
C'EST L'ANNÉE SCHUBERT !

1997, l'année Schubert! Les feux de l'actualité sont éteints, mais le bonheur d'écouter Schubert et les raisons d'apprendre à l'aimer demeurent.

Dans le courrier que nous présentons ici, Michel BOUZY, Instituteur Maître Formateur à l'école Raymond Queneau à Montrouge (92), nous relate une séquence de mathématiques conduite avec ses élèves de CM2 autour d'un problème d'édition des quatuors de Schubert. Nous prolongerons ce compte-rendu par quelques notes de la rédaction de Grand N.

Esquissons avec lui le cadre dans lequel le problème fut proposé :

«Nous avons donc découvert ce qu'était un quatuor, nous en avons écouté certains mouvements, observé la structure...

Charlotte a apporté son violon, joué devant la classe...

En lecture suivie, nous avons travaillé une histoire de luthiers, et pas n'importe lesquels, Amati et Stradivarius...».

L'édition des quatuors de Schubert, un problème en CM2

Le problème est proposé aux élèves, à partir de la fiche descriptive des quatuors donnée en annexe :

«Franz Schubert a écrit 15 quatuors à cordes. Un éditeur de musique veut les enregistrer sur des CD, mais :

- il ne veut pas séparer les différents mouvements d'un quatuor,*
 - la durée maximum d'un CD est de 75 minutes,*
 - il veut que ces quatuors tiennent sur le moins de CD possible.*
- Comment peut-il faire ?»*

Les élèves sont organisés par groupes de quatre (ou de trois) : une fiche descriptive par élève, une feuille de papier format A3 par groupe.

Le travail est réparti sur deux jours, deux fois une heure.

Eléments de déroulement

• La première séance

Assez rapidement, les enfants ont pris conscience qu'il fallait d'abord additionner les temps de chaque mouvement pour trouver la durée d'un quatuor.

Éléments de dialogue :

E : *Il faut additionner tout ça ?*

M : *Non! Pas tout ça. Mais il faut additionner.*

E : *On n'y arrivera jamais, c'est trop long!*

M : *Vous êtes quatre.*

E : ...

E : *On n'est pas obligé de faire le problème chacun pour soi.*

M : *Vous êtes quatre dans votre groupe. Il faut que votre groupe me rende une solution.*

A l'issue de la première séance, tous les groupes avaient calculé la durée de chaque quatuor .

Problèmes rencontrés

- La forme des résultats des calculs

Par exemple, pour le premier quatuor :

$\begin{array}{r} 6'27 \\ + 3'52 \\ + 4'09 \\ + 3'02 \\ \hline 16'90 \end{array}$	Certains groupes proposaient des résultats de ce type que je n'acceptais pas. Dans ces cas simples comme ci-contre, ils transformaient rapidement 16'90 en 17'30.
---	---

Pour le quatuor n°14, devant la difficulté de certains, je leur dis que pour transformer 37'164, la calculette (GA9) pouvait les aider. S'ils avaient clairement conscience qu'il s'agissait d'une division par 60, ils se demandaient sur quelle touche appuyer : $\div$ ou $\div$?

- Le résultat proposé lui-même

Par exemple, pour le quatuor n°10 :

$\begin{array}{r} 9.16 \\ + 6.18 \\ + 1.52 \\ + 7.22 \\ \hline 24.08 \end{array}$	Les enfants écrivaient plutôt 9.16 que 9'16, ayant déjà rencontré cette écriture dans les horaires de chemin de fer.
---	--

Éléments de dialogue :

M : *Cependant ta réponse est fausse.*

E : ...

E : *Regarde, la calculette trouve pareil.*

M : *Rappelle-moi ce que signifie 9'16*

E : *(après hésitation) Neuf minutes seize secondes*

M : *D'accord. Et dans une minute, il y a combien de secondes ?*

E : *Soixante!*

M : *Maintenant, je vous laisse réfléchir.*

Deux groupes ont trouvé presque en même temps la bonne réponse.

Mise en commun (uniquement orale : j'avais peur qu'une trace écrite au tableau induise trop de choses).

Premier groupe : *On a additionné toutes les secondes, on en a trouvé 108, et puis on a additionné les minutes. Il y en a 23.*

M : *Donc vous trouvez que le quatuor n°10 dure 23 minutes 108 secondes.*

Protestation générale : *On ne peut pas le laisser comme ça.*

M : *Alors transformez.*

Certains groupes parviennent à transformer 23 min. 108 s. en 24 min. 48 s., d'autres non.

M : *La calculatrice ne peut-elle pas vous aider ?*

Discussion!

