

LES GEOMETRIES

par Raymond GUINET

«Il y a de la géométrie partout»
Leibnitz.

I — INTRODUCTION.

Qu'est-ce que la géométrie ?

Selon le petit Larousse illustré, c'est la science qui a pour objet l'étendue considérée sous ses trois aspects :

- la ligne,
- la surface,
- le volume.

C'est une définition pour le moins vaste. Mais écoutons Henri POINCARÉ :

«Les géomètres distinguent d'ordinaire deux sortes de géométries qu'ils qualifient, la première de métrique, la seconde de projective ; ... On a souvent appelé ce second corps de doctrine, la géométrie qualitative... Mais il est une troisième géométrie d'où la quantité est complètement bannie et qui est purement qualitative : c'est l'analysis situs».*

On reste un peu perplexe devant cette affirmation. Y aurait-il donc des géométries ? Certaines quantitatives, d'autres qualitatives ? Ou bien alors serait-ce l'espace, objet de la géométrie qui serait multiforme ?

* Ancien nom de la topologie.

Voyons. Imaginons que l'on veuille décrire le quartier que l'on habite à un correspondant. On emploiera des expressions comme : à côté de, entre, à gauche, etc... On essaiera ainsi par ces expressions de donner une description aussi précise que possible de ce quartier et, pour compléter le tableau, on pourra envoyer le plan du quartier, plan que l'on aura réalisé à main levée et de mémoire. Observons ce plan, les rues ne sont pas très régulières, les proportions ni les angles ne sont respectés, et pourtant notre correspondant n'aura sans doute pas de difficultés à retrouver son chemin car on aura eu soin de respecter certaines propriétés géométriques.

Voyons un deuxième exemple. Considérons les figures ci-dessous :

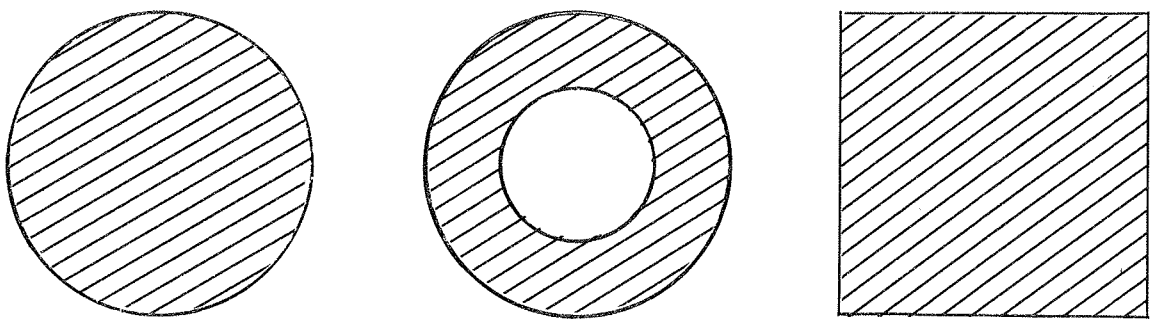


figure 1

Essayons de les classer. On peut mettre ensemble le carré et le disque et laisser l'anneau seul. Ce faisant, on a considéré que le carré et le disque font partie d'une même famille, celle des surfaces non trouées. Quant à l'anneau, il ne peut pas faire partie de cette famille.

En quelque sorte, on sait bien qu'il est possible de transformer le carré en disque, mais non le carré ou le disque en anneau. (Remarquons que pour ce classement, nous avons fait peu de cas des dimensions, qu'il s'agisse du diamètre du disque ou du côté du carré).

Revenons à des choses plus familières peut-être.

Considérons les trois triangles ci-dessous. (figure 2).

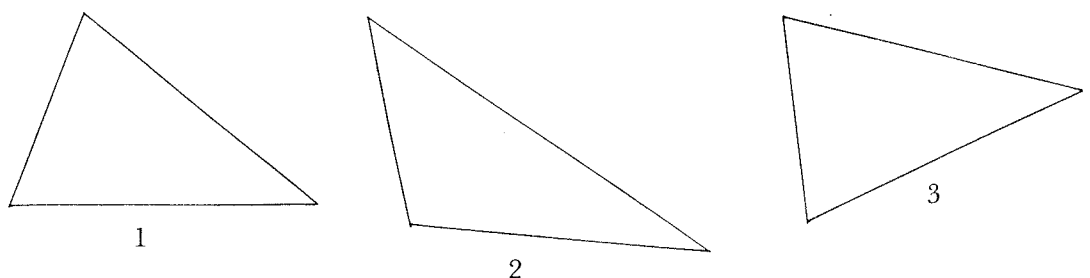


figure 2

On peut mettre ensemble les triangles 1 et 3 en les superposant par exemple, mais, le triangle 2 ne fait pas partie de cette famille que l'on vient de constituer. Lorsque j'étais en classe de cinquième, on disait que les triangles 1 et 3 étaient égaux.

On voit immédiatement ce qu'il y a de commun entre l'activité qui précède et cette dernière. Dans les deux cas, on a affaire à un ensemble d'objets géométriques sur lequel on opère un certain classement : on met ensemble les objets ayant des propriétés communes, celles que l'on veut mettre en évidence. Ces propriétés portent le nom d'invariants. Dans le premier cas, il s'agit d'invariant topologique, dans le second cas d'invariant métrique. Dans le premier cas, on est passé du carré au disque en conservant une qualité, le fait pour une surface de n'être pas trouée ; dans le second cas, on est passé du triangle 1 au triangle 3 qui lui est «égal» en conservant les longueurs et les angles.

