LE NOMBRE DECIMAL N'EXISTE PAS : THEORIE ET APPLICATIONS

Michel TANNER
Professeur de mathématiques
Collège Paul Eluard, Nanterre

C'est une véritable difficulté pour l'enseignant que de considérer les erreurs de ses élèves comme procédant d'une pensée organisée.

Les travaux sur le rôle de l'erreur en mathématiques montrent cependant que l'erreur est un processus constitutif de l'apprentissage. L'une des retombées de l'opération Evaluation CE_2/Sixième est d'attirer l'attention sur l'importance d'une interprétation des erreurs des élèves en termes de connaissances erronées et sur la nécessité de rechercher des activités ou des exercices qui permettent à l'élève de mettre en question ses conceptions initiales et de les transformer pour obtenir des connaissances exactes.

On trouvera ci-dessous un essai de présentation du corpus «des connaissances» erronées à propos des décimaux sous la forme d'une parodie de théorie, pour attirer l'attention sur la cohérence logique entre un certain nombre d'erreurs classiques et des idées finalement assez naturelles, même si on doit les contester.

FONDEMENTS DE LA THEORIE

Voici un faisceau de faits et d'idées dont certaines sont assez naturellement tirées des modes de présentation incomplets du nombre décimal en CM. Ces faits et ces idées représentent les axiomes d'une théorie de l'inexistence du nombre décimal.

A1 - De nombres, il n'y a que les entiers

Qu'est-ce qui nous permet d'appeler «nombres» des «objets» aussi éloignés des entiers que les décimaux, les rationnels, les irrationnels, les complexes ? C'est la stabilité de structure de ces ensembles pour +, × et <, prolongeant la structure de ($\mathbb{N}$, +, ×, <). Elle justifie leur appellation de «nombres», alors même que les objets, eux, ne sont pas de même nature. Les enfants le ressentent-ils ?

A2 - Tout décimal peut toujours être ramené à un entier par changement d'unité

Si ce n'est dit tel quel à l'école, c'est souvent ce que les enfants comprennent et retiennent. N'oublions pas d'ailleurs les instructions officielles de 1970.

Et certes : 3,52 m = 352 cm
3,8 millions de tonnes de pétrole = 3 00 000 tonnes de pétrole.

A3 - Tout décimal est le collage de deux entiers

Par exemple 3,45 m est le recodage de 3 m et 45 cm.

D'autre part on dit bien que 3,45 est plus grand que 2,95 parce que 3 est plus grand que 2, et que 3,95 est plus grand que 3,45 parce que 95 est plus grand que 45. Ce qui amène à traiter séparément les deux entiers qui «composent» chaque nombre décimal.

A4 - Les calculs sur les décimaux sont les mêmes que sur les entiers à condition de bien placer la virgule.

	5,6		560	
certes	+ 3,14	comme	+ 314	«calcul en centimètres»

A5 - Dans un nombre décimal, les chiffres après la virgule désignent le nombre entier de sous-unités de l'unité principale

Par exemple dans 5,25 m, il y a 25 cm.

A6 - Les dixièmes n'existent pas

La première sous-unité du franc est le centime. Pas le «décime».

La première sous-unité du mètre n'est pas le décimètre mais le centimètre. D'ailleurs «double-décimètre» veut dire «règle».

Enfin «dixième» s'écrit aussi bien «dizième» et se confond avec «dizaine».

A7 - Les millièmes existent à peine !

Le millimètre est un dixième de centimètre comme on le voit bien sur la règle. Ce n'est pas un millième de mètre.

Le millime n'existe pas.

Et le millième de m^2 n'est même pas le millimètre carré.

A8 - Les dix-millièmes n'existent pas

Ce sont des sous-unités jamais vues, jamais nommées.

Or les décimaux n'existent que par le jeu des sous-unités et des changements d'unités : voir A2, A3 et A5.

A9 - Les enfants ne lisent pas les unités

Ce fait a des conséquences capitales. Ainsi :
28,4 = 284 = 0,284, car : 28,4 cm = 284 mm = 0,284 m.
Corollaire :

A10 - Le nombre décimal n'a pas de stabilité intrinsèque

Par exemple : 7,345 F = 10,45 F n'est pas impossible,
de même que : 6,88 min = 7 min et 28 s.

A11 - Les nombres naturels ne sont pas des décimaux

En effet un nombre décimal est un nombre «à virgule».
Cette idée a pour corollaire :

A12 - Les nombres décimaux ne permettent pas de faire les mêmes opérations que les nombres entiers. Ou, autrement dit : **Certaines opérations n'ont de signification que pour des nombres entiers**

Par exemple : 2 kg de gruyère à 48 F le kg coûtent 2 × 48 F ;
mais pour : 0,645 kg de gruyère à 48 F le kg, on ne peut calculer le prix par une simple opération, ou alors il faut en changer : une division par exemple, puisqu'il faut diminuer 48 F (0,645 kg étant moins que 1 kg).

A13 - Il n'y a pas de cohésion dans l'ensemble de la numération

Même le remplacement des décimaux par un entier (A2) ou deux (A3) n'assure pas l'unité du système. Car ces pseudo-entiers doivent être traités avec des procédures particulières suivant les cas. C'est ainsi que dans les tableaux de conversions, il y a parfois deux, parfois trois chiffres par colonne.