Rapidement apparaît la division de 108 par 60, avec le quotient 1 et le reste 48.

A la fin de la première heure, tous les groupes avaient trouvé la durée de chaque quatuor.

• Le lendemain, la deuxième séance

Il s'agissait de regrouper les quatuors afin qu'ils tiennent sur des disques dont la «capacité» maximum est de 75 minutes.

Les enfants étaient toujours par groupes. Le travail avançait assez vite. Un groupe essayait de tomber pile sur 75 minutes.

Discussion!

Ils recommencèrent, mais en essayant malgré tout de s'approcher le plus possible de 75 minutes. Une solution comme 65 minutes ne les satisfaisait pas.

Discussion!

Différentes modalités de groupements ont été trouvées.

Par exemple :

Groupe 1 :

D₁ : 1 - 2 - 3 - 5

D₂ : 4 - 6 - 8

D₃ : 15 - 11 - 12

D₄ : 10 - 13

D₅ : 7 - 9

D₆ : 14

Groupe 2 :

D₁ : 1 - 2 - 3

D₂ : 4 - 5 - 6

D₃ : 7 - 8 - 9

D₄ : 10 - 11 - 12

D₅ : 13 - 14

D₆ : 15

Ces résultats ont été comparés au choix de l'éditeur :

D₁ : 1 - 2 - 3

D₂ : 4 - 5 - 6

D₃ : 7 - 8 - 9

D₄ : 10 - 13

D₅ : 11 - 14

D₆ : 12 - 15

Ce problème aura finalement permis aux enfants :

- d'effectuer de nombreux calculs sur les minutes et les secondes ;
- de prendre conscience que même dans de tels calculs on pouvait utiliser la calculatrice (pour les minutes) ou pour transformer des secondes en minutes et des minutes en secondes ;

- de se partager un travail ;
- et... , peut-être, d'aimer Schubert.

Commentaires de la rédaction

Cette situation a suscité une première discussion sur l'opportunité présentée par la notation des durées dans le document fourni aux élèves : la notation 9'16 et non la notation normalisée 9 min. 16 s. Cette notation figure sur les fiches de nombreux enregistrements CD, en concurrence avec la notation 9:16 ou encore avec 9.16, comme sur les horaires de chemin de fer.

Avec de telles données, ne s'expose-t-on pas au risque de «confusion» avec une écriture décimale ? N'a-t-on pas là, au contraire, l'occasion d'apprendre à maîtriser des écritures présentes dans la culture : «Au CM1, écrit Jean-Pierre Bouzy, nous avons déjà travaillé sur des horaires de chemins de fer -c'est la deuxième année que je travaillais avec ces enfants-. Lorsque j'ai proposé ce travail, une majorité d'enfants n'étaient pas convaincus que les règles de la base 10 ne pourraient pas s'appliquer».

Après-coup, ce problème apparaît intéressant à plusieurs titres.

• Calcul des durées de chaque quatuor

Intérêt sur le plan méthodologique

- il s'agit de se répartir le travail dans chaque groupe (y compris celui d'une première vérification des calculs),
- l'ampleur de la tâche induit l'usage d'un outil pour aller plus vite : la calculatrice, oui, mais comment ?

Intérêt sur la plan mathématique

- savoir interpréter une écriture de durée non classique (à l'école)
- rendre fonctionnel le système en partie sexagésimal des durées : il ne s'agit pas seulement d'avoir conscience qu'il s'agit de minutes et de secondes...
- utiliser la calculatrice pour rechercher un quotient entier, pour un «changement de base» (passer de la base dix à la base soixante).

• Recherche d'une optimisation pour la mise sur CD

Commençons par une petite étude du problème.

La durée des quatuors va de 9'57 (n° 12) à 40'45 (n° 15), non compris les blancs qui séparent les mouvements :

- deux plutôt courts : les n° 5 et 12, à moins de 14'
- puis d'autres que nous pouvons regrouper par durées «équivalentes» (ça se discute!)
- trois un peu plus longs : les n° 1, 2 et 7, entre 17'15 et 18'30
 - sept de durée moyenne, les n° 3, 4, 6, 8, 9, 10 et 11, entre 21'36 et 26'34
 - trois nettement plus longs : les n° 13, 14 et 15, entre 37'15 et 40'45.

La **contrainte d'une durée maximum de 75 minutes** pour un CD va entraîner la nécessité de séparer les trois dernier quatuors : il est impossible que deux d'entre eux figurent sur le même CD.