En résumé, on pourra définir une géométrie, dès que l'on aura un ensemble d'objets géométriques, de points, de lignes, de droites, etc..., sur lequel on fera agir des transformations laissant inchangées certaines propriétés.

On s'est sensiblement écarté de la définition du petit Larousse illustré, disons qu'on l'a complétée.

II — LES GEOMETRIES.

Entrons maintenant dans les détails et essayons de définir à partir d'exemples simples les principales géométries, celles que l'on peut rencontrer dans la vie de tous les jours. Pour chacune des géométries que nous définissons, nous mettrons en évidence les principaux invariants qui les caractérisent.

1. La topologie.

Reprenons le premier exemple cité plus haut concernant le plan du quartier. Comparons le plan à l'échelle avec l'esquisse à main levée.

Les rues qui étaient rectilignes ne le sont plus, les proportions ne sont pas respectées, tout se passe comme si le plan à l'échelle avait été dessiné sur un matériau souple, déformable que l'on aurait étiré ou comprimé. Ainsi, le type de transformations mises en jeu en topologie est «une déformation par étirement et compression, sans déchirure, ni pliage, ni collage» de la figure considérée, étant entendu que l'on peut revenir à la figure initiale.

Exemple 1.

Mettons en évidence quelques invariants de la topologie à partir de la figure 3.

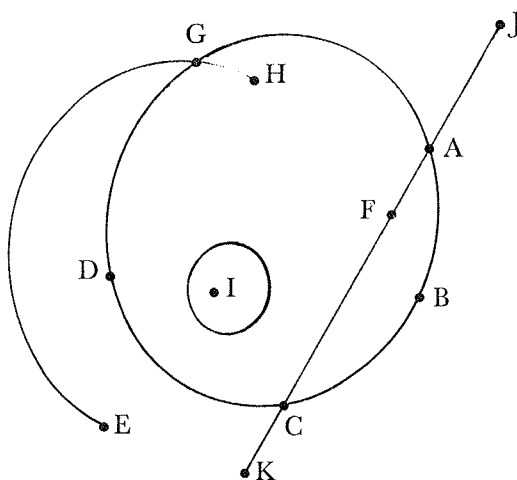


figure 3

Déformons cette figure. On peut par exemple obtenir la figure 4 ci-dessous.

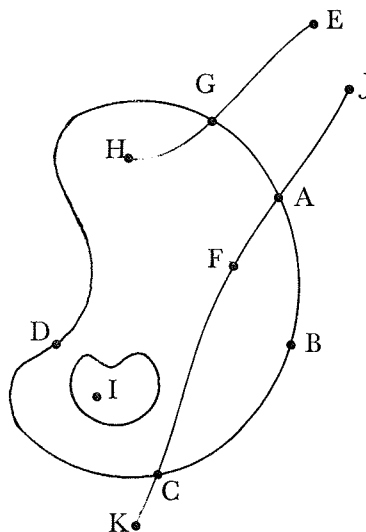


figure 4

Les courbes fermées restent fermées, la courbe ouverte EGH reste ouverte. Les points qui étaient à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) d'une courbe fermée le restent. L'intersection des lignes EGH et AGD se conserve. L'ordre des points ABCDG sur la courbe a été conservé. Toutes ces propriétés qui ont été conservées après transformation, portent on s'en doute, le nom de propriétés topologiques.

Il est facile de voir sur cet exemple, quelques propriétés qui ne sont pas conservées. Par exemple, la droite AFC ne l'est plus, la distance AC n'est pas

conservée, le point E qui était sous H passe au-dessus : la notion de ligne droite n'est pas un invariant topologique, les notions de droite et de gauche, de haut et de bas ne sont pas des invariants topologiques bien qu'on les voit apparaître sous la rubrique *topologie* dans les manuels scolaires.

Exemple 2.

Considérons l'alphabet majuscule ci-dessous.

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W V X Y Z

figure 5

Classons-le en considérant que deux lettres sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une transformation topologique telle qu'on l'a définie plus haut. On obtient huit classes qui sont les suivantes :

A R C L M N S U V W Z
B E F G T Y J
H I K X P Q O D

figure 6

Montrons sur une bande dessinée comment on peut passer de la lettre F à la lettre G.

F → π → T → T → U → G

figure 7

Il est aisé de voir l'imagination que demandent de telles transformations.

Exemple 3.

Une des applications simples de la topologie est le théorème de Descartes attribué, semble-t-il à tort, à Euler.

