AVERTISSEMENT

Cette brochure fait suite à un document produit en octobre 1975 par le groupe PROBA de l'IREM de Grenoble.

Elle met l'accent sur la modélisation en probabilité et sur le choix de l'univers Ω pour répondre aux soucis des programmes.

Une réflexion fondée sur des expériences faites dans les classes nous a amenés à constater les choses suivantes :

— l'analyse d'un problème de probabilité nous conduit à étudier différentes partitions de Ω et à bâtir des probabilités sur ces partitions ;

— l'étape suivante consiste à considérer la partition engendrée par celles-ci et à la munir d'une probabilité prolongeant les autres ;

— nous disposons alors d'un espace probabilisé permettant de traiter le problème étudié.

Un univers Ω et une tribu sur cet univers ne peuvent être raisonnablement exhibés que lorsque le problème a été ainsi analysé. Mais l'exploitation de Ω et d'une tribu ne répondent alors qu'à un souci de formalisation. L'habitude souvent prise qui consiste à vouloir commencer l'étude d'un problème par la donnée de Ω et d'une tribu crée un blocage chez l'élève qui aborde ce problème (et même chez nous professeurs !).

C'est pourquoi dans tout ce qui suit nous avons insisté sur les partitions et, plus généralement, sur les partages (qui ne sont autres que des partitions dont certains éléments peuvent être éventuellement vides). Aussi vous verrez souvent des phrases comme celles-ci :

«Soit Ω l'ensemble des épreuves ; sans préciser davantage ce que sont les épreuves nous sommes amenés, de par les questions posées, à considérer les partages suivants de Ω ...».

Que cela ne vous surprenne pas ; il s'agit pour nous de dire que :

— au début du problème il suffit d'admettre l'existence d'un ensemble Ω qui contiendra tous les évènements dont nous aurons besoin ;

— lorsque le problème sera entièrement analysé, nous connaitrons la partition la plus fine qu'il suffit de probabiliser pour le résoudre. Alors nous pourrons préciser une définition de Ω (par exemple en admettant que les éléments de cette partition sont des singletons). ;

Mais cette dernière activité ne répond plus qu'au soucis de formaliser, et non au soucis de rigueur, car le problème, lui est résolu.

Pour des exemples, voyez les articles «Modélisation en probabilité» et «Problème des rats», ainsi que la conclusion qui suit.

EQUIPROBABILITE DE TIRAGES DE BOULES OU DE PAIRES DE BOULES

«Une urne contient 6 boules rouges, 4 boules bleues et 2 boules jaunes. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire 3 boules simultanément ...»

(Bac. D, Reims 1975).

Dans un grand nombre de sujets de baccalauréat, après avoir demandé au candidat d'admettre l'équiprobabilité du tirage d'une boule d'une urne, on fait des tirages de paires, en pensant qu'il sera naturel d'avoir l'équiprobabilité pour les paires de boules. Cette dernière est-elle une conséquence de la précédente ?

Dans la pratique, on peut réaliser le tirage d'une boule d'une urne en demandant à une personne d'y plonger la main pour retirer une boule. Ce tirage sera équiprobable si la personne n'est pas influencée par le toucher des boules. On peut réaliser des appareils réalisant le tirage : les boules sont agitées jusqu'à ce que l'une d'elles s'engage dans un conduit de diamètre convenable. On peut estimer que ces méthodes réalisent un tirage équiprobable des boules d'une urne.

Comment réaliser un tirage de deux boules ? Demander à une personne de plonger une main dans l'urne et d'en retirer deux boules. La distance séparant deux boules ne sera-t-elle pas constante ? Cela aura-t-il une influence sur la probabilité de chaque paire ? On peut aussi demander à la personne de plonger les deux mains dans l'urne. Mais le tirage sera-t-il vraiment simultané ? Faut-il plutôt faire tirer les deux boules l'une après l'autre ? Ou bien mettre dans une autre urne des objets représentants chacune des paires possibles ?

MATHEMATISATION DU PROBLEME.

1) Une urne contient n boules. Désignons par Ω l'ensemble des paires de boules de l'urne. Il y en a C_n^2 soit $\frac{n(n-1)}{2}$. Supposons les paires équiprobables. La probabilité d'une paire est donc $\frac{2}{n(n-1)}$.

2) Soit E l'ensemble des boules de l'urne : $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Considérons l'ensemble des couples : E^2. Remarquons qu'en introduisant les couples, nous mettons un ordre sur les tirages des boules. Ce modèle ne traduit donc pas convenablement le tirage simultané de deux boules. Par contre il convient au cas où, plongeant les deux mains dans l'urne, une personne retire deux boules et distingue celle tirée par sa main droite et celle tirée par sa main gauche. Cela revient à représenter le tirage de la boule a_i par la main gauche et de la boule a_j par la main droite par le couple (a_i, a_j).

Attribuons à chaque couple formé de deux éléments identiques une probabilité nulle, et supposons les autres couples équiprobables. La probabilité d'un tel couple est alors $\frac{1}{n^2 - n}$. Que choisir pour représenter le tirage de la paire formée de a_i et a_j ? Il semble naturel de prendre l'évènement : $\{(a_i, a_i), (a_j, a_j)\}$. Sa probabilité est $\frac{1}{n^2 - n}$. Insistons sur le fait que ce choix n'est fondé sur aucune considération mathématique. Nous aurions tout aussi bien pu prendre $\{(a_i, a_j), (a_j, a_i), (a_i, a_i), (a_j, a_j)\}$ ou encore $\{(a_i, a_i), (a_j, a_j)\}$.

Soit A_i l'évènement «la main gauche a tiré la boule a_i». Il est composé de $n - 1$ couples (a_i, a_j), i étant fixé et j variant sans être égal à i. Sa probabilité est donc $\frac{n-1}{2} = \frac{1}{n}$; de même l'évènement «la main droite a tiré la boule a_j» se compose des $n - 1$ couples (a_i, a_j), j étant fixé et i variant sans être égal à j. Sa probabilité est donc aussi $\frac{1}{n}$. Chaque boule a donc, dans ce modèle, la même probabilité d'être tirée par l'une ou l'autre main.

3) Dans le cas du tirage successif de deux boules, on peut essayer de chercher à traduire le fait qu'au deuxième tirage les boules restant dans l'urne ont la même probabilité d'être tirées. On peut penser à utiliser les n ensembles $E_i = E\backslash\{a_i\}$ pour le deuxième tirage, mais ceci conduit à une impasse car on ne peut pas définir l'univers sur lequel on travaille.

Supposons donc qu'il existe un univers Ω et une probabilité p tels que $(\Omega, \mathcal{R}(\Omega), p)$ rende compte de l'équiprobabilité de toutes les boules au premier tirage, et de l'équiprobabilité des boules restantes au deuxième tirage.

Soit A_i l'évènement «la première boule tirée est a_i», et B_j l'évènement «le deuxième boule tirée est a_j».

L'équiprobabilité au premier tirage donne : $p(A_i) = \frac{1}{n}$ et l'équiprobabilité au deuxième tirage donne :

$$\text{si } j \neq i \qquad p(B_j|A_i) = \frac{1}{n-1}$$

$$\text{si } j = i \qquad p(B_j|A_i) = 0.$$

Il en résulte :

si $j \neq i$ $\quad p(A_i \cap B_j) = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

si $j = i$ $\quad p(A_i \cap B_j) = 0$.

L'évènement «la paire tirée est $\{a_i, a_j\}$» se compose alors des deux évènements $A_i \cap B_j$ et $A_j \cap B_i$ et sa probabilité est $\dfrac{2}{n(n-1)}$.

4) On peut enfin étudier le cas où l'on tire successivement toutes les boules de l'urne. Chaque tirage correspond à une permutation de l'ensemble E. Il y en a n! Soit P l'ensemble de ces permutations, supposons les équiprobables. La probabilité de chaque permutation est donc $\dfrac{1}{n!}$.

L'évènement «les deux premières boules tirées sont a_i et a_j» se compose de toutes les permutations commençant par a_i, a_j et de toutes celles commençant par a_j, a_i. Il y en a donc $2 \cdot (n-2)!$ La probabilité de cet évènement est donc

$$\frac{2 \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Remarquons que les divers modèles envisagés donnent finalement le même résultat.

DEUX EXEMPLES BIZARRES.

1) Il y a une urne contenant quatre boules : 1 blanche, 1 rouge, 1 noire et 1 verte. Une urne blanche contient deux boules : 1 noire et 1 verte ; une urne rouge contient deux boules : 1 noire et 1 verte ; une urne noire contient 1 boule rouge ; une urne verte contient une boule blanche.

Le manipulateur prend une boule dans la première urne, puis prend une boule de l'urne ayant la couleur de la boule qu'il vient de tirer. On s'intéresse aux paires de couleurs obtenues. Le tableau suivant donne les probabilités de chaque couple de chaque couleurs :

Tirages :

2ème \ 1er	B	R	N	V
B	0	0	1/8	1/8
R	0	0	1/8	1/8
N	0	1/4	0	0
V	1/4	0	0	0

Il est facile de vérifier qu'au premier comme au second tirage, chaque couleur à la même probabilité d'apparaître. Cependant les paires de couleurs ne sont pas équiprobables : la paire {B,R} a une probabilité nulle, la paire {B,N} a une probabilité de 1/8, la paire {B,V} 3/8, etc.

2) Même manipulation avec une première urne contenant quatre boules : 2 blanches, 1 rouge et 1 noire. Une urne blanche contenant 12 boules : 7 rouges et 5 noires. Une urne rouge contenant 6 boules : 1 blanche et 5 noires. Une urne noire contenant 2 boules : 1 rouge et 1 blanche.

Les probabilités de chaque couple sont données dans le tableau suivant :

2ème \ 1er	B	R	N
B	0	7/24	5/24
R	1/24	0	5/24
N	1/8	1/8	0

Bien qu'au premier comme au second tirage les couleurs n'ont pas la même probabilité d'apparaître, les paires de couleurs ont toutes la même probabilité d'apparaître.

Ces exemples montrent que l'équiprobabilité de tirage d'une couleur et l'équiprobabilité de tirage de paires de couleurs ne sont pas liées.

MODELISATION EN PROBABILITE

(lire ces généralités en même temps que la page 13)

Certains phénomènes que nous pouvons observer sont de nature déterministe ; leur observation permet de dégager des permanences qu'on énonce sous forme de lois. D'autres phénomènes ne sont pas de cette nature, ils sont dits fortuits, aléatoires, et ressortent d'une autre interprétation. La construction d'un modèle mathématique pour en décrire certains aspects est l'objet de la théorie des probabilités.

Un phénomène fortuit, qui peut être naturel (date de naissance, taille) ou provoqué (numéro d'un dé, couleur d'une carte) sera dit **expérience.** Ce phénomène a lieu selon les hypothèses données (connues ou non), selon un protocole, un environnement, des conditions d'expérience ; c'est ce qui conduit à un **déroulement** de l'expérience.

Ce déroulement ne peut être décrit qu'en fonction des moyens d'observation. **L'observateur** est assimilé à tous ses moyens d'observations :

- ses facultés personnelles (ses sens),
- les instruments dont il dispose.

L'observateur détermine en fonction du phénomène qui l'intéresse et de ses moyens d'observation, **le protocole** du déroulement et de l'observation de l'expérience.

Dans la pratique l'observateur ne s'intéresse qu'à une **classe** de déroulements : il n'utilise que certains des moyens mis à sa disposition, il oublie volontairement des observations apportées par d'autres moyens (si la taille d'un individu l'intéresse, il ne tiendra pas compte de la couleur de ses yeux). Une telle classe sera appelée, dans notre modèle, **épreuve.** En fait, dans la pratique, c'est la donnée de l'épreuve, terme abstrait, qui déterminera la classe de déroulements. Par exemple l'observateur choisit de s'intéresser uniquement à l'épreuve : «le numéro du dé est 4» et il met dans la même classe tous les déroulements possibles du jet du dé qui conduisent au résultat 4.

On admet que les épreuves forment un ensemble, qu'on appelle **univers,** désigné par Ω.

De l'observation du déroulement de l'expérience l'observateur retient des faits, dits **faits observables** (par exemple : «le numéro du dé est pair»).

Un tel fait détermine une partie de Ω (dans l'exemple, l'ensemble de toutes les épreuves pour lesquelles le numéro du dé est pair) : un tel ensemble est appelé **«évènement probabilisable»**. C'est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Soit A l'ensemble des évènements probabilisables $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Mais réciproquement, on peut considérer toutes les parties de Ω, qu'on appelle **évènements,** qui ne sont pas forcément dans A. Nous parlerons alors de **faits** (observables ou non).

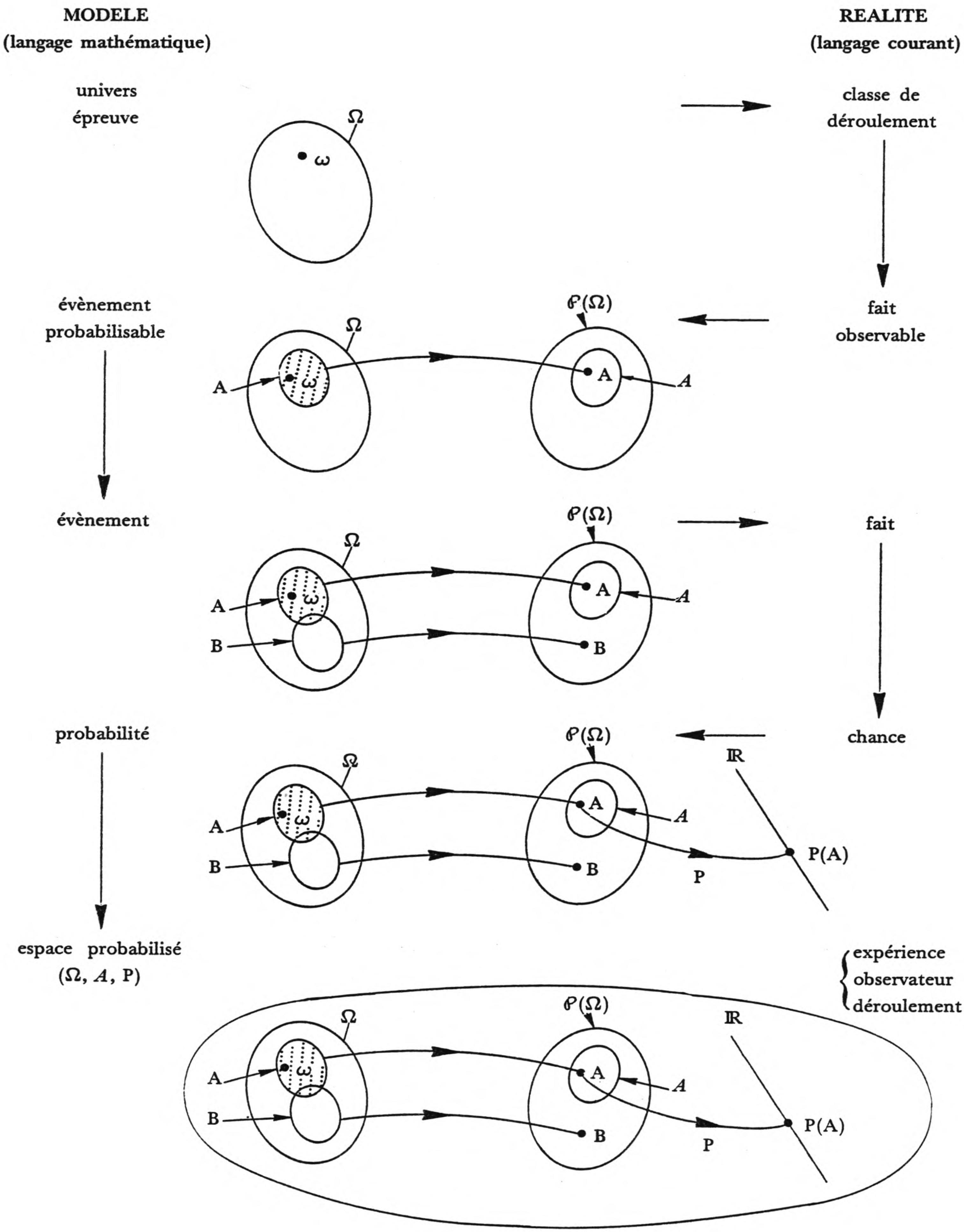
Exemple :

Je prends deux pièces de monnaie identiques, une dans chaque main ; je ferme les yeux, je lance les pièces ; quand elles sont tombées j'ouvre les yeux ; je note quels côtés des pièces sont apparents. Si l'on choisit comme épreuves les couples formés par : d'abord le côté apparent de la pièce lancée par la main gauche, puis celui de la pièce lancée par la main droite ; alors l'univers est $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ et les évènements suivants correspondent à des faits observables :

$\{(P, P)\}$	: les deux pièces ont donné pile,
$\{(P, P), (F, F)\}$	: les deux pièces ont donné le «même» côté,
$\{(P, F), (F, P)\}$	: une seule pièce a donné pile,
Ω	: les deux pièces sont tombées.

Mais l'évènement $\{(P, F)\}$ ne correspond pas à un fait observable ; compte tenu du protocole, l'observateur ne peut pas le distinguer de l'évènement $\{(F, P)\}$.

A chaque fait observable on attribue la chance qu'il a de se produire. C'est un nombre réel qu'on appelle **probabilité** de l'évènement.


MODELE
(langage mathématique)
REALITE
(langage courant)
univers
épreuve
classe de
déroulement
Ω
ω
évènement
probabilisable
fait
observable
𝒫(Ω)
A
A
A
évènement
fait
B
B
probabilité
chance
ℝ
P(A)
P
espace probabilisé
(Ω, A, P)
expérience
observateur
déroulement

EXEMPLE

EXEMPLE.

I – PROTOCOLE.

a) **Description** D.

Deux individus K et L puisent alternativement les six jetons numérotés d'un sac, sans remise, les yeux bandés ; parmi les six jetons il y a 4 blancs et 2 noirs, notés B_1, B_2, B_3, B_4, N_1, N_2.

C'est le joueur K qui commence.

b) **Observations.**

L'épreuve est déterminée par le compte rendu (la description) qu'on en fait. Voici quatre situations :

α l'observateur fait un film de l'expérience, afin de n'en perdre aucun détail. C'est un déroulement dans le temps,

β l'observateur note chronologiquement le nom du jeton tiré,

γ l'observateur ne voit que la couleur du jeton tiré, et la note chronologiquement,

δ l'observateur ne voit que ce que possède le joueur K à la fin de la partie ; il note le nombre de jetons blancs de K,

ϵ l'observateur ne voit que la couleur du premier jeton tiré.

II – EPREUVE - UNIVERS.

Selon l'observation choisie on aboutit à quatre modèles où les épreuves peuvent être notées de la façon suivante :

★ modèle (D, α) numéro du film - **infinité d'épreuves.**

★ modèle (D, β) $B_1 B_2 B_3 B_4 N_1 N_2$

$B_1 B_2 B_3 B_4 N_2 N_1$

$B_1 B_2 B_3 N_1 B_4 N_2$

....

$N_2 B_2 B_4 N_1 B_3 B_1$

....

$N_2 N_1 B_4 B_3 B_2 B_1$

6! = 720 épreuves.

★ modèle (D, γ) BBBBNN
BBBNBN
BBBNNB
BBNBBN
BBNBNB
....
NNBBBB

$C_6^2 = 15$ épreuves.

★ modèle (D, δ) 1
2
3

3 épreuves.

★ modèle (D, ϵ) B
N

2 épreuves

III – FAITS.

On peut s'intéresser aux faits suivants :

a : L a tiré plus de jetons blancs que K,

b : C'est K qui le premier a eu un jeton blanc,

c : Un joueur a tiré deux jetons noirs,

d : L a hésité plus longtemps que K,

e : Le sac est vide,

f : Un joueur a tiré tous ses jetons de la même couleur,

g : Un joueur a tiré un jeton de plus que l'autre.

Ces faits sont-ils observables ? Cela dépend du modèle. Par exemple :

«e» est observable dans tous les modèles : à chaque épreuve se fait est réalisé.

«g» est observable dans tous les modèles : à chaque épreuve ce fait n'est pas réalisé.

«f» est observable dans les modèles (D, α), (D, β), (D, γ), (D, δ) mais il n'est pas observable dans le modèle (D, ϵ).

«b» est observable dans les modèles (D, α), (D, β), (D, γ).

Dans le modèle (D, δ) :

— si, après une épreuve, l'observateur n'a vu que des jetons blancs, alors il peut conclure que b est réalisé ;

— sinon, l'observateur ne peut pas conclure.

Donc, «b» n'est pas observable dans le modèle (D, δ). Il ne l'est pas non plus dans le modèle (D, ϵ).

