

DEFORMATIONS ET SIMILITUDE

Activités sur réseaux triangulaires en CE 2

Annie BESSOT – Madeleine EBERHARD

La séquence que nous présentons s'est déroulée dans le CE 2 de Mireille ENGELSTEIN (école "Mi-Plaine" de Meylan) de début novembre à fin janvier 1982-1983.

Ces activités ont été construites dans le cadre d'un stage organisé par l'équipe ELEMENTAIRE de l'IREM de Grenoble en direction des conseillers pédagogiques de l'Isère. Elles ont été motivées par des difficultés rencontrées dans d'autres activités géométriques au sujet de la notion de forme.

A la question : "Quand peut-on dire que deux figures ont la même forme ?", nous avons répondu ici de façon classique : "Deux figures ont la même forme si elles sont semblables". Mais nous avons voulu aborder ce thème en proposant des activités qui amènent à différencier la similitude de transformations que nous avons appelées déformations. Pour cela, nous avons utilisé un matériel structuré (réseaux triangulaires) permettant la reconnaissance des propriétés des figures en facilitant la comparaison des angles et la mesure des segments.

PARTIE I – Activités de reproduction et d'agrandissement sur réseaux : "procédures spontanées".

Séance 1 – Activités de reproduction.

a – Tracé libre et reproduction sur réseaux de même maille.

matériel : des crayons de couleur ;
pour chaque élève, deux demi-feuilles imprimées d'un réseau de même maille (0,75)
dont l'un est pointé.

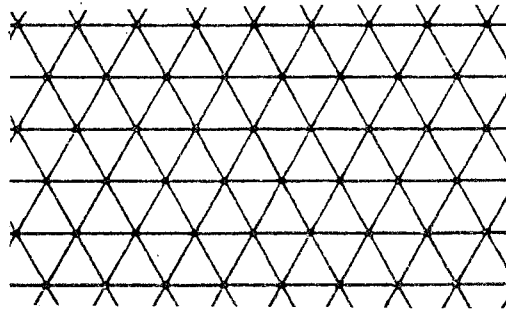
Les élèves reçoivent d'abord le réseau non pointé et remarquent aussitôt qu'il est formé de petits triangles.

Consigne 1 : "Vous allez faire des dessins en coloriant les petits triangles. Attention, vous utilisez une seule couleur pour faire un dessin. Vous pouvez faire les dessins que vous voulez, mais chaque dessin doit avoir sa couleur".

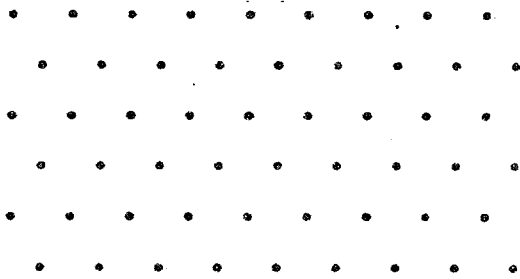
Quand chaque élève a obtenu au moins un dessin, on distribue le papier pointé.

Consigne 2 : "Chacun choisit l'un des dessins qu'il a réalisés et le refait sur la feuille avec les points. Attention, pour refaire un dessin vous utilisez la couleur de ce dessin".

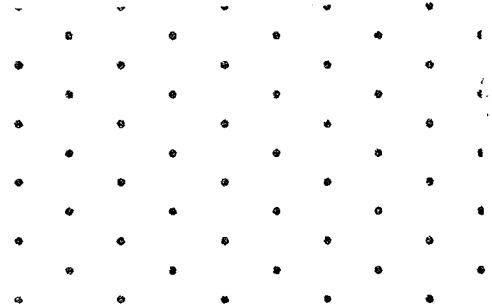
Remarque : il faut prendre garde à imprimer de la même façon les deux réseaux :



comme ceci



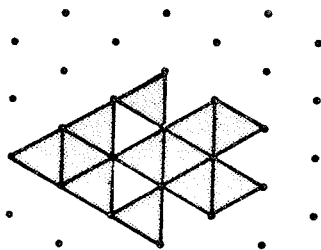
et non comme cela



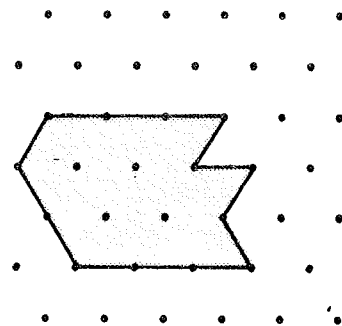
Pour refaire une figure, deux types de procédures apparaissent :

- reproduction du pavage de la figure par le tracé successif de triangles : nous l'appelons procédure "triangle" ;
- tracé direct du contour de la figure : nous l'appelons procédure "contour".

Exemples :



(procédure triangle)



(procédure contour)