Considérons les deux solides ci-dessous :



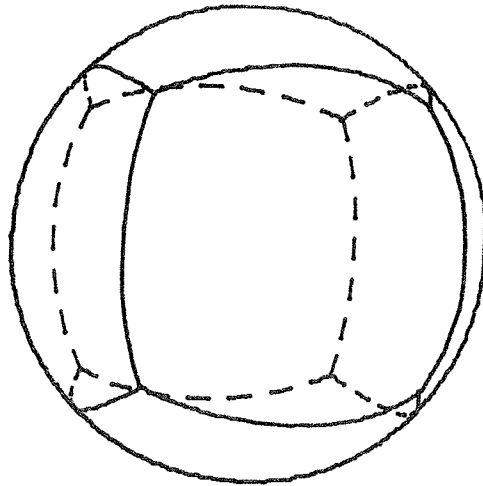
figure 8

Comptons le nombre de faces F , de sommets S et d'arêtes A . Nous trouvons :

- pour le cube : $F = 6$, $S = 8$, $A = 12$;
- pour le tétraèdre : $F = 4$, $S = 4$, $A = 6$.

Nous remarquons dans les deux cas, $F + S - A = 2$.

On démontre que cette relation est vraie pour tout solide convexe, c'est le théorème de Descartes. Mais, imaginons que le cube soit fait de caoutchouc et déformons-le de façon à le rendre sphérique. On obtient la figure 9 ci-dessous.



Si on considère que les traces du cube sur la sphère définissent des faces, des sommets et des arêtes, on obtient :

$$F = 6, \quad S = 8, \quad A = 12 \quad \text{et}$$

$$F + S - A = 2.$$

On convient ainsi que la relation de Descartes est conservée et que le nombre $2 = F + S - A$ est appelé caractéristique de la sphère.

Considérons les deux solides ci-dessous.

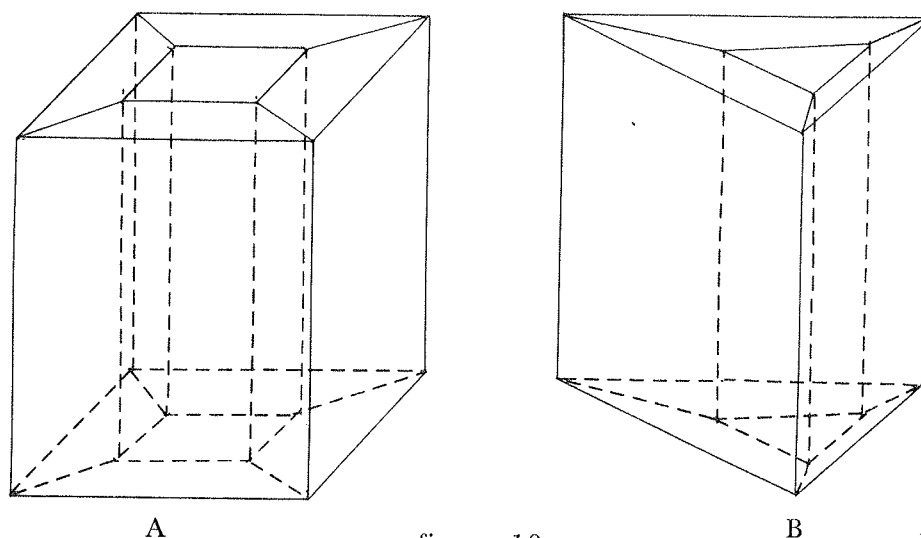


figure 10

Le solide A est constitué d'un parallélépipède évidé et le solide B est constitué d'un prisme évidé.

— Pour le solide A, on trouve : $F = 16$, $S = 16$, $A = 32$.

— Pour le solide B, on trouve : $F = 12$, $S = 12$, $A = 24$.

On constate pour les deux cas que : $F + S - A = 0$.

Or, ces deux solides sont topologiquement équivalents, car on peut par une déformation leur donner la forme d'une chambre à air gonflée, appelée tore en mathématique. Comme il a été convenu plus haut, la caractéristique du tore est nulle.

Exemple 4.

La dernière application que nous donnerons de la topologie concerne le coloriage des faces d'un solide. Considérons un cube dont on désire colorier les faces en convenant que deux faces adjacentes sont de couleurs différentes. On peut se demander quel est le nombre minimum de couleurs requises pour remplir ces conditions. Il y a au moins trois façons de résoudre ce problème : soit de la faire en «vraie grandeur» en prenant un cube, soit de dessiner un cube en perspective en essayant d'imaginer la situation, soit enfin en utilisant les propriétés des invariants topologiques. C'est cette troisième option que nous choisirons.

Imaginons donc ce cube et découpons une de ses faces. Il est facile, par déformation continue de transformer la boîte en une figure plane. (Il suffit d'écarteler les bords et d'écraser le tout). On obtient la figure suivante :

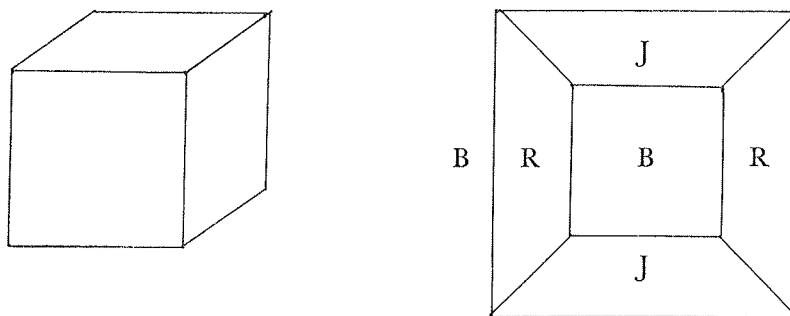


figure 11

Comme le couvercle est voisin de quatre faces, on conviendra qu'il a été transformé en la portion de plan entourant la figure. On voit ainsi que trois couleurs suffisent.

