# "PARTAGER, C'EST COMPTER"

*Variables de situations et conduites des élèves. Analyses de protocoles.*

SCHUBAUER Richard
Service de la Recherche Pédagogique, Genève

BRUN Jean, LEUTENEGGER Francia
Faculté des Sciences de l'Education, Genève

*"Par sa nature, l'activité de partage est en rapport étroit avec la notion de nombre et en particulier avec celle d'équivalence numérique. Pourtant, les études sur le développement de ces notions ont jusqu'à présent très peu utilisé le partage chez l'enfant".*

*Olivier Frydman, La Recherche, n° 215, nov. 1989.*

## I - PROLEGOMENES

La construction du nombre telle qu'elle est conçue dans les méthodologies pour les premiers degrés de l'école primaire suisse-romande est centrée presque uniquement sur des activités de mesure de collections d'objets, de cardinalisation, de comparaison, de réunion d'ensembles disjoints. Des tâches de partage équitable sont introduites en 3P[1] (8-9 ans) dans un chapitre sur l'apprentissage du symbolisme de la division écrite, présentée comme l'opération inverse de la multiplication.

La lecture de l'ouvrage collectif de l'INRP "Apprentissages numériques"[2],nous a permis d'élargir, à travers la notion de partage, le champ conceptuel de la construction du nombre. Les auteurs y proposent plusieurs séquences, ordonnées[3], allant des partages inéquitables puis équitables d'objets déplaçables, aux partages équitables d'objets non déplaçables (p. 121 et 122).

L'activité mathématique dont il est question ici, baptisée dans un premier temps *"Les colliers"*, entre dans la catégorie des situations de partage équitable d'objets déplaçables ; elle est inspirée de celle dite *"Des maracas"* (ouvrage cité, p. 121). Dans un premier temps nous prenons l'option de ne pas présenter le déroulement de ces séquences, mais de mettre en évidence ce qui se passe en amont de la situation didactique, lors de leurs constructions et de leurs expérimentations, afin de vous rendre sensibles à nos choix et à leurs justifications théoriques, en deux mots, de vous révéler notre travail d'ingénierie.

---

[1] 1P = CP ; 2P = CE1 ; 3P = CE2.

[2] ERMEL, Apprentissages numériques, Hatier-enseignants, Paris, 1990.

[3] "Des nombres pour partager", chapitre 4, pp. 118 à 137.

Quelques précisions concernant le statut de l'activité décrite. Cette dernière s'inscrit dans le cadre d'une *recherche* conduite par des formateurs en mathématique de l'enseignement primaire genevois[4] qui participent à un séminaire universitaire en didactique des mathématiques sous la responsabilité de J. Brun.

Même si l'activité dont il est question ici s'apparente à une activité scolaire, *elle garde pour l'instant un statut expérimental.* Son but est l'étude des procédures sous l'effet des variables de situation : observation de groupes de trois élèves, hors classe, avec la présence de un ou deux observateurs, d'un animateur et d'un dispositif d'enregistrement (son et images). L'étape ultérieure, dont les résultats ne figurent pas dans le présent article, consistera à réaliser, observer et analyser les mêmes activités immergées dans le système didactique stricto sensu.

La première partie de cet article fait le point sur les recherches conduites pendant les années scolaires 90-91 et 91-92 dans les degrés 1P, 2P, et 3P de l'école primaire (6 - 9 ans).

La deuxième partie (1992-1993) comporte le compte rendu et l'analyse d'un "moment" particulier des problèmes de partage, celui de *l'égalisation des différences* entre collections. L'analyse des corpus d'observations[5] de la première partie a rendu nécessaire cette nouvelle étape dans le but affirmé de mieux contrôler la globalité de la situation.

Les résultats des observations sur les petits groupes ont permis de faire des choix contrôlés sur les variables et sur l'ordre des problèmes. Il reste néanmoins à mettre sur pied l'expérimentation de la séquence et de sa transmission aux maîtres.

## II - CONSTRUCTION DE LA SEQUENCE "COLLIERS"

### II.1. Les choix matériels

Les colliers se fabriquent avec des perles ... Leurs tailles, leurs couleurs, leurs formes sont-elles indifférentes ? Le fil doit-il être rigide, souple ?

Nous avons choisi les perles de tailles, de formes et de couleurs différentes. Les deux premières variables auront directement des conséquences sur les procédures ; de même taille et de même forme, cela pourrait privilégier la mise en correspondance des longueurs au détriment du dénombrement. De même avec un fil trop rigide. Quant aux couleurs, elles seront en nombre supérieur à celui des élèves en présence, afin de les contraindre à ne pas se constituer des colliers par couleurs.

### II.2. Les consignes

Pour bien mettre en évidence les choix que nous avons opérés au niveau des variables, découlant des hypothèses sur les procédures attendues des élèves, nous

---

[4] Mmes D. Berney, M. Goerg, N. Guillet, F. Hirsig, L. Pasche et MM. M. Jaton, E.H. Saada et R. Schubauer.

[5] Le travail d'analyse a posteriori, dont il sera question dans les lignes à venir, a été réalisé sur la base des protocoles, soit directs (avec des réductions inévitables) soit retranscrits à la suite des séquences d'observation (beaucoup plus détaillés, comportant non seulement les paroles des acteurs, mais aussi leurs gestes).

présenterons les trois consignes ensemble. Pour la consigne les variables seront en italique dans le texte, les autres variables de situation figurent sous le texte de la consigne.

**Consigne A :**

Partagez ces perles pour fabriquer chacun *un collier*. A la fin chaque collier doit avoir *le même nombre de perles* et il doit en rester *le moins possible* dans la boîte.

Variables :
a. le nombre d'élèves; valeur de la variable : 3 ;
b. le nombre de perles; valeur de la variable : 47, 50 ou 53.

Le nombre de perles dépend du nombre d'élèves en présence et détermine le reste, ici 2 ; La valeur du reste a son importance, proche du nombre d'élèves il devrait leur poser un problème, trop petit, l'évidence n'est pas remise en question.

