# LES PROCEDES UTILISES DANS LA MESURE DES SURFACES

*Michèle KASTENBAUM*

## INTRODUCTION

Nous avons examiné les procédés utilisés dans les manuels scolaires pour enseigner les notions de surface et mesure de surface à l'école élémentaire. Les procédés – **superposition, pliage, découpage, quadrillage, dessin, pavage** – jouissent d'une grande faveur dans les manuels scolaires et sont l'objet de nombreuses publications des IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques). Par ailleurs, ces mêmes procédés apparaissent dans la théorie opératoire de Piaget comme épreuves informant sur le niveau atteint par le sujet en ce qui concerne la maîtrise des concepts et relations de l'espace.

Les travaux sur ces procédés relèvent soit de la littérature pédagogique, soit de la littérature psychologique. Les travaux pédagogiques sont destinés aux enseignants et proposent des séquences d'enseignement des notions de surface et d'aire (Douady et Perrin, 1983 – Grand N, n° 39-40 et 41, 1986, 1987) où les activités à partir de ces procédés sont abondantes et jouent un rôle essentiel. En psychologie, Rogalski (1982, 1985) étudie l'acquisition des concepts liés à la dimensionalité des mesures spatiales. Son travail examine les étapes et difficultés de cette acquisition et comprend l'analyse de représentations utilisées pour l'enseignement de ces notions, sans être centré sur cette analyse.

Nous avons examiné un éventail de manuels scolaires et publications pédagogiques (cf. bibliographie) en nous attachant aux points suivants :

1) Y a-t-il consensus dans ces publications pour l'utilisation de ces procédés ? Des travaux antérieurs (Rogalski, 1985) ont montré un consensus sur le terrain, en classe, en ce qui concernait les connaissances enseignées, leur découpage en séquences, l'ordre de ces séquences, les exercices proposés. Nous avons recherché si l'on retrouvait également un consensus sur les procédés utilisés pour l'enseignement de ces connaissances, si chaque procédé était spécifique d'apprentissage de connaissances déterminées, si la succession des différents procédés était identique ou quasiment telle dans les différentes publications.

2) Peut-on décrire avec précision le rôle des différents procédés et des représentations graphiques dans la séquence d'enseignement, tel que le concepteur de la séquence l'a prévu ? L'objectif de chacune des séquences est facile à déterminer, il est le plus souvent indiqué par les auteurs. Les fonctions spécifiques des différents éléments de cette séquence restent à analyser. Il est tout aussi impossible à cette fin d'ignorer le but général de la séquence que de s'en contenter. Pour résoudre cette difficulté, les documents spécifiquement destinés aux maîtres – livres du maître pour les manuels scolaires, livres et brochures faits pour les enseignants, comme ceux

d'Ermel (1978, 1982) ou de Douady et Perrin (1983) – sont précieux car ils indiquent clairement les objectifs poursuivis en les rattachant aux activités proposées.

3) Quels rapprochements peut-on faire entre l'utilisation de ces procédés dans l'enseignement et celle qui en est faite par Piaget et al. (1948) ? Les mêmes procédés sont-ils utilisés pour enseigner (documents pédagogiques) ou éprouver l'acquisition (Piaget et al.) des mêmes concepts ? La succession des procédés utilisés est-elle identique dans les deux cas ?

Le travail a porté uniquement sur les livres de CM (CM1 - CM2), l'étude de l'aire n'ayant pas lieu en CE. Nous nous sommes refusée toute attitude évaluatrice dans la comparaison de ces documents, qui aboutirait par exemple à établir lesquels sont les meilleurs. Nous faisons remarquer que ces documents ne sont pas à mettre sur le même plan. Les manuels scolaires, livre du Maître comme livre de l'Elève, sont contraints de planifier l'intégralité du programme de l'année, alors que ce n'est pas le cas des autres documents pédagogiques destinés aux maîtres.