Un **fait observable** est :

«un fait dont, **avant l'expérience,** l'observateur **sait** qu'il pourra dire la réalisation ou la non réalisation».

IV — CHANCE.

A la chance on associe une application de A dans [0, 1], appelée **probabilité,** soumises aux contraintes suivantes :

— contraintes axiomatiques : croissante pour l'inclusion
Ω a pour image 1
ϕ a pour image 0
comportement de cette fonction par rapport a la structure de A : réunion, intersection, complément.

— contraintes de modélisation : on ne donnera pas de probabilité à certains évènements qui ne nous intéressent pas.

A est une tribu (stabilité pour la réunion dénombrable et pour la complémentation) ; P est une mesure positive.

Choisissons pour chacun des modèle (D, β), (D, γ), (D, δ), (D, ϵ) la probabilité P_β, P_γ, P_δ, P_ϵ, qui nous donne l'équiprobabilité des évènements élémentaires, c'est-à-dire des singletons :

(D, α)	(D, β)	(D, γ)	(D, δ)	(D, ϵ)
	$P_\beta(\{\omega\}) = \frac{1}{720}$	$P_\gamma(\{\omega\}) = \frac{1}{15}$	$P_\delta(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$	$P_\epsilon(\{\omega\}) = \frac{1}{2}$

IV – COHERENCE DES MODELES.

Considérons l'évènement E correspondant au fait «a» :

«L a tiré plus de jetons blancs que K».

On peut dire aussi que E correspond au fait :

«L a tiré 3 jetons blancs»,

ou «K a tiré 1 jeton blanc».

Calculons la probabilité de E dans chacun des modèles proposés.

★ modèle (D, β) :

Les éléments de E sont les «mots» de six lettres (toutes différentes) tels que parmi les trois lettres suivantes : première lettre
troisième lettre
cinquième lettre, il y ait un seul B.

On choisit une lettre B parmi les quatre lettres B_1, B_2, B_3, B_4 : 4 choix ;

pour chacun de ces choix on choisit l'une des trois places 1ère, 2ème, 3ème : 3 choix ;

pour chacun de ces choix on répartit les deux lettres N_1 et N_2 dans les deux autres places : 2 choix ;

pour chacun de ces choix on répartit les trois autres lettres B dans la 2ème, 4ème et 6ème places : $3! = 6$ choix.

Au total on obtient $4 \times 3 \times 2 \times 6$ épreuves ;

$$\text{donc } P_\beta(E) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 6}{720} = \frac{1}{5}.$$

★ modèle (D, γ) :

Les éléments de E sont les «mots» de 6 lettres (4 lettres B et 2 lettres N) tels que parmi les trois places suivantes : 1ère, 3ème, 5ème, il y ait un seul B.

Choix de la place B parmi les 3 places : 1ère, 3ème, 5ème : 3 choix.

Ce choix détermine entièrement le mot.

Au total il y a 3 épreuves ;

$$\text{donc } P_\gamma(E) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

★ modèle (D, δ) :

Les éléments de E sont les nombres de jetons vlancs tirés par K.

Il n'y a que 1 ;

donc $E = \{1\}$ et $P_\delta(E) = \frac{1}{3}$.

★ modèle (D, ϵ) :

Dans ce modèle l'évènement E n'est pas observable. De par l'observation qu'il fait, l'observateur ne peut pas dire si l'évènement E sera réalisé ou non. Cet évènement n'est donc pas probabilisable.

Que remarque-t-on ?

$$P_\beta(E) = \frac{1}{5} \quad ; \qquad P_\gamma(E) = \frac{1}{5} \quad ; \qquad P_\delta(E) = \frac{1}{3}.$$

La probabilité trouvée dans le mondèle (D, δ) est différente de celle trouvée dans les autres cas. Les modèles étant différents cela ne doit pas nous étonner de trouver pour un évènement donné des probabilités différentes.

Ce qui est le plus étonnant c'est que les deux autres modèles (D, β) et (D, γ) conduisent au même résultat $P_\beta(E) = P_\gamma(E) = \frac{1}{5}$ alors que les modèles sont différents.

A quoi cela est-il dû ?

Une épreuve ω de Ω_γ détermine un évènement élémentaire $\{\omega\}$ de Ω_γ, qui détermine un fait auquel correspond un évènement V de Ω_β.

Par exemple l'épreuve $\omega = BBBBNN$ de Ω_γ détermine le fait «les quatre premiers tirages ont donné des blancs» ; ce fait détermine l'évènement V de Ω_β qui contient $4! \times 2!$ épreuves de Ω_β (répartitions des quatre lettres $B_1 B_2 B_3 B_4$ dans les quatre premières places et des deux lettres $N_1 N_2$ dans les deux dernières places).

donc $P_\beta(V) = \dfrac{4! \times 2!}{720} = \dfrac{1}{15}$. Rappelons que $P_\gamma(\{\omega\}) = \dfrac{1}{15}$.

On met en évidence une application de Ω_β dans Ω_γ qui à un «mot» de Ω_β fait correspondre le mot de Ω_γ obtenu en supprimant les indices des lettres

$$\begin{aligned} \theta : \Omega_\beta &\longrightarrow \Omega_\gamma \\ B_1 B_4 B_3 B_2 N_2 N_1 &\longmapsto BBBBNN. \end{aligned}$$

Alors $V = \theta^{-1}(\{\omega\})$ et $P_\beta(V) = P_\gamma(\{\omega\})$,

ce qui s'écrit aussi : $P_\beta(\theta^{-1}(\omega)) = P_\gamma(\omega)$.

Que se passe-t-il vis à vis de Ω_δ ?

L'évènement $\{1\}$ de Ω_δ (qui a la probabilité $\frac{1}{3}$) détermine le fait E ; il détermine un évènement de Ω_γ dont on a calculé la probabilité : $P_\gamma(E) = \frac{1}{5}$.

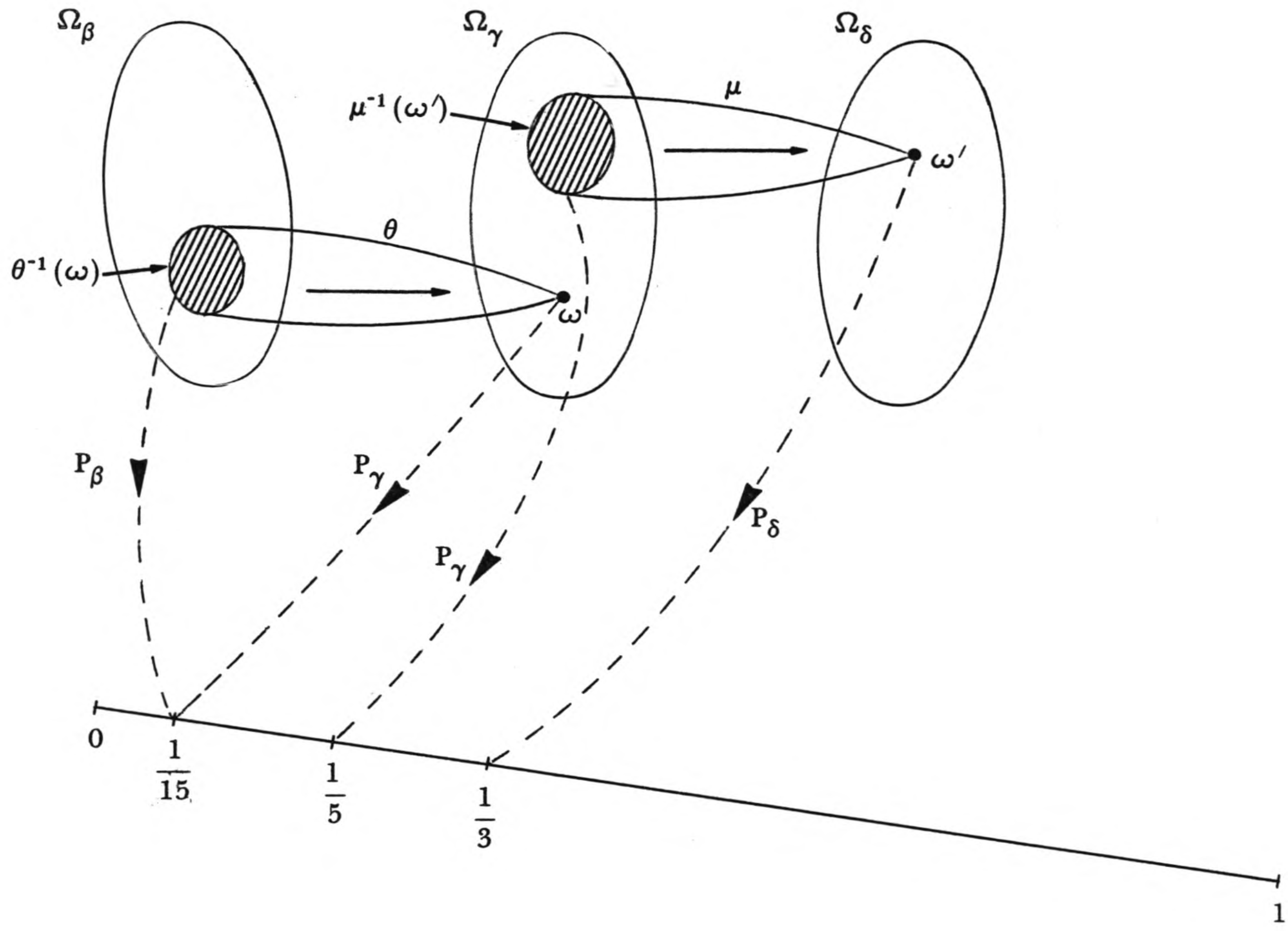
On a une application μ de Ω_γ dans Ω_δ qui à un mot de Ω_γ fait correspondre le nombre de lettres B occupant la 1ère, la 3ème ou la 5ème place.

$\{\omega'\} = \{1\}$ et $P_\delta(\omega') = \dfrac{1}{3}$

$\mu^{-1}(\{\omega'\}) = \{\text{BBNBNB, NBBBNB, NBNBBB}\}$

$$\begin{array}{rcl} \mu : \Omega_\gamma & \longrightarrow & \Omega_\delta \\ \text{BBNNBB} & \longmapsto & 2 \\ \begin{matrix}\text{BBNBNB} \\ \text{NBBBNB} \\ \text{NBNBBB}\end{matrix} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

donc $P_\gamma(\mu^{-1}(\{\omega'\})) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} \neq P_\delta(\{1\})$.



On dira que les **modèles** D_β et D_γ **sont cohérents** s'il existe une application θ de Ω_β dans Ω_γ telle que

$$\boxed{\forall\ \omega \in \Omega_\gamma, \quad P_\beta(\theta^{-1}(\omega)) = P_\gamma(\{\omega\}).}$$

On dit que θ est une variable aléatoire qui transporte sur Ω_γ la même probabilité que celle choisie sur Ω_β.

P_γ est la probabilité image de P_β par la variable aléatoire θ.

Quelle probabilité faut-il choisir sur Ω_δ pour que D_δ soit cohérent avec les deux autres modèles ?

Un calcul montre qu'il faut choisir P_δ telle que :

$$P_\delta(1) = \frac{1}{5}$$

$$P_\delta(2) = \frac{3}{5}$$

$$P_\delta(3) = \frac{1}{5}.$$

PROBLEME DE RATS

(Annales D - 74 - Dijon II)

ENONCE.

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre 4 portes d'apparence identique, dont l'une est dite «bonne» et les trois autres sont dites «mauvaises». Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1) Le rat n'a aucune mémoire.

Il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre les 4 portes.

Déterminer la possibilité des évènements suivants :

a) le rat sort au bout de la troisième fois,
b) le rat sort au bout de la septième fois.

2) Le rat a une mémoire parfaite.

A chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore essayées. Le nombre d'essais effectués par le rat est une variable aléatoire X.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance E(X), la variance V(X), et l'écart-type σ(X).

SOLUTION.

1) Le rat n'a pas de mémoire.

• Ω étant l'ensemble des épreuves, sans préciser davantage ce que sont les épreuves, nous avons à considérer la partition suivante de Ω :

$$\Omega = B_1 \cup M_1, \qquad \text{où}$$

B_1 est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «le rat est sorti la 1ère fois»,

M_1 est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «à l'issue de la 1ère fois le rat n'est pas sorti».

Le choix entre les quatre portes étant équiprobables, prenons une probabilité p définie sur la tribu engendrée par $\{B_1, M_1\}$, probabilité déterminée par :

$$p(B_1) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad p(M_1) = \frac{3}{4}.$$

• Relativement à la deuxième fois, sachant que le rat n'est pas sorti à l'issue de la 1ère fois, considérons la partition de M_1 :

$$M_1 = B_2 \cup M_2 \qquad \text{où}$$

B_2 est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «le rat est sorti la 2ème fois»,
M_2 est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «à l'issu de la 2ème fois le rat n'est pas sorti»,
ce qui conduit à la partition de Ω : $\{B_1, B_2, M_2\}$.

Le rat n'ayant pas de mémoire, il choisit de façon équiprobable l'une des quatres portes.

Prolongeons la probabilité p à la tribu engendrée par $\{B_1, B_2, M_2\}$ de sorte que :

$$P_{M_1}(B_2) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P_{M_1}(M_2) = \frac{3}{4}$$

Les probabilités de B_2 et M_2 sont proportionnelles à 1 et 3

$$\frac{p(B_2)}{1} = \frac{p(M_2)}{3}$$

• Relativement à la troisième fois, sachant que le rat n'est pas sorti à l'issu de la 2ème fois, considérons la partition de M_2 :

$$M_2 = B_3 \cup M_3 \qquad \text{où}$$

B_3 est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «le rat est sorti la 3ème fois»,
M_2 est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «à l'issu de la 3ème fois le rat n'est pas sorti»,
ce qui conduit à la partition de Ω : $\{B_1, B_2, B_3, M_3\}$.

Le rat n'ayant aucune mémoire, il choisit de façon équiprobable l'une des quatre portes.

Prolongeons la probabilité p à la tribu engendrée par $\{B_1, B_2, B_3, M_3\}$ de sorte que

$$P_{M_2}(B_3) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P_{M_2}(M_3) = \frac{3}{4}$$

Les probabilités de B_3 et M_3 sont proportionnelles à 1 et 3

$$\frac{p(B_3)}{1} = \frac{p(M_3)}{3}$$

Calculons $p(B_3)$

$$p(B_3) = p(B_3 \cap M_2) \quad \text{car} \quad B_3 \subset M_2$$
$$= p(M_2) \times p_{M_2}(B_3)$$
$$= \frac{1}{4}\, p(M_2)$$

$$\frac{p(B_3)}{1} = \frac{p(M_3)}{3} = \frac{p(B_3 \cup M_3)}{1+3} = \frac{p(M_2)}{4}$$

d'où $p(B_3) = \frac{1}{4}\, p(M_2)$

$$p(M_2) = p(M_2 \cap M_1) \quad \text{car} \quad M_2 \subset M_1$$
$$= p(M_1) \times p_{M_1}(M_2)$$
$$= \frac{3}{4}\, p(M_1)$$

$$\frac{p(B_2)}{1} = \frac{p(M_2)}{3} = \frac{p(B_2 \cup M_2)}{1+3} = \frac{p(M_1)}{4}$$

d'où $p(M_2) = \frac{3}{4}\, p(M_1)$

$$p(M_1) = \frac{3}{4}$$

$$p(M_1) = \frac{3}{4}$$

d'où $p(B_3) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$.

A gauche j'ai utilisé les notations des probabilités conditionnelles.

A droite j'ai remplacé ces notations par des conditions de **proportionnalité.**

Cette dernière méthode semble beaucoup plus claire et légère et la condition de proportionnalité est très naturelle pour traduire une condition d'équiprobabilité.

GENERALISATION.

Relativement à la $(i+1)^{\text{ième}}$ fois sachant que le rat n'est pas sorti à l'issu de la $i^{\text{ième}}$ fois, considérons la partition de M_i :

$$M_i = B_{i+1} \cup M_{i+1} \qquad \text{où}$$

B_{i+1} est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «le rat est sorti la $(i+1)^{\text{ième}}$ fois»

M_{i+1} est l'ensemble des épreuves réalisant l'évènement : «à l'issu de la $(i+1)^{\text{ième}}$ fois le rat n'est pas sorti»»,

ce qui conduit à la partition de Ω : $\{B_1, \ldots, B_i, B_{i+1}, M_{i+1}\}$.

Le rat n'ayant pas de mémoire il choisit de façon équiprobable l'une des quatre portes.

Prolongeons la probabilité p à la tribu engendrée par $\{B_1, \ldots, B_{i+1}, M_{i+1}\}$ de sorte que :

$$p_{M_i}(B_{i+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p_{M_i}(M_{i+1}) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{p(B_{i+1})}{1} = \frac{p(M_{i+1})}{3}$$

Calcul de $p(M_{i+1})$:

$$p(M_{i+1}) = p(M_{i+1} \cap M_i) \quad \text{car} \quad M_{i+1} \subset M_i$$
$$= p(M_i) \times p_{M_i}(M_{i+1})$$
$$= \frac{3}{4}\, p(M_i)$$

$$\frac{p(B_{i+1})}{1} = \frac{p(M_{i+1})}{3} = \frac{p(B_{i+1} \cup M_{i+1})}{1+3} = \frac{p(M_i)}{4}$$

d'où $p(M_{i+1}) = \frac{3}{4}\, p(M_i)$

Par suite $p(M_n) = (\frac{3}{4})^n$

2) Le rat a une mémoire parfaite.

Les notations sont identiques au cas précédent, nous prenons les mêmes partitions.

$$\begin{array}{lll} \Omega = B_1 \cup M_1 & \text{et} & p(X=1) = p(B_1) \\ M_1 = B_2 \cup M_2 & & p(X=2) = p(B_2) \\ M_2 = B_3 \cup M_3 & & p(X=3) = p(B_3) \\ M_3 = B_4 & & p(X=4) = p(B_4). \end{array}$$

Les probabilités seules changent.

A la première fois le rat choisit de façon équiprobable une porte parmi une bonne et trois mauvaises :

$$\frac{p(B_1)}{1} = \frac{p(M_1)}{3} = \frac{p(\Omega)}{4} = \frac{1}{4}$$

d'où $p(B_1) = \frac{1}{4}$ et $p(M_1) = \frac{3}{4}$.

A la deuxième fois le rat choisit de façon équiprobable une porte parmi une bonne et deux mauvaises :

$$\frac{p(B_2)}{1} = \frac{p(M_2)}{2} = \frac{p(M_1)}{3} = \frac{1}{4}$$

d'où $p(B_2) = \frac{1}{4}$ et $p(M_2) = \frac{2}{4}$.

A la troisième fois le rat choisit de façon équiprobable une porte parmi une bonne et une mauvaise :

$$\frac{p(B_3)}{1} = \frac{p(M_3)}{1} = \frac{p(M_2)}{2} = \frac{1}{4}$$

d'où $p(B_3) = \frac{1}{4}$ et $p(M_3) = \frac{1}{4}$.

Donc $p(B_1) = p(B_2) = p(B_3) = p(B_4) = \frac{1}{4}$.

C'est le **problème de la courte paille** tirée entre quatre personnes. Chaque personne à la même chance 1/4 de tirer la courte paille.

Loi de X

$x_i \quad p_i$	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
$1 \longmapsto \frac{1}{4}$	1/4	1/4
$2 \longmapsto \frac{1}{4}$	2/4	4/4
$3 \longmapsto \frac{1}{4}$	3/4	9/4
$4 \longmapsto \frac{1}{4}$	4/4	16/4
	$M_1 = E(X) = \frac{5}{2}$	$M_2 = \frac{15}{2}$

Variance :

$$V(X) = M_2 - M_1^2$$

$$= \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{5}{4} \qquad \delta(X) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

A PROPOS DU PROBLEME DES RATS

(Dijon 74 - Série D)

Un expérimentateur veut étudier la mémoire des rats. Ce qui suit peut servir de point de départ à son étude.

Le nombre d'essais nécessaires au rat pour trouver la bonne porte est une variable aléatoire X. Lorsque le rat a une mémoire parfaite, l'espérance de X est 2,5. Si tous les rats sont doués d'une mémoire parfaite, et si l'expérimentateur fait un grand nombre d'expériences, il obtiendra 2,5 comme moyenne.