Cette consigne a servi de base d'expérimentation, c'est la plus proche de celle proposée dans le manuel déjà cité.

**Consigne B :**

Partagez ces perles pour fabriquer *trois colliers*. A la fin chaque collier doit avoir *le même nombre de perles* et il doit en rester *le moins possible* dans la boîte.

Variables :
a. le nombre d'élèves ; valeur : 2
b. le nombre de perles ; valeur : 50 ou 53

La modification de la valeur de la variable "nombre d'élèves" est censée avoir comme effet le recours au numérique. Notre hypothèse que deux élèves devant fabriquer trois colliers procéderaient d'abord à un partage préalable de la collection avant de les fabriquer ; cela devrait les contraindre à anticiper, par le passage d'emblée au numérique.

**Consigne C :**

Partagez ces perles pour fabriquer chacun *deux bracelets*. A la fin chaque bracelet doit avoir *le même nombre de perles* et il doit en rester *le moins possible* dans la boîte.

Variables :
a. le nombre d'élèves ; valeur : 3
b. le nombre de perles ; valeur 64 ou 70
c. le nombre de bracelets ; valeur : 6

Le choix des variables met l'accent sur la gestion du reste, prévu ici plus grand que le nombre d'élèves, mais inférieur au nombre des bracelets.

Nous avons fait l'hypothèse, avec cette troisième consigne, que les élèves s'engageraient d'abord dans un partage global préalable en trois parts puis dans un partage secondaire en deux parties.

### II.3. Les procédures attendues

Nous avons déterminé trois classes de procédures, ordonnées par leur apparition dans la situation. Nous verrons aussi que tenter leur classement peut à tout moment être remis en cause par l'analyse a posteriori, que certaines procédures sont "liées" et que cela n'est pas toujours facile d'en rendre compte par l'écriture.

Les procédures de partage :

**P1** : chacun pour soi (par poignées, un par un)
**P2** : distribution organisée par un distributeur (un par un, deux par deux, ...)
**P3** : partage organisé (chacun prend en même temps)
**P4** : approximation du tout et répartition par approximation (numérique ou non)
**P5** : partage avec comptage préalable et répartition approximative
**P6** : partage avec comptage préalable et répartition exacte

Les procédures de mesure des collections :

**M1** : pas de mesure
**M2** : mesure de longueur des colliers
**M3** : correspondance terme à terme sans comptine
**M4** : correspondance terme à terme avec comptine à répétition
(1,1 - 2,2 - 3,3 - ... ou 1,1,1 - 2,2,2 - ...)
**M5** : correspondance terme à terme avec comptine simple
(1,2,3,...)
**M6** : comptage (coordination : pointage et numération parlée)

Les procédures de compensation (après mesure, si nécessaire) :

**C1** : pas de compensation (arrêt)
**C2** : pas de compensation , retour au partage
**C3** : compensation par rapport à la longueur des colliers
(sur les perles : grosses-petites; sur les colliers : courts-longs)
**C4** : compensation par l'acte de répartir la différence (sans le nombre)
**C5** : compensation numérique

Ces procédures, classées selon leur degré de complexité, ne correspondent aucunement à des étapes que les élèves devraient franchir ; elles sont dépendantes des représentations qu'ils se font du problème, des connaissances qu'ils peuvent mobiliser pour le résoudre et de la valeur de certaines variables, à l'instar du nombre d'objets composant le tout à partager ; des touts et des parts dépassant les compétences numériques des élèves privilégieront des procédures de types P2 et P3, le dénombrement n'étant pas "économique" dans ces cas (la solution du problème ne prévoit pas de réponses numériques). Autre remarque, les procédures de partage et de mesure pourraient très bien être mobilisées simultanément ; celles de compensation pourraient ne pas apparaître en cas de réussite des premières.

## III - LE PLAN D'EXPERIMENTATION DES "COLLIERS"

Il s'agit à ce stade de confronter nos hypothèses sur les procédures, de les valider ou de les infirmer, de modifier certaines variables en fonction des procédures effectives des élèves. Historiquement nous avons débuté avec la consigne A, ce n'est qu'après analyse des premiers protocoles d'observation que nous avons construit les consignes B et C. Nous avons conduit sept observations en 1P et 2P (11 groupes d'élèves), dont deux dans l'enseignement spécialisé.

Le dispositif comprend un expérimentateur, deux observateurs dont un tient la caméra vidéo, le second prend des notes et s'occupe de l'enregistreur audio.

En dehors de la consigne, nous avons prévu de ne pas intervenir autrement qu'en y renvoyant les élèves (relances) : "Est-ce bien ce que je vous avais demandé de faire ?" ou "Est-ce que chaque collier a le même nombre de perles, est-ce qu'il en reste le moins possible ?". Décision fut prise de ne pas se fixer sur la réussite de la tâche, mais seulement d'essayer de comprendre jusqu'où et comment les élèves prenaient en charge la résolution du problème.

### Un exemple de travail en première primaire (27.11.1990)

Nous n'allons pas vous imposer la lecture d'un protocole complet ; nous nous tiendrons à une présentation chronologique des moments clés de la séquence (définis par l'analyse a priori des procédures) accompagnés de commentaires sur les procédures des élèves.

Les élèves : 1 garçon (Jo), 2 filles (Ka) et (Ma)
L'expérimentatrice (E)
Les codes entre [ ] renvoient aux procédures décrites auparavant.