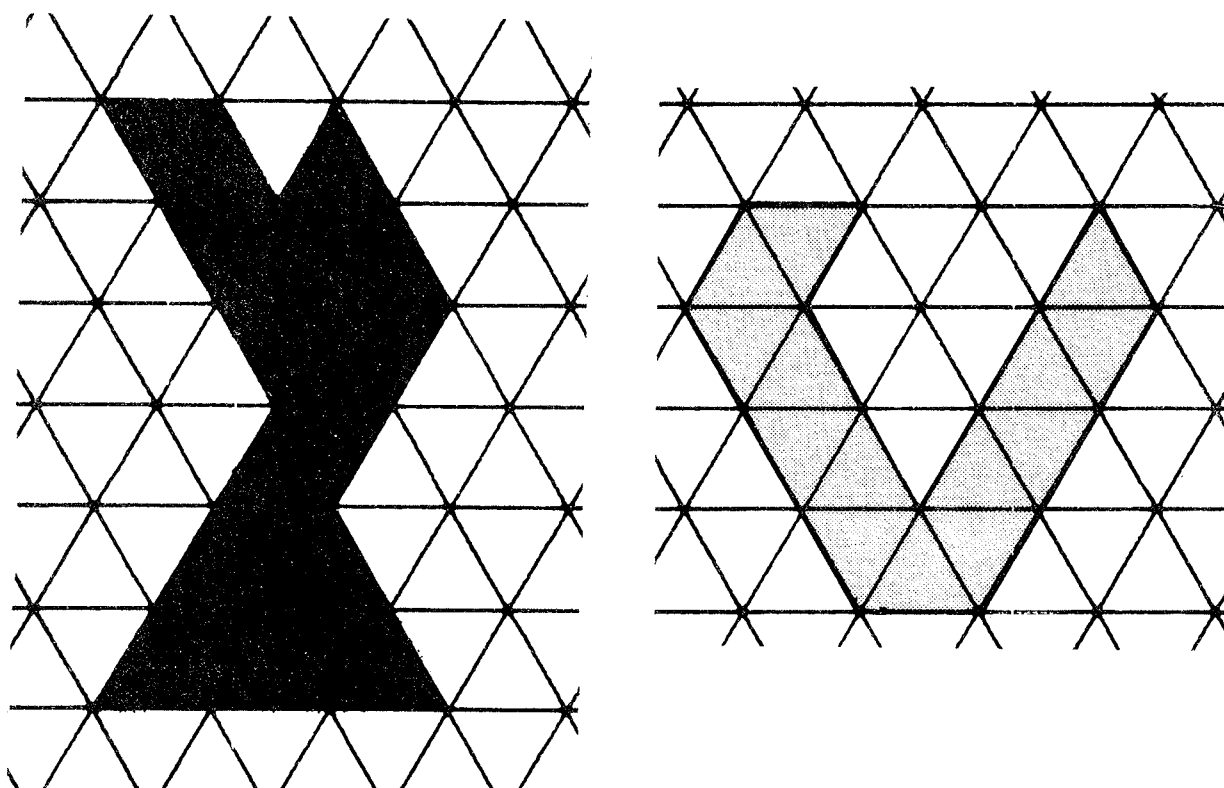
Résultats

procédure réussite	"triangles"	"contour"	mixte	Σ
oui	6	5	0	11
non	4	6	1	11
Σ	10	11	1	22*

(* un élève est absent)

b – Reproduction, sur réseaux de même maille, de deux figures données.

matériel : chaque élève dispose d'une demi-feuille à réseau pointé de maille 1,5 et des deux figures suivantes (sur réseau de même maille) :



On s'assure que les élèves posent le réseau pointé de la même façon que le réseau portant les deux figures.

Consigne : "Sur la feuille avec les points vous refaites deux figures, pareilles à celles que l'on vous a données".

Nous avons proposé une figure opaque aux élèves pour poser à tous les élèves le problème de la reproduction d'une figure à l'aide de son contour (procédure "contour").

Résultats

procédure réussite	"triangles"	"contour" pour la figure opaque "triangles." pour l'autre.	"contour"	Σ
oui	4	3	10	17
non	2	0	3	5
Σ	6	3	13	22

Remarque : les deux erreurs des enfants utilisant la procédure "triangles" concernent la reproduction d'une seule des deux figures, opaque ou transparente. Les trois erreurs de la procédure "contour" concernent toutes au moins la figure transparente.

Mise en commun.

Pour s'assurer que les figures initiales et les figures reproduites sont **pareilles**, la maîtresse met en place un procédé systématique de comparaison : la superposition des figures, vérifiée par transparence.

Remarquons que certains enfants ont proposé des procédés de mesure pour effectuer la comparaison : "on peut compter les points, les traits, les carrés (pour triangles !), les traits de point à point".

c – Reproduction d'une figure donnée sur un réseau de maille différente.

matériel : on distribue à chaque élève une demi-feuille de papier pointé 0,75 et la figure suivante sur réseau 1,5.

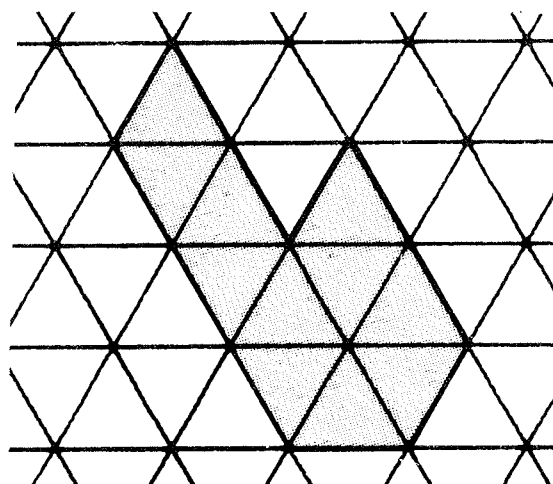
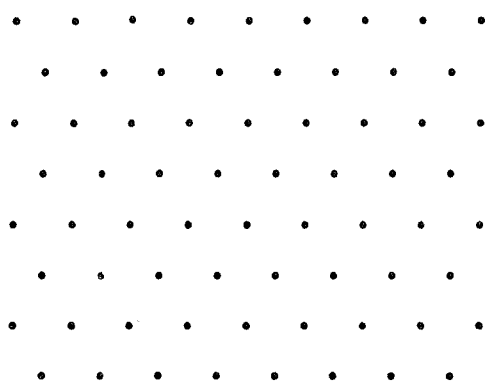


figure A

Consigne : "Vous reproduisez la figure sur la feuille à points". Cette consigne suscite de nombreuses questions dans la classe :

"On met la feuille à petits points comme on veut ?"