Lorsque le rat n'a aucune mémoire, la loi de probabilité est la suivante :

première sortie au premier essai	probabilité	$\frac{1}{4}$
première sortie au deuxième essai	probabilité	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$
première sortie au troisième essai	probabilité	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$
première sortie au ième essai	probabilité	$\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \times \frac{1}{4}$

La somme des probabilités est : $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1.$

L'espérance mathématique est : $E(X) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \times i.$

On calcule cette somme en dérivant $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$; on trouve $E(X) = 4.$

Pratiquement, on ne peut mettre indéfiniment le rat dans la position de départ, car les décharges électriques qu'il subit peuvent modifier son comportement. Si un rat n'est pas sorti après n essais, il est impossible de déterminer la valeur de X pour ce rat. Il ne reste alors qu'une solution : ne pas tenir compte de ce rat. Nous allons donc calculer les probabilités conditionnées par ce nombre maximum d'essais.

La probabilité de sortie au cours des n premiers essais est :

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}{1-\frac{3}{4}} = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

On aura donc :

sortie au premier essai probabilité $\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}$

sortie au ième essai probabilité $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \times \frac{1}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}$

L'espérance mathématique correspondante est :

$$\frac{1}{4} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \times i}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}$$

Les calculs faits avec un miniordinateur donnent :

pour $n = 7$	2,9217	pour $n = 15$	3,7968
pour $n = 10$	3,4033	pour $n = 20$	3,9364

L'expérimentateur fera donc un grand nombre d'expériences dont il fera la moyenne, puis devra voir si cette moyenne expérimentale est voisine de 2,5, auquel cas il concluera que les rats sont doués de mémoire, ou voisine de ces derniers résultats, auquel cas il concluera que les rats n'ont pas de mémoire.

Pour $n = 7$ l'écart entre 2,5 et 2,92 est trop faible pour que l'expérimentateur puisse tirer une conclusion significative. Par contre pour $n = 10$ ou pour $n = 15$ l'expérimentateur pourra tirer une conclusion de son travail.

Cette dernière partie est volontairement «simpliste». Une étude plus précise pourrait être faite à l'aide de la théorie statistique des tests.

CONCLUSION SUR LES DEUX ARTICLES PRECEDENTS

Dans l'article «modélisation en probabilité» la démarche suivie a été la suivante : partant d'un ensemble Ω «très grand», ensemble des films (modèle, (D, α)), selon les moyens d'observation, nous étions conduits à prendre un ensemble Ω de plus en plus «petit».

Rappelons les épreuves et leur nombre dans chaque modèle :

Ω_a Film	Ω_β Suite des 6 jetons	Ω_γ Suite des couleurs	Ω_δ Nombre de blancs de K	Ω_ϵ Couleur du premier jeton
		B B B N B N	3	B
		B N B B B N		
		B N B N B N		
	$B_1 B_2 B_3 B_4 N_1 N_2$	B B B B N N	2	
	$B_1 B_2 B_3 B_4 N_2 N_1$			
	$B_4 B_3 B_2 B_1 N_2 N_1$			
		B B B N N B		
		B B N B B N		
		B B N N B B		
		B N B B N B		
		B N N B B B		
		N B B B B N		N
		N B B N B B		
		N N B B B B		
		B B N B N B	1	B
		N B B B N B		N
		N B N B B B		
infinité	720	15	3	2

Dans ce tableau on peut considérer que les cinq cadres représentent le même ensemble Ω dont on fait cinq partitions différentes.

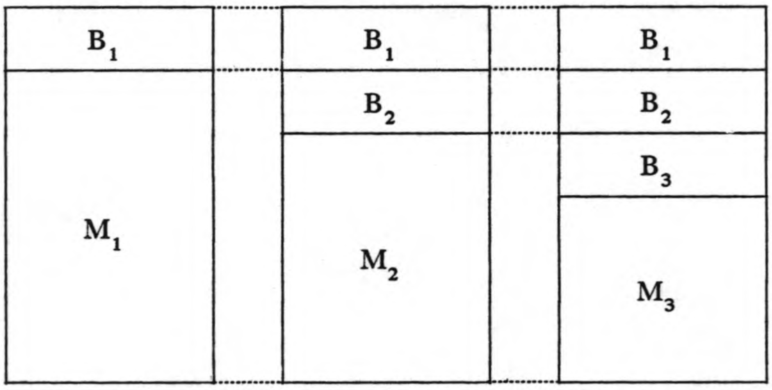
Dans ces conditions tout ce qui était élément de Ω_β, Ω_γ, Ω_δ, Ω_ϵ devient partie de Ω_α.

Le fait que les modèles (D, β) et (D, γ) soient cohérents se traduit par :

a) la partition du modèle (D, β) est plus fine que celle du modèle (D, γ) ;

b) la probabilité p_β prolonge la probabilité p_γ.

Dans l'article «Problème de rats», volontairement, dès le début, nous n'avons pas précisé ce qu'était Ω, ni ce qu'était une expérience. Nous avons à chacune des trois étapes, établi une partition de Ω, ce qui nous a conduit à prendre la partition engendrée par celles-ci :



1ère fois 2ème fois 3ème fois

Nous aurions pu à cet instant choisir un ensemble Ω de 4 éléments, par exemple $\{B_1, B_2, B_3, M_3\}$. Mais cela n'a pas été nécessaire pour traiter le problème, et le fait de ne pas préciser l'ensemble Ω nous a permis de traiter la question b) sans changer de modèle, mais simplement en prenant une partition plus fine que la précédente et une probabilité qui prolonge celle définie jusqu'alors.

C'est cette attitude que nous avons adoptée dans les articles suivants et qui motive l'avertissement donné en tête de cette brochure.

UN PROBLEME DE GENETIQUE

THEME.

1ère partie : A propos d'un problème de génétique on calcule des probabilités x', y', z' en fonction des probabilités x, y, z.

2ème partie : Les expressions de x', y', z' traduisent une application linéaire φ dont on étudie la nature.

3ème partie : En répétant le processus génétique on considère l'application φ^n et on étudie le comportement de l'image de (x, y, z) par φ^n quand n croît indéfiniment. C'est le cas d'un processus de Markov.

OUTIL MATHEMATIQUE UTILISE.

1ère partie : probabilité conditionnelle.

2ème partie : projection, affinité, homothétie *(ou valeurs et vecteurs propres d'une application linéaire φ).*

3ème partie : suite géométrique *(ou étude de φ^n dans une base de vecteurs propres).*

La méthode géométrique donne un exposé utilisant uniquement les notions du programme de terminale C. La méthode des valeurs propres conduit rapidement aux résultats ; l'énoncé et la solution correspondant à cette méthode sont écrits en italique.

Dans la version correspondant au programme de terminale C les trois parties sont indépendantes.

PROBLEME.

1ère PARTIE

Une population E d'individus est classée selon un caractère en trois parties disjointes : ensemble des dominants, ensemble des hybrides et ensemble des récessifs. Les effectifs de ces ensembles sont proportionnels aux nombres positifs x, y, z, où $x + y + z = 1$.

Cette population donne naissance à une nouvelle population E' que nous appellerons descendance, classée elle aussi en trois parties disjointes : ensemble des descendants dominants, ensemble des descendants hybrides et ensembles des descendants récessifs.

Les mécanismes de génétique et les conditions de croisement font que la population E a pour descendance la population E' selon les règles suivantes (voir remarque en bas de cette page) :

Parmi les les descendants des dominants de E, il y a

- 50 % de dominants,
- 50 % d'hybrides.

Parmi les descendants des hybrides de E, il y a

- 25 % de dominants,
- 50 % d'hybrides,
- 25 % de récessifs.

Parmi les descendants des récessifs de E, il y a

- 50 % d'hybrides,
- 50 % de récessifs.

1) On choisit au hasard un individu de la population E et un de ses descendants. Calculer en fonction de x, y, z :

x' la probabilité pour que ce descendant soit dominant,
y' la probabilité pour que ce descendant soit hybride,
z' la probabilité pour que ce descendant soit récessif.

2) On sait que le descendant est dominant. Quelle est la probabilité pour qu'il soit descendant d'un hybride de E ?

3) On suppose que $x = 25$ %, $y = 50$ %, $z = 25$ %. Calculer x', y', z'. Que remarquez-vous ?

2ème PARTIE

Soit E un espace affine de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'espace vectoriel associé V de dimension 3.

Remarque : ce sont là les lois de Mendel relatives à un gène ayant deux allèles dont l'un est dominant, la population comprend trois génotypes. Ici la population E est croisée avec une population ne contenant que des hybrides.

On considère dans E l'application affine f qui a tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M′ de coordonnées (x′, y′, z′)

défini par : $$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

et soit φ l'application linéaire associée.

Version terminale C.

1) Déterminer le noyau N et l'image I de φ. Donner une base de chacun d'eux. Donner une équation cartésienne de I. φ est-elle bijective ?

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3) Soit p la projection affine sur le plan P d'équation $y = x + z$, parallèlement à la direction de base $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Déterminer analytiquement cette projection en calculant les coordonnées (X, Y, Z) de p(M) en fonction des coordonnées (x, y, z) de M.

4) En tenant compte du fait que f(M) et p(M) sont dans le plan P, montrer qu'on peut calculer les coordonnées (x′, y′, z′) de f(M) en fonction de X, Y, Z.

Montrer qu'on définit ainsi une application affine g du plan P telle que $f = g \circ p$.

Soit $(O, \vec{l}, \vec{m})$ un repère de P où $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{m} = \vec{j} + \vec{k}$ et soit γ l'application linéaire associée à g définie dans le plan vectoriel W associé à P. Déterminer la matrice de γ dans la base $(\vec{l}, \vec{m})$ de W.

5) Démontrer que l'image par f du plan π d'équation $x + y + z = 1$ est une droite de ce plan. Quelle est l'équation de cette droite dans le repère $(O, \vec{l}, \vec{m})$?

Autre version.

1) Calculer les valeurs propres de φ et les vecteurs propres associés. Donner la matrice de φ dans une base de vecteurs propres.

2) En déduire la nature géométrique de φ.

3) Déterminer l'image par f *de la partie du plan π d'équation* $x + y + z = 1$

défini par : $$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ z \geqslant 0. \end{cases}$$

3ème PARTIE

Version terminale C.

1) Dans un plan affine muni d'un repère $(O, \vec{l}, \vec{m})$ on considère l'application g qui a tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telle que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3x + y}{4} \\ y' = \dfrac{x + 3y}{4}. \end{cases}$$

a) Démontrer que g est bijective.

b) Déterminer l'ensemble D des points invariants par g.

c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

d) La droite (MM') coupe la droite D en H. Démontrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HM'} = k \cdot \overrightarrow{HM}$.
Démontrer que la restriction de g à la droite Δ d'équation $x + y = \dfrac{1}{2}$ est une homothétie dont on donnera le centre Ω et le rapport.

2) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de Δ ; on définit, pour tout n entier naturel $M_{n+1} = g(M_n)$. Calculer les coordonnées (x_{n+1}, y_{n+1}) de M_{n+1} en fonction de celles (x_n, y_n) de M_n. Démontrer qu'il existe une application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} x_{n+1} = h(x_n) \\ y_{n+1} = h(y_n). \end{cases}$$

Soit a le réel tel que $h(a) = a$. Démontrer que $u_n = x_n - a$ est le terme d'une suite dont on précisera les caractéristiques.

En déduire que le point M_n tend vers une limite L quand u tend vers l'infini.

Autre version.

1) Déterminer la matrice de φ^n dans la base de vecteurs propres, puis dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2) Calculer $\vec{V} = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi^n(\vec{u})$

3) Vérifier que $\vec{V}$ est indépendant de $\vec{u}$ quand $x + y + z = 1$, *et qu'il est invariant par φ.*

SOLUTION.

Seule la première partie concernant les probabilités sera ici détaillée. Pour les autres parties nous donnerons simplement les résultats essentiels.

1ère PARTIE.

Soit Ω l'ensemble des épreuves (tirage d'un individu de la population E et d'un de ses descendants).

Des classifications faites nous formons deus partitions de Ω :

$$\Omega = D \cup H \cup R$$

D : ensemble des épreuves pour lesquelles l'individu de E choisi est dominant.

H : ensemble des épreuves pour lesquelles l'individu de E choisi est hybride.

R : ensemble des épreuves pour lesquelles l'individu de E choisi est récessif.

$$\Omega = D' \cup H' \cup R'$$

D' : ensemble des épreuves pour lesquelles le descendant choisi est dominant.

H' : ensemble des épreuves pour lesquelles le descendant choisi est hybride.

R' : ensemble des épreuves pour lesquelles le descendant choisi est récessif.

Nous définissons une probabilité sur la tribu engendrée par intersection de ces deux partitions, de la façon suivante :

— relativement aux règles de croisement :

$$p(D'/D) = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(H'/D) = \frac{1}{2} \quad \text{et par suite} \quad p(R'/D) = 0$$

$$p(D'/H) = \frac{1}{4} \quad ; \quad p(H'/H) = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(R'/H) = \frac{1}{4}$$

$$p(H'/R) = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(R'/R) = \frac{1}{2} \quad \text{et par suite} \quad p(D'/R) = 0,$$

— relativement à la population E' nous devons calculer —en fonction de x, y, z— $p(D')$, $p(H')$, $p(R')$ que nous avons noté x', y', z'.

1) Calculons x'.

$$x' = p(D') \qquad \text{or} \qquad \begin{aligned} D' &= D' \cap \Omega \\ &= D' \cap (D \cup H \cup R) \\ &= \underbrace{(D' \cap D) \cup (D' \cap H) \cup (D' \cap R)}_{\text{réunion disjointe}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p(D') &= p(D' \cap D) + p(D' \cap H) + p(D' \cap R) \\
&= p(D) \times p(D'/D) + p(H) \times p(D'/H) + p(R) \times p(D'/R) \\
&= x \times \frac{1}{2} + y \times \frac{1}{4} + z \times 0
\end{aligned}
$$

De même,

$y' = p(H')$ or $H' = (H' \cap D) \cup (H' \cap H) \cup (H' \cap R$

réunion disjointe

$$
\begin{aligned}
p(H') &= p(D) \times p(H'/D) + p(H) \times p(H'/H) + p(R) \times p(H'/R) \\
&= x \times \frac{1}{2} + y \times \frac{1}{2} + z \times \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

et aussi

$z' = p(R')$ or $R' = (R' \cap D) \cup (R' \cap H) \cup (R' \cap R)$

réunion disjointe

$$
\begin{aligned}
p(R') &= p(D) \times p(R'/D) + p(H) \times p(R'/H) + p(R) \times p(R'/R) \\
&= x \times 0 + y \times \frac{1}{4} + z \times \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} \\[2mm]
y' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} \\[2mm]
z' = \qquad \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{2}
\end{cases}
$$

2) Calculons $p(H/D')$.

$$
p(H/D') = \frac{p(H \cap D')}{p(D')} = \frac{p(H) \times p(D'/H)}{p(D')}
$$

or $p(H) = y$, $p(D') = x'$ et $p(D'/H) = \dfrac{1}{4}$

$$
p \; (\; p(H/D') = \frac{y \times \frac{1}{4}}{x'} = \frac{y \times \frac{1}{4}}{\frac{x}{2} + \frac{y}{4}} = \frac{y}{2x + y}
$$

3) Si $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{2}$ et $z = \dfrac{1}{4}$ alors $x' = \dfrac{1}{4}$, $y' = \dfrac{1}{2}$ et $z' = \dfrac{1}{4}$.

2ème PARTIE.

Version terminale C.

1) Le noyau N est la droite de base $\vec{u}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

L'image de I est le plan de base $(\vec{l}, \vec{m})$ où $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{m} = \vec{j} + \vec{k}$, et d'équation cartésienne $y = x + z$.

φ n'est pas bijective.

2) Ensemble des points invariants par f : droite de repère $(o, \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$ et d'équation $x = \dfrac{y}{2} = z$.

3) $p : M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \longrightarrow p(M) \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$

$p(M) \in P$ (I est le plan vectoriel associé à P) et $\overrightarrow{MM'}$ appartient à la droite de base $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

donc $\begin{cases} Y = X + Z \\ X - x = \dfrac{Y - y}{2} = Z - z. \end{cases}$

d'où $\begin{cases} X = \dfrac{3x + y - z}{4} \\ Y = \dfrac{x + y + z}{2} \\ Z = \dfrac{-x + y + 3z}{4}. \end{cases}$

4) Rappelons que $\begin{cases} x' = \dfrac{2x + y}{4} \\ y' = \dfrac{x + y + z}{2} \\ z' = \dfrac{y + 2z}{4} \end{cases}$ et que $y' = x' + z'$ $\quad f(M) \in P$

et $Y = X + Z$ $\quad p(M) \in P$

alors $\begin{cases} x' = \dfrac{3X + Z}{4} \\ y' = X + Z = Y \\ z' = \dfrac{X + 3Z}{4} \end{cases}$

Ceci définit une application g de P dans P :

E

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto, "p"] \arrow[dr, mapsto, "f"'] & p(M) & P \arrow[d, "g"] \\ & M' & P \end{tikzcd}$$

$$M\ \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \qquad p(M)\ \left|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right. \qquad M'\ \left|\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right.$$

$$f = g \circ p$$

$$\vec{l} = \vec{i} + \vec{j} \xmapsto{\ \gamma\ } \gamma(\vec{l}) \qquad \text{et} \qquad \vec{m} = \vec{j} + \vec{k} \xmapsto{\ \gamma\ } \gamma(\vec{m}).$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{cases} \gamma(\vec{l}) = \frac{3}{4}\vec{l} + \frac{1}{4}\vec{m} \\ \gamma(\vec{m}) = \frac{1}{4}\vec{l} + \frac{3}{4}\vec{m} \end{cases}$ matrice de γ dans la base $(\vec{l}, \vec{m})$ $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

5) Si $x + y + z = 1$ alors $x' + y' + z' = 1$

donc $f(\pi) \subset \pi$

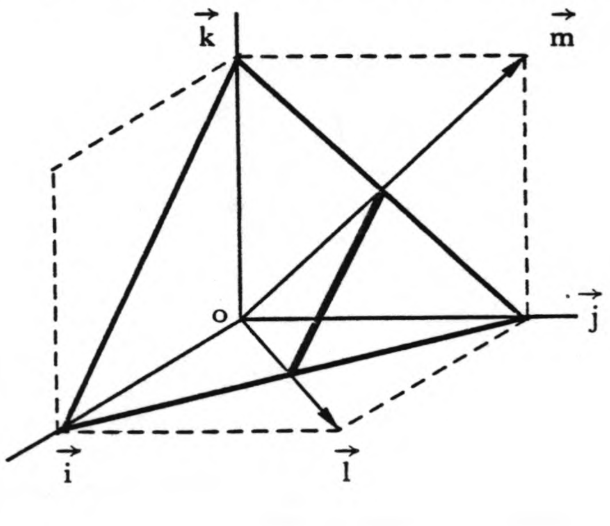
de plus $f(E)$ est le plan P d'équation $y = x + z$

donc $f(M) \subset \pi \cap P$

$\pi \cap P$ est la droite d'équation

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = x + z \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x + z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dans le repère $(o, \vec{l}, \vec{m})$ cette droite a pour équation $x + y = \frac{1}{2}$.



Autre version.

1) Valeurs propres $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = \frac{1}{2}$

Vecteurs propres $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Matrice de φ *dans la base* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2) φ *est composée de la projection sur le plan* $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *et de direction* $\vec{u}_1$, *et de l'affinité dans le plan* $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$, *affinité vectorielle de base* $\vec{u}_2$, *de direction* $\vec{u}_3$ *et de rapport* $\frac{1}{2}$.

3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$ a pour image par f le segment de droite joignant les points de coordonnées $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

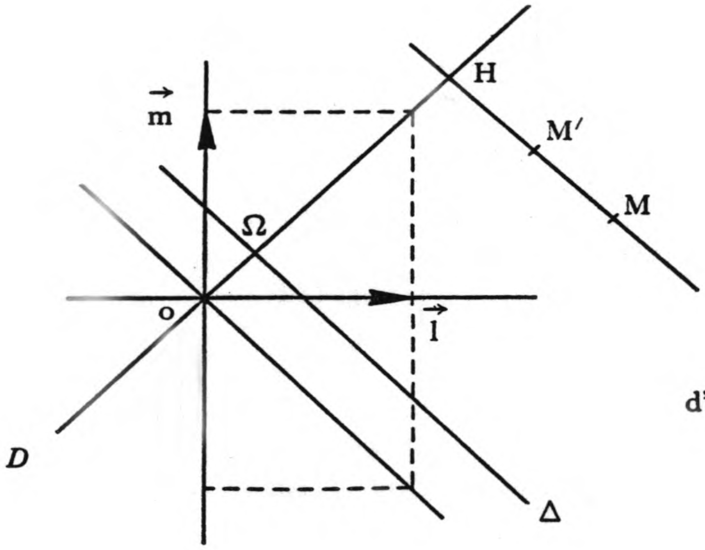
3ème PARTIE.

Version terminale C.