Consigne A, nombre de perles : 47

E *Voilà cet après-midi vous allez faire des colliers voilà les fils pour faire chacun et chacune un collier ... alors écoutez bien la consigne ... vous allez vous partager ces perles pour faire chacun un collier et à la fin quand le collier sera terminé il faudra que chaque collier ait le même nom... ils aient tous le même nombre de perles les colliers et aussi qu'il reste le moins possible de perles dans la boîte ... donc tous le même nombre de perles et le moins de perles qui restent dans la boîte ... voilà vous pouvez y aller.*

Pendant cinquante secondes les élèves fabriquent chacun pour soi un collier, en silence.[ P1 ].

| | |
|---|---|
| *Ka à Jo* | *t'en as combien ?* |
| *Ka et Jo* | *(à deux voix) un deux trois quatre ... ... douze treize ...* |
| *Jo* | *...quatorze* |
| *Ka* | *...treize (à Ma) combien toi* |
| *Ma* | *quinze* |

Mesure de chaque collier séparément [M6] : Jo = 16; Ka = 16; Ma = 15. La boîte est **vide** (...).

| | |
|---|---|
| *E* | *voilà alors vous avez fait ce que je vous avais demandé ?* |
| *ensemble* | *oui (...)* |
| *Ka* | *mais lui il en a plus [comparaison sur le nombre : 16 > 15]* |
| *E* | *est-ce qu'il a le droit d'en avoir plus que toi ?* |
| *Ka* | *y doit en avoir la même quantité que les autres* |

Nous remarquons que pour ces élèves "le moins possible" signifie prendre toutes les perles.

| | |
|---|---|
| *E* | *alors comment faire* |
| *Jo* | *faudra tout défaire [ C2 ] (...)* |
| *E* | *qu'est-ce que t'en penses Ka* |
| *Ka* | *et ben moi ... euh ... je pense que quand on prend un l'autre y prend la même chose (...) après lui il en prend deux et pis on en prend deux [ P3 ]* |

La procédure proposée ne tiendra pas le coup au-delà de "six" les élèves reprendront [ P1 ].

Puis comptage chacun pour soi [ M6 ] ; Jo = 17 ; Ka = 16 ; Ma = 14. (Ils approchent les colliers tenus verticalement pour en mesurer la hauteur) [ M2 ].

| | |
|---|---|
| *Jo* | *Ma elle en a pas le même nombre* |
| *Ka à Ma* | *t'en as combien toi* |
| *Jo* | *un de moins il lui manque* |

Ka recompte les perles de Ma [ M 6 ].

| | |
|---|---|
| *Ka* | *t'en as seize* |

La situation est la suivante : Jo = 16 ; Ka = 15 ; Ma = 16.

L'expérimentatrice leur demande s'ils se souviennent de ce qu'elle avait demandé.

| | |
|---|---|
| *Ma* | *oui d'avoir le même nombre (...)* |
| *Ka* | *et qu'il doit y avoir le moins de perles là-dedans* |

Jo et Ka rapprochent leurs colliers, maintenus verticalement

| | |
|---|---|
| *Jo* | *mets-le bien droit* |
| *Ka* | *ouais j'en ai de trop* |
| *Jo* | *bien droit ... c'est toi qui en as un de plus* |
| *Ka* | *non toi t'en as un petit un de plus pasque çui-là y dépasse çui-là [ M2 et C3 ]* |

Jo enlève une perle et la remet dans la boîte [ C4 ].

| | |
|---|---|
| *E* | *alors comment est-ce que vous allez faire il faudrait que vous en ayez le même nombre et qu'il en reste le moins possible dans la boîte* |
| *Jo* | *ah on a qu'à en enlever un ... maintenant moi et Ma on est ... [ C4 ] (J prend le collier de M pour le comparer au sien)* |
| *Ka* | *pis moi (elle rapproche aussi le sien)* |
| *Jo* | *nous on est maintenant à la même hauteur (...) [ C 3 ]* |
| *E* | *comme ça tout le monde en a le même nombre ... alors comment est-ce qu'on peut vérifier que tout le monde...* |
| *Ka* | *... on compte [ M6 ] (...)* |

Résultat du comptage : Jo = 15 ; Ka = 16 ; Ma = 16.

| | |
|---|---|
| *Ka* | *on n'a qu'à enlever toutes les deux un ...* |
| *Jo* | *... ouais ils enlèvent tous les deux un ... c'est comme le mien [ C5 ; ils anticipent sur le nombre cette fois] (Ka et Ma remettent une perle dans la boîte) (...)* |
| *E* | *(...) pis dans la boîte il en reste le moins possible ?* |
| *Jo* | *deux* |
| *Ka* | *y en a deux* |
| *E* | *est-ce que c'est le moins possible ?* |
| *ensemble* | *oui* |

L'échange "didactique" continue encore un moment centré sur une proposition de Ma *"si on en enlève une chacun on en aura toujours la même quantité"*.

Nous pouvons relever à ce stade à quel point la séquence favorise le conflit de procédures ; leur éventail et leur évolution nous confirment l'intérêt d'une telle situation-problème.

Si ces élèves utilisent le nombre pour mesurer leur propre collier, ils ne savent pas encore qu'en faire lorsqu'ils décident de comparer les colliers. Chez la plupart de ceux de 1P que nous avons observés, la comptine est en place, la mise en correspondance terme à terme aussi, le dénombrement de collections jusqu'à vingt éléments est acquis, mais est-ce suffisant pour affirmer qu'ils ont construit le nombre ?

## V - AVEC LES NOUVELLES CONSIGNES

Décision est prise d'observer des séquences correspondant aux consignes A, B et C en 2P et encore en 1P (mars 1991) avec l'hypothèse que les séquences B et C vont permettre aux élèves d'anticiper sur le nombre (partition, même approximative, du nombre total).

Les résultats infirmeront nos hypothèses dans tous les cas sauf un, en 2P avec la consigne C. Huit groupes sur dix ont mobilisé la procédure *P1* pour le partage. En 2P, 2 groupes (probl. A et B) réussissent rapidement, l'un par un partage *P1*, puis enchaînent *M6* et *C4* (probl. A), l'autre, *P1* puis *P3* après mesure, pour les perles restantes, sans compensation. Remarquons ici qu'un partage bien organisé, dans lequel les élèves auraient confiance, éviterait la mesure et la compensation.