## EXAMEN DES PROCEDES

L'examen des procédés permet de répondre affirmativement à propos du consensus entre les manuels et à propos du rapprochement entre l'utilisation et la progression de ces procédés dans les manuels et dans la théorie opératoire. La progression des procédés utilisés dans l'enseignement reproduit les différentes étapes piagétiennes de la comparaison, directe, puis par moyen terme interposé, pour finir par l'utilisation d'unités de mesure en principe détachées de la forme.

Dans l'enseignement la progression typique est la suivante : **superposition de figures**, moyen premier qui fait accéder à la notion d'aire et à celle d'égalité des aires ; **pliage**, rarement présent ; **découpage-recomposition**, qui amène à constater que les surfaces sont superposables après modification ; dessin, qui prolonge le découpage-recomposition lorsqu'il s'agit de modifier des surfaces sans les découper ; **quadrillage et pavage**, qui représentent un moyen terme vers la mesure de surface et la construction d'unités de mesure. Nous détaillons ci-après cette progression et les différentes utilisations, les rôles joués par ces procédés en indiquant dans la mesure du possible les variantes observées.

### Superposition de figures

La superposition de figures a un statut important. Elle est le moyen premier, primitif, de la comparaison des surfaces, considéré comme entraînant la conviction immédiate de l'égalité en cas de congruence ("Il est facile de faire admettre aux élèves que deux surfaces superposables ont même aire", Eiller et al., 1983, p. 152), considéré comme une preuve scientifiquement acceptable, accessible et convaincante pour l'enfant dès le début de l'enseignement de la notion d'aire. La superposition de surfaces sert à construire la notion d'aire, **en constituant une situation de référence de comparaison de surfaces selon l'aire**, et en introduisant à l'étude d'autres moyens de comparaison, lorsque celui-là aura révélé ses limites.

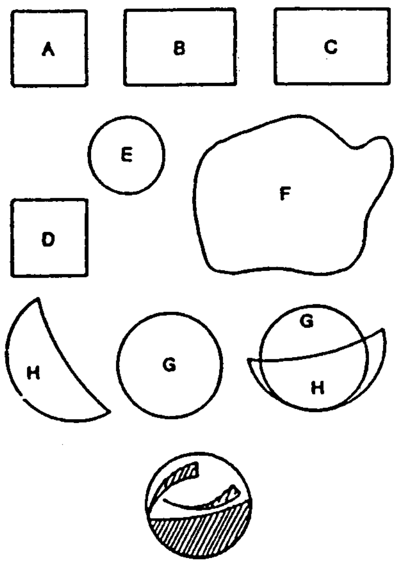
La comparaison par superposition peut aboutir à trois résultats : constatation de l'égalité par congruence, constatation du fait que l'une des surfaces est plus grande que l'autre si l'une s'inclut dans l'autre, impossibilité de conclure pour tout autre cas (on n'admet jamais de conclusions s'appuyant sur une compensation perceptive relative à des parties de la figure).

La superposition est considérée comme supérieure à la simple observation, constatation perceptive qui est mentionnée dans les livres de CM1, pour en souligner les limites.

*Exemple tiré de Thirioux et al., 1980, p.188*

**I) Etendue des surfaces**

- On a découpé des surfaces dans une feuille de papier. On ne s'intéresse pas à leur forme, mais à *leur étendue.*
  Peux-tu superposer la surface B à la surface C ?
  Les surfaces isométriques B et C sont *aussi étendues.*
  Que peux-tu dire des surfaces A et D ?
  Répartis en quatre sous-ensembles les surfaces A, B, C, D, E, F.
  La surface A est-elle moins étendue que la surface C ?
  C est-elle moins étendue que F ? Compare les surfaces A et F sans manipuler.
  Range les quatre sous-ensembles en commençant par le sous-ensemble des surfaces les moins étendues.
- Les surfaces G et H ne sont pas comparables par le procédé précédent. Comment faire ? En découpant la surface H.