1) a) Le déterminant de la matrice de l'application linéaire associée à g est $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 2$, non nul, g est bijective.

b) L'ensemble *D* des points invariants par g est la droite d,équation $x = y$.

c) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ de composantes $(\frac{y - x}{4}, \frac{x - y}{4})$ appartient à la droite vectorielle de base $(\vec{l} - \vec{m})$.



coordonnées de H : (x_H, y_H)

$$\begin{cases} H \in D & : \quad x_H = y_H \\ \overrightarrow{HM} \text{ colinéaire à } (\vec{l} - \vec{m}) : & \\ & y - y_H = -(x - x_H) \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x + y}{2} \\ y_H = \dfrac{x + y}{2}. \end{cases}$$

et par suite : l'abscisse de $\overrightarrow{HM'}$ est $\frac{x - y}{4}$

et celle de $\overrightarrow{HM}$ est $\frac{x - y}{2}$.

donc $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$; $k = \frac{1}{2}$.

Si $x + y = \frac{1}{2}$, alors $x' + y' = x + y = \frac{1}{2}$. La droite Δ est globalement invariante par g.

La droite Δ coupe la droite D en un point Ω et, d'après ce qui précède, pour tout point M de Δ, $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$.

La restriction de g à Δ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) M_0 est un point de Δ : $x_0 + y_0 = \frac{1}{2}$

Or MM' est parallèle à Δ, d'après la question 1) c).

Donc, si M_n est sur Δ, alors M_{n+1} est aussi sur Δ.

Donc, pour tout entier n naturel, M_n est un point de Δ

$$x_n + y_n = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{3x_n + y_n}{4} = \frac{2x_n + \frac{1}{2}}{4} \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + 3y_n}{4} = \frac{\frac{1}{2} + 2y_x}{4} \end{aligned}\right\}$$

donc on trouve une application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

définie par : $h(x) = \dfrac{2x + \frac{1}{2}}{4}$, telle que $x_{n+1} = h(x_n)$

et $y_{n+1} = h(y_n)$.

Soit a tel que $h(a) = a$

alors $a = \frac{1}{4}$.

Par suite $u_{n+1} = x_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} u_n$

et $u_0 = x_0 - \frac{1}{4}$.

u_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la suite géométrique de premier terme $u_0 = x_0 - \frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Par suite $u_n = u_0 (\frac{1}{2})^n$

et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{4}$

Il en est de même pour y_n : $y_n - \frac{1}{4} = (y_0 - \frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{2})^n$

et $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - \frac{1}{4}) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \frac{1}{4}$.

Le point M_n a une limite L qui a pour coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Autre version.

Dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ φ^n *a pour matrice :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix}$$

Cherchons la matrice de φ^n *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\begin{cases} \varphi^n(\vec{u}_1) = \vec{o} \\ \varphi^n(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 \\ \varphi^n(\vec{u}_3) = \dfrac{1}{2^n}\vec{u}_3 \end{cases}$$

En désignant par $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ *les images de* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *par* φ^n, *ces égalités donnent :*

$$\begin{cases} \vec{I} - 2\vec{J} + \vec{K} = \vec{o} \\ 2\vec{I} + \vec{J} + \vec{K} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{I} - \vec{J} = \dfrac{1}{2^n}(\vec{i} - \vec{k}) \end{cases}$$

D'où $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$, *et la matrice de* φ^n *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2^{n+1}} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{2^{n+1}} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{2^{n+1}} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

Quand n *croît indéfiniment la matrice de* φ^n *tend vers :*

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$ *et* $\varphi^n(\vec{u})$ *tend vers le vecteur* $\dfrac{x+y+z}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Si $x + y + z = 1$ *alors ce vecteur est* $\frac{1}{5}\vec{u}_2$, *indépendant de* $\vec{u}$ *et invariant par* φ.

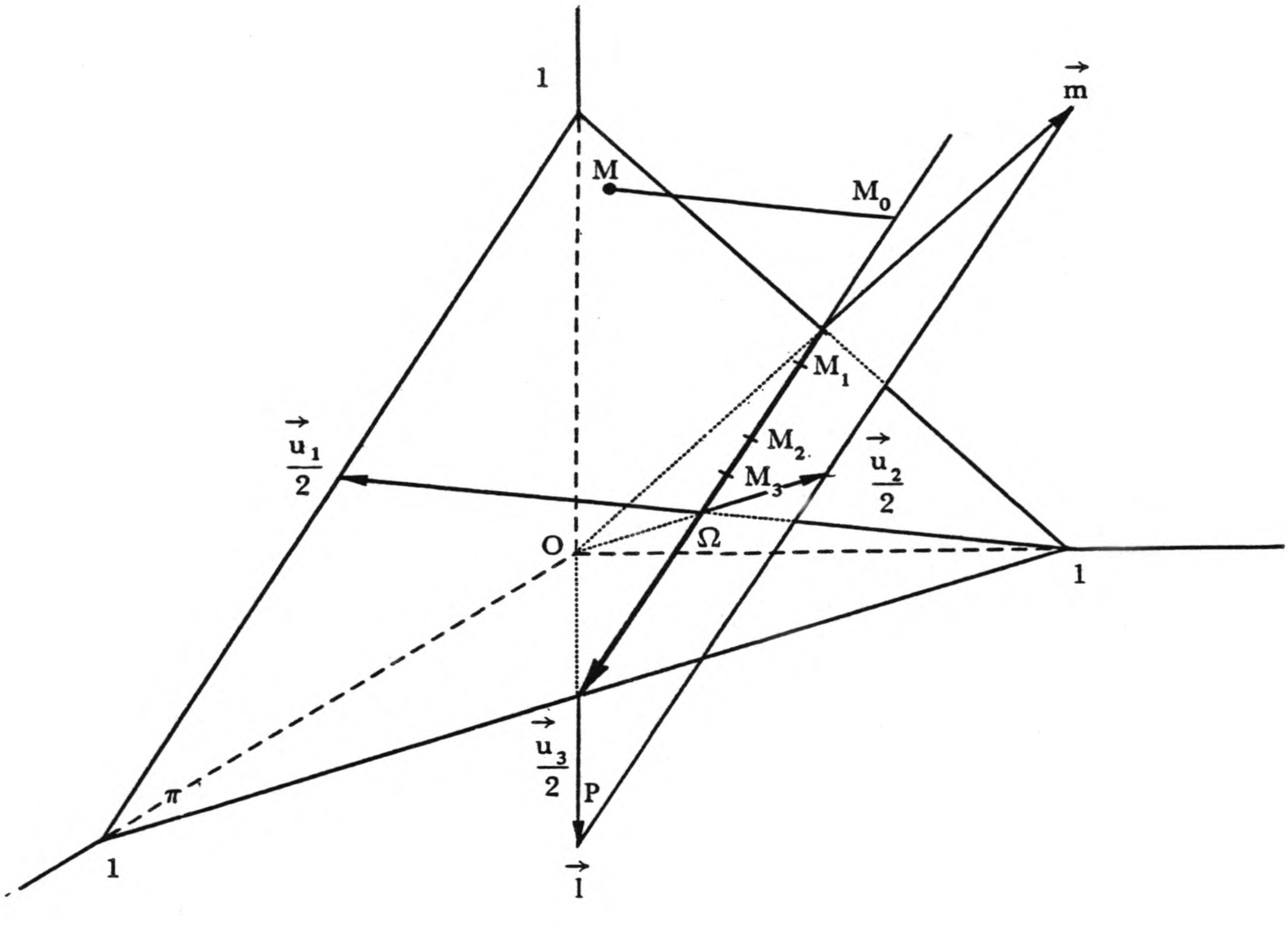
LIAISON ENTRE LES TROIS PARTIES.

1) **La première partie** concerne un processus génétique par lequel une population E a pour descendance une population E$'$. On détermine les probabilités d'avoir un descendant dominant, hybride ou récessif en fonction des probabilités pour le géniteur d'être dominant, hybride ou récessif.

Cela a mis en évidence une application linéaire φ.

2) **La seconde partie** étudie génétiquement cette application soit du point de vue vectoriel, soit du point de vue affine par l'application affine f définie par $\overrightarrow{Of(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$.

Les images successives d'un point M du plan π d'équation $x + y + z = 1$ sont obtenues comme l'indique la figure suivante :



$$\underbrace{M \underset{p}{\longmapsto} M_0 \underset{g}{\longmapsto} M_1}_{f} \underbrace{\underset{g}{\longmapsto}}_{f} M_2 \ldots\ldots\ldots \Omega$$

3) **La troisième partie** traduit le fait qu'on réitère le processus. Cela signifie que la première population E donne naissance à une nouvelle population E′, puis cette population E′ donne naissance, dans les mêmes conditions d'expérience, à une population E″, et ainsi de suite. La matrice de φ^2 permet alors de calculer les composantes (x'', y'', z'') de la population E″ en fonction de celles (x, y, z) de la population E. **Mais ceci suppose qu'on a admis l'hypothèse suivante :**

si on prend au hasard un individu de la population E′, alors les probabilités pour qu'il soit dominant, hybride ou récessif sont respectivement les nombres x', y', z'. En fait il y a deux expériences différentes :

— dans un premier cas, on prend au hasard un individu de E, puis un de ses descendants ; on calcule ensuite les probabilités x', y', z' de D', H', R' ;

— dans le second cas, on prend au hasard un des descendants ; ensuite on considère les probabilités x_1, y_1, z_1 des évènements D_1, H_1, R_1 : «c'est un dominant», «c'est un hybride», «c'est un récessif».

Ces expériences conduisent à des espaces probabilisés différents et il convient de ne pas mélanger les probabilités d'un évènement relativement à ces deux modèles. L'exemple suivant permet de mieux saisir ce problème.

Voici trois urnes contenant des boules noires et blanches

U_1	U_2	U_3
● ● ● ● ○ ○	● ● ○	○ ○ ●

Première expérience : on choisit au hasard l'une des urnes, puis dans cette urne on choisit au hasard une boule.

Deuxième expérience : on mélange toutes les boules des urnes et on choisit au hasard une boule

Dans chacun des cas, calculer la probabilité pour que la boule tirée soit blanche.

Premier cas :

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Deuxième cas :

$$\frac{5}{12}$$

Les probabilités sont différentes.

Par contre, si l'unre U_1 est formée ainsi | ● ● ○ | alors on trouve $\frac{4}{9}$ dans les deux cas.

Dans notre problème de génétique, si l'on veut pouvoir confondre x', y', z' avec x_1, y_1, z_1, il suffit d'admettre que le nombre moyen de descendants par individu est le même pour les dominants, les hybrides et les récessifs (ce qui se produit en particulier si chaque individu de E donne naissance à un même nombre de descendants).

On peut dire encore que les nombres de descendants de dominants, d'hybrides et de récessifs sont proportionnels à x, y et z.

Dans le tableau suivant nous notons les effectifs des génotypes de E et de leurs descendants.

	Population E	Population E$'$			
dominants	d	a_1	b_1	0	d' descendants des dominants
hybrides	h	a_2	b_2	c_2	h' descendants des hybrides
récessifs	r	0	b_3	c_3	r' descendants des récessifs
Total	S	d_1	h_1	r_1	Total S'
		dominants	hybrides	récessifs	

Avec ces notations et en désignant par p_1 (resp p_2) la probabilité dans le premier cas (resp. dans le second cas), on a :

$$x' = p_1(D') = p_1(D) \times p_1(D'/D) + p_1(H) \times p_1(D'/H)$$

$$= \frac{d}{S} \times \frac{a_1}{d'} + \frac{h}{S} \times \frac{a_2}{d'} \quad ;$$

$$x_1 = p_2(D_1) = \frac{d_1}{S'} = \frac{a_1 + a_2}{S}.$$

L'hypothèse introduite est : $\dfrac{d'}{d} = \dfrac{h'}{h} = \dfrac{r'}{r} \quad (= \dfrac{S'}{S}$ par suite).

d'où $$x' = \frac{a_1}{S} \times \frac{d}{d'} + \frac{a_2}{S} \times \frac{h}{h'}$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{S'} \times \frac{S}{S'}$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{S'}$$

$$x' = x_1$$

Le calcul est analogue pour H' et R'.

En conclusion, nous pouvons appliquer les résultats de la troisième partie au problème de génétique en admettant que chaque génération de dominants, hybrides et récessifs donne le même nombre moyen d'enfants par individu.
Le résultat est que les proportions de dominants, hybrides et récessifs tendent vers $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, ceci quelle que soient les valeurs initiales x_0, y_0, z_0.

A PROPOS DE L'INEGALITE DE BIENAYME TCHEBYCHEF ET DE LA LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Tout le monde connait cette inégalité pour son utilité théorique.

Rappelons rapidement de quoi il s'agit :

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, B, P) ; désignons par m son espérance mathématique et σ son écart-type ; pour tout ϵ strictement positif :

$$P(|X - m| > \epsilon) < \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

Cette inégalité permet de démontrer simplement la loi des grands nombres.

Adoptons le plan suivant :

I — Etude théorique de la loi faible des grands nombres.

II — Construction d'un test simple en utilisant :

A) L'inégalité de Bienaymé Tchebychef
B) Un calcul de probabilité.

III — Intérêt pratique de l'inégalité de Bienaymé Tchebychef.

I — ETUDE THEORIQUE DE LA LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES.

1) Protocole.

- *Description :*

  Considérons une expérience, qui sera appelée expérience élémentaire, susceptible d'être répétée n fois de suite de façons identiques ; ces répétitions sont faites de telle façon que aucune n'a d'influence sur les autres.

- *Expérience :*

  C'est la suite des n expériences élémentaires.

- *Observation* :

L'observateur s'intéresse à un phénomène :

— qui peut se produire lors de certaines expériences élémentaires ; nous dirons alors qu'il y a **succès**, pour ces expériences élémentaires ;

— ou qui peut ne pas se produire lors d'autres expériences élémentaires ; nous dirons alors qu'il y a **échec** pour ces expériences élémentaires.

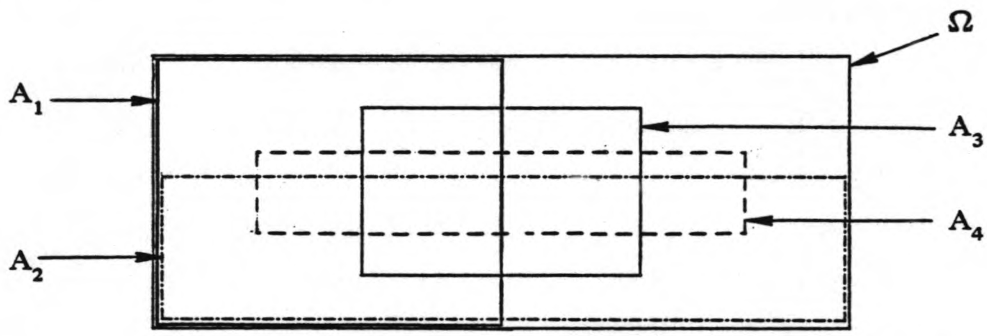
Son observation lui donnera à la fin de son expérience une suite de n résultats qui seront des succès ou des échecs.

2) Choix d'un modèle.

Pour ne pas compliquer les notations, choisissons $n = 4$. Nous avons donc à proposer un modèle pour l'expérience qui consiste en la succession de quatre expériences élémentaires «indépendantes».

Soit Ω l'ensemble de tous les déroulements possibles de l'expérience.

Soit A_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$ l'ensemble des déroulements au cours desquels la $i^{\text{ème}}$ expérience a donné un succès.



Nous avons ainsi quatre partages de Ω : $\{A_1, \overline{A}_1\}$, $\{A_2, \overline{A}_2\}$, $\{A_3, \overline{A}_3\}$, $\{A_4, \overline{A}_4\}$.

Désignons par Q_4 le partage engendré par les quatre partages précédents. Les 16 éléments de Q_4 sont représentés sur la figure ci-jointe.

Les expériences élémentaires étant identiques, nous prendrons sur Ω, muni du partage Q_4, une probabilité P_4 telle que :

$P_4(A_1) = P_4(A_2) = P_4(A_3) = P_4(A_4)$. Désignons par p cette valeur commune.

D'autre part :

Nous traduirons «L'indépendance des expériences élémentaires» par l'indépendance des évènements A_1, A_2, A_3, A_4 pour la probabilité P_4.

Chaque élément du partage Q_4 est l'intersection de quatre parties :

la première étant A_1 ou $\overline{A}_1$

la seconde étant A_2 ou $\overline{A}_2$

la troisième étant A_3 ou $\overline{A}_3$

la quatrième étant A_4 ou $\overline{A}_4$.

Ces quatre parties ont pour probabilité p ou $(1-p)$ et sont indépendantes. Donc chaque élément du partage Q_4 a une probabilité qui est maintenant déterminée.

Par exemple :

$$\begin{aligned} P_4(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4) &= P_4(\overline{A}_1) \times P_4(A_2) \times P_4(A_3) \times P_4(\overline{A}_4) \\ &= (1-p) \times p \times p \times (1-p) \\ &= p^2(1-p)^2. \end{aligned}$$

Nous connaissons donc les probabilités des 16 éléments de Q_4 :

— au niveau 4 il y a 1 (soit C_4^4) élément du partage correspondants à quatre succès,

— au niveau 3 il y a 4 (soit C_4^3) éléments du partage correspondants à trois succès,

— au niveau 2 il y a 6 (soit C_4^2) éléments du partage correspondants à deux succès,

— au niveau 1 il y a 4 (soit C_4^1) éléments du partage correspondants à un succès,

— au niveau 0 il y a 1 (soit C_4^0) élément du partage correspondants à zéro succès.

(Voir dessin page suivante).

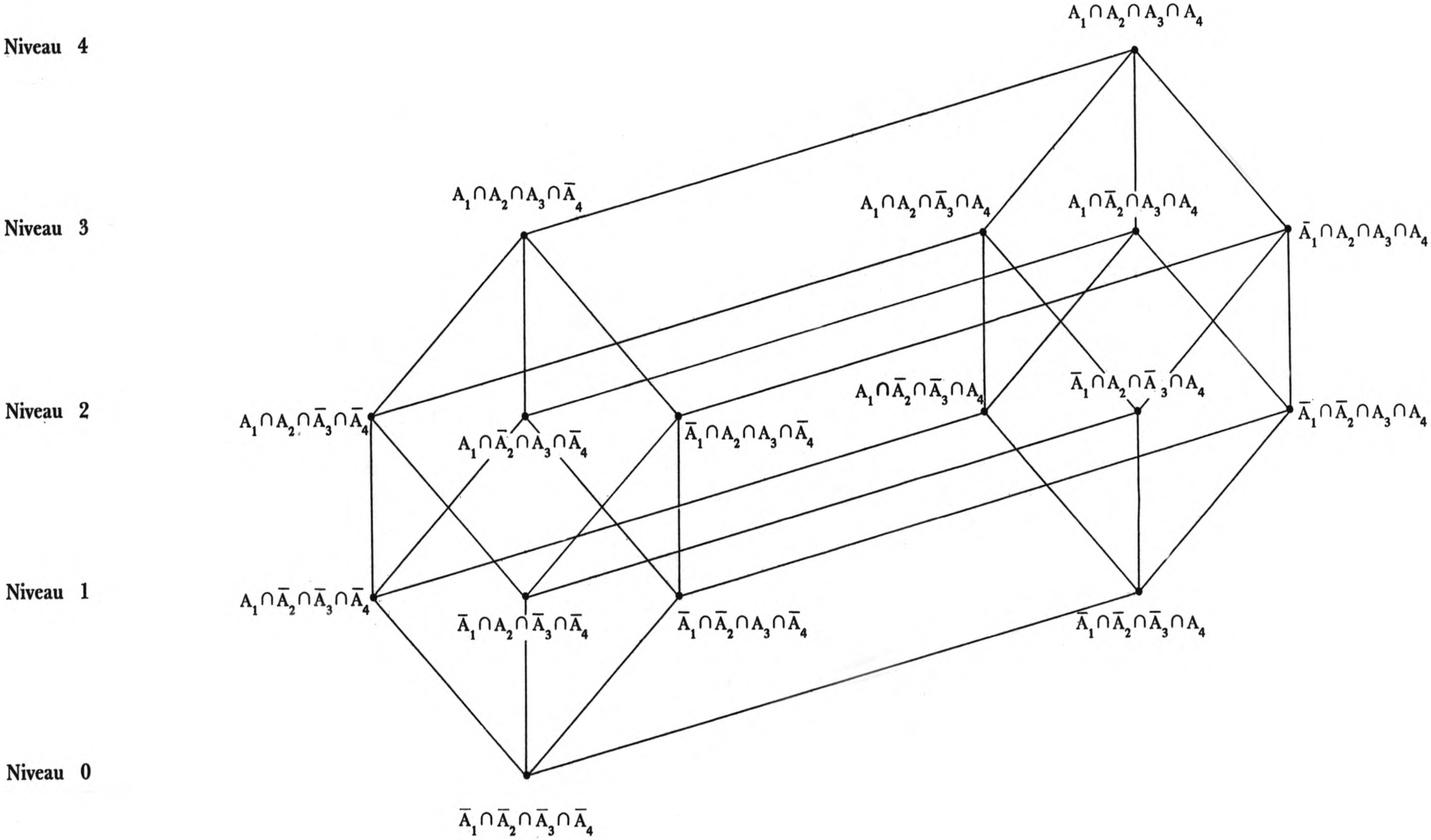
La somme des probabilités des 16 éléments du partage est :

$$C_4^4\, p^4 + C_4^3\, p^3(1-p) + C_4^2\, p^2(1-p)^2 + C_4^1\, p(1-p)^3 + C_4^0(1-p)^4$$

soit $[p + (1-p)]^4$ ou encore : 1.