"Il faut que ce soit de la même grosseur ?"

"On peut faire plus petit ?"

"Là il y a des petits triangles et là de grands triangles, comment on fait ?".

A chacune des questions la maîtresse répond : "Tu reproduis, comme tu veux".

Nous avons volontairement utilisé le terme **reproduire** dans la consigne : nous voulions obtenir l'éventail le plus large possible de productions, pour permettre ultérieurement une distinction entre les figures superposables dites "identiques" et les autres. Nous pensions que l'expression "figure pareille à une autre", ayant pris un sens précis lors de la phase b, risquait de fermer l'éventail malgré le choix de la maille du papier pointé.

Résultats

procédures figures	"contour"	"triangles"	Σ
superposables	5	2	7
semblables à A (plus petites)	9	1	10
non semblables à A	3	1	4
Σ	17	4	21

(un élève n'a pas terminé)

Nous avons distingué trois types de figures :

- les figures **superposables** à la figure A
- les figures **semblables** (et non superposables) à la figure A

Rappelons au lecteur une définition classique de la similitude. On appelle similitude toute transformation du plan pour laquelle il existe un nombre réel strictement positif k vérifiant pour tout couple de points (A, B) du plan :

– mesure du segment $[A' B'] = k \times$ mesure du segment $[A B]$ où A' et B' sont les transformés de A et B.

k est appelé rapport de similitude.

La similitude transforme une figure à contour polygonal en une autre figure à contour polygonal ayant même nombre de côtés et telle que :

- les angles qui se correspondent sont égaux ;
- les rapports des longueurs des côtés de la figure initiale et de la figure transformée sont les mêmes.

Ces invariants permettent de reconnaître si deux figures à contour polygonal sont semblables ou non.

— les figures non semblables à la figure A.

Par la suite, nous nous intéresserons à des figures particulières de ce type que nous appellerons **figures déformées par rapport à A**. Dans ces figures à contour polygonal certaines propriétés de A sont conservées : le nombre de côtés et les angles correspondants. Par contre certains rapports des longueurs des côtés ne sont pas conservés.

Séance 2 — Activités d'agrandissement

a — Classement des reproductions réalisées dans la première séance.

La maîtresse affiche au tableau la figure A et rend à chaque élève le dessin produit à la fin de la première séance (phase α). Elle demande aux élèves de rappeler ce qui leur avait été demandé à propos de la figure A :

E : "On avait dit de reproduire la figure sur une feuille à petits points".

La maîtresse affiche alors le dessin d'Edgar :

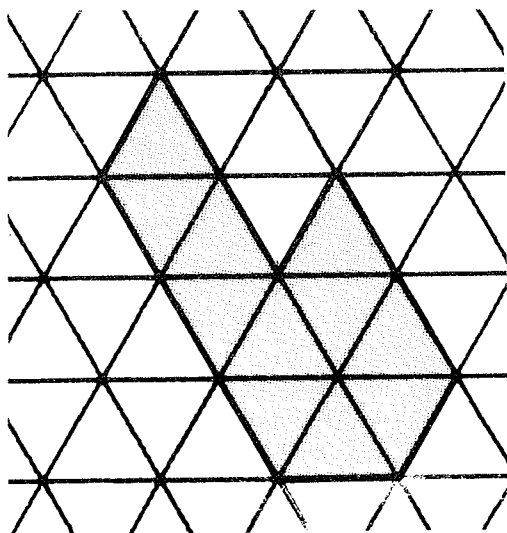
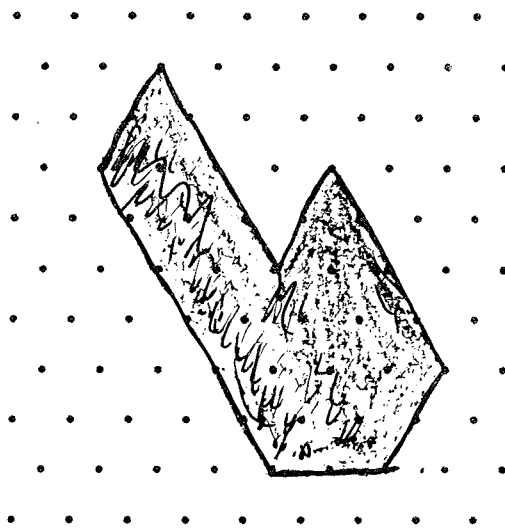


figure A



dessin d'Edgar

Les enfants estiment que les deux figures sont pareilles. La maîtresse demande comment on peut être sûr qu'elles sont pareilles.

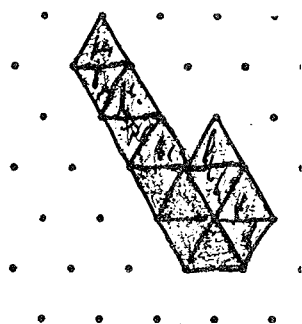
Benjamin dit : "on peut les mettre au soleil" puis il superpose les deux figures sur la vitre d'une fenêtre et affirme : "c'est pareil". La maîtresse conclut : "deux figures sont pareilles quand on peut les mettre l'une sur l'autre".