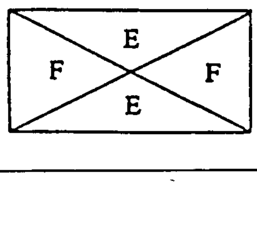



La superposition est utilisée par tous les documents consultés comme le premier procédé ; parfois (Heffe et al., 1980 ; Ermel, 1978), la superposition est réservée au CM1 (ne pas oublier que plusieurs livres sont communs aux CM1 et CM2). Nous trouvons chez Piaget et al., (1948, 1973, p. 318) le recours au même procédé : "l'enfant est prié de constater, à vue ou par juxtaposition, que les deux prés sont exactement "la même chose grands" (les prés sont des feuilles de carton coloré en vert ) ...

**Pliage**

Le pliage tient à la fois de la superposition et du découpage. Il n'est utilisé que dans Ermel. Il est demandé de plier "équitablement" (Ermel, 1982, tome 2, p. 215) des feuilles rectangulaires en quatre parties, puis de découper. Le pliage permet la production de figures directement superposées, ou superposables, après découpage et retournement.
Cependant, Ermel propose également la vérification de l'égalité par des raisonnements faisant intervenir des multiples et des sous-multiples de figures superposables, ce qui constitue un raccourci important.

*Exemple tiré de Ermel, op. cit., p. 216*




E vaut F car la moitié de E est superposable à la moitié de F.

**Découpage et recomposition**

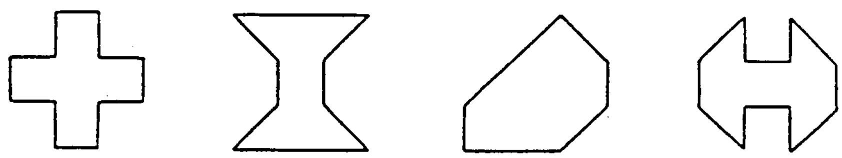
Ce procédé suit et utilise la superposition, et en constitue une extension : on découpe et recolle pour permettre ensuite la comparaison par superposition. Le but général est, comme précédemment, de faire admettre la conservation de l'aire malgré la modification de forme, ce qui permettra la comparaison d'aires de surfaces de formes différentes. Selon Eiller et al. (1982, p. 152), découpage et recomposition sont indispensables pour faire admettre l'égalité des aires de deux surfaces non-superposables, car ils constituent pour l'élève une "vérification expérimentale" (les guillemets sont dans le texte).

Le découpage est toujours une activité demandée à l'enfant, et n'intervient jamais comme une image à observer. Parfois, un exemple de découpage est présenté comme illustration dans le livre de l'Elève, mais l'enfant a (selon le livre du Maître) toujours à l'exécuter lui-même. Ceci est logique puisque c'est l'activité elle-même qui doit l'amener à la "conservation de l'aire". Un petit nombre de manipulations est prévu pour la comparaison de surfaces de tailles inégales. Dans ce cas, après recomposition, une des surfaces engendrées peut être incluse dans une autre (cf. ci-dessus Thirioux et al., 1980). Par contre, un très grand nombre de manipulations est prévu, soit pour comparer des surfaces de formes différentes qui se révèleront être d'aires égales puisqu'engendrant des surfaces superposables, soit pour transformer une surface donnée en une ou plusieurs surfaces de formes différentes.

Le but est, semble-t-il, d'amener à la conservation de l'aire par la réversibilité de l'action du découpage-recomposition et la superposition avant-après. On peut se servir du découpage-recomposition pour déterminer "ce qui change d'une surface à l'autre, ce qui ne change pas" notamment pour "différencier les notions d'aire et de longueur" (Douady et Perrin) en comparant les périmètres de différentes surfaces de même aire, découpées et recollées. Parfois, le découpage concerne des surfaces découpées sur quadrillage.

*Exemple tiré de Thirioux et al., 1980, p. 189*

5) Trois des quatre surfaces suivantes sont aussi étendues.
Cherche lesquelles (calque, découpe, assemble, colle).



