y^8 + 0{,}1156 \end{cases}$$

Soit $D = \{(x, y) \ ; |x| \leqslant 0{,}15 \quad \text{et} \quad |y| \leqslant 0{,}15\}$.

D est stable par Φ et on montre en employant la formule des accroissements finis que pour tous X et X' dans D :

$$d_\infty(\Phi(X), \Phi(X^1)) \leqslant 10^{-3}.$$

Donc, en faisant deux itérations partant de (0, 0) dont une se fait à la main, on a une précision de l'ordre de $0{,}12 \times 10^{-3}$ et à l'itération suivante de l'ordre de $1{,}2 \times 10^{-7}$; à ce niveau, elle est de l'ordre de celle qui est du à l'affichage de la machine (ici 10^{-7}) et le résultat ne pourra plus etre amélioré.

LEXIQUE

Nous présentons aux lecteurs soucieux d'améliorer leur franglais la traduction de termes employé sur des calculettes.

Touche	Abréviation de	Traduction	Action réalisée
C	Clear	Nettoyer	Mise de l'affichage à 0
CE	Clear - Erase	Nettoyer - Effacer	Mise de l'affichage à 0
EX EXC	Exchange	Echange	Interversion de 2 registres : réserve et affichage ou mémoire et affichage
INV	Inverse	Réciproque	Cette touche suivie d'une touche fonctionnelle f calcule $f^{-1}(x)$, x étant le nombre à l'affichage
INT	Integer	Nombre entier	Fonction «Partie entière de»
M	Memory	Mémoire	
MR	Memory - Recall	Mémoire - Rappel	
ON	(To be) on	Marche	
OFF	(To be) off	Arrêt	
REV	Reverse	Renverse	Voir EX, EXC
RCL	Recall	Rappeler	Rappel de la mémoire
SQU	Square - root	Racine carrée	
SUM	Sum	Somme	Ajoute l'affichage au contenu de la mémoire
STO	Store	Emmagasinner	Remplace le contenu de la mémoire par celui de l'affichage

LES MOTS, TOUJOURS LES MOTS

La symboligéologique confuse entre période archéenne de l'utilisation des machines, leur présence dans le secondaire et le plaisancien terminant le premier matchinettes, nous incite à tout classer dans le néogène.

Nous avons essayé d'écrire une brochure en forme d'arche pour abriter du déluge anti-irem quelques unes de nos activités, et soutenir l'intérêt du calcul numérique ; vous nous pardonnerez ce dernier zeugma zététique.