La maîtresse fait utiliser ce critère de comparaison pour classer l'ensemble des figures obtenues.

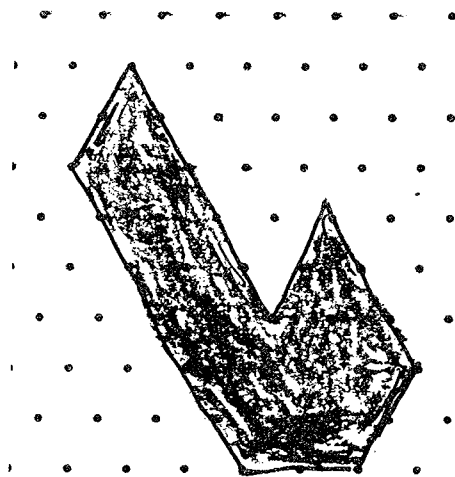
On obtient ainsi quatre classes :

- les figures pareilles à celles d'Edgar (7) et superposables à la figure A ;
- les figures pareilles à celles de Sylvie (10) , figures semblables à A mais plus petites ;
- deux classes de figures déformées par rapport à A :

- pareille à celle de Gaelle (2)



- pareille à celle d'Arnaud (1)



b – Agrandissement d'une figure donnée.

matériel : chaque élève reçoit une feuille de papier pointé 0,75 et la figure A sur réseau 1,5.

Consigne : " Vous allez dessiner sur la feuille à points une figure plus grande que la figure A. On dit qu'on va agrandir la figure A ".

Puis : " Vous pouvez faire plusieurs figures, de plus en plus grandes".

Une fois les agrandissements réalisés, la maîtresse choisit des agrandissements dont plusieurs résultent de procédures différentes. Elle affiche ainsi sept dessins et demande à leurs auteurs d'expliquer comment ils ont fait pour agrandir. Il apparaît finalement dans la classe que les élèves distinguent en tout cinq procédures d'agrandissement différentes.

Description des procédures d'agrandissement.

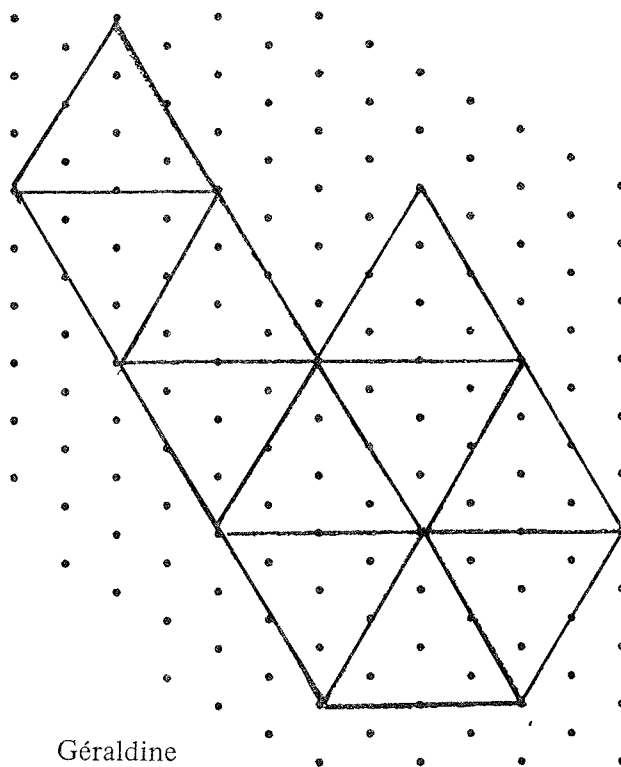
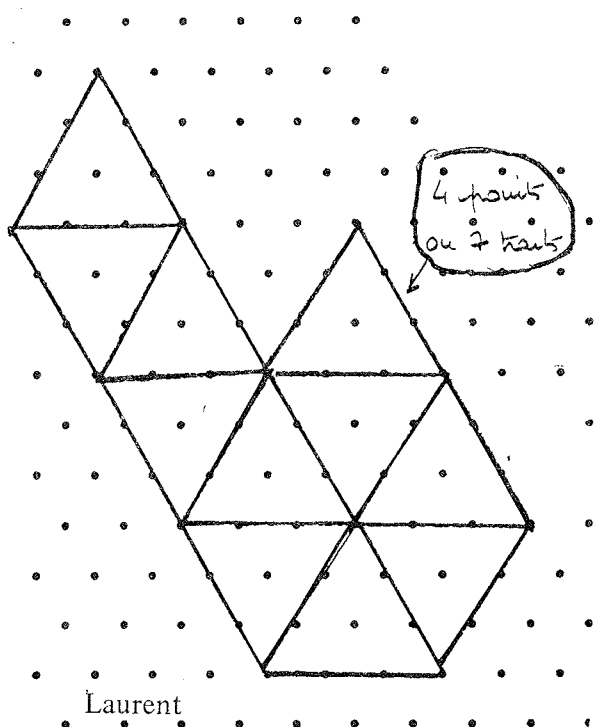
● Certaines procédures donnent des figures semblables à la figure A :

– procédures 1 : type "triangles" (10 élèves)

"Pour les triangles, j'ai mis 5 points, puis 7 points . . ." (David)