Ouvrons ici une parenthèse. On voit tout l'intérêt pédagogique que l'on peut tirer d'un tel exercice au niveau d'une classe de C.M. par exemple, les qualités intellectuelles que met en jeu sa résolution, l'imagination et l'intuition géométrique qu'elle demande : être capable de passer d'une représentation à une autre, de substituer un problème plan à un problème spatial et vice versa.

Voilà, tracés à grands traits, les éléments de topologie.

2. La géométrie projective.

En géométrie projective, deux figures seront transformées l'une de l'autre, quand l'une sera la perspective de l'autre.

Nous allons donner deux exemples pour illustrer ces transformations.

Exemple 1.

Imaginons une source lumineuse ponctuelle S et un écran de projection E . Interposons entre cette source ponctuelle et l'écran une figure géométrique plane. L'ombre sur l'écran est la transformée de cette figure géométrique.

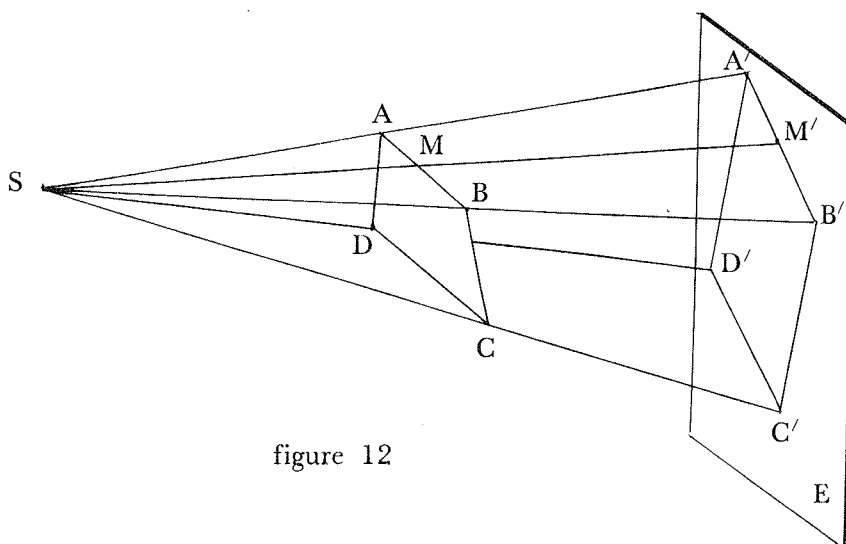


figure 12

Il est facile de retrouver un des principaux invariants de cette transformation.

Les trois points alignés A, M et B ont leurs transformés A', M' et B' qui le restent. La droite est donc le principal invariant de la géométrie projective alors qu'elle n'était pas invariante en géométrie topologique. Nous remarquons que tous les invariants topologiques (voir le paragraphe précédent) sont aussi des invariants projectifs. En première approximation, on peut considérer l'œil comme une source lumineuse ponctuelle, ce qui permet de retrouver de manière intuitive les invariants ou les non-invariants de la géométrie projective. Par exemple, le parallélisme n'est pas un invariant* : il suffit pour s'en rendre compte de regarder des rails de chemin de fer qui se «rencontrent» à l'horizon. Ainsi, on peut dire que l'on a une vision projective de l'espace qui nous entoure.

Exemple 2.

Nous allons chercher quelle est l'image d'un quadrillage dans une transformation projective. Ceci pourrait nous permettre d'obtenir la transformée projective de n'importe quelle figure. Compte tenu des remarques concernant les invariants projectifs, il est relativement facile de résoudre le problème posé.

En effet, les points alignés le demeurent, les parallèles en général ne sont pas conservées.

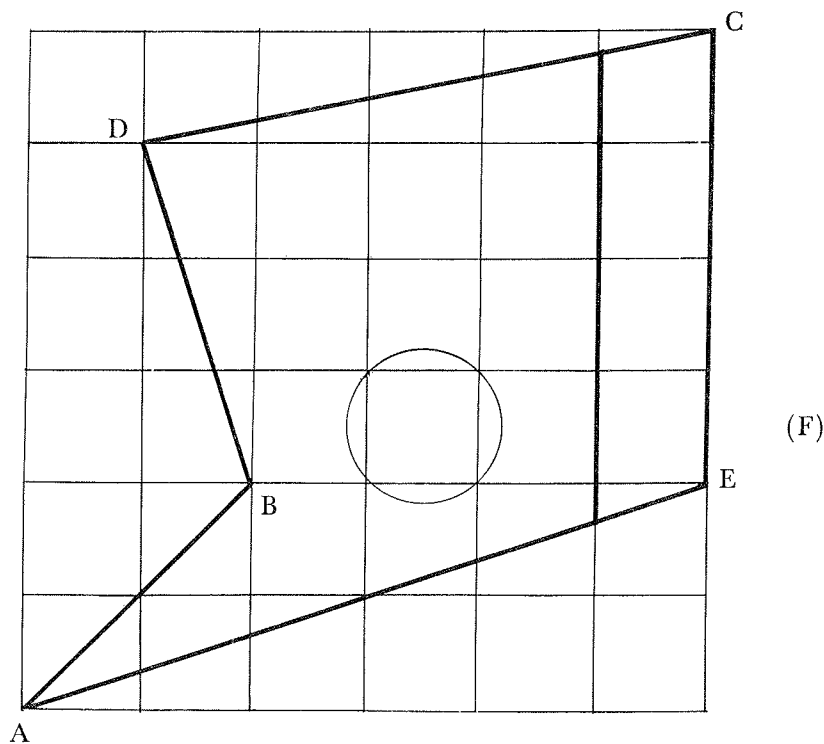


figure 13

* Contrairement à ce qui apparaît le plus souvent dans les dessins de jeunes enfants.