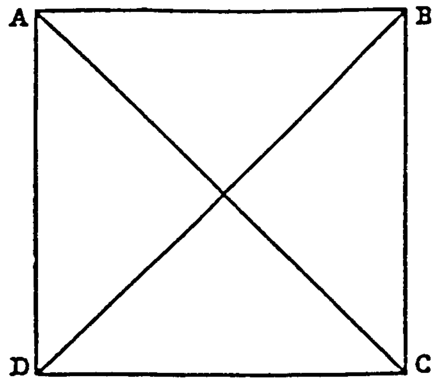
*Exemple tiré de Eiller et al., 1981, p. 129*

2) Construis un carré superposable au carré ABCD.

a) Découpe ce carré suivant les côtés, puis suivant les diagonales.

b) Avec les quatre pièces obtenues, construis :
– un rectangle
– un parallélogramme quelconque

♦ Que peux-tu dire de la mesure de l'aire de chacun des trois polygones ?

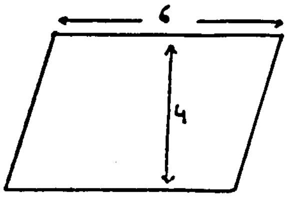



**Dessin**

Les dessins qui nous intéressent représentent les modifications de figures conservant ou non l'aire, ou la transformation de la figure en une autre, dont on saura calculer l'aire. Ceux-là sont donc en filiation directe des découpages-recompositions. On demande aux élèves d'exécuter des transformations-recompositions de figures par dessin et non plus par découpage et manipulation de fragments. La phase de découpage réel est courte, parfois réservée au CM1, comme dans Eiller et al. (1980). La phase de dessin est plus longue, les dessins présentés et demandés sont nombreux. Le fait que ces dessins soient liés au découpage est conforté par l'utilisation fréquente des mêmes termes dans la présentation des activités : couper, accoler, etc ....

*Exemple tiré de Douady et Perrin, 1983, p. 53*

Voici un parallélogramme $S_1$




(échelle 1/2)

En découpant $S_1$ et en recollant convenablement les morceaux, on peut obtenir un rectangle.
Dessiner un tel rectangle $R_1$.

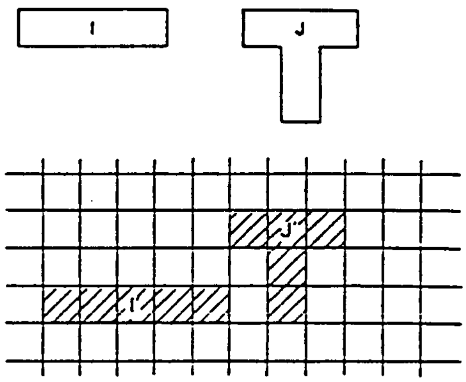
**Quadrillage**

Le quadrillage peut servir de support à des découpages. La vérification opère donc à deux niveaux simultanément : comptage de carreaux-unités et recomposition de surfaces superposables. Chez Thirioux et al. (1980), le découpage sur papier quadrillé sert à "montrer que cela revient au même de découper que de compter les carreaux" (p. 149) et prépare à l'utilisation de la mesure. Chez Douady et Perrin (id.), le découpage sur papier quadrillé intervient en premier, puis il y a "extension de la notion d'aire à des surfaces dessinées sur papier blanc". Là, le quadrillage est considéré comme instituant une situation particulière où le travail de l'élève est facilité par la possibilité de repérage dans la figure et celle de comptage des carreaux, et l'élève doit apprendre qu'il peut s'en passer. L'absence de quadrillage dans le découpage comme dans le dessin incite à échapper à la seule position où le quadrillage correspond aux horizontales et verticales et à manipuler la figure dans toutes les directions (cf. Ermel, 1982, tome 2, p.227).

Le quadrillage peut également servir de support à des dessins. Nous retrouvons ici ce qui a déjà été dit à propos du découpage. Le quadrillage sert à la fois de repère, aide au dessin, et sert aussi à l'introduction de la mesure : "faire correspondre un nombre à l'étendue d'une surface" (Thirioux et al., 1980 b, p. 149).