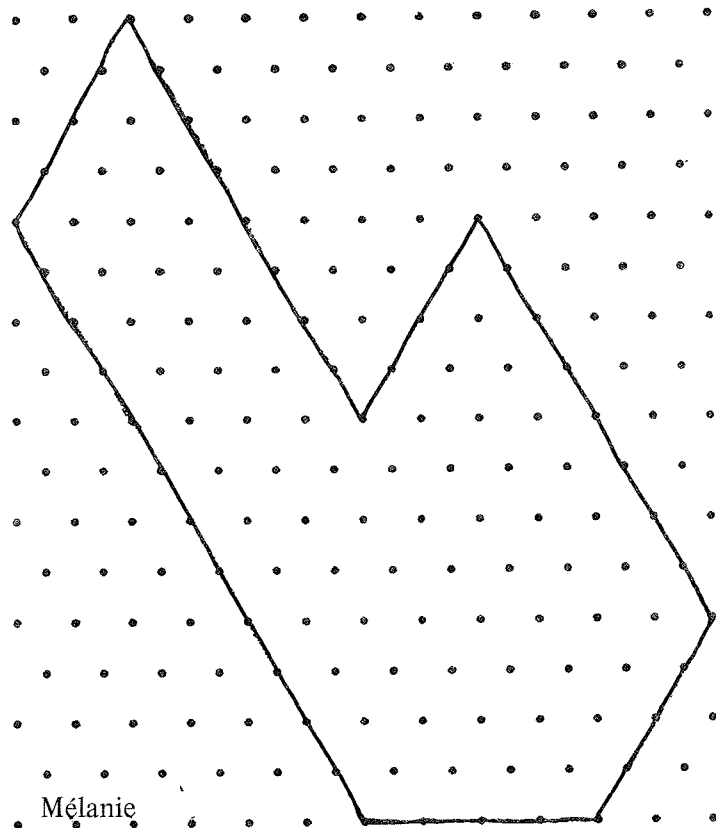
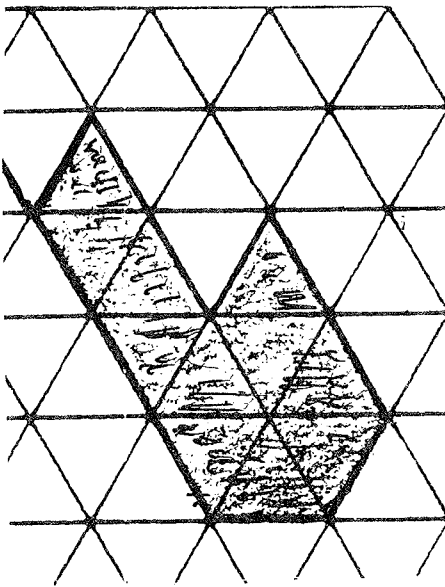
"Pour les triangles, j'ai mis 3 traits, puis 6 traits " (Edgar).

Exemples d'agrandissements :



– procédure 2 : type "contour" (1 élève)

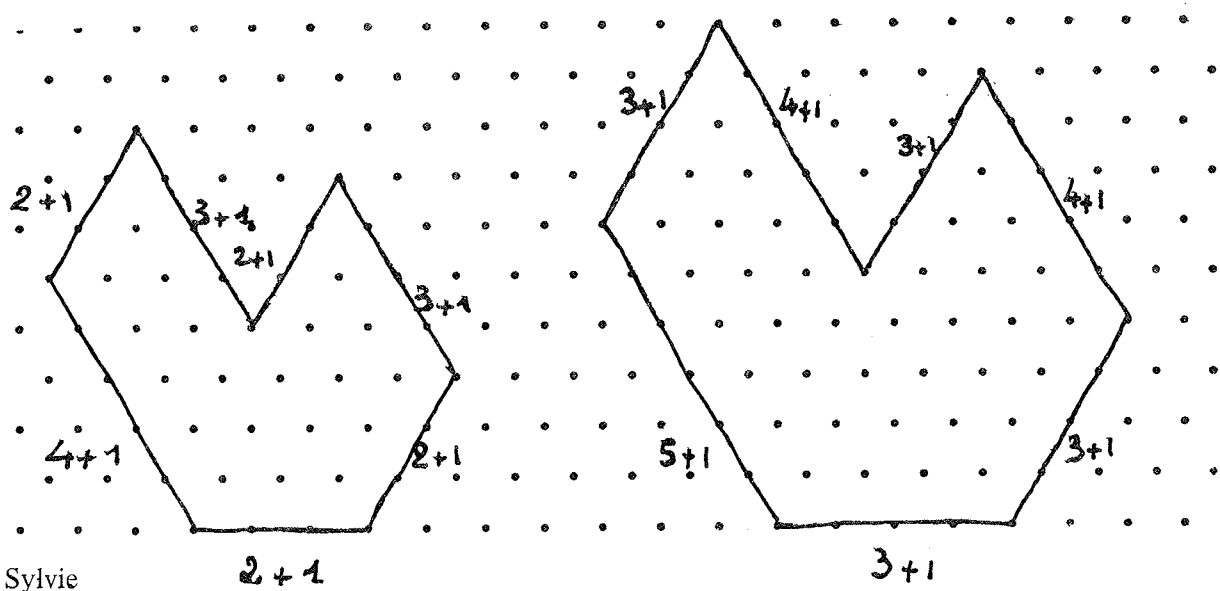
"J'ai multiplié le nombre de petits traits par deux".



● D'autres procédures donnent des figures déformées. Ces procédures sont toutes de type "contour" :

— procédure 3 : (1 élève)

"J'ai rajouté un trait".