Donc P_4 qui est déterminé sur les 16 éléments du partage est bien une probabilité pour Ω muni du partage Q_4.

Supposons que de bonnes raisons nous poussent à regarder ce qui se passe lors d'une succession de 5 expériences élémentaires au lieu de 4.


Niveau 4
Niveau 3
Niveau 2
Niveau 1
Niveau 0
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$
$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$
$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$
$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$
$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$
$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$

Tout se passe comme si :

• Ω n'était pas changé : c'est ici que se justifie le vague laissé dans sa définition,

• l'évènement A_5 est introduit,

• le partage Q_5 engendré par A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, correspond à un partage en deux parties de chacun des 16 éléments de Q_4.

Par exemple

$$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$$

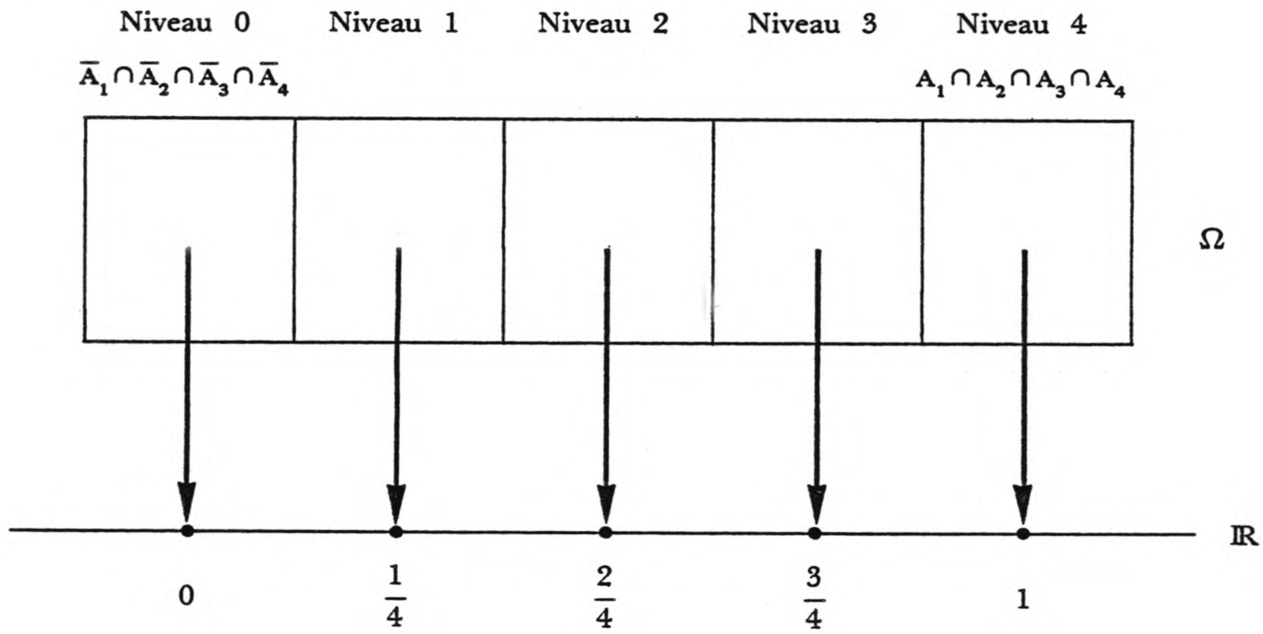
$$\overline{A}_2 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5 \qquad\qquad \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5$$

Donc Q_5 est un partage de Ω «plus fin» que Q_4.

• La nouvelle probabilité P_5 sur Ω muni du partage Q_5 est un prolongement de P_4 à un ensemble «plus grand».

3) Etude de la fréquence de succès :

La fréquence de succès lors de quatre expériences élémentaires consécutives est l'application f_4 de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à toute épreuve (élément de Ω) associe le quotient par quatre du nombre de succès.



- f_4 est une variable aléatoire sur Ω muni de Q_4 ;

  car pour k appartenant à $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f_4^{-1}(\{\frac{k}{4}\})$ est la réunion des éléments de Q_4 écrits plus haut au niveau k (page 49).

- f_4 a pour espérance p et pour variance $\frac{p(1-p)}{4}$;

  car f_4 est la moyenne arithmétique de quatre variables aléatoires indépendantes de Bernouilli d'espérance p.

Généralisons ceci et admettons pour simplifier les résultats suivants :

- la fréquence f_n de succès à l'issue de n expériences élémentaires est une variable aléatoire sur Ω muni du partage Q_n.
- son espérance est p et sa variance $\frac{p(1-p)}{n}$, pour (Ω, Q_n) muni de la probabilité P_n.

4) **Appliquons à f_n l'inégalité de Bienaymé - Tchebychef :**

L'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef à f_n donne :

pour tout ϵ positif $P_n[|f_n - p| > \epsilon] < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$.

Lorsque n tend vers l'infini cette probabilité tend donc vers zéro. Cette propriété est désignée par : **LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES** et s'énonce sous la forme suivante :

pour tout ϵ positif la limite en $+\infty$ de $P_n[|f_n - p| > \epsilon]$ est nulle.

II – CONSTRUCTION D'UN TEST SIMPLE.

Exemple : A priori la probabilité pour qu'une pièce de 50 centimes tombe sur pile est 1/2. Pour le vérifier on peut jeter cette pièce un certain nombre de fois et calculer la fréquence de «sortie de pile».

Généralisons ceci :

On a de bonnes raisons de penser qu'un évènement A est de probabilité p et on veut le vérifier.

Un test naturel dicté par la loi des grands nombres consiste à répéter n fois (de façons indépendantes les unes des autres) une expérience élémentaire et à calculer la fréquence f_n de réalisation de l'évènement A.

Si effectivement A est de probabilité p alors f_n doit être proche de p.

Par conséquent :

- si f_n est proche de p alors ce sera une raison de plus pour penser que A est de probabilité p.
- si f_n est éloigné de p alors ce sera une raison pour remettre en cause cette hypothèse.

Pratiquement c'est très rare que f_n soit exactement p.

Faut-il s'étonner si f_n s'écarte de p ?

Précisons le sens de cette question :

1) Qu'entend-on par «s'écarter de p» ?

   On choisit plus ou moins arbitrairement (suivant les cas) ϵ positif et on s'intéresse aux expériences pour lesquelles f_n diffère de p de plus de ϵ ($|f_n - p| > \epsilon$).

2) Qu'entend-on par «faut-il s'étonner de ...» ?

   On s'étonne de quelque chose lorsque cela se produit, bien que la probabilité soit faible. Donc le problème est d'évaluer la probabilité pour que f_n s'écarte de p de plus de ϵ.

3) La loi des grands nombres nous dit que «pour n assez grand» cette probabilité sera «faible».

   A partir de quel moment estimera-t-on que cette probabilité est faible ?

   Fixons-nous un seuil α (plus ou moins arbitrairement).

   Tout le problème est de savoir pour quelle valeur de n cette probabilité est inférieur à α.

Exemple : Reprenons notre pièce. Le problème se pose alors dans les termes suivants : combien faut-il de fois la jeter afin que la probabilité pour f_n d'être écartée de 1/2 ($p = 1/2$)

de plus de 0,1 ($\epsilon = 0{,}1$)

soit inférieure à 15 % ($\alpha = 0{,}15$) ?

Nous avons deux manières d'étudier ce problème :

A) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchef :

Si nous utilisons les résultat du I nous savons que

$$P_n[|f_n - p| > \epsilon] < \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

Si nous nous donnons p, ϵ et α, nous pouvons trouver un entier n qui répond à notre problème.

Exemple : La probabilité pour que la fréquence de pile s'écarte de 1/2, de plus de 0,1, sera inférieure à 15 % si :

$$\frac{\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\right]}{n \times (0,1)^2} < \frac{15}{100} \; ;$$

donc il suffit de jeter 167 fois la pièce.

B) Par un calcul de Probabilité :

$n \times f_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p ; donc f_n prend les valeurs :

$$\frac{0}{n} \;,\; \frac{1}{n} \;,\ldots\ldots,\; \frac{k}{n} \;,\ldots\ldots,\; \frac{n}{n}$$ avec les

probabilités : $C_n^0 p^0 q^n$, $C_n^1 p^1 q^{n-1}$,........, $C_n^k p^k q^{n-k}$,........, $C_n^n p^n q^0$.

D'où $\quad P_n[|f_n - p| > \epsilon] = 1 - P_n[|f_n - p| \leqslant \epsilon]$

$$= 1 - \sum_{\{k/\frac{k}{n} \in [p-\epsilon,\, p+\epsilon]\}} P_n\left[f_n = \frac{k}{n}\right]$$

$$= 1 - \sum_{\{k/\frac{k}{n} \in [p-\epsilon,\, p+\epsilon]\}} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Nous devons trouver n tel que cette probabilité soit inférieure à α. Manifestement cette équation est trop compliquée pour être résolue par des méthodes classiques.

Il reste alors trois solutions :

1 — Tatonner avec une calculatrice de poche.
2 — Employer un mini-ordinateur (un ordinateur peut aussi faire l'affaire !).
3 — Utiliser des tables de loi binomale.

1 — Une petite calculatrice de poche et un peu de patience permettent de voir que pour le problème de la pièce :

50 jets suffisent alors qu'en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef on était conduit à faire 167 jets.

$$P_{50}[|f_{50} - \frac{1}{2}| \leqslant 0,1] = \frac{1}{2^{50}} \sum_{\{k/\frac{k}{50} \in [\frac{1}{2} - 0,1, \frac{1}{2} + 0,1]\}} C_{50}^{k}$$

$$= \frac{1}{2^{50}} \sum_{20 \leqslant k \leqslant 30} C_{50}^{k}.$$ Donc il faut vérifier

que $$\sum_{20 \leqslant k \leqslant 30} C_{50}^{k} \geqslant 1 - 0,15.$$

Les difficultés de ce calcul si on le fait avec une calculatrice de poche non muni d'une virgule flottante sont :

— de ne pas dépasser la capacité de la machine,

— de ne pas avoir au cours des calculs des termes trop petits à multiplier par d'autres nombres car alors l'erreur est trop grande.

Il faut donc alterner le plus possible les multiplications et les divisions. Ces difficultés font de ce calcul un exercice d'organisation très instructif ; de plus elles montrent que l'utilisation des calculatrices n'est pas si aisée qu'elle le paraît au premier abord.

2 — un mini-ordinateur permet de faire le calcul précédant pour les valeurs successives de n à partir de $n = 1$ par exemple ; le programme peut alors être fait de telle façon que dès que la probabilité cherchée est inférieure au seuil α, le n correspondant est affiché.

L'écart entre 50 et 167 nous pousse à comparer systématiquement

$$P_n[|f_n - p| > \epsilon] \quad \text{avec} \quad \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

et donc à nous poser le problème de l'intérêt de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchef.

III — INTERET PRATIQUE DE L'INEGALITE DE BIENAYME-TCHEBUCHEF.

Désignons par $A_{n,p}(\epsilon)$ la probabilité : $P_n[|f_n - p| > \epsilon]$

et par $B_{n,p}(\epsilon)$ le nombre : $\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$.

1) Comparons les ordres de grandeur de ces deux quantités. Pour ceci la calculatrice de poche ne suffit plus ; nous l'avons remplacée par un ordinateur relié à une table traçante.

Nous avons pris deux valeurs de n : 50 et 100 ; et trois valeurs de p : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, et $\frac{1}{4}$; puis nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions $A_{n,p}$ (trait continu) et $B_{n,p}$ (trait pointillé) en faisant varier ϵ de 0 à p.

Les courbes obtenues sont présentées en annexe.

2) Nous constatons bien sûr que les courbes pointillées sont «au-dessus» des courbes continues (c'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef).

De plus l'écart est grand entre A et B :

— un examen rapide montre que dans les cas étudiés :

$$A_{n,p}(\epsilon) < \frac{B_{n,p}(\epsilon)}{2}$$

— par superposition on peut aussi vérifier que pour les trois valeurs de p : $A_{50,p} < B_{100,p}$;

cela explique que :

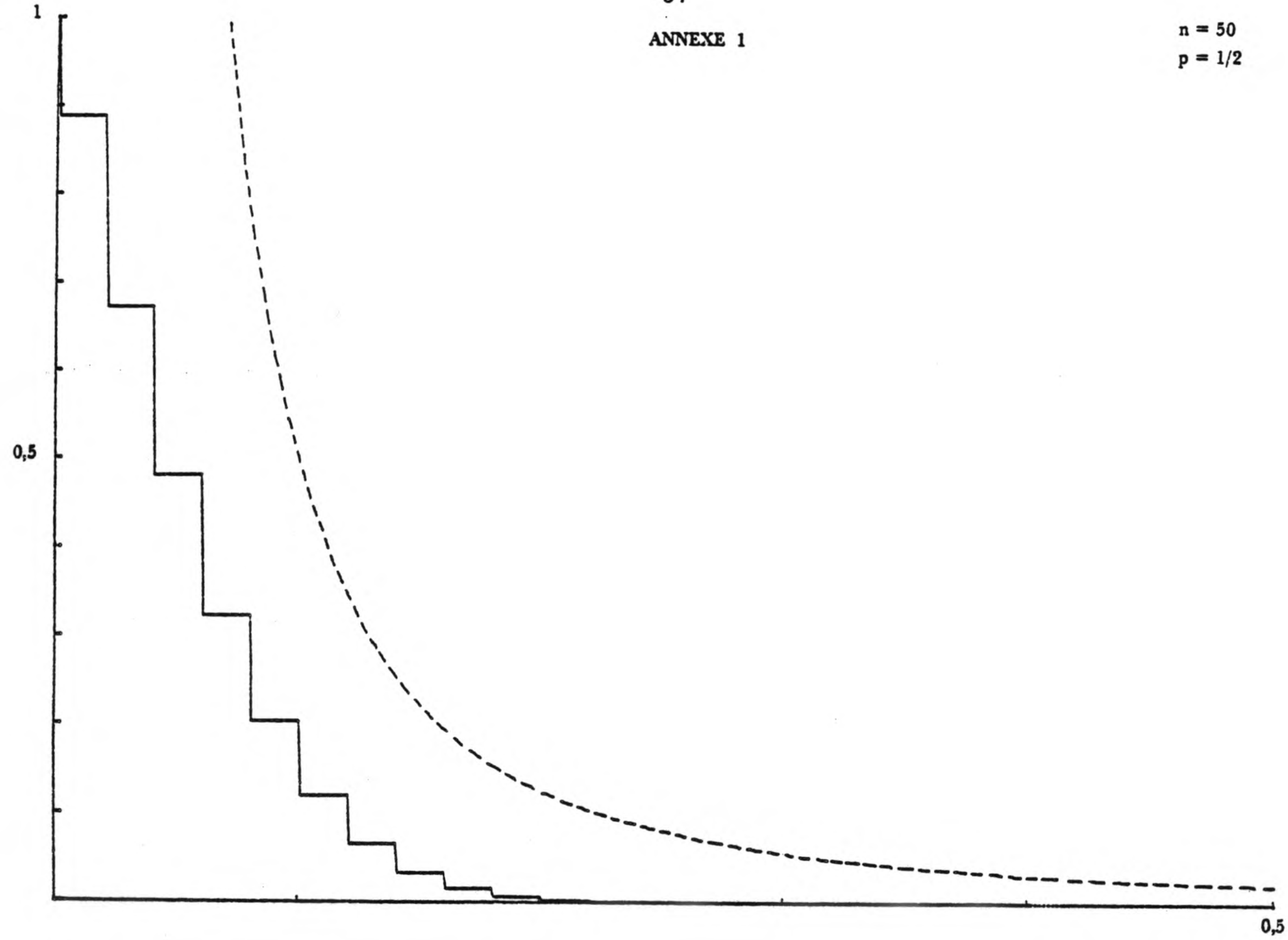
Bien que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef aboutisse à répéter 100 fois l'expérience élémentaire, en fait 50 fois suffisent.

3) Conclusion :

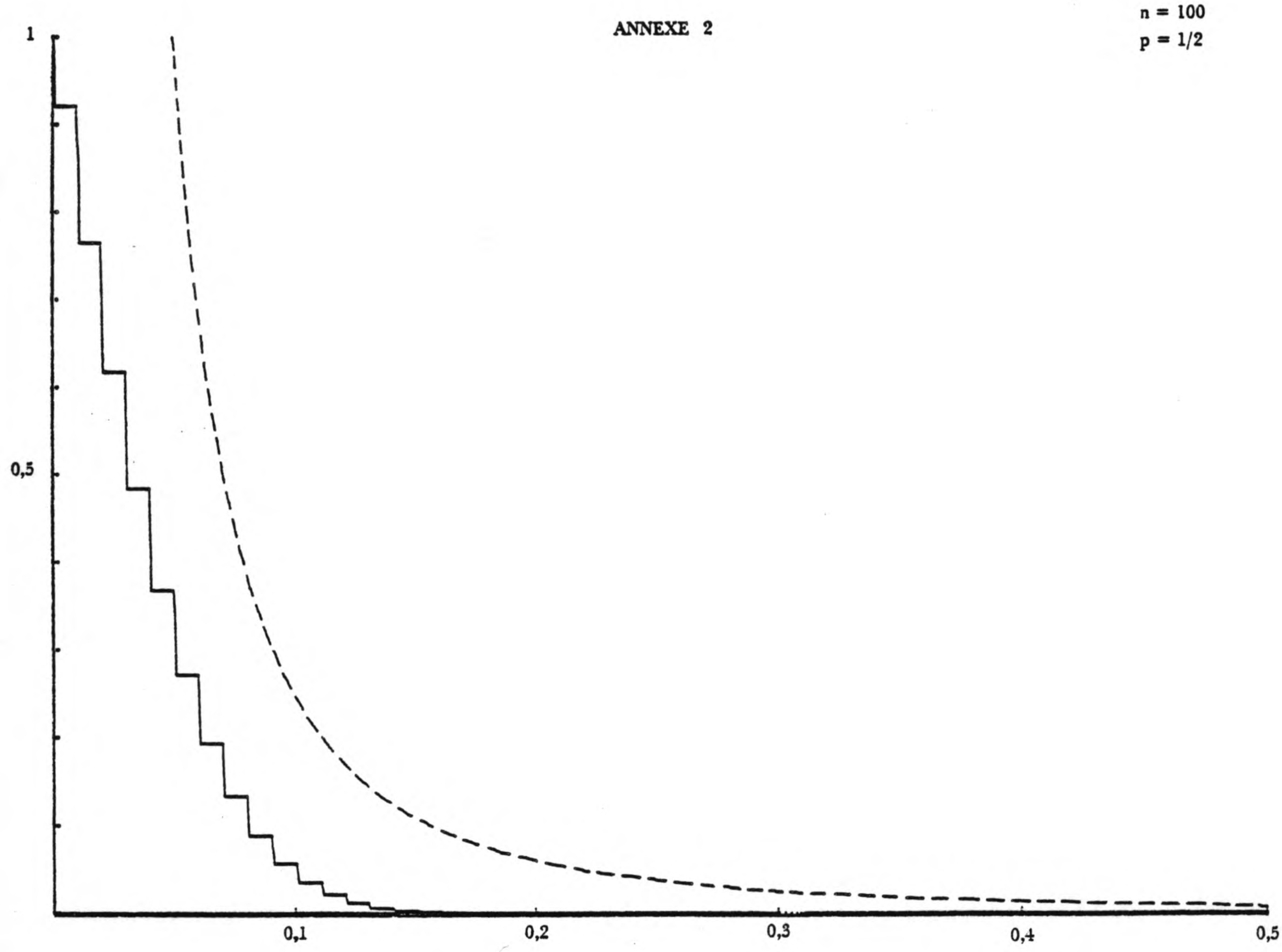
Tout ceci montre que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef est d'un faible intérêt pratique.

Par contre sa généralité et sa simplicité lui donnent un intérêt théorique évident.