Sur la figure (F) (voir figure 13), les points A, B et C sont alignés, il en est de même des points homologues de la figure (F') (voir figure 14), ce qui permet de déterminer la diagonale principale du réseau transformé. Les verticales du quadrillage se transforment en des droites concourantes en un point que l'on appelle point de fuite.

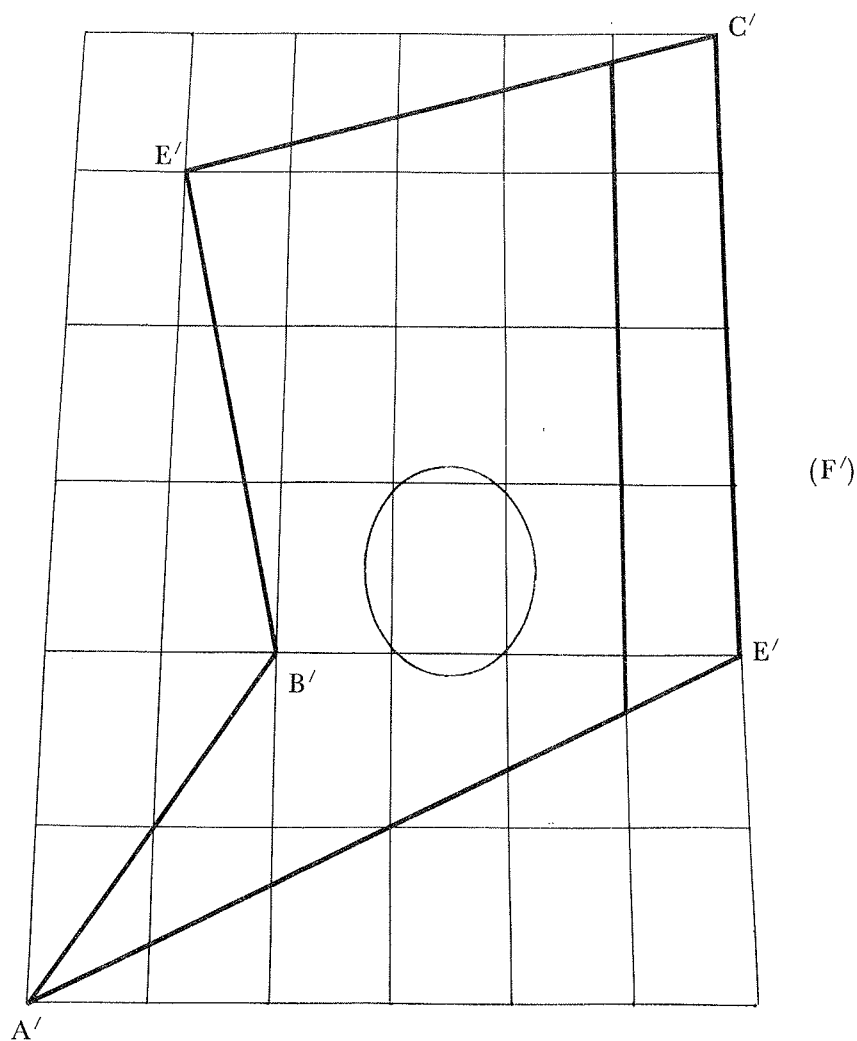
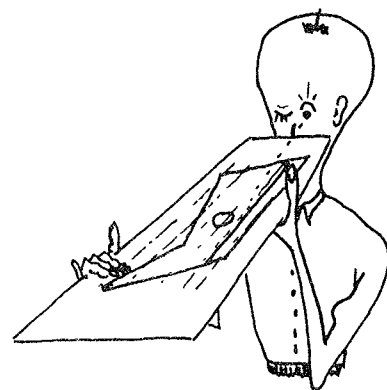


figure 14

En regardant (F') *d'un seul œil* (suivant le schéma ci-contre), on parvient à voir (F') telle quelle était perçue en (F) dans la position normale de lecture : l'ellipse est perçue comme un cercle, les trapèzes sont perçus comme des carrés. Ces activités conduisent à des déformations intéressantes de figures, que l'on appelle anamorphoses.



La remarque qui précède confirme, s'il en était besoin, la définition que nous avons adoptée pour la géométrie projective.

Puisque l'occasion nous est offerte, disons quelques mots sur la perspective. On distingue généralement deux sortes de perspectives : la perspective centrale et la perspective cavalière. La première donne une représentation des objets vus de près, la seconde une représentation des objets vus de très loin. La première relève de la géométrie projective, la seconde de la géométrie affine (voir page 50).