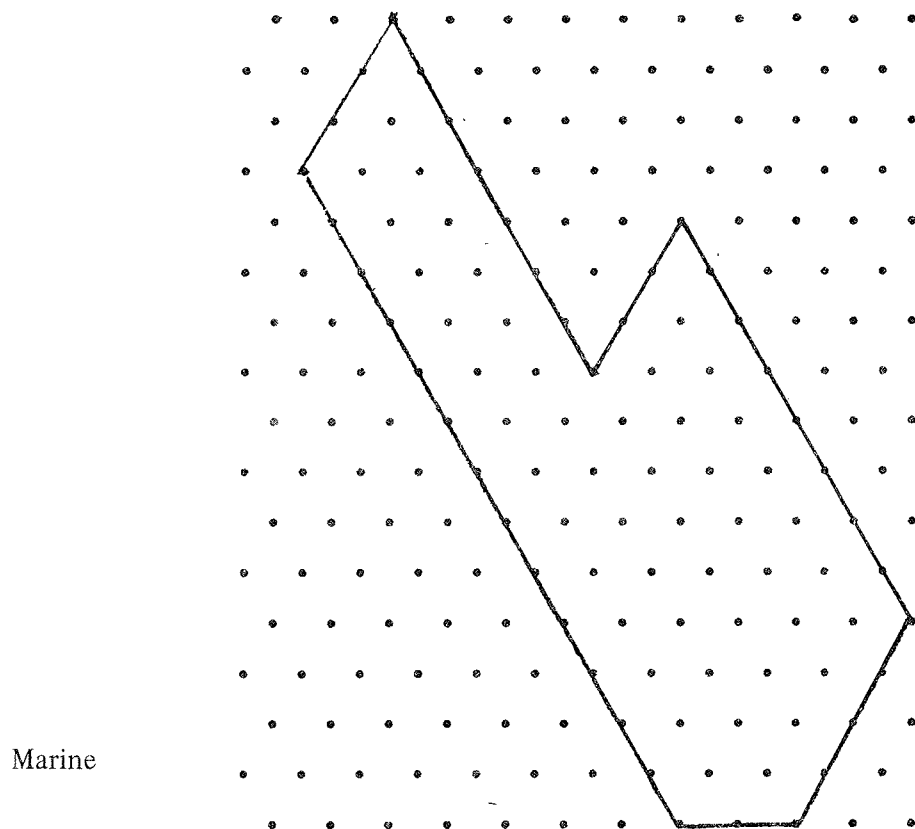


Remarque : c'est nous qui avons ajouté les mesures.

— procédure 4 : (6 élèves) :

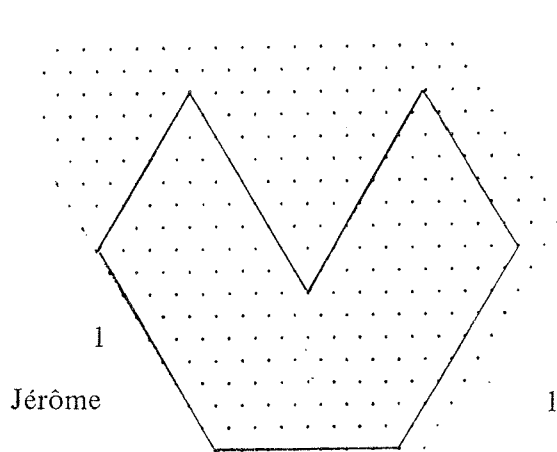
”J’ai d’abord fait le contour”.

Ces procédures donnent un agrandissement du contour qui respecte, comme dans la procédure 2, le nombre de côtés, leur ordre et leurs directions. Par contre il n’y a pas de règle systématique d’agrandissement des côtés.

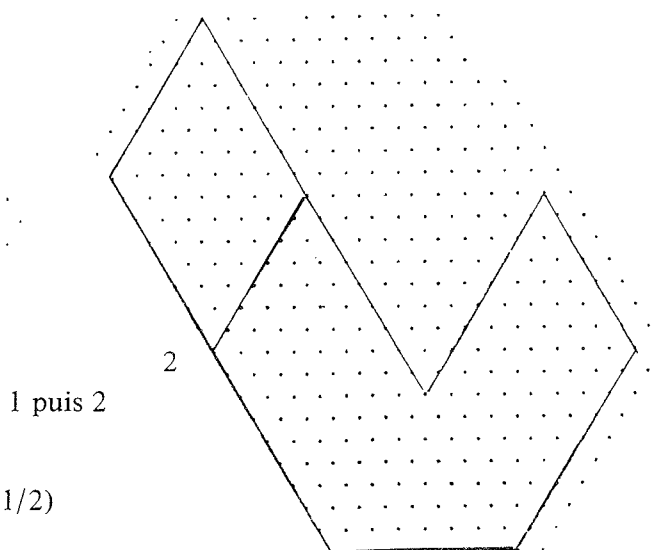


— procédure 5 : (1 élève)

”J’ai agrandi une partie de la figure, puis l’autre”.