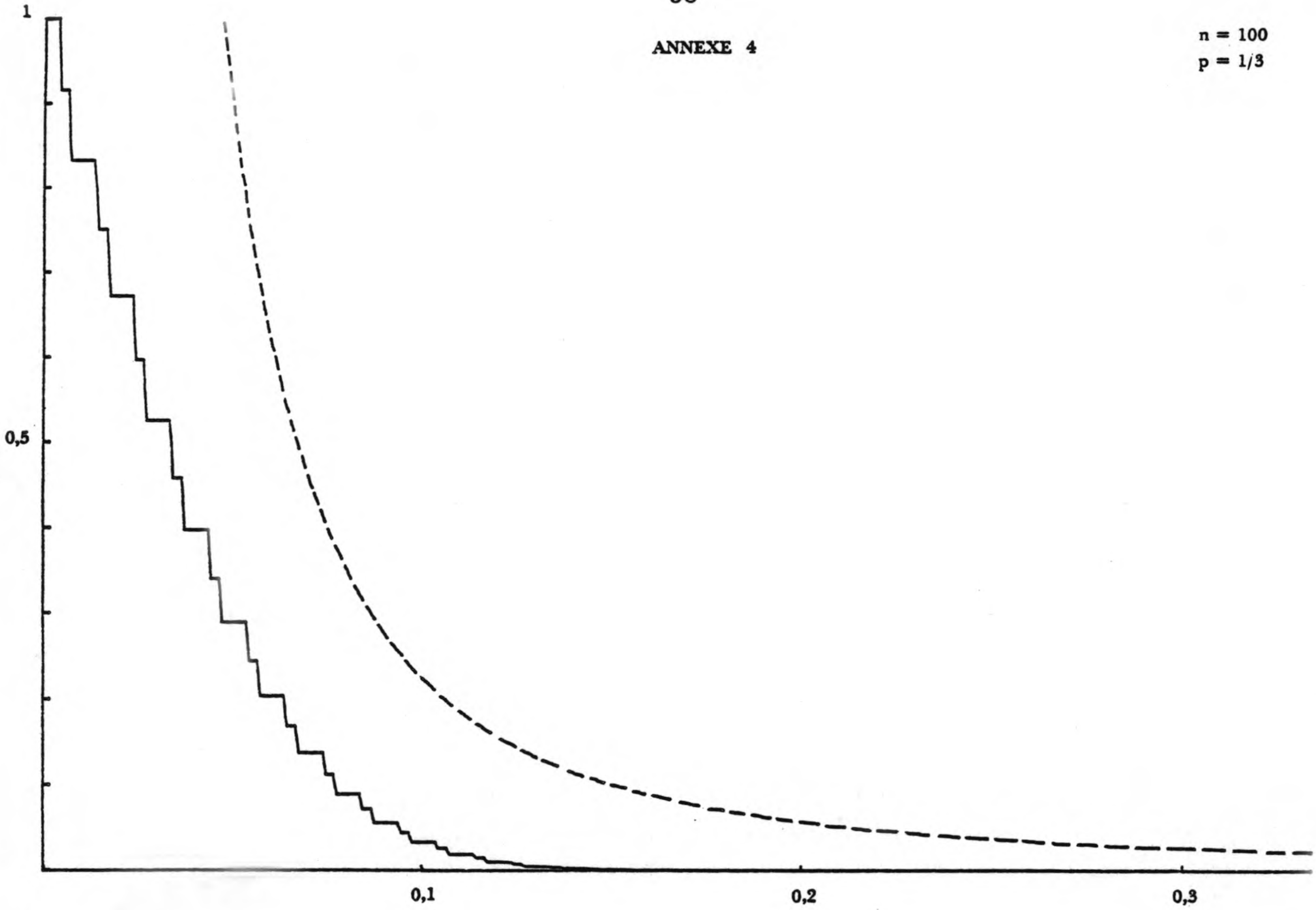
ANNEXE 1



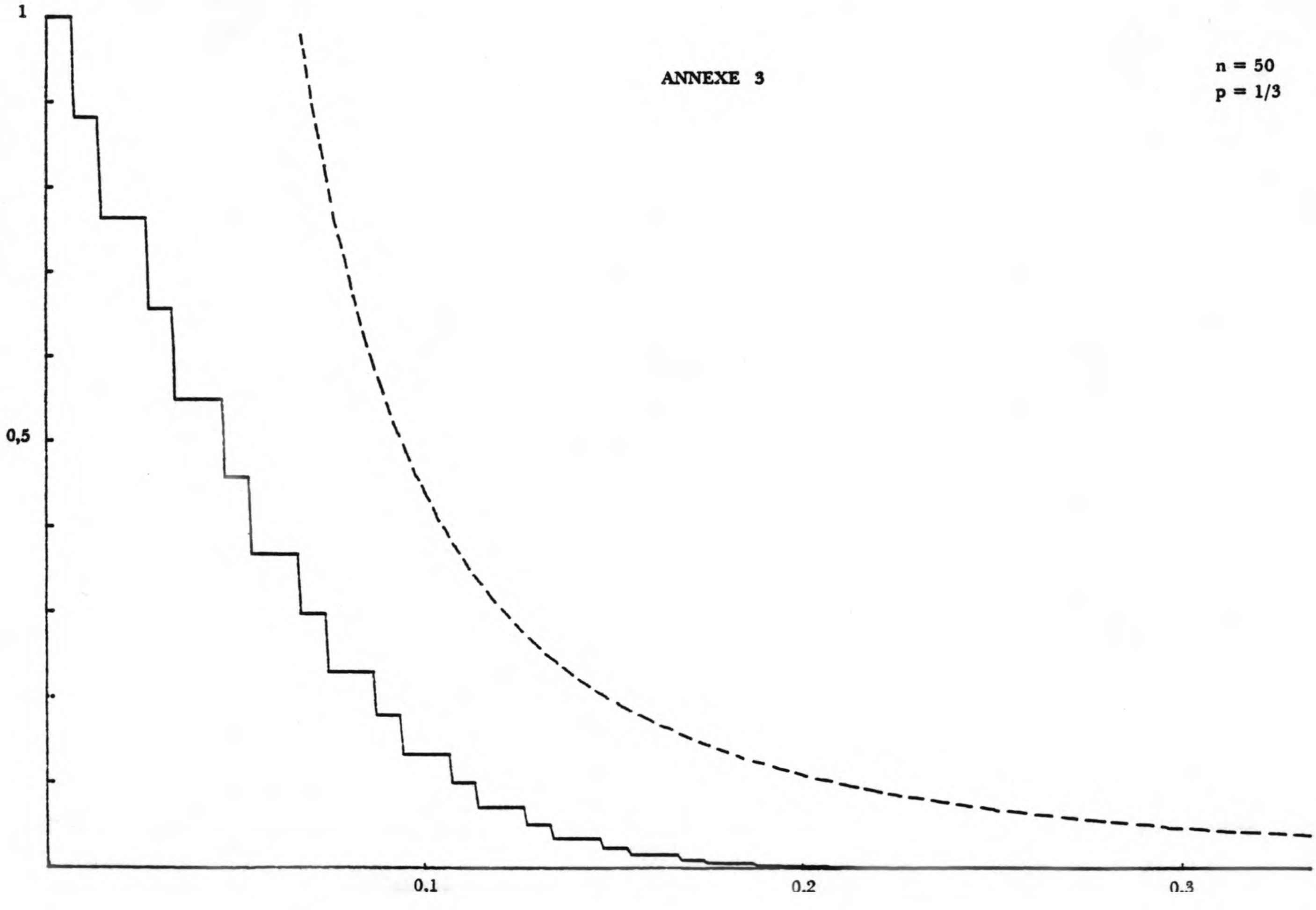
ANNEXE 2

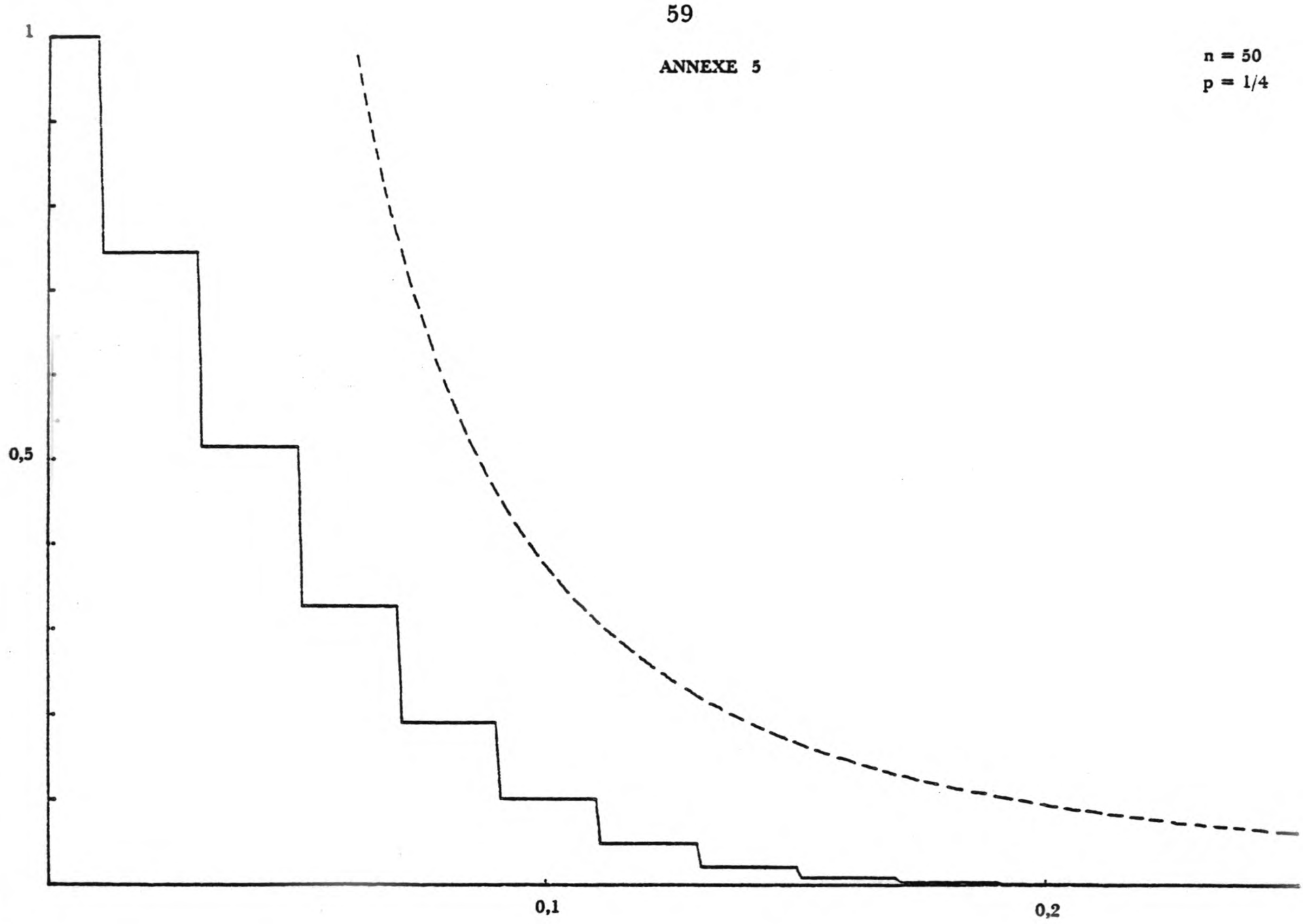


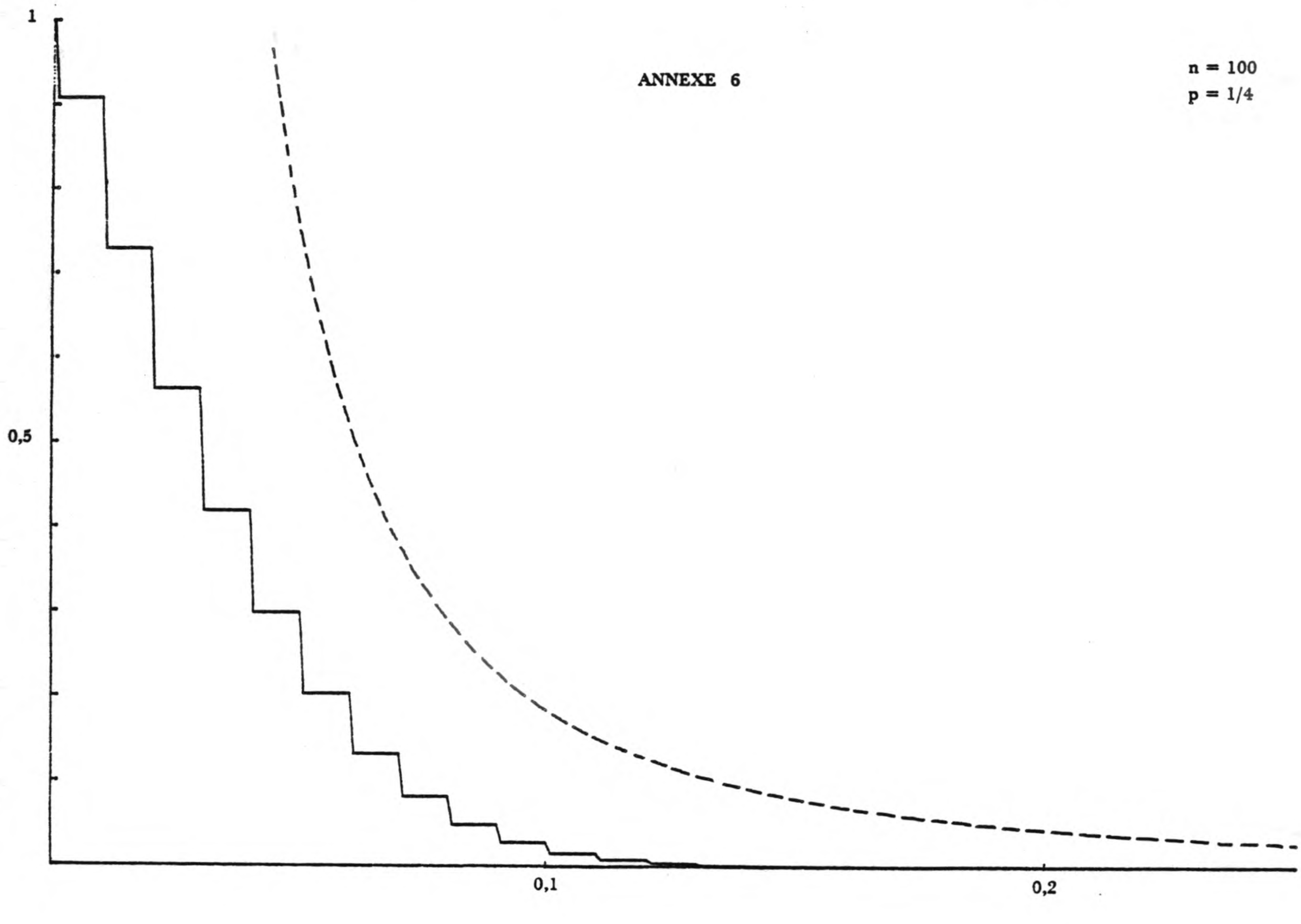
ANNEXE 4



ANNEXE 3




ANNEXE 5
n = 50
p = 1/4
1
0,5
0,1
0,2


ANNEXE 6
n = 100
p = 1/4
1
0,5
0,1
0,2

APPROCHE DES PROBABILITES ET DES STATISTIQUES EN 1ère A

Etude du temps qu'il a fait à Beaumont-les-Valence en 1973

OBJECTIFS

Nos objectifs étaient de deux ordres : pédagogique et mathématique.

► *OBJECTIFS D'ORDRE PEDAGOGIQUE :*

- essayer de faire travailler l'ensemble d'une classe de 1ère A et non 3 ou 4 élèves comme c'est très souvent le cas.

- développer chez les élèves une attitude active et critique devant un tableau de données :

  . mise en évidence de certains caractères ;
  . recherche de modes de représentation permettant d'étudier ces caractères.

► *OBJECTIFS D'ORDRE MATHEMATIQUE :*

- préciser et ordonner les idées intuitives qu'ont les élèves sur divers problèmes statistiques et probabilistes ; en particulier préciser les notions suivantes :

  . avoir plus de chance, moins de chance ;
  . avoir tant de chance sur tant pour que... ;
  . fréquence - pourcentage.

- préciser la notion de probabilité en particulier par une approche de la loi des grands nombres.

THEME DE L'ETUDE PROPOSEE AUX ELEVES

Nous avions à notre disposition un relevé météorologique pour l'année 1973 fait à Beaumont-le-Valence. A partir de ce document, nous avons pu attribuer à chacun des jours de l'année l'un des trois qualificatifs suivants : beau, gris, mauvais. Cette attribution a été souvent quelque peu arbitraire. (Voir annexe I).

Nous pensions demander aux élèves :

- dans un premier temps, d'analyser le tableau de données ;

- dans un deuxième temps, de réaliser une simulation tenant compte de certains caractères mis en évidence et d'analyser les résultats obtenus.

CONDITIONS DE L'EXPERIMENTATION

Cette expérimentation a été menée, en liaison avec le groupe PROBA de l'IREM de Grenoble, dans trois classes de 1ère A, par trois professeurs du lycée Camille Vernet de Valence. Parmi ces professeurs, deux sont animateurs à l'IREM. Les classes concernées ont été :

- la 1ère A_3 A_5 (40 élèves),
- la 1ère A_{4II} A_7 (40 élèves),
- la 1ère A_2 A_{4I} (39 élèves).

Nous avons eu beaucoup de difficultés pour organiser l'observation dans ces classes. Les contraintes d'emploi du temps n'ont pas permis une observation complète en 1ère A_3 A_5 et en 1ère A_2 A_4. Il n'a pas été possible en 1ère A_{4II} A_7 d'avoir plus d'un observateur en classe.

L'expérimentation s'est déroulée en trois séquences :

1. Analyse du tableau (3heures environ)
2. Simulation - loi des grands nombres - (1heure30 anviron)
3. Comparaison des simulations avec la réalité puis amélioration de ces simulations (4heures environ).

Pour rendre plus clair cet exposé nous allons décrire ici essentiellement la manière dont se sont déroulées les différentes séquences en 1ère $A_{4II}A_7$. En réalité la plupart des idées et des directions de travail choisies par les élèves se sont retrouvées dans les trois classes.

Nous signalerons donc simplement le cas échéant les situations différentes rencontrées dans les deux autres classes.

Les élèves ont été surpris de travailler en groupe. Pourtant ils ont très facilement accepté ce type de travail. Les différents groupes ont abondamment échangé leurs idées, ce qui a rendu la classe souvent trop bruyante ; aucun travail sérieux n'était plus alors possible. Proposer un travail de groupe dans des classes où l'effectif est si important, cela parait une gajeure. Mais avons-nous le choix ? Doit-on attendre des classes de 1ère A n'ayant pas plus de 25 élèves pour proposer une activité et des méthodes de travail qui sortent de l'apathie l'ensemble d'une classe ?

PREMIERE SEQUENCE

Mise en commun des idées

Chaque élève a reçu un exemplaire du tableau que l'on peut voir en annexe I.

Nous avons donné toutes les explications nécessaires à sa bonne compréhension. En particulier, il manque 4 jours en Août car il n'y a pas eu de relevé durant cette période.

Ensuite nous avons donné la consigne suivante :

"Aujourd'hui, dans un premier temps, vous allez dire ce que vous avez envie d'étudier au vu de ce tableau. Ensuite, vous choisirez un travail que vous essayerez de mener à bien".

Voici les réponses obtenues en 1ère A_{4II} A_7 : (elles ne diffèrent guère pour les autres classes)

- On peut chercher combien de jours il a fait beau, gris, mauvais.

- Faire les moyennes, les pourcentages.

Ces idées ont été mal exprimées.

Il a été question dans la discussion qui a suivi de proportions de jours beaux dans l'année, de moyennes par mois...

- Chercher le mois pour lequel il y a le plus de jours beaux, celui pour lequel il y a le plus de jours mauvais.

- Etudier le 1er jour de chacun des douze mois de l'année, puis étudier le 2ème jour de chacun des 12 mois, puis étudier le 3ème jour, etc...

- Comparer le nombre de jours beaux du mois de janvier et celui du mois d'août.

- Comparer les longueurs des différentes séquences de jours beaux.

- Etudier les changements de temps :

"*entre un jour beau et un jour mauvais y-a-t-il toujours un jour gris ?*"

- Prendre mois par mois et faire un graphique. Cela ferait des dents et on comparerait.

- Faire une courbe ; ainsi, dans le graphique obtenu, on verra mieux les changements de temps.

- Etudier les périodes où le temps reste le même.