En 1P certains groupes n'ont pas pu dépasser le partage "chacun pour soi" et se retrouvèrent avec des collections de perles inégales, sans pouvoir dépasser cette situation : "le plus long il a gagné" annoncera un élève au tout début de la séquence !

Penchons-nous encore sur le groupe de 2P avec la consigne C. La résolution s'est déroulée très rapidement, les élèves anticipant dès le début à l'aide du nombre.

Les élèves : Al, Ch, Gi (2P)
L'expérimentatrice (E)
Nombre de perles : 70

*E* *Partagez ces perles pour fabriquer chacun deux bracelets à la fin chaque bracelet doit avoir le même nombre de perles et il doit en rester le moins possible dans la boîte*
*Gi* *on fait un bracelet de dix ... comme ça y en a moins dans la boîte [ P4 ]*

Les deux autres sont d'accord, chacun réalise un bracelet de dix puis un second bracelet de dix.

*Gi* *c'est fini*
*E* *qu'est-ce qu'on vous a demandé*

Ils répètent la consigne.

*E* *comment vous savez qu'il en reste le moins possible dans la boîte*
*Gi* *ça se voit*
*?* *on peut compter*
*E* *il pouvait pas en rester moins*
*Ci* *j'en ai vingt [ M6 ]*
*E* *on peut plus partager*

Ch fait des tas en distribuant un à un pour chaque tas et obtient trois tas de trois perles. [ P2].

*E* *qu'a fait Ch*
*Al* *ça peut se faire ça*
*Gi* *oui*

Chacun prend deux perles [ P6 ] place une perle par bracelet; il reste quatre perles (reste plus grand que le nombre d'élèves).

Gi propose d'en prendre encore une chacun, puis renonce devant l'argument de Ch rappelant les deux bracelets.

Suite à cette première étude nous avons pris la décision de construire une série de problèmes identiques quant à leur structure, mais où il serait question de partager cette fois des bonbons de différentes formes et couleurs. La modification de cette variable matérielle est la conséquence de l'observation suivante : le fil des colliers, non seulement ordonne les perles, mais encore encourage fréquemment les élèves à engager une procédure de mise en correspondance de longueurs. Une tâche supplémentaire "D"[6] est à son tour ajoutée aux trois existantes, dans l'intention de vérifier l'hypothèse que des élèves pourraient partager équitablement des collections sans avoir recours au dénombrement.

## VI - RESULTATS GLOBAUX DES OBSERVATIONS "COLLIERS" ET "BONBONS" ET ANALYSE DES CONDUITES.

Les tâches peuvent être résumées ainsi :

*Tâche A* : **Trois** élèves partagent entre eux une collection en **trois** parts avec un reste qui doit être minimum

*Tâche B* : **Deux** élèves partagent une collection en **trois** parts avec un reste qui doit être minimum.

*Tâche C* : **Trois** élèves partagent une collection en **deux fois trois** parts (deux parts chacun) avec un reste minimum.

*Tâche D* : **Un** élève partage une collection en **trois** parts avec un reste minimum.

*Les matériels* choisis sont :

- des perles de grosseurs et de couleurs différentes pour faire des colliers (tâches A, B, C, D) à l'aide d'un fil souple (fil électrique).
- des bonbons de différentes sortes et tailles pour remplir des sacs
- ou des assiettes (tâches A', B', C', D'). Les sacs ont été remplacés par des assiettes car lors du dénombrement des collections par les élèves, un bonbon, parfois deux, restaient dans les plis des sacs.

Nous avons effectué trois observations en 2P et 3P (7 groupes).

*Résultats :*

- La situation B (B') semble être équivalente à la situation A (A').
- La situation C (C') par contre provoque un effet spécifique : elle peut entraîner, dès la 2P, une anticipation sur la quantification numérique des parts; (sans rapport numérisé au tout).
- La situation D' varie dans sa construction par rapport à A' du seul fait que l'élève travaille individuellement. En D' nous observons[7] dans un cas la difficulté des relances de l'expérimentateur et le risque de verser dans le schéma "question du maître-réponse de l'élève", celui-ci ne pouvant pas compter sur les interactions avec ses pairs ; dans l'autre cas nous observons au contraire une procédure individuelle menée à son terme et argumentée en toute indépendance.

---

[6] Consigne identique à "A", avec un élève qui partage en trois parts.

[7] Sur deux cas !

*Analyses des organisations des conduites :*

**1.** A la base, fonctionne **un schème[8] d'action** : "enfiler" les perles ou "mettre" les bonbons.

2. Ce schème est constitué, à des degrés divers, par différentes **connaissances**, ("connaissances en actes"), au service d'un premier but à atteindre : avoir des colliers égaux et des sacs/assiettes de bonbons égaux. Ces connaissances ont trait à la comparaison des partages et leur équivalence numérique.

Extrait :
Les élèves (en 1P) commencent à enfiler les perles chacun indépendamment.
*Un autre élève passe par là : "c'est facile...*
*Vi : c'est pas facile; il faut mettre le même nombre"*

Cette mise en œuvre des connaissances s'effectue :

*a) soit pendant l'action, au moyen de :*

a1) la mise en correspondance temporelle, basée sur le rythme de prise des perles ou des bonbons. Par exemple (2P) :
*"Ma : je crois que j'étais en même temps que toi*
*An : non, t'étais après moi*
*Ma : ouais, mais je t'ai rattrapé"*

a2) la mise en correspondance des longueurs des colliers; par exemple (1P) :
*"Jo : t'en as seize*
*Ma : moi quatorze*
*Jo : attends y faudrait voir ( ils approchent les colliers pour comparer la hauteur)"*

a3) la mise en correspondance terme à terme, ou par paquets de deux ou plus; deux exemples :
*"Vi (1P) prend deux tiges (situation B) et enfile alternativement une perle-une perle, sans compter."*
*"St (2P, situation D') place les trois assiettes a,b,c devant lui; la collection a 50 bonbons; il dépose les bonbons un par un dans l'ordre a,b,c, sans regarder les assiettes; arrivé au 49ème dans l'assiette a, St tient le 50ème en main, puis le repose dans le plat et retire le 49ème de l'assiette a.*
*St : j'ai fini"*

a4) la mise en correspondance numérique (1-1-1 / 2-2-2 / etc. ...).
*"Ka (1P) : et ben moi ... euh ... je pense qu'en ... que quand on prend un l'autre y prend la même chose y prend un puis après on prend un ben Ma et moi on a qu'à en prendre un puis après lui il en prend deux et pis on en prend deux ...".*

a5) combinaisons des moyens précédents a) etc.).