(réduction 1/2)

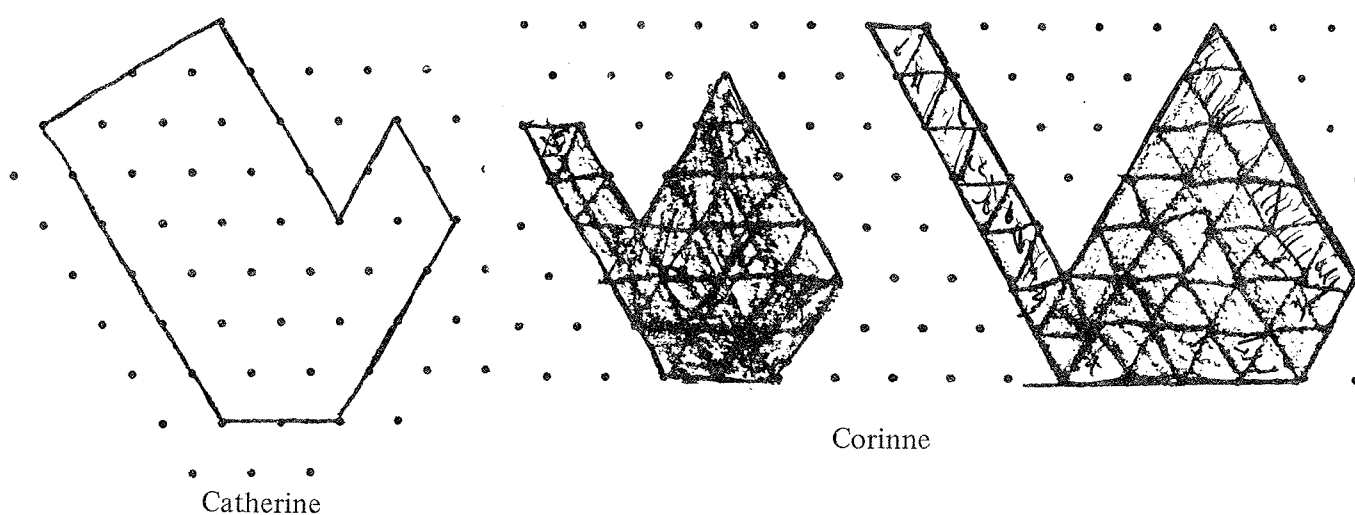


Remarque : les propriétés de la figure A invariantes dans l'agrandissement sont les mêmes que dans les procédures 3 et 4.

● Enfin, contrairement aux autres procédures, certaines procédures donnent des agrandissements qui respectent le nombre de côtés de la figure initiale mais non les directions de ces côtés :

— procédures 6 : (3 élèves)

Par exemple :



Mais ces élèves identifient leur procédure à l'une des cinq procédures précédentes :

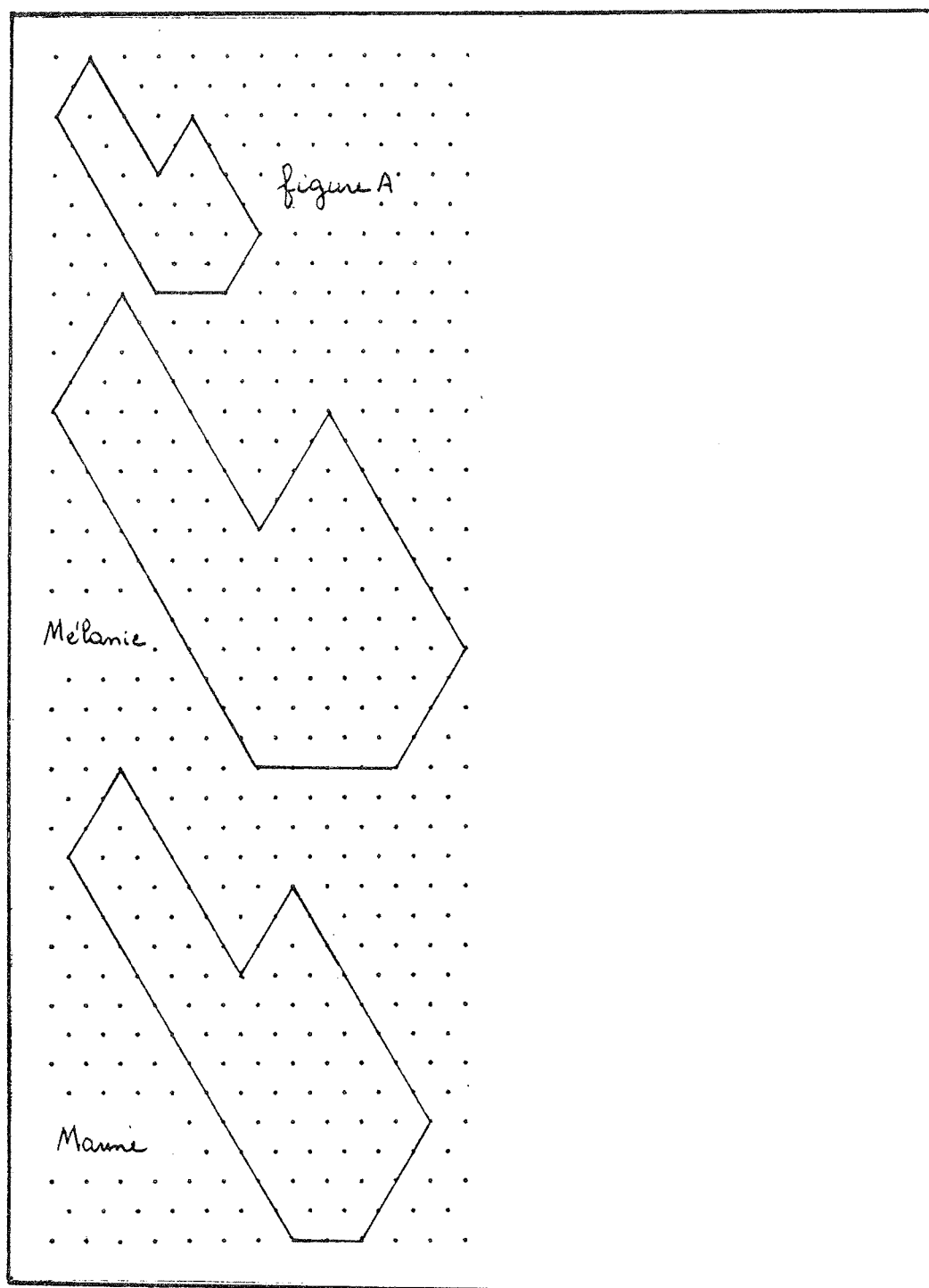
— Catherine identifie sa procédure à la procédure 2. Elle dit : "J'ai multiplié le nombre de petits traits par deux". Mais dans cette activité, elle n'a pas pu retrouver sur le papier pointé les mailles du réseau de la figure initiale.