- Etudier le temps par saisons.

- Essayer de prévoir le temps qu'il a fait durant les 4 jours pour lesquels nous n'avons pas relevé.

- Essayer de prévoir le temps de l'année suivante.

Les trois derniers points ont été discutés avec beaucoup d'énergie. Pour prévoir le temps durant les 4 jours manquant et le temps de l'année suivante il fallait tenir compte des saisons.

Beaucoup pensaient que si on tenait compte des saisons, cela serait très compliqué. Mais certains ne voulaient pas abandonner un phénomène dont ils avaient bien conscience et qui, pour eux, était fondamental. L'idée d'étudier le changement de temps était très forte. Pourtant les élèves ne sont pas parvenu à mettre sur pied une étude complète. Ceux qui envisageaient ce travail voulaient étudier seulement certains changements comme, par exemple, B → G ou B → M. Il n'était pas question pour eux d'étudier systématiquement l'ensemble des couples constitués par 2 jours consécutifs.

Au bout d'une demi-heure, toutes les idées étaient inscrites au tableau. Personne n'avait plus de remarques à faire. Nous avons demandé à chaque groupe de commencer à travailler. Chacun a choisi lui-même son thème de travail.

Analyse du tableau

Le premier travail accompli par tous les groupes a été le dénombrement des B, G et M. La plupart des élèves (18 groupes sur 20) ont choisi de faire ce dénombrement par mois afin de mieux contrôler leurs résultats. Très vite est apparue la nécessité de bien organiser l'ensemble des résultats.

Certains les ont présentés sous forme de tableaux. D'autres (une dizaine de groupes) ont réalisé des diagrammes. Certains modes de représentations ont dû être discutés. Par exemple quelle est la significations des segments de droite.

Presque tous les groupes ont calculé les pourcentages de B, G et M. Une dizaine d'élèves ne savait pas très bien trouver un pourcentage ; le professeur a dû leur donner les indications nécessaires. De toute façon cette notion reste mal comprise. Nous avons eu l'occasion de nous en rendre compte au cours d'une discussion sur le rôle des 4 jours "manquants" : fallait-il calculer le pourcentage de B par rapport à 365 jours ou bien par rapport à 361 jours ?

Nous avons fait remarquer que le calcul par rapport à 365 jours impliquait que pendant ces quatre jours il n'avait pas fait beau. Certains élèves sont restés perplexes devant ce problème.

Au cours de cette première séquence nous avons pu observer que certains groupes n'étaient pas satisfaits par la présentation des données. En particulier pour mettre mieux en évidence les "changements de temps", cinq groupes ont réalisé le graphique figurant en annexe II ; graphique auquel nous reprochons les segments joignant les points (sinon il serait bien la représentation graphique d'une application).

Un des ces cinq groupes a même voulu réaliser le document présenté en annexe III ; ce document est formé par trois "extraits" du tableau initial. Ces deux élèves ont-ils voulu retrouver des tableaux cartésiens de relation qu'on étudie peut-être trop dans le premier cycle ?

Pour l'étude du changement de temps le professeur a dû insister pour que l'on dénombre systématiquement chacune des neuf situations possibles : BB, BG, BM, GB, GG, GM, MB, MG, MM. Les calculs des pourcentages ont alors à nouveau posé des problèmes.

Un groupe a même calculé le pourcentage de BB par rapport au nombre de mois (?).

Notons aussi qu'aucun des groupes travaillant sur ce sujet n'a pu répondre à la question :

"Pouvez-vous prévoir la somme des nombres de BB, *de* BG *et de* BM, *pour un mois donné ? Pour l'année ?"*

► SIGNALONS qu'en 1ère A_3 A_5, beaucoup ont proposé de calculer le nombre moyen de B par mois. Un élève a alors fait cette remarque :

"Pour calculer le nombre moyen de jours beaux par mois il suffit de regarder les 6 premiers mois car théoriquement l'année doit être symétrique".

Cette affirmation n'est pas absurde du tout, mais la raison invoquée est manifestement fausse.

▶ AU COURS de cette séquence nous avons noté que, si tout le monde a parlé de pourcentages, personne n'a pensé à la fréquence. Or, en 1ère A_3 A_5 et en 1ère A_{4II} A_7, cette notion avait été rencontrée au début de l'année lors de l'analyse d'un relevé statistique du nombre de mulots et de campagnols suivant différents types de milieux. Il ne nous a pas paru indispensable d'insister car pour les élèves, les % étaient bien considérés comme des fréquences relatives à une effectif de 100, et dans les cas rencontrés les effectifs étaient suffisamment importants pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

▶ AU FUR ET A MESURE de l'analyse du tableau de données, les élèves ont pris conscience de la nécessité de mieux organiser leur travail et de contrôler leurs résultats. Des mises au point intéressantes ont pu être faites au sujet des représentations graphiques.

DEUXIEME SEQUENCE

Pour cette séquence nous avons donné la consigne suivante :

"Vous avez analysé le tableau de l'année 73. Vous avez mis en évidence certains caractères. Nous vous proposons maintenant de reproduire un tableau ayant les mêmes caractéristiques à partir de tirage "au hasard". En fait nous vous proposons de réaliser une "simulation de ce relevé météorologique"".

Un élève a proposé tout de suite de mettre une fois sur deux un jour de B. (En effet, il y a 50,96 % de B).
Très vite tous ont été d'accord pour respecter les pourcentages de B, G, M.

"Respecter les proportions de B, G et M peut être un premier critère. Nous verrons par la suite si nous ne pouvons pas perfectionner notre simulation."

Au cours des discussions qui ont accompagné le début de ce travail nous avons pu noté les réflexions suivantes :

- ça va être au hasard donc cela ne sert à rien.
- Pas tout-à-fait.
- En respectant les proportions cela ne sera plus du hasard.

Il a fallu enfin préciser quels types de tirage nous pouvions réaliser. Un élève a parlé de pièce de monnaie.

Un autre groupe a proposé d'utiliser un dé tout d'abord en attribuant chaque type B, G et M à 2 faces du dé. Cela a suscité des réactions de la part de certains qui ont préféré les attributions suivantes : 1 face pour M, 2 pour G et 3 pour B, ce qui correspond aux pourcentages suivants :

B : 50 %		50,96 %
G : 33,33 %	au lieu de	37,39 %
M : 16,66 %		11,63 %

Cet exemple a permis à l'ensemble de mieux comprendre ce qu'allait être la simulation que nous demandions.

Les groupes ont ensuite choisi différents moyens puis ils ont réalisé effectivement une simulation.

Voici les différentes simulations proposées par les élèves :

* Utilisation du lancement du dé : 3 faces pour B, 2 pour G et 1 pour M.
* Tirage sans remise de 184 papiers marqués B, 135 marqués G et 42 marqués M.
* Tirage avec remise.

  (Pour éviter de fabriquer 361 papiers, deux groupes ont utilisé les % et ont tiré leurs papiers parmi cent seulement).
* Utilisation d'un disque (voir annexe IV) sur lequel ont été dessinés 3 secteurs de mesure angulaire respective 183°, 135°, 42° (il y avait 361 jours. Quelle chance !).
  Les tirages ont été faits à l'aide d'un tourne-disque qui d'ailleurs n'a pas résisté à la deuxième simulation.

Nous avons aussi mis à la disposition de certains groupes des tables de nombres au hasard (annexe IV) et trois calculatrices programmables HP25, programmées pour donner des nombres de deux chiffres uniformément répartis entre 0 et 99. Les élèves ont utilisé les tables et les calculatrices suivant le même principe : "Ils tiraient" un nombre. Si ce nombre appartenait à l'intervalle [0,51[ils écrivaient B ; à l'intervalle [51,88[ils écrivaient G, à l'intervalle [88,100[ils écrivaient M. Il a fallu intervenir pour bien préciser les bornes de l'intervalle.

Nous avons été heureusement supris par le sérieux mis par tous les élèves à réaliser leurs simulations.

Il y avait 20 groupes utilisant 5 méthodes différentes ; aussi l'observation a-t-elle été très difficile ; les élèves se gênaient entre eux.

Certains ont été obligés de recommencer leur simulation entièrement.

On pourra trouvé les résultats d'une simulation en annexe IX bis.

L'utilisation des calculateurs programmables n'a pas posé de problème. Celle de la table de chiffres au hasard a nécessité plus d'explications préalables. Les élèves ne voyaient pas comment on pouvait l'utiliser pour obtenir des tirages de nombres inférieurs à 100.

Une difficulté rencontrée au cours de cette séquence a été de bien faire sentir aux élèves qu'il n'était pas raisonnable de considérer les simulations réalisées comme des prévisions. Or, ette idée de prévision vient naturellement à l'esprit dès qu'on parle de météorologie.

TROISIEME SEQUENCE

Lors de cette séquence nous avons proposé de comparer les différentes simulations avec la réalité.

Les élèves ont tout d'abord regardé combien ils avaient obtenu de B, G et M. Ils ont noté leurs résultats au tableau.

B	184	195	197	181	175	164	204	172	166	194	163
G	135	129	128	148	148	137	96	144	131	130	152
M	42	37	36	32	38	60	61	45	64	37	46

Il y a eu de nombreuses erreurs pour ce travail de dénombrement. La nécessité d'une vérification s'est imposée. Beaucoup de décomptes ont dû être repris avant que le total du nombre des B, G et M devienne 361.

La plupart des élèves ont été frappés par la "ressemblance" des nombres de B, G et M avec la réalité. En particulier le groupe qui avait choisi de faire des tirages sans remise a été surpris de voir que des tirages avec remise respectaient à peu près les proportions.

Donc, en ce sens là, pour eux toutes les imulations étaient "réussies". Ils ont voulu ensuite voir si les résultats concordaient au niveau des mois. (Annexe V).

Les résultats mensuels de quelques simulations ont été comparés.

		J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
BEAU	Réalité	12	9	21	14	15	18	17	15	19	15	20	9
	Simulations 1	16	15	12	14	17	16	13	9	21	18	24	13
	2	19	18	16	18	16	17	21	19	16	15	11	18
	3	17	14	18	15	18	19	14	18	11	18	13	14
	4	15	12	15	12	15	16	21	14	9	12	10	17
GRIS	Réalité	12	16	8	12	14	9	10	11	6	12	8	17
	Simulations 1	13	13	15	9	11	11	13	15	6	9	6	9
	2	4	8	10	7	10	7	7	6	10	12	11	4
	3	8	10	12	10	11	5	14	11	12	9	13	14
	4	12	13	12	13	13	11	4	12	14	15	16	13
MAUVAIS	Réalité	7	3	2	4	2	3	4	1	5	4	2	5
	Simulations 1	2	0	4	7	3	3	5	3	3	4	0	3
	2	8	2	5	5	5	6	3	2	4	4	8	9
	3	6	4	1	5	2	6	3	2	7	4	4	3
	4	4	3	4	5	3	3	6	1	7	4	4	1

Les différences sont apparues importantes à l'ensemble de la classe. Ils ont attribué aux phénomènes saisonniers la cause de ces grands écarts. Nous leur avons fait remarquer que les résultats des quatre simulations considérées n'étaient pas eux aussi très réguliers chaque mois.

Un groupe a alors calculé la moyenne des B, G et M obtenus avec l'ensemble de toutes les simulations :

B : 181,1   G : 134,3   M : 42,4.

Ils ont été d'accord pour dire que "plus on peut faire de tirages, mieux c'est". Ainsi un des buts recherchés était atteint, à savoir : faire prendre conscience aux élèves de la loi des grands nombres.

Afin de compléter l'analyse des données par les simulations, nous avons proposé de reprendre le décompte des diverses situations pour deux jours consécutifs.

Ces dénombrements ont pris beaucoup de temps. Il était difficile d'éviter les erreurs. Les élèves ont pourtant essayé de mieux s'organiser.

Voici les résultats obtenus :

	Réalité	Différentes simulations							
BB	127	91	81	72	93	94	88	126	109
BG	44	69	65	56	63	62	77	50	64
BM	11	18	21	28	27	24	21	13	27
GB	50	66	64	60	65	58	76	47	64
GG	64	59	67	43	42	65	46	54	51
GM	21	18	16	22	21	11	14	27	13
MB	6	22	21	29	25	22	21	18	17
MG	26	12	15	20	18	12	14	17	11
MM	10	4	9	9	5	6	2	7	3

Le professeur a proposé de faire une autre simulation qui tiendrait compte des différentes proporsions des BB, BG,... Il s'agissait tout d'abord de déterminer le temps du premier jour. Puis, en fonction de cela, tirer le temps du lendemain et ainsi de suite...

Cette nouvelle simulation n'a été entreprise que par quelques groupes. (8 groupes environ, soit à peu près le tiers de la classe). Les autres groupes ont mis de l'ordre dans leurs résultats ainsi que dans les remarques qu'ils avaient notées.

Remarque : Lorsque nous avions préparé cette expérimentation, nous avions pensé à trois types de simulation :

Premier type : en tenant compte des fréquences de B, G et M.

Deuxième type : en tenant compte du temps de la veille.

Troisième type : en tenant compte des longueurs des différentes séquences de B, G ou M. (Un premier tirage aurait donné la nature de la séquence, un deuxième tirage aurait donné la longueur).

Etant donné la lassitude manifestée par les élèves lors des dernières séances, nous avons renoncé à aborder ce troisième type de simulation.

BILAN

Distinguons deux aspects :

En ce qui concerne l'animation de la classe, nous avons noté trois différences essentielles avec ce qui s'est passé le reste de l'année :

- les élèves qui ont été les plus acharnés sont ceux qui d'habitude refusent de participer ;

- par contre certains élèves qui suivaient bien avant cette expérience l'ont prise de haut et ont considéré qu'ils perdaient leur temps (ce qui n'est pas notre avis bien sûr !) ;

- mais pratiquement toute la classe a travaillé, ce qui était loin d'être le cas avant.

En ce qui concerne les acquisitions faites par les élèves :

- nous avons fait des mises au point sur des notions qui étaient vagues (et il est fort possible qu'elles le soient à nouveau maintenant) : moyenne, pourcentage, dénombrement... ;

- les élèves ont touché du doigt les notions de phénomènes aléatoires, de fréquences, de probabilité et ont eu un aperçu de la loi des grands nombres ;

- de plus, ils se sont posé des problèmes sur les représentations graphiques ;

- en tous cas cette expérience a permis aux élèves de prendre de nombreuses initiatives (bonnes ou mauvaises peu importe).

Quand nous referons un travail de ce genre (et nous en referons), nous essaierons de choisir un sujet plus facile à "décortiquer" que celui de la météorologie. D'autre part, il faudra absolument que le sujet choisi se prête à un déroulement plus court dans l'année, pour éviter la lassitude des élèves.

Notons encore que les simulations faites "à la main" prennent énormément de temps mais qu'elles nous paraissent tout-à-fait essentielles, au moins pour une première approche.

*

*   *

ANNEXE I

1973	Ja	Fe	Ma	Av	M	Ju	Ju	A	S	O	N	De
1	G	G	B	B	G	B	B	B	B	M	B	G
2	B	G	G	B	B	B	B	G	B	M	B	B
3	G	G	B	G	B	B	B	G	B	G	G	B
4	G	BB	B	B	B	B	B	G	B	B	G	G
5	G	B	B	B	G	G	B	B	B	B	G	G
6	B	B	B	B	B	M	B	B	B	G	M	G
7	M	B	G	G	M	G	B	G	B	G	G	G
8	M	B	B	G	G	G	G	B	B	G	G	M
9	M	G	B	M	G	B	B	B	B	B	B	G
10	G	G	B	M	G	B	B		B	B	B	B
11	B	G	B	B	G	B	B		B	B	B	B
12	B	G	B	G	B	B	B		B	B	B	G
13	B	M	G	G	B	G	B		B	M	B	B
14	G	B	G	B	B	G	G	B	B	G	G	M
15	B	G	B	B	B	B	M	M	G	G	G	G
16	G	G	B	B	B	B	G	B	M	M	B	B
17	M	G	B	B	G	B	M	B	M	G	B	G
18	M	G	B	B	G	B	G	B	G	G	B	B
19	G	G	B	M	G	B	G	B	B	B	B	G
20	G	G	B	G	G	G	B	B	G	B	G	G
21	M	B	B	B	G	G	G	B	M	G	B	M
22	G	G	B	G	G	M	G	B	B	G	B	G
23	B	G	B	B	B	M	G	G	M	G	B	M
24	B	M	B	G	B	G	M	G	G	B	B	G
25	B	M	M	G	B	B	M	G	G	B	B	M
26	B	G	M	B	B	B	G	B	B	B	B	G
27	M	B	G	G	G	G	G	B	B	B	B	G
28	B	B	B	M	M	B	B	G	B	B	B	G
29	B		G	G	G	B	B	G	M	B	M	G
30	G		G	G	B	B	B	G	G	G	B	B
31	G		G		B		B	G		B		B