Cette même contrainte permet de prévoir un nombre de CD en dessous duquel il est impossible de faire tenir tous les quatuors. En effet, la durée totale des quinze quatuors, **non compris les blancs qui les séparent ainsi que ceux qui séparent les mouvements**, est de plus de 331' et de moins de 369' (encadrement obtenu en encadrant grossièrement la durée de chaque quatuor : d'une part, le nombre entier de minutes, somme du nombre de minutes de chaque mouvement, d'autre part, le nombre entier de minutes qui majore immédiatement la durée du quatuor. Ouf !). On peut finalement conclure qu'il faut au moins cinq CD.

On pourrait trouver une estimation moins grossière de la durée totale, voire la calculer : il n'en resterait pas moins que **la contrainte de ne pas séparer les**

différents mouvements d'un quatuor amène à essayer de proposer une répartition sur cinq CD dont on ne peut être sûr, à ce stade, qu'elle aboutisse..

Essayons de répartir les quatuors en commençant par compléter les trois CD qui contiennent les n° 13, 14 et 15 en **essayant de** «perdre le moins de place possible». Pour cela on peut essayer de «jouer» sur les quatuors de durée plutôt courte.

Cela peut donner :

n° 1 - 2 - 13	(il reste 2'6 pour des blancs)
n° 5 - 7 - 14	(il reste 2'54 pour des blancs)
n° 11 - 12 - 15	(il reste 1'35 pour des blancs)

Il reste alors six quatuors de durée moyenne, autour de 25'. Peut-on espérer les répartir sur deux CD seulement ? Pour cela, on peut essayer de jouer en regroupant des quatuors de durée de valeurs extrêmes autour de cette moyenne... Finalement, une proposition est possible :

n° 3 - 6 - 9	(il reste 2'43 pour des blancs)
n° 4 - 8 - 10	(il reste 2'02 pour des blancs);

Il est hors de question de trouver que l'intérêt du problème réside dans une telle démarche, pour un élève de CM2.

En revanche, on peut retenir certains éléments pertinents dans les choix pour la fabrication de la solution proposée :

- Elle a mis en évidence la nécessité de séparer les trois derniers quatuors : cette séparation apparaît dans la première solution des élèves et dans le choix de l'éditeur ; elle n'apparaît pas dans la deuxième proposition des élèves, disqualifiée par la durée totale des quatuors n° 13 et 14.

- Elle montre que l'on peut essayer d'être économe en place perdue, ce qui ne signifie pas qu'il faille des durées totales de 75 minutes.

De plus, on peut discuter de ces choix en **intégrant explicitement d'autres contraintes** que celles qui ont été supposées dans l'énoncé du problème.

- La solution proposée avec cinq CD pose le problème de la durée des blancs, entre chaque mouvement et entre chaque quatuor ; peut-on trouver suffisant 1'35 pour huit séparations de mouvements plus deux de quatuors ? A quoi bon vouloir des

durées totales les plus proches de 75 minutes sans tenir compte des blancs ? Il faudrait pouvoir estimer ces blancs, faire par exemple des mesures sur des enregistrements...

- Cette solution a un certain équilibre : les durées totales des enregistrements sont relativement équivalentes. Celle de l'éditeur est un peu moins équilibrée. La première proposition des élèves laisse beaucoup de place sur le dernier CD : les contraintes mathématiques l'autorisaient ...

- En revanche, la proposition rompt l'ordre dans la numérotation (chronologique ? officielle ?) des quatuors ; celle de l'éditeur le respecte, tout comme celle des groupes. Quelle importance ceci a-t-il d'un point de vue musical ? Que permet la contrainte de ne pas modifier cet ordre, celle de ne pas "trop" le modifier ?

Dans ce problème, c'est la recherche d'une optimisation qui nous semble présenter de l'intérêt, bien davantage que la production d'une solution mathématiquement optimale, selon le seul critère mathématique (et économique ?) considéré.

On peut conduire, pour sa phase de conclusion, une réelle démarche de modélisation. Il s'agit alors de proposer et de confronter des solutions : les solutions des groupes, celle de l'éditeur et d'autres encore, peuvent être reconsidérées en tenant compte d'autres contraintes réelles (et sur lesquelles on pourrait se renseigner) que celles auxquelles l'énoncé se limitait.