CONSEQUENCES

On déduit facilement des axiomes ci-dessus les trois règles suivantes :

- **On se sort très bien d'affaire sans recourir au nombre décimal** dans toutes les questions mettant en jeu des nombres et des calculs. Suivant les cas, il est légitime d'utiliser une procédure ou une autre.
- **Aucune exigence de compatibilité n'est demandée aux procédures utilisées.** Il suffit de savoir appliquer la bonne règle dans une situation donnée.
- Il revient au même de décider que **le nombre décimal n'existe pas.**

APPLICATIONS

Th. 1 - 7,345 F = 7 F et 345 centimes.

Première preuve : dans un nombre décimal, les chiffres après la virgule désignent les sous-unités de l'unité principale. Dans le cas des francs, la seule sous-unité est le centime.

Deuxième preuve : dans le cas des unités de longueur, dans 7,345 m le 5 représente les mm. Le mm est la sous-unité du cm. Or il n'y a pas de sous-unité du centime. Chacun sait qu'il n'y a pas de millime. Donc dans 7,345 F, il faut comprendre 345 centimes. Il y a trois chiffres tout simplement parce qu'il y en a plus de 99.

Corollaire du Th.1 : 7,345 F = 10 F et 45 centimes.

Preuve
7,345 F = 7 F et 345 centimes, d'après le Th.1.
Or 100 centimes = 1F.
Donc 300 centimes = 3 F.
Donc 345 centimes = 3 F et 45 centimes.
Finalement 7,345 F = 7 F + 3 F + 45 centimes = 10 F et 45 c.

Réponse aux objections : il ne faut pas s'étonner de voir deux nombres apparemment différents exprimer la même somme. On a déjà vu que :

2,35 = 235 car 2,35 m = 235 cm (déplacement de la virgule), ou même que 3,5 = 210 car 3,5 h = 3 h et demi = 3 × 60 + 30 min = 210 min (ici les chiffres sont bien diférents).

Th.2 - 3,2 h = 3 h + 2 min.

Preuve : même raisonnement que ci-dessus : les sous-unités de l'heure sont les minutes et les secondes ; il est évident que le 2 ne peut pas représenter des secondes puisque les minutes viennent avant.

Th.3 - 3,2 h = 3 h et 20 min

Première preuve : 3,2 h ne peut pas représenter 3 h et 2 min car on voit bien que 2 min ce n'est pas assez. Ce ne peut donc être que 20 min puisque les unités vont de 10 en 10.

Réponses aux objections : ce ne peut être 200 car ce serait beaucoup trop : cela dépasse une heure.

Deuxième preuve : 3,2 = 3,20 (c'est bien ce qu'on fait dans 3,2 – 1,18 par exemple). La sous-unité de l'heure est la minute, qui correspond au deuxième chiffre après la virgule, comme le centimètre qui est la première sous-unité du mètre car le décimètre n'existe pas. Donc 3,2 h = 3,20 h = 3 h et 20 min.

Th.4 - 3,2 h = 320 min.

Preuve : d'après A2, il suffit de ramener 3,2 h à un entier comme on ramène 3,2 m à 320 cm. Donc 3,2 h = 320 min, la sous-unité de l'heure étant la minute (voir A5).

Th.5 - 3,2 h = 32 min.

Preuve : même démonstration que le théorème précédent, mais sans penser que 3,2 = 3,20.

Th.6 - 2,5 + 3,6 = 5,11
2,5 × 3 = 6,15
3,9 < 3,13.

Preuve : il suffit de se rappeler que tout nombre décimal est en réalité composé de deux entiers, de part et d'autre de la virgule. Faisons référence à :
2,5 m + 3,6 m = 2 m et 50 cm + 3 m et 60 cm = 5 m et 110 cm, et d'autre part : 5 m et 110 cm = 5,110 m (les chiffres après la virgule désignant la sous-unité du mètre c'est-à-dire le centimètre) et : 5,110 m = 5,11 m (règle du zéro inutile).
De la même façon :
2,5 m × 3 = (2 m et 50 cm) × 3 = 6 m et 150 cm = 6,150 m = 6,15 m.

Th.7 - Il y a des nombres décimaux entre 3,4 et 3,5.
Il n'y a pas de nombres décimaux entre 3,451 et 3,452.

Preuve :
3,4 = 3,40 comme 3 m et 40 cm.
3,5 = 3,50 comme 3 m et 50 cm.
Il y a donc 3,41 entre les deux, comme 3 m et 41 cm.
Par contre pour 3,451 et 3,452 quel modèle prendre ?
Si on pense à 3,451 m, le 1 désigne le chiffre des millimètres et chacun sait qu'il n'y a pas de sous-unité du millimètre. Il n'y a donc pas de décimal entre 3,451 et 3,452.

Th.8 - On ne peut pas calculer le prix de 1,438 kg de pommes à 13,45 F le kg par une seule multiplication.

Première preuve : voir A12.

Deuxième preuve : d'après A2, il faut chercher à ramener les nombres 1,438 et 13,45 à des entiers par changement d'unité, avant de pouvoir multiplier. Il vient 1438 g de pommes à 1345 centimes le kg. Mais les unités obtenues sont incohérentes. Et si on prend 1438 g de pommes à 0,01345 F le g, il n'existe pas de sous-unité du franc qui permette d'interpréter tant de chiffres après la virgule.