Donnons une représentation en perspective centrale, d'un cube placé devant soi sur un plan horizontal. Les verticales sont des invariants, les obliques définissent deux points de fuite F_1 et F_2 (figure 15).

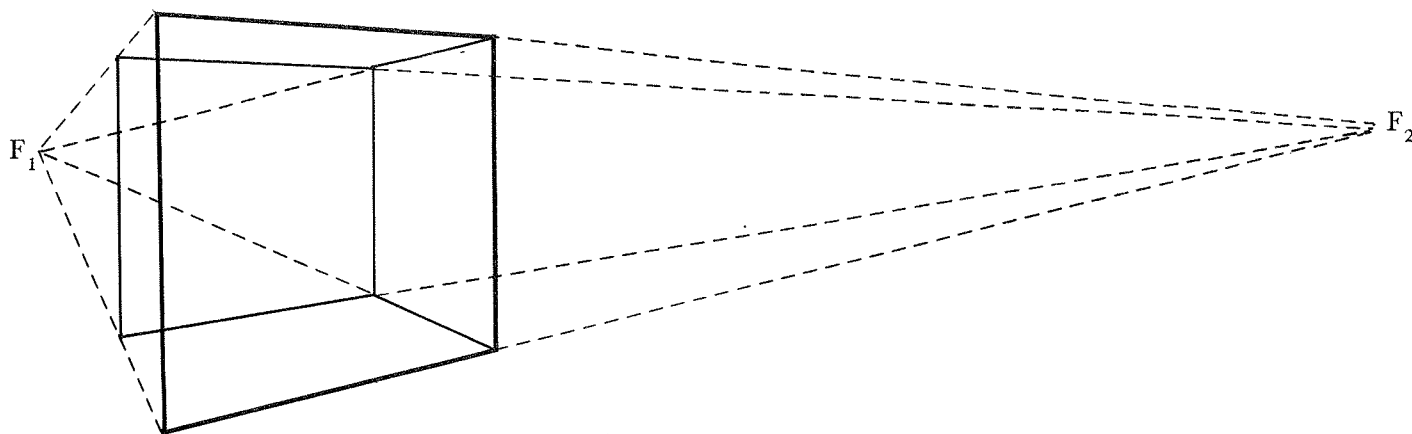


figure 15

Cette figure ne ressemble en rien à la représentation du cube telle que l'on a l'habitude de la dessiner (figure 16) qui est en fait une représentation du cube vu de très loin (perspective cavalière).

En effet, les droites parallèles sont représentées comme telles, les faces sont donc vues sous forme de parallélogramme (figure 16), les points de fuite sont rejetés à l'infini.

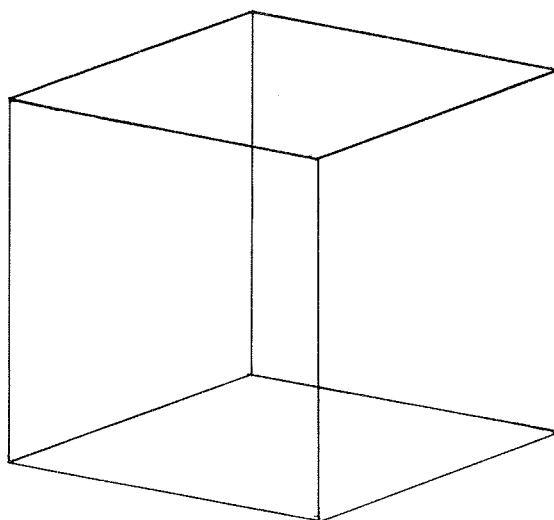


figure 16

3. La géométrie affine.

En géométrie dite affine, les transformations peuvent être définies comme en géométrie projective, mais au lieu d'avoir affaire à une source lumineuse ponctuelle, on considérera une source lumineuse dont les rayons sont parallèles. (Par exemple les rayons du soleil).

Nous allons donner deux exemples pour illustrer ceci.

Exemple 1.

Considérons un quadrilatère ABCD et un point M de AB tel que MD et BC soient parallèles. Projetons cette figure sur un écran E (figure 17) en utilisant une source lumineuse comme définie ci-dessus.