---

[8] "Ils sont des organisations, produits de l'activité cognitive, et des organisateurs, instruments d'assimilation". Jean Brun, conférence au Colloque ARDM "Vingt ans de didactique des mathématiques en France", Paris, juin 1993.

Par exemple :
*"Ka (1P) : ben moi je prends une boule ... 1,2, euh, 3 ...*
*Jo : t'en prends que une ...*
*K : quatre ...*
*Jo : non pas encore j'ai pas encore mis*
*Ka : ah ... dépêche-toi"*

a6) l'anticipation de la quantification numérique des parts (situation C).
*"Gi (2P) : "on fait un bracelet de dix ... comme ça y en a moins dans la boîte."*

*b) soit après l'action :*

La mise en oeuvre des connaissances ne peut se manifester qu'après l'action dans certains cas : le schème de base "enfiler" ou "mettre" fonçtionne et quand il n'a plus matière à s'alimenter, l'élève s'arrête et compare, au moyen de :

b1) la mesure par comptages; un exemple pris avec la situation A (2P) :
*"Al : on doit avoir la même chose ... (les élèves épuisent la collection de perles)*
*Al : voilà on a fini tout ... (les élèves relisent la consigne)*
*Ph : faut compter (chacun compte ses perles)".*

b2) la mise en correspondance des longueurs (colliers);

b3) la mesure par évaluation perceptive (bonbons dispersés sur assiettes).

**3.** Si la comparaison conclut à l'inégalité des collections de perles ou de bonbons, un **nouveau but** se forme, soit :

a) Tout recommencer (avec retour au point 2); exemple : situation A' (2P).
*"E : Alors pour l'instant, c'est bon, vous en avez le même nombre ?*
*tous les élèves : non*
*E : alors ...*
*An : faut qu'on en remette (en pointant l'assiette)*
*Ma : faut recommencer"*

b) Égaliser les parts. Nous avons observé deux procédures :

b1) l'égalisation de toutes les collections au moyen du nombre-mesure de la collection de plus faible quantité. Par exemple (A', 2P) :
suite aux comptages respectifs, les sacs ont 12, 17 et 16 bonbons.
*"An : faut qu'on en remette là (dans l'assiette) jusqu'à 12;*
*puis distributions du complément ".*
Cette procédure peut se répéter en plusieurs étapes :
(suite à l'égalisation des parts à 12 bonbons) :
*"E : Ah oui, je vous avais demandé, chaque sac doit avoir le même nombre de bonbons et il doit rester le moins possible de bonbons dans l'assiette.*
*St : (s'adressant aux autres) si on en prenait deux ?*
*Ma : chacun ?*
*An : d'accord (ils en prennent deux chacun; St compte le contenu de l'assiette)*

*An+Ma : quatre*
*An : il y en a un de trop*
*St : ben, on en prend un encore et il en reste toujours un".*

b2) l'égalisation des collections par compensation numérique (A', 2P).
*"Al : dix-sept*
*Ph : dix-neuf*
*Sa : quinze*
*Al : on doit tous avoir comme moi ... dix-sept"*

Nous reprendrons cette question de l'égalisation plus avant dans le texte.

**4.** Le traitement du **reste** peut être coordonné avec l'égalisation des différences, c'est-à-dire localement anticipé. Les élèves arrêtent alors le partage avant d'avoir épuisé le tout (voir plus haut l'exemple de St dans la situation D').

Le reste peut aussi surgir comme nouvelle donnée du problème face au fait que l'épuisement du tout correspond à l'impossibilité d'égaliser (rôle de la variable "taille des collections").

Nous avons observé, face à la consigne "reste le moins possible", beaucoup d'hésitations entre les conduites suivantes :

a) "reste le moins possible" = rien :
*? : " zéro c'est le moins possible" (2P)*

b) Une quantification globale :
*"Ph (2P) : dans le collier faut avoir plus et là faut avoir moins"*
*"E (1P) : est-ce que c'est le moins possible ? (face à la situation : deux perles restent dans la boîte)*
*les trois élèves : oui*
*E : pourquoi ?*
*Jo : parce que c'est à dix que commence le plus grand numéro ... à dix ça commence deux numéros ... et à un ... à zéro ça commence un numéro"*

c) Une quantification numérique, par mise en correspondance ou comptage.
La situation C permet un traitement plus approfondi de cette question :
*"Ch (2P; chacun a réalisé deux bracelets de 10 ; il reste 10 perles. Ch fait des tas en distribuant le reste une perle à une et obtient trois tas de trois perles. Ensuite chacun des trois élèves prend deux perles; (reste final de 4)".*

**5.** Sur le petit nombre d'observations effectuées avec des élèves de 1P, 2P , 3P l'influence du **degré** scolaire semblerait réelle : les "**connaissances-en-acte**" des élèves pour comparer et juger de l'équivalence numérique des collections varient. En 1P, la longueur reste un moyen au même titre que le comptage; souvent les élèves alternent le recours à l'un ou à l'autre, comme s'ils étaient équivalents.

Dans les trois degrés on observe que la relation entre le tout et les parts à composer est volontiers traitée comme une suite de partages successifs. L'élève a un contrôle de l'équivalence numérique selon un **"théorème-en-acte"** qui lui permet de déduire l'équivalence des parts finales : si à chaque étape du partage les parts sont égales, alors la somme des partages donnera nécessairement l'égalité des parts finales.