*Exemple tiré de Thirioux et al., 1980, p. 91*

- Trouve différents procédés pour comparer les étendues des surfaces I et J. Tu peux par exemple reporter sur quadrillage et compter les carreaux.
- Nous dirons :
  - le carreau du quadrillage est le carreau unité ;
  - l'aire de I est 4 ; aire (I) = 4 ;
  - l'aire de J est 5 ; aire (J) = 5 .




**Pavage**

La spécificité du pavage réside sans doute dans le fait que l'itération de l'unité de base est exécutée par l'enfant lui-même, le quadrillage constituant une forme passive du pavage où il n'y a plus qu'à compter. Pour distinguer le pavage du dessin sur quadrillage, on peut dire que le pavage consiste à réaliser le quadrillage sur le dessin et non l'inverse. Le pavage, comme le quadrillage – mais mieux sans doute – conduit à la mesure ; ceci est clairement exprimé dans les documents pour les maîtres. Ainsi, Douady et Perrin (1983, p. 60) : "Notre objectif est d'utiliser une mesure pour comparer les aires de surfaces planes. La collection des surfaces a été choisie de façon que la comparaison directe (c'est-à-dire par superposition) et les comparaisons à l'œil ne donnent rien. La seule manière de s'en tirer est de passer par l'intermédiaire de la mesure (on choisit d'exclure les découpages et recollements. La mesure sera d'abord obtenue par pavage de la surface à l'aide de carrelages". Dans les étapes ultérieures, "la mesure se détache du pavage".

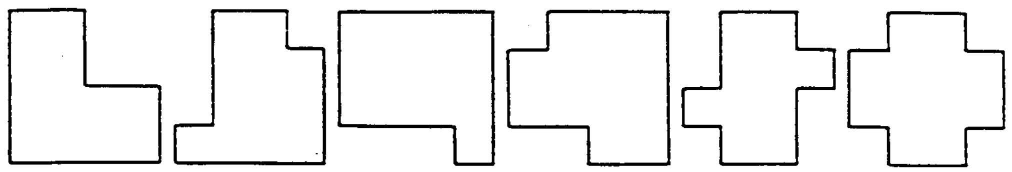
"Si l'on entend par mesure l'itération de l'unité" (Piaget et al., 1948, 1973, p. 470), on peut admettre que la juxtaposition d'unités de carrelage en est une bonne matérialisation. Mais dans notre cas, la juxtaposition ne suffit pas : il faut aussi reconnaître la structure d'ensemble en lignes et colonnes qui fait apparaître le nombre d'unités de façon multiplicative.

Le pavage est utilisé pour l'enseignement de points essentiels.

Ainsi : aborder la mesure par l'itération d'un mesurant :

*Exemple tiré de Thirioux et al., 1980, p. 189*

4) Calque les surfaces ci-dessous. Au moyen d'un quadrillage comme celui du paragraphe II, classe-les et range-les selon leur étendue.



Ainsi : relier le nombre d'unités à la taille de l'unité, aborder la correspondance des unités de mesure de surface entre elles dans le système décimal :

*Exemple tiré de Thirioux et al., 1980, p. 190*

- **Quadrille plus finement le carré du tableau* en dessinant des carrés de 1 dm de côté.**
  1 $m^2$ se remplace par combien de $dm^2$ ?
  Dessine sur ton cahier un carré ; la mesure de la longueur du côté est 1, en dm.
- **Quadrille plus finement en dessinant des carrés de 1 cm de côté.**
  1 $dm^2$se remplace par combien de $cm^2$ ?

* *Le carré du tableau est de 1 m sur 1 m.*

Ainsi : reconnaître la structure en lignes et colonnes, relier la mesure des côtés à celle de la surface.

Selon Rogalski (1985), ces derniers rôles sont mal assumés par le pavage : le caractère multiplicatif n'est pas favorisé, et le décompte des unités demeure largement additif. De plus, les pavages ne sont ni assez nombreux, ni assez variés pour faire à la fois distinguer et coordonner la mesure des surfaces et celles des côtés ou du périmètre des figures.