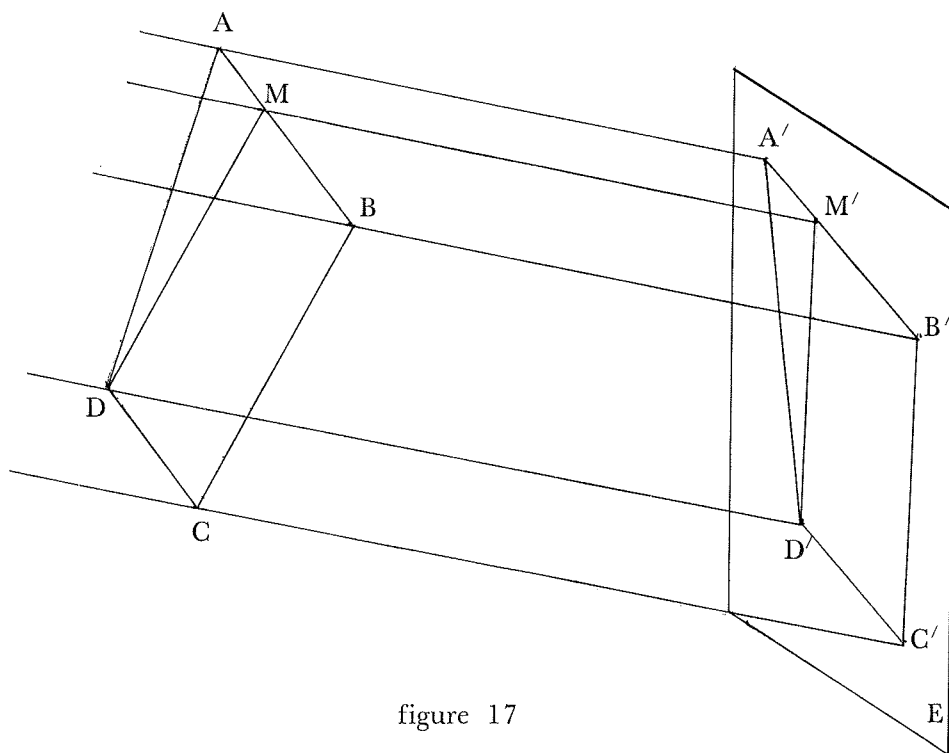


figure 17

Deux invariants intéressants apparaissent. Il s'agit d'une part du parallélisme de deux droites, d'autre part du rapport de deux segments portés par une même droite. En effet, les droites MD et BC qui sont parallèles, ont leurs transformés M'D' et B'C' qui le sont. Le rapport $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$, de même, $\frac{A'M'}{A'B'} = \frac{1}{4}$; c'est le célèbre théorème de Thalès.

Notons que les invariants de la topologie et de la géométrie projective sont aussi des invariants de la géométrie affine. Mais, les angles ne sont pas conservés, non plus que les distances.

Exemple 2.

Cherchons qu'elle est l'image d'un quadrillage dans une transformation affine. Puisque le parallélisme est l'un des principaux invariants, le réseau obtenu, sera un réseau dont les mailles sont des parallélogrammes. (figure 18).

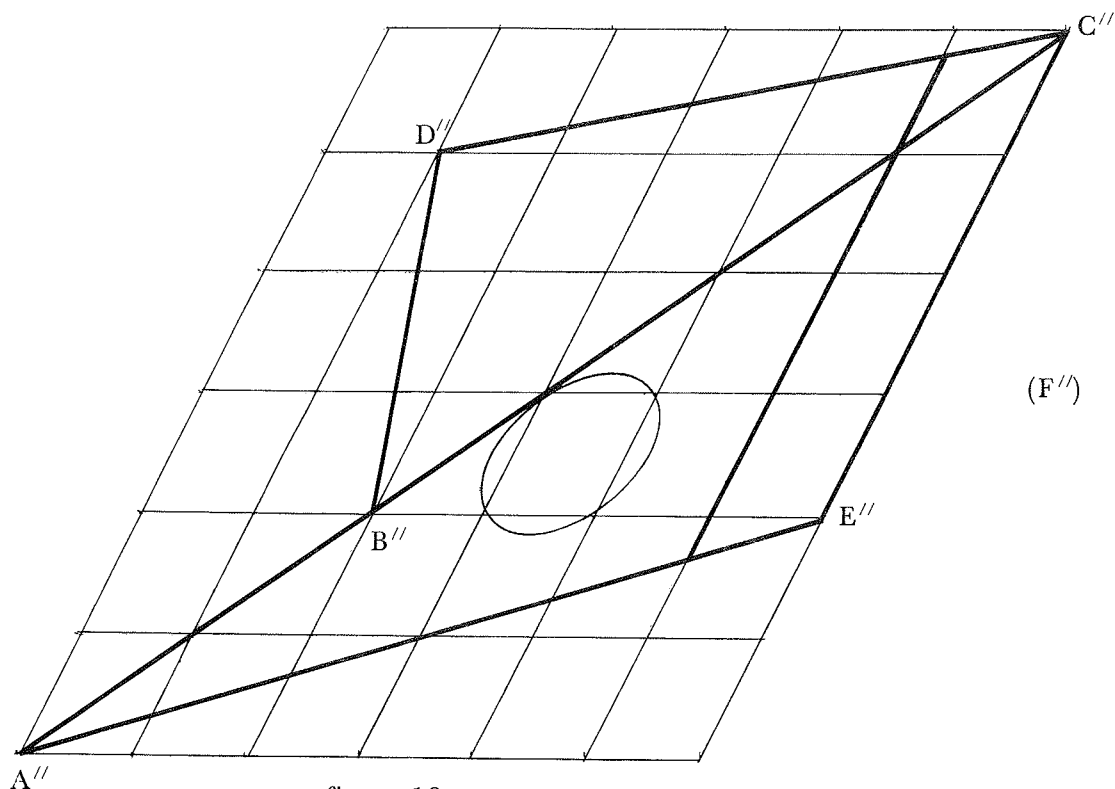


figure 18

La figure (F'') est la perspective cavalière de la figure (F) , c'est aussi l'ombre de la figure (F) placée au soleil.

4. La géométrie métrique.

En géométrie métrique, les invariants que l'on considère sont ceux de la géométrie affine en y ajoutant les angles⁽¹⁾ et les distances.