En 2P, on observe un élève (situation D') qui argumente l'équivalence numérique sans avoir besoin de compter :

*"Ex: voilà, est-ce qu'il y a le même nombre de bonbons dans chaque assiette ?*

*St : oui*

*Ex : comment le sais-tu ?*

*St : parce que j'avais mis un comme ça (pointe alternativement le plat et les assiettes a,b,c) et toujours un comme ça ("ça" renvoie à sa mise en correspondance 1 bonbon - 1 assiette)".*

En 3ème année, on a une esquisse de traitement d'emblée relationnel en considérant le rapport du tout avec les parts :*"faut d'abord les compter, après multiplier ,(n = 3x)".*

On voit bien que ces situations de partage permettent aux élèves de travailler le nombre depuis les problèmes d'invariance qu'il pose (critère de longueur des colliers en 1P), en passant par la composition additive des nombres (c'est l'aspect conceptuel dominant dans nos observations de 2P et 3 P), jusqu'aux traitements multiplicatifs des rapports parties/tout.

## VII - TRAITEMENT DES DIFFÉRENCES ET ÉGALISATION DES PARTS

En cours d'expérimentation, il s'est assez rapidement manifesté que l'égalisation des collections comportait, après la cardinalisation des parts, une complexité mathématique et procédurale importante pour les élèves des degrés concernés. Décision fut prise de concentrer nos observations sur ce "moment" de la situation. Nous avons donc construit différents problèmes d'égalisation entre collections déjà réparties.[9]

L'analyse mathématique qui a précédé l'élaboration des énoncés de problèmes nous a fourni les valeurs des variables numériques à prendre en compte.

Consigne :

*Arrangez-vous pour que chacun ait le même nombre de bonbons/jetons en les utilisant tous.*

Variables didactiques :

*Nombre d'élèves : 3. Nombre de parts : 3.*

*Matériel : 42 bonbons/jetons et 3 assiettes.*

*Les trois situations numériques retenues :*

*A : 9 - 14 - 19 bonbons/jet.*

*B : 11 - 13 - 18 bonbons/jet.*

*C : 10 - 16 - 16 bonbons/jet.*

---

[9] Ces séquences ne sont considérées ici qu'à titre purement expérimental.

Dispositif :

*Chacun des 3 élèves a devant lui une assiette avec le nombre de bonbons/jetons correspondants aux situations numériques retenues et une étiquette avec le nombre-mesure de sa part.*

Degrés et calendrier :

*De la 1P à la 3P; décembre 1992 à mars 1993.*

Les séquences sont enregistrées et retranscrites en protocoles dactylographiés.

*Analyse des résultats d'observation :*

Le problème pour l'élève consiste à coordonner un tout invariant et des parts composables et décomposables, c'est-à-dire qui se transforment alors que leur somme reste constante.

*Procédure 0* : Par couleurs (spécifique aux situations avec les jetons), par exemple (groupe 1B; la désignation des groupes renvoie au tableau no 1) :

*"Mi : Attends ... toi t'auras tous les verts (Mi donne les verts à En) et puis toi tu donnes les bleus à moi (En donne les bleus à Mi) et moi je donne les rouges à Am et les jaunes."*

*Procédure 1* : Égalisation à la plus petite des trois collections, le complément étant considéré comme un reste (groupes 1A, 1D, 2A, 2D). Le traitement du reste peut se faire de différentes manières, qui peuvent d'ailleurs se succéder :

a) ce reste ne peut être distribué, exemple (1A) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| état initial de la situation : | 10 | 16 | 16 | |
| état présent : | 10 | 10 | 10 | reste : 12 |

*"E : et puis ces jetons là vous pensez ...*
*- on peut pas*
*- vous êtes sûrs, dit l'expérimentateur*
*- ça va changer de nouveau ..."*

b) sous l'effet d'une relance, d'autres égalisations sont réalisées en **augmentant** le reste et en faisant donc trois parts égales plus petites. (1A, suite) :

*"E : ça va tout changer ?*
*- on peut mettre 9 dans chaque assiette*
*- ou 8 pourquoi pas "*

c) ce reste est distribué par soustractions successives de 1 (1P) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| état initial : | | 10 | 16 | 16 |
| état 1 : | 10 | 10 | 10 | reste : 12 |
| état 2 : | 11 | 11 | 11 | reste 9 et ainsi de suite |
| état final : | | 14 | 14 | 14 |

Ce reste peut être distribué par des soustractions successives de plus que 1.

*Procédure 2* : Égalisation de deux collections d'abord, puis de la troisième (groupes 1C, 2B, 2C, 3B, 3C, 3H).

a) si, après égalisation de deux collections, la collection inégale est la plus grande (cas n° 2'), on a des soustractions successives de 1 à partir de la plus grande collection. *Il n'y a pas toujours arrêt des soustractions* au moment de l'égalisation, d'où passage à la procédure 1 (1C).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| situation initiale : | | 11 | 13 | 18 |
| état 1 : | 12 | 12 | 18 | |
| jusqu'à : | | *14* | *14* | *14* |
| puis : | 15 | 15 | 12 | |

b) si la collection inégale est la plus petite (n° 3' : 16, 16, 10 dès le départ), on a des soustractions successives de 1 à partir des deux grandes (groupes 3I, 2C).