Madeleine EBERHARD

ANNEXE : Les Quatuors de Schubert

Streichquartett (in verschiedenen Tonarten)

String Quartet (in various keys)

Quatuor à Cordes en diverses tonalités

D 18 (N° 1)

- | | |
|--------------------------|------|
| 1. Andante Presto vivace | 6'27 |
| 2. Menuetto | 3'52 |
| 3. Andante | 4'09 |
| 4. Presto | 3'02 |

Streichquartett C-dur

String Quartet in C majeur

Quatuor à Cordes en ut majeur

D 32 (N° 2)

- | | |
|------------------------|------|
| 1. Presto | 4'39 |
| 2. Andante | 4'08 |
| 3. Menuetto Allegro | 2'54 |
| 4. Allegro con spirito | 5'34 |

Streichquartett B-dur

String Quartet in B flat majeur

Quatuor à Cordes en si bémol majeur

D 36 (N° 3)

- | | |
|-----------------------------------|------|
| 1. Allegro | 9'36 |
| 2. Andante | 4'47 |
| 3. Menuetto Allegro ma non troppo | 5'01 |
| 4. Allegretto | 6'51 |

Streichquartett C-dur

String Quartet in C majeur

Quatuor à Cordes en ut majeur

D 46 (N° 4)

- | | |
|----------------------------|------|
| 1. Adagio Allegro con moto | 8'22 |
| 2. Andante con moto | 4'22 |
| 3. Menuetto Allegro | 4'41 |
| 4. Allegro | 4'11 |

Streichquartett B-dur

String Quartet in B flat majeur

Quatuor à Cordes en si bémol major

D 68 (N° 5)

- | | |
|------------|------|
| 1. Allegro | 7'07 |
| 2. Allegro | 6'45 |

Streichquartett D-dur

String Quartet in D majeur

Quatuor à Cordes en ré majeur

D 74 (N° 6)

- | | |
|--------------------------|------|
| 1. Allegro ma non troppo | 7'35 |
| 2. Andante | 5'39 |
| 3. Menuetto Allegro | 4'30 |
| 4. Allegro | 4'55 |

Streichquartett D-dur

String Quartet in D majeur

Quatuor à Cordes en ré majeur

D 94 (N° 7)

- | | |
|---------------------|------|
| 1. Allegro | 6'50 |
| 2. Andante con moto | 5'35 |
| 3. Menuetto Allegro | 2'52 |
| 4. Presto | 3'13 |

Streichquartett B-dur

String Quartet in B flat majeur

Quatuor à Cordes en si bémol major

D 112 (N° 8)

- | | |
|--------------------------|------|
| 1. Allegro ma non troppo | 8'52 |
| 2. Andante sostenuto | 8'09 |
| 3. Menuetto Allegro | 6'05 |
| 4. Presto | 3'28 |

Streichquartett g-moll

String Quartet in G minor

Quatuor à Cordes en sol mineur

D 173 (N° 9)

1. Allegro con brio

6'03

2. Andantino

6'59

3. Menuetto Allegro vivace

4'09

4. Allegro

6'07

Streichquartett Es-dur op. post. 125 Nr. 1

String Quartet in E flat major, op. post. 125 N° 1

Quatuor à Cordes en mi bémol majeur, op. posth. 125 N° 1

D 87 (N° 10)

1. Allegro moderato

9'16

2. Adagio

6'18

3. Scherzo. Prestissimo

1'52

4. Allegro

7'22

Streichquartett E-dur op. post. 125 Nr. 2

String Quartet in E major, op. post. 125 N° 2

Quatuor à Cordes en mi majeur, op. posth. 125 N° 2

D 353 (N° 11)

1. Allegro con fuoco

7'14

2. Andante

6'45

3. Menuetto, Allegro vivace

3'15

4. Rondo Allegro vivace

5'29

Streichquartett a-moll op. 29 Nr. 1

« Rosamunde »

String Quartet in A minor, op. 29 N° 1

Quatuor à Cordes en la mineur, op. 29 N° 1

D 804 (N° 13)

1. Allegro ma non troppa

14'12

2. Andante

7'31

3. Menuetto, Allegro

7'58

4. Allegro moderato

7'38

Streichquartett d-moll

« Der Tod und das Mädchen »

String Quartet in D minor

« Death and the Maiden »

Quatuor à Cordes en ré mineur

« La Jeune Fille et la Mort »

D 810 (N° 14)

1. Allegro

12'22

2. Andante con moto

13'55

3. Scherzo, Allegro molto

3'53

4. Presto

9'34

Streichquartett G-dur op. post. 161

String Quartet in G major, op. post. 161

Quatuor à Cordes en sol majeur, op. posth. 161

D 887 (N° 15)

1. Allegro molto moderato

10'07

2. Andante un poco moto

12'21

3. Scherzo, Allegro vivace - Trio Allegretto

6'43

4. Allegro assai

11'34

Quartettsatz c-moll

Quartet Movement in C minor

Mouvement de Quatuor en ut mineur

D703 (N° 12)

1. Allegro assai

9'57