(1) Il y a un cas intéressant de la géométrie projective, c'est celui où le plan de la figure que l'on projette est parallèle au plan de projection. L'étude des propriétés relèvent de la géométrie euclidienne. Deux figures sont considérées comme équivalentes, quand l'une est la transformé de l'autre en y conservant les proportions. C'est le problème que soulève la réduction ou l'agrandissement d'une figure, dans l'étude des cartes et des échelles. Tout est conservé, sauf les distances.

Les transformations que l'on met ici en jeu sont les rotations et les translations. De ce fait, nous ferons abstraction de la symétrie axiale de façon à ne pas soulever le problème délicat de l'orientation du plan ou de l'espace.

Ainsi, deux figures planes sont équivalentes lorsqu'on peut les mettre en coïncidence l'une sur l'autre sans les retourner. Disons pour nous résumer, que la géométrie métrique c'est «notre bonne vieille géométrie». C'est pourquoi, je n'en ajouterai pas plus.

III — CONCLUSION.

Nous allons consigner dans un tableau général les résultats que nous avons obtenus dans cette brève étude.

Lorsque la propriété considérée est un invariant, on convient de mettre 1, dans le cas contraire on mettra 0.

invariants géométrie	Topologie	Projective	Affine	Métrique
Frontière	1	1	1	1
Intérieur - Extérieur	1	1	1	1
Fermé - Ouvert	1	1	1	1
Voisinage	1	1	1	1
Ordre	1	1	1	1
Droite	0	1	1	1
Parallélisme	0	0	1	1
Proportionnalité	0	0	1	1
Angles	0	0	0	1
Distances	0	0	0	1

Ce tableau montre clairement que les propriétés topologiques sont aussi projectives qui elles mêmes sont des propriétés métriques. Mais, ce qui est plus remarquable peut-être, c'est cette analogie frappante entre ces espèces d'emboîtement des géométries et l'évolution de la représentation de l'espace chez l'enfant.

Écoutons à ce propos Jean et Simone Sauvy : «L'espace que l'enfant construit pas à pas entre zéro et douze / treize ans est un espace topologique, projectif et largement métrique». (1)

On conçoit ainsi que lorsqu'un enfant ne fait plus de distinction entre un carré posé sur un de ses côtés et le même carré sur un de ses sommets, c'est qu'il est capable de mettre en jeu intuitivement peut-être, les transformations géométriques vues plus haut et leurs réciproques. Autrement dit, ce carré peut prendre n'importe quelle position dans l'espace, ce sera toujours un carré, et ses propriétés lui seront conservées. De même, il serait intéressant d'étudier les propriétés d'un carré par exemple et de son ombre portée sur un écran et peut être de prévoir quels seront les invariants de la transformation. Comme on le voit, il y a des rapports étroits entre la théorie et la pratique quotidienne de la classe.

Nous n'irons pas plus loin dans cette classification des géométries, cela demanderait de trop grands développements qui dépasseraient largement le cadre de cet article.

Nous avons essayé de définir la géométrie, nous avons vu que tout en étant une, elle est variée, nous avons vu que l'intuition et l'action y jouent un grand rôle, mais «toutefois ce recours à l'intuition peut être trompeur et ne saurait en aucun cas remplacer un raisonnement correct» (2).

Ce petit voyage à travers les géométries était un des buts sans prétention que nous visions. Cependant, si chaque fois que l'on travaille sur un quadrillage on se dit : «je fais de la projective ou de l'afine» ou si lorsque l'on mesure la longueur de la salle de classe on se dit : «je fais de la métrique», alors ce n'est pas ce que nous visions.

Peut-être maintenant savons-nous ce qu'est la géométrie. Mais, quand fait-on de la géométrie ? Faut-il prévoir seulement quelques moments privilégiés ? En réalité, les occasions pour faire de la géométrie en dehors de ces moments, sont nombreux et multiples tant dans le fond que dans la forme.

(1) «L'enfant et la géométrie» J. et S. Sauvy — Castermann - édition.

(2) «La géométrie contemporaine» — P.U.F.

Il va de soi que cette mise en garde s'adresse plus au maître qu'à l'élève de l'enseignement primaire.

«Remplir, paver, natter, tisser, modeler, orner, sont des activités qui impliquent toutes des intuitions géométriques de corps, surfaces, partitions et équipartitions, réaliser un objet en petit ou en grand..., et voici l'échelle réduite ou agrandie...» (1).

N'hésitons pas à suivre les conseils d'Auguste Comte : «La géométrie doit être envisagée comme une véritable science naturelle fondée sur l'observation» et ajoutons l'action.

Mais, laissons la conclusion à Andréa écolière romaine de 14 ans : «La géométrie représente un anneau où se conjuguent la réflexion et la réalité. Elle est une source inépuisable de découvertes» (2).

BIBLIOGRAPHIE.

La géométrie contemporaine.

André Delachet — P.U.F.

La géométrie projective.

André Delachet — P.U.F.

La perspective.

Albert Flocon et René Taton — P.U.F.

L'enfant et la découverte de l'espace.

J. et S. Sauvy — Castermann.

L'enfant et les géométries.

J. et S. Sauvy — Castermann.

(1) La perspective. *Albert Flocon et René Taton* — P.U.F.

(2) Revue A.R.P. numéro 8, janvier 1973.