Exemple, (groupe 3I) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| état initial : | | 10 | 16 | 16 |
| état intermédiaire : | 15 | 15 | 12 | |
| puis : | 14 | 14 | 14 | |

*Procédure 3* : Essais successifs d'égalisations "hypothétiques" entre les trois collections.

a) sans compensation entre addition et soustraction (groupes 1D, 1E).
par exemple pour le groupe 1D :

| | | | |
|---|---|---|---|
| situation de départ : | 11 | 13 | 18 |
| état présent : | *16* | *17* | *9* |
| état suivant : | *16* | *9* | *17* |

face à l'échec de cette procédure, il y a reconsidération du problème et passage à la procédure 1.

b) avec compensation entre addition et soustraction (groupe 3A) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| situation de départ : | 9 | 14 | 19 |
| état intermédiaire : | 12 | 14 | 16 |

*"Ma : tu en as 10...11...12 ;*
*La : toi tu en as 12 moi j'en ai 14, tu en enlèves 2 (en s'adressant à celui qui en a 16)"*

c) avec essais dirigés par approximations successives (groupes 3F et 3G).
Par exemple (3F) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| situation initiale : | 16 | 10 | 16 |
| ... | 13 | 16 | 13 |
| ... | 16 | 10 | 16 |
| état final : | 14 | 14 | 14 |

*Procédure 4* : Calcul de la somme des trois collections. Distribution par soustractions successives afin de constituer trois collections égales (groupe 3D).

situation initiale : 10 16 16

"Cé : 16 plus 16 ça fait ... 32 ; ça fait 42 en tout
Ti : on fait un pour chacun et puis après on va voir
Gr : trois chacun" (distributions successives jusqu'à 14 ;14 ; 14)".

*Hiérarchisation des procédures en regard de leur complexité :*
procédure 0 (par couleurs)
3a (essais hypothétiques sans compensation)
1 (égalisation à la plus petite collection)
2 (égalisation de 2 collections d'abord)
3b (essais hypothétiques avec compensation)
3c (essais dirigés par approximations successives)
4 (sommation et distribution).

Tableau n° 1 : Répartition des groupes en fonction des procédures.

| Pr. 0 | Pr. 3a | Pr. 1 | Pr. 2 | Pr.3b | Pr. 3c | Pr. 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| gr. 1B | gr. 1D<br>gr. 1E | gr. 1A<br>gr. 1D<br>gr. 1E<br>gr. 2A<br>gr. 2D | gr. 1C<br>gr. 2C<br>gr. 3B<br>gr. 3H<br>gr. 3I | gr. 2B<br>gr. 3A<br>gr. 3B<br>gr. 3D | gr. 3F<br>gr. 3G | gr. 3D<br>gr. 3E<br>gr. 3I |
| 1P | 1P | 1 et 2P | 1, 2 et 3P | 2 et 3P | 3P | 3P |

Commentaires au tableau n° 1.

La hiérarchie des procédures, qui apparaît dans notre analyse a priori est confirmée par leur mise en relation avec les degrés scolaires.

- Les procédures 0 et 3a ne concernent que le degré 1P.
- La procédure 1 se répartit entre la 1P et la 2P.
- La procédure 2 se répartit principalement entre la 2P et la 3P.
- Les procédures les plus élaborées (3b, 3c et 4) se trouvent à une exception près (2B) en 3P.

Tableau n° 2 : Répartition des problèmes en fonction des procédures.

| Sit. prob. | Pr. 0 | Pr. 1 | Pr. 2 | Pr. 3a | Pr. 3b | Pr. 3c | Pr. 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10<br>16<br>16 | gr. 1B | gr. 1A<br>gr. 2A | gr. 3I<br>-. Pr.4 | | gr. 3D<br>-.Pr.4 | gr. 3F<br>gr. 3G | gr. 3D<br>gr. 3I |
| 11<br>13<br>18 | | gr. 1D<br>-. Pr.3 | gr. 1C<br>gr. 2C<br>gr. 3B<br>gr. 3H | gr. 1D | gr. 2B<br>gr. 3B | | |
| 9<br>14<br>19 | | gr. 1E<br>-. Pr.3 | | gr. 1E | gr. 3A | | gr. 3E |

Commentaires au tableau n° 2 :

- La situation-problème 10 - 16 - 16 (7 cas) est la plus riche en procédures différentes : toutes les procédures observées sont représentées sauf 3a.
- La situation 11 - 13 - 18 (7 cas) appelle de préférence la procédure 2 (égalisation de deux collections puis de la troisième).

Ces égalisations sont de trois types :

égalisation entre 11 et 13 pour atteindre 12 (1 fois)
égalisation à 13 (3 fois)
égalisation entre 13 et 18 pour atteindre 15 (1 fois).

- La situation 9 - 14 - 19 (4 cas) appelle également différentes procédures. Le peu d'occurrences ne permet pas de relever une tendance particulière.

**Remarques**

Nous avions insisté au début de cette partie sur le caractère purement expérimental de ces séquences d'égalisations de collections. Nous avions besoin de ce détour pour améliorer notre compréhension de la situation-problème dans sa globalité. Néanmoins, au vu de la variété des procédures rencontrées et de la relative complexité mathématique sous-jacente, des séquences de ce type pourraient très bien se convertir en séquences scolaires.

Nous devons pourtant mettre les enseignants en garde ; *en aucune manière ces séquences ne devraient devenir un pré-requis pour traiter ultérieurement l'ensemble de* la *séquence.* Cette dernière comporte "par essence" une phase d'égalisation des parts, manifeste pour l'observateur, mais dont le déroulement est plus chaotique qu'en situation isolée.

## VIII. CONSIGNES ET ANALYSE PRÉALABLE D'UNE SÉQUENCE DIDACTIQUE

La séquence suivante, conçue comme une suite de 4 situations d'action, s'est déroulée dans *une classe de 2P* (élèves de 7 ans) en trois périodes de 30 minutes, à raison d'une par semaine. Lors de la première période, les groupes d'élèves ont traité les situations-problèmes n° 1 et n° 2 ; la seconde est consacrée à la situation n° 3 et la dernière à la situation n° 4.

Domaines mathématiques :
domaine numérique : IN ;
le tout comme somme des parties et du reste ;
la division-partage ; équivalence des parts.