## CONCLUSION

Nous avons tenté de décrire l'utilisation des procédés graphiques dans l'enseignement de la mesure de la surface dans les manuels scolaires de l'école primaire. Un solide consensus a été observé parmi ces manuels quant à cette utilisation et à la progression des procédés utilisés : superposition, découpage-recomposition, dessin, quadrillage, pavage.

La progression des activités reflète la genèse décrite par Piaget et al. (1948) : établissement de la conservation de l'aire et des conditions de cette conservation par des activités réversibles modifiant ou non l'aire, comparaison et mesure de surfaces directement, puis par un moyen terme transitif qui devient une unité itérative, mise en relation des côtés et des "continus multidimensionnels" (Piaget et al., 1948, 1973, p. 422) qu'ils entourent.

La progression retracée par Piaget est donc reproduite ici en accéléré, dans les quelques semaines de l'enseignement. Par ailleurs, les moyens d'investigation utilisés par Piaget et al. (id.) pour jalonner le trajet qui mène à la construction euclidienne sont ici présents comme procédés d'apprentissage. Ceci n'est en soi ni positif, ni négatif.

## BIBLIOGRAPHIE


Activités mathématiques à partir de pavages (1983). – In **Quelles activités pour quels apprentissages.** Collection inter IREM n° 3. IREM D'Orléans.

DOUADY R., PERRIN M.J. (1983). – **Mesure des longueurs et des aires** – IREM. Université Paris VII, n° 48.

DOUADY R., PERRIN M.J., (1986, 1987). – Aires de surfaces planes en CM2 et 6ème. – **Grand N**, IREM et CRDP de Grenoble, n° 39-40 et 41.

EILLER R., BRINI R., MARTINON M., RAVENEL R., RAVENEL S. – **Mathématiques et calcul, CE1** (1978). **Mathématiques et calcul, CE2** (1979), Paris, Hachette.

EILLER R., RAVENEL S., RAVENEL R. – **Mathématiques et calcul, CM1** (1980) **Livre du Maître CM1** (1982). **Mathématiques et calcul CM2** (1981). – **Livre du Maître CM2** (1983), Paris, Hachette.

ERMEL, – **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, CE** (1978), **Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, CM** (1982), Paris, Sermap.

HEFFE P., LEDE R., CONSTANS B.– **Logique et calcul CE** (1979), **Logique et calcul CM1** (1980), **Fichier du Maître CM1** (1980), **Logique et calcul CM2** (1981), **Fichier du Maître CM2** (1981), Paris, Nathan.

KASTENBAUM M., (1987). – Procédés graphiques utilisés pour l'enseignement de la mesure de la surface à l'école élémentaire – à paraître In **Bulletin de Psychologie**, n° spécial sur l'image.

PAINCHAULT J., (1982). – Pavages au CM2 – **Grand N** – CRDP-IREM Grenoble, n° spécial Mathématiques pour le cycle moyen, tome 2, pp. 59-70.

PIAGET J., INHELDER B., (1947 1ère édition, 1981). – **La représentation de l'espace chez l'enfant**, Paris, PUF.

PIAGET J., INHELDER B., SZEMINSKA A., (1948 1ère édition, 1973). – **La géométrie spontanée de l'enfant**, Paris, PUF.

ROGALSKI J., (1982). – L'analyse des notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). **Recherches en didactique des mathématiques**, 3, 3 pp. 343-396

ROGALSKI J. (1985). – Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les enfants d'âge préscolaire et scolaire. Thèse d'Etat, Université Paris.

THIRIOUX A., GASPARI E., LEREDDE L., BORDAT B., (1978). – **Mathématique contemporaine, CE2.** Paris, Magnard.

THIRIOUX A., GASPARI E., VIDAL L., BORGOMANO P., (1980). – **Mathématique contemporaine, cycle moyen 1ère et 2ème année, Livre du Maître.** Paris Magnard.

VINH BANG L., UNZER E., (1965).– **Conservations spatiales** – Etudes d'épistémologie génétique, XIX, Paris, PUF.