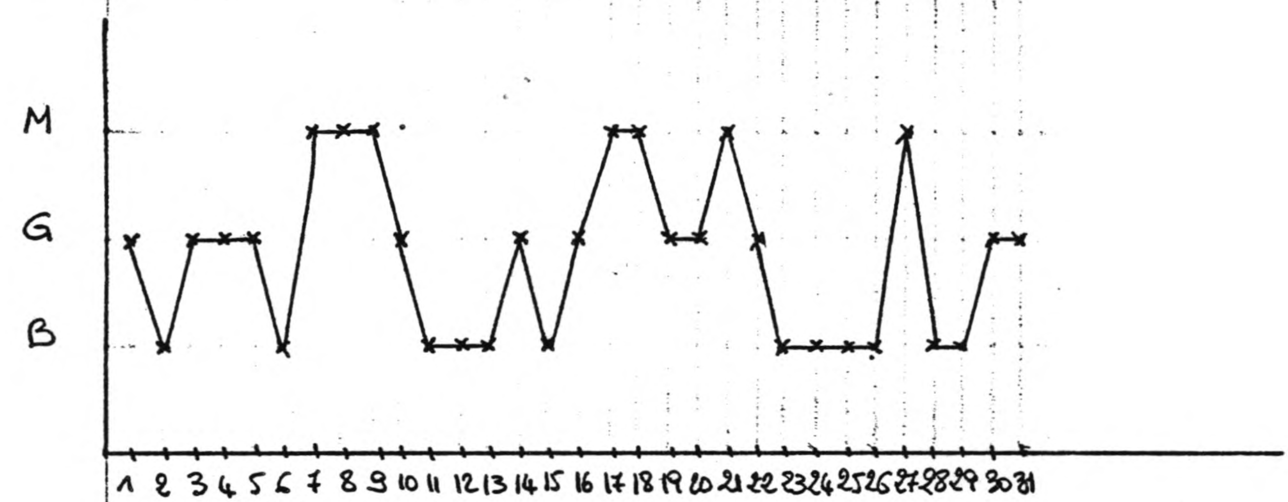
JOUVE - NOHARET

Graphique de B-G-M pour chaque mois

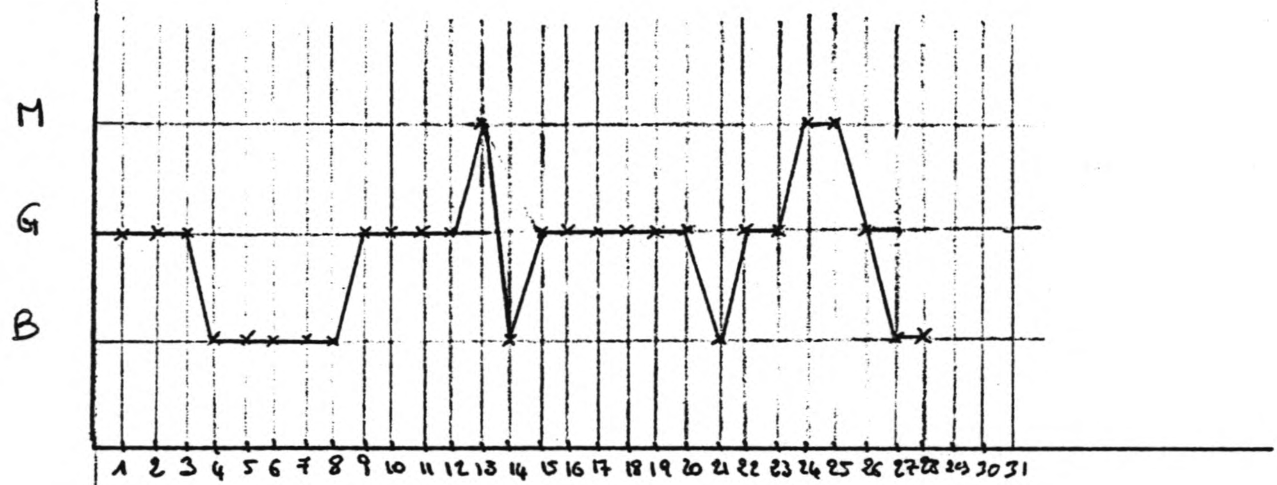
ANNEXE 2

B = 184	G = 135	M = 42

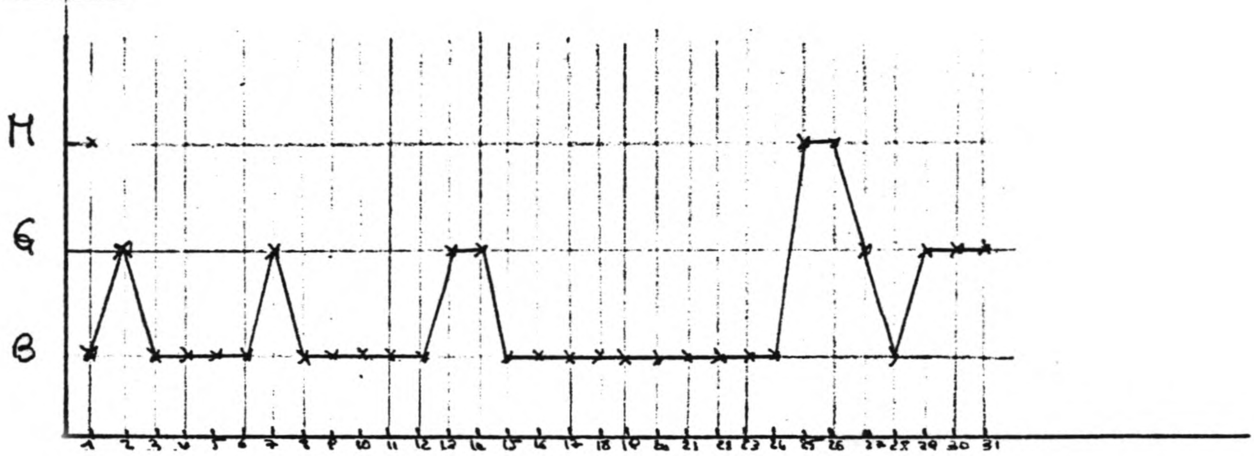
JANVIER



FEVRIER

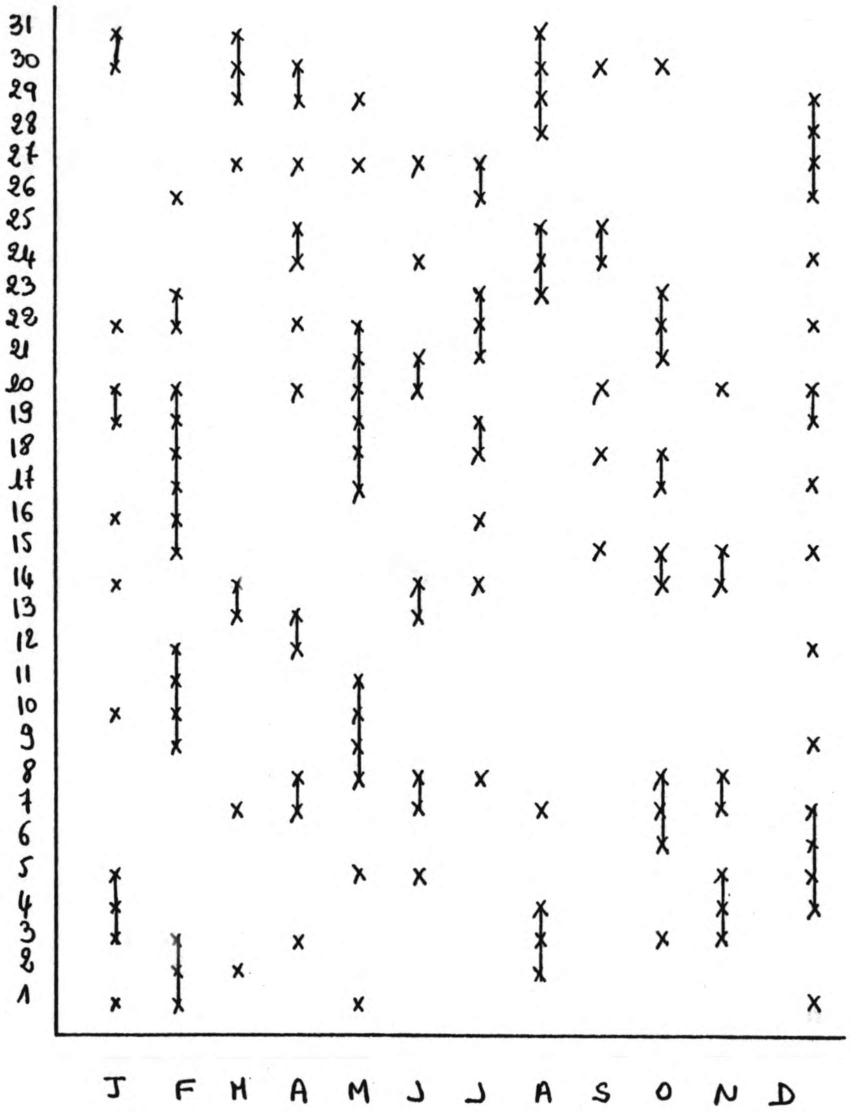


MARS

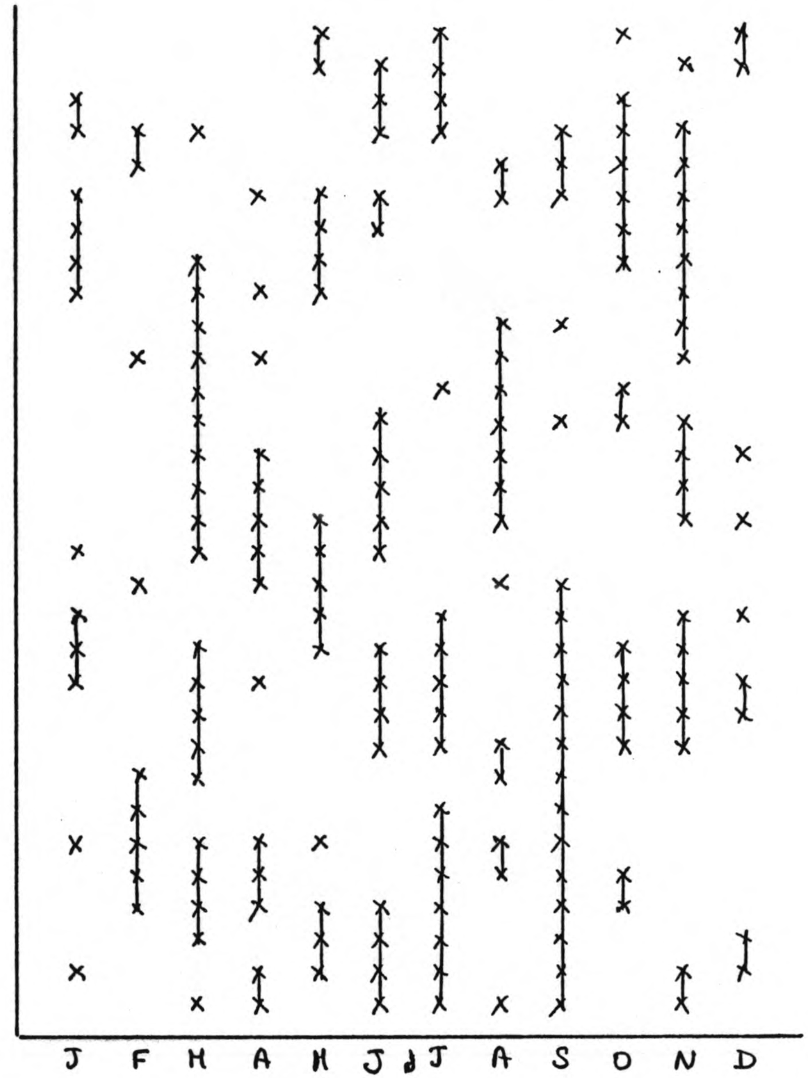


ANNEXE 3

GRIS



BEAU



Graphique de Gris se suivant de l'année Mois De Beau.
Dans le tableau des réalités

JOUVE. NOHARET

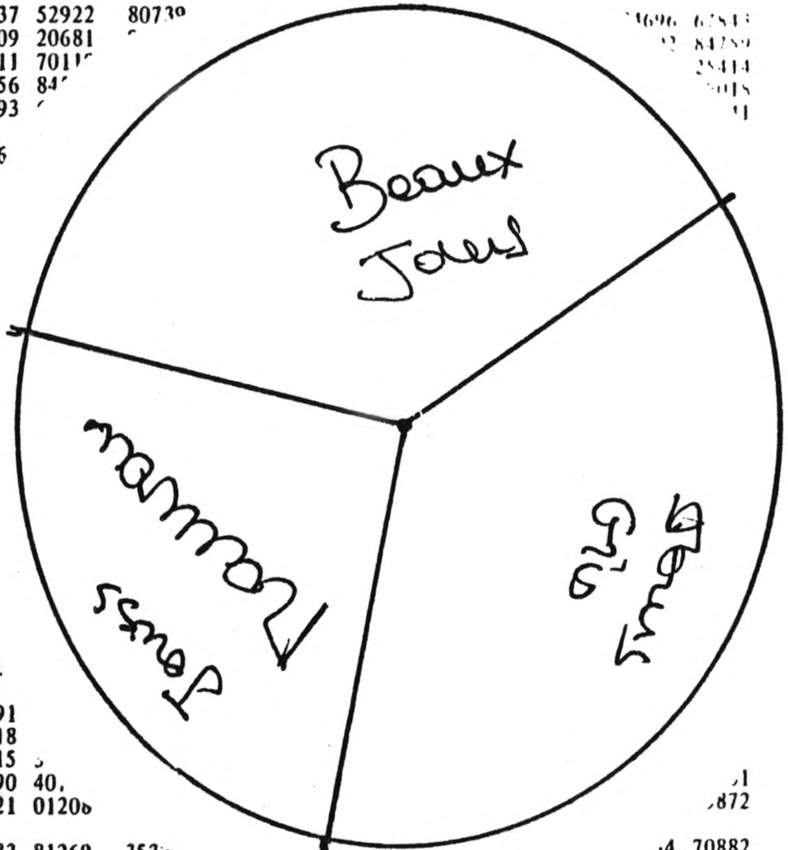
72

ANNEXE 4

Table I : Chiffres au hasard

85967	73152	14511	85285	36009	95892	36962	67835	63314	50162
07483	51453	11649	86348	76431	81594	95848	36738	25014	15460
96283	01898	61414	83525	04231	13604	75339	11730	85423	60698
49174	12074	98551	37895	93547	24769	09404	76548	05393	96770
97366	39941	21225	93629	19574	71565	33413	56087	40875	13351
90474	41469	16812	81542	81652	45554	27931	93994	22375	00953
28599	64109	09497	76235	41383	31555	12639	00619	22909	29563
25254	16210	89717	65997	82667	74624	36348	44018	64732	93589
28785	02760	24359	99410	77319	73408	58993	61098	04393	48245
84725	86576	86944	93296	10081	82454	76810	52975	10324	15457
41059	66456	47679	66810	15941	84602	14493	65515	19251	41642
67434	41045	82830	47617	36932	46728	71183	36345	41404	81110
72766	68816	37643	19959	57550	49620	98480	25640	67257	18671
92079	46784	66125	94932	64451	29275	57669	66658	30818	58353
29187	40350	62533	73603	34075	16451	42885	03448	37390	96328
74220	17612	65522	80607	19184	64164	66962	82310	18163	63495
03786	02407	06098	92917	40434	60602	82175	04470	78754	90775
75085	55558	15520	27038	25471	76107	90832	10819	56797	33751
09161	33015	19155	11715	00551	24909	31894	37774	37953	78837
75707	48992	64998	87080	39333	00767	45637	12538	67439	94914
21333	48660	31288	00086	79889	75532	28704	62844	92337	99695
65626	50061	42539	14812	48895	11196	34335	60492	70650	51108
84380	07389	87891	76255	89604	41372	10837	66992	93183	56920
46479	32072	80083	63868	70930	89654	05359	47196	12452	38234
59847	97197	55147	76639	76971	55928	36441	95141	42333	67483
31416	11231	27904	57383	31852	69137	96667	14315	01007	31929
82066	83436	67914	21465	99605	83114	97885	74440	99622	87912
01850	42782	39202	18582	46214	99228	79541	78298	75404	63648
32315	89276	89582	87138	16165	15984	21466	63830	30475	74729
59388	42703	55198	80380	67067	97155	34160	85019	03527	78140
58089	27632	50987	91373	07736	20436	96130	73483	85332	24384
61705	57285	30392	23660	75841	21931	04295	00875	09114	32101
18914	98932	60199	99275	41967	35208	30357	76772	92656	62318
11965	94039	34803	48941	69709	16784	44642	89761	66864	62803
85251	48111	80936	81781	93248	67877	16498	31924	51315	79921
66121	96986	84844	93873	46352	92183	51152	85878	30490	15974
53972	96642	24199	58080	35450	03482	66953	49521	63719	57615
14509	16594	78883	43222	23093	58645	60257	89250	63266	90858
37700	07688	65533	72126	23611	93993	01848	03910	38552	17472
85466	59392	72722	15473	73295	49759	56157	60477	83284	56367
52969	55863	42312	67842	05673	91878	82738	36563	79540	61935
42744	68315	17514	02878	97291	74851	42725	57894	81434	62041
26140	13336	67726	61876	29971	99294	96664	52817	90039	53211
95589	56319	14563	24071	06916	59555	18195	32280	79357	04224
39113	13217	59999	49952	83021	47709	53105	19295	88318	41626
41392	17622	18994	98283	07249	52289	24209	91139	30715	06604
54684	53645	79246	70183	87731	19185	08541	33519	07223	97413
89442	61001	36658	57444	95388	36682	38052	46719	09428	94012
36751	16778	54888	15357	68003	43564	90976	58904	40512	07725
98159	02564	21416	74944	53049	88749	02865	25772	89853	88714

Table I : Chiffres au hasard



12159	66144	05091	13446	45653	13684	66024	91410	51351	[illegible]
30156	90519	95785	47544	66735	35754	11088	67310	19720	[illegible]
59069	01722	53338	41942	65118	71236	01932	70343	25812	[illegible]
54107	58081	82470	59407	13475	95872	16268	78436	39251	[illegible]
99681	81295	06315	28212	45029	57701	96327	85436	33614	29070
27252	37875	53679	01889	35714	63534	63791	76342	47717	[illegible]
93259	74585	11863	78985	03881	46567	93696	93521	54970	[illegible]
84068	43759	75814	32261	12728	09636	22336	76529	01017	[illegible]
68582	97054	28251	63787	57285	18854	35006	16343	51867	[illegible]
60646	11298	19680	10087					74958	[illegible]
97437	52922	80739							[illegible]
58009	20681								[illegible]
77211	701								[illegible]
54256	84								[illegible]
37493									[illegible]
8756									
228									
02									
20									
20									
72									
31									
24									
0									
9									
9									
5									
4									
5									
4									
10									
98									
30									
993									
277									
67791									
64018									
79715									
20190	40								1
82421	01206								872
00083	81269	35320						4	70882
56558	09762	20813	48719					32567	34305
41183	20460	08608	75283	43401			639	92114	48006
39977	10603	35052	53751	64219	36235	84687	42091	42587	16996
29310	84031	03052	51356	44747	19678	14619	03600	08066	93899
47360	03571	95657	85065	80919	14890	97623	57375	77855	15735
48481	98262	50414	41929	05977	78903	47602	52154	47901	84523
48097	56362	16342	75261	27751	28715	21871	37943	17850	90999
20648	30751	96515	51581	43877	94494	80164	02115	09738	51938
60704	10107	59220	64220	23944	34684	83696	82344	19020	84834

ANNEXE 5

NOHARET - JOUVE - Tableau de comparaison réalité-simulation

	BEAU		GRIS		MAUVAIS	
JAN	16	12	13	12	2	7
FEV	15	9	13	16	0	3
MARS	12	21	15	8	4	2
AVR	14	14	9	12	7	4
MAI	17	15	11	14	3	2
JUIN	16	18	11	9	3	3
JUIL	13	17	13	10	5	4
AOUT	11	15	12	11	4	1
SEP	21	19	6	6	3	5
OCT	19	15	9	12	3	4
NOV	22	20	7	8	1	2
DEC	20	9	9	17	2	5

Réalité
Simulation.

PROBLEMES PROPOSES

PROBLEME DE METEOROLOGIE.

Dans une certaine région, il pleut un jour sur quatre. On sait d'autre part, que lorsqu'il a plu un jour il pleut deux fois sur trois le lendemain. Quelle est alors la probabilité qu'il ne pleuve pas pendant une journée, alors qu'il n'a pas plu la veille ?

LE TAXIPHONE.

Le taxiphone de la rue Blaise Pascal est assez fantaisiste. Lorsqu'on introduit un jeton et que l'on forme un numéro, il lui arrive de ne pas donner la communication mais d'encaisser malgré tout le jeton, ou bien de donner la communication et de rendre le jeton, ou encore de donner la communication et d'encaisser le jeton. Sans tenir compte des cas où, n'ayant pas donné la communication, il rend le jeton, on a constaté que, sur dix jetons on obtient huit fois la communication, et que, toujours sur dix jetons, il encaisse neuf jetons. Quelle est la probabilité de téléphoner gratuitement ?

METRO OU VOITURE.

Pour se rendre à son bureau, Monsieur X prend tantôt sa voiture, tantôt le métro. Il constate que, lorsqu'il prend sa voiture il arrive une fois sur deux en retard, et lorsqu'il prend le métro il arrive en retard une fois sur quatre. Il décide que, lorsqu'il est à l'heure, il empruntera le lendemain le même moyen de locomotion, tandis que, chaque fois qu'il est en retard, il en changera le lendemain. Monsieur X a-t-il beaucoup de chance d'arriver en retard au bout de 365 jours selon ce procédé ?

ILS N'ONT PAS TOUS LES MEMES CHANCES.

Trois hommes A, B et C ont été condamnés à mort, et se trouvent dans trois cellules de la prison de X. Le gouverneur décide de gracier l'un d'eux ; pour cela il inscrit leurs trois noms sur des papiers, qu'il met dans un chapeau. Après avoir secoué, il tire un des papiers. Il téléphone alors au surveillant pour lui annoncer cette nouvelle, mais lui ordonne de n'en rien dire aux prisonniers. Toutefois, par on ne sait quel mystère, le prisonnier A a vent de cette histoire. Aussi demande t-il au surveillant de lui dire qui est gracié. Le surveillant refuse !

«Alors dites-moi le nom d'un de ceux qui seront exécutés, demande t-il». «Si c'est B qui est gracié, donnez-moi le nom de C ; si c'est C qui est gracié, donnez-moi le nom de B ; et si c'est moi qui suis gracié, lancez une pièce pour savoir si vous me donnerez le nom de B ou celui de C».

Le surveillant réfléchit toute la nuit et calcula que, s'il adoptait cette méthode, cela ne renseignerait pas A sur ces chances. Le lendemain il annonça donc à A que B serait exécuté.

A se réjouit beaucoup, car il pensait que le condamné gracié était ou C ou lui-même, et que par conséquent ses chances de survivre étaient passées de 1/3 à 1/2. Il réussit même à communiquer avec C, et il lui raconta tout ce qui s'était passé. C se réjouit également, car il calcula que, pour sa part, ses chances de survie étaient passées de 1/3 à 2/3.

N'est-il pas paradoxal que A estime ses chances à 1/2 et que C estime les siennes à 2/3 ? Comment peut-on expliquer cela ? Le surveillant d'une part, A et C d'autre part ont-ils correctement raisonné ?

CHOISIR UNE METHODE.

Une urne contient cinq boules blanches et cinq boules noires. On y au hasard trois boules, et ont veut obtenir une boule blanche et deux boules noires. A-t-on intérêt à tirer les trois boules une par une en remettant dans l'urne la boule tirée, ou sans la remettre dans l'urne ?

QUAND DEUX EVENEMENTS SONT INDEPENDANTS.

Etant donné un espace probabilisé (Ω, B, p) et deux évènements A et B indépendants, montrer que parmi les trois évènements suivants :

$$A \cap B, \qquad A \,\Delta\, B, \qquad \overline{A \cup B}$$

l'un au moins a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{4}{9}$.

Comment piper deux pièces pour que, lors d'un lancer simultané de ces deux pièces, les trois évènements suivants :

«avoir deux piles»
«avoir un pile et un face»
«avoir deux faces»

soient équiprobables ?

Ces deux exercices sont inspirés de l'ouvrage de G. LETAC : «Problèmes de probabilités».