*Consigne de la situation-problème n° 1 :*
**Partagez-vous ces bonbons. Il faut que chacun ait le même nombre de bonbons et il doit en rester le moins possible dans la boîte.**

Variables de situation et de commande :
nombre de groupes : 3 ou 4
nombre d'élèves par groupe : 3
nombre de bonbons : 47, 50 ou 53
reste : 2

Relance de l'enseignant :
- en cours de déroulement : "Vous souvenez-vous de la consigne ?" (la répéter si nécessaire, sans modifications)
- en fin : "Avez-vous fait le problème qui vous était posé ?"

*Consigne de la situation-problème n° 2 :*
**Partagez-vous ces perles pour vous faire chacun 2 bracelets. Il faut que chaque bracelet ait le même nombre de perles et il doit en rester le moins possible dans la boîte.**

Variables de situation et de commande :
nombre d'élèves par groupe : 3
nombre de bracelets : 6
nombre de perles : 64 ou 70
reste : 4

Relances de l'enseignant :
identiques à celles du n° 1

Les deux consignes ci-dessus sont directement tirées de celles de la situation expérimentale. Les groupes d'élèves observés ont tous mobilisé la même suite de procédures : P1 - M6 - C2 - P3 - M6 - (C5 un groupe). Nous vous renvoyons à la description et à l'analyse de ces procédures en II.3.

Le problème n° 3 met en jeu des collections difficilement dénombrables par la plupart des élèves de ce niveau scolaire. Nous faisons a priori l'hypothèse que le grand nombre d'objets (voir ci-dessous, les variables de commande) entraînera des procédures de répartition de types cinq par cinq, six par six, dix par dix, par exemple, sans cardinalisation finale des parts de chacun, les élèves établissant un contrôle sur la rigueur avec laquelle se déroule le partage, le nombre d'objets dans les parts n'étant pas la solution au problème !

Le problème n° 4 est d'une autre nature, les élèves doivent se mettre d'accord sur un nombre de bonbons à commander, en prenant en compte les contraintes de la consigne et en vérifiant ensuite par l'action la réussite ou l'échec du résultat de leurs anticipations.

*Consigne de la situation-problème n° 3 :*

**Partagez-vous ces objets. Il faut que chacun ait le même nombre d'objets et il doit en rester le moins possible dans la boîte.**

Variables de situation et de commande :
nombre d'élèves par groupe : 3
nombre d'objets : 158, 170
reste : 2
nombre par objets et restes[10] (pour un total de 158) :
- 74 allumettes, reste : 2
- 34 agrafes, reste : 1
- 24 jetons, reste : 0
- 26 clous, reste : 2

Remarque :
Si les élèves entreprennent un partage égal par type d'objets ils se retrouveront avec un premier reste de 5 (2+1+0+2) puis redistribution et reste final de 2.

Relances de l'enseignant :
identiques à celles du n° 1 et une question finale : "Êtes-vous sûrs que vous en avez le même nombre ?".

Les élèves, n'étant dans l'ensemble pas à même de dénombrer leur part, devraient se justifier à l'aide d'un argument lié au mode de distribution ; cette argumentation, avancée par un seul des groupes observé, qui avait un distributeur, s'avère *incontournable* puisqu'il n'y a pas de comptage. L'élève l'a exprimée ainsi : *"J'ai commencé par moi et fini par toi"*. Si par contre les élèves prennent en même temps, le même nombre d'objets, le respect de la règle qu'ils se sont donnée est suffisant pour justifier de l'égalité des parts.

*Règle du jeu et consigne de la situation-problème n° 4 :*

*Règle* : Vous devez aller chercher des bonbons au magasin avec le moins de voyages possibles. Chaque fois que vous faites un voyage vous devez donner un jeton à la vendeuse. L'équipe qui a gardé le plus de jetons a gagné.

---

[10] Cette variable doit aussi être contrôlée, pour le cas où les élèves se repartiraient, dans un premier temps, les objets par type (les allumettes en premier, puis...).

*Consigne* :

**Écrivez juste le nombre de bonbons qu'il faut pour le groupe, pour qu'après le partage en parts égales il reste 2 bonbons.**

Variables de situation et de commande :
la vendeuse est jouée par la maîtresse
nombre d'élèves par groupe : 3
nombre de bonbons au magasin : environ 150
nombre de jetons par équipe : 3
nombre de parties : 4 ou 5

Démarches possibles :
commandes successives sans prise en compte : du nombre d'élèves ou[11] du reste ou des bonbons déjà distribués ;
distribution fictive en tenant compte ou non du reste.

Remarques :
On ne peut pas rapporter des bonbons en trop au magasin; c'est une règle du jeu que l'enseignant doit préciser si le cas se présente.
La vendeuse collectionne les billets de commande ( voir relance).
Après une première partie où apparaissent des démarches très empiriques et erratiques, conduisant à la perte de tous les jetons, les élèves se donnent dès la seconde partie les moyens de gagner les suivantes.

Relance après le jeu :
Cette relance consiste en une petite recherche et un court débat à partir des billets de commandes qui ont permis aux élèves de réussir le problème en un achat.

- La relance :*"Voilà les nombres que vous avez écrits, classez-les. Essayez de compléter la série classée*[12]*"*.
La validation des nouveaux billets est soit mise en discussion générale, soit faite par l'action.

- Le débat est lancé ensuite comme ceci : *"Comment faites-vous pour choisir le nombre que vous inscrivez sur le billet ?"*
Il n'y aura pas de la part de l'enseignant d'institutionnalisation de procédures, c'est un choix didactique des auteurs.

Nous sommes bien conscients que l'expérimentation de la séquence didactique n'a pas fait l'objet de beaucoup d'observations, une classe seulement a servi de terrain expérimental, et la question de la transmission de cette séquence aux enseignants n'a pas encore fait l'objet d'une recherche de notre part ; pourtant nous estimons que nous pouvons, à ce stade, livrer un produit dont la reproductibilité des effets sur la construction du nombre est déjà assurée.

---

[11] Il s'agit ici du "ou" logique !
[12] Ou bien : "Trouvez-en d'autres qui permettent de faire le même travail que vous venez de faire".