— Corinne, elle, identifie sa procédure à la procédure 4 : "J'ai dessiné le contour et après j'ai dessiné les triangles".

Séance 3 – Etude de deux figures agrandies (produites lors de la séance 2)

La maîtresse fait rappeler l'activité de la séance précédente et conclut : "La dernière fois vous avez agrandi la figure A. Nous avons regardé ce que vous avez fait. Vous avez agrandi de beaucoup de façons différentes".

Chaque enfant reçoit la feuille dont nous présentons page suivante la réduction de moitié :



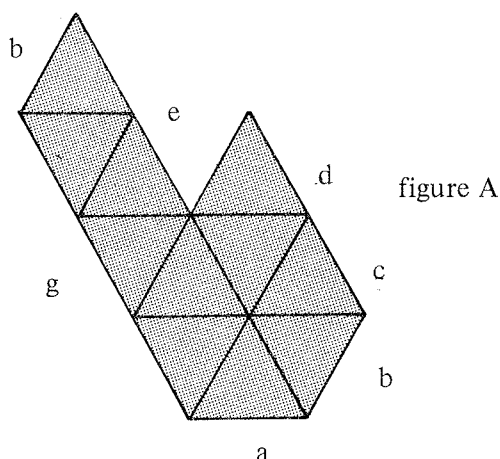
La maîtresse précise : "Nous avons recopié les figures agrandies par Mélanie et par Marine. Elles les ont obtenues en traçant les contours."

a – Etude individuelle des figures

Consigne : "Vous regardez bien la figure A, la figure de Mélanie et celle de Marine. Et vous écrivez vos remarques."

Aucun enfant ne reste passif ! Tous en définitive établissent une relation entre deux figures au moins. Seul un élève ne justifie pas sa mise en relation. Nous analysons plus loin ces relations ainsi que leurs justifications.

Analyse a priori des figures



– du point de vue du contour :

Les trois figures ont un contour polygonal de sept côtés. Quand on suit le contour de la même façon sur les trois figures, le passage d'un côté au côté suivant se fait avec le même changement de direction (**égalité des angles correspondants**)

Cependant la figure de Mélanie ressemble plus à la figure A que celle de Marine ; on trouve pour chacune des deux premières figures les mêmes relations entre côtés :

$$a = b = d = f$$

$$c = e$$

$$2a = c$$

$$3a = g$$

(similitude des figures A et de Mélanie).

Dans la figure de Marine seule est vérifiée l'égalité $d = f$ (les trois figures ne sont pas semblables).

Si l'on compare maintenant les côtés **correspondants** des figures :

– les côtés de la figure de Mélanie sont deux fois plus longs que ceux de la figure A (rapport de similitude égal à 2) ;

– six côtés de la figure de Marine sont plus longs que ceux de la figure A, tandis que les côtés a des deux figures sont égaux ;

— on a toutes les relations d'ordre possibles entre les longueurs des côtés correspondants des figures de Marine et Mélanie.

— du point de vue du pavage par des triangles.

Les trois figures peuvent être pavées par des triangles élémentaires

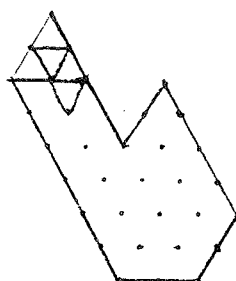


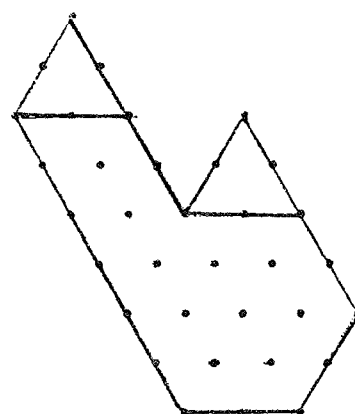
figure A

On peut ordonner les figures selon le nombre de triangles qui les pavent :

figure A : 44 triangles; figure de Marine : 134 triangles ; figure de Mélanie : 176 triangles.

Remarquons que l'on peut obtenir le même ordre en dénombrant les points intérieurs.

Dans la situation d'agrandissement proposée, la figure A était pavée par des triangles équilatéraux non élémentaires :



Ce pavage structure la figure A:

Si l'on veut retrouver cette structure (même nombre de triangles et même règles d'agencement) dans les figures de Mélanie et de Marine, le triangle de base du pavage est imposé : la figure de Mélanie admet un pavage de même structure mais avec des triangles de côtés deux fois plus grand (propriété de la similitude). Par contre, il est impossible de réaliser un pavage de la figure de Marine avec le triangle de base.

Résultats

— Dix neuf enfants comparent les figures à l'aide de leur contour :

— seize comparent certains côtés qui se correspondent dans les figures, pour constater des différences (5 enfants) ou pour ordonner ces figures (11 enfants). Pour cette comparaison, seuls trois enfants utilisent plus d'un côté.

Ordre sur les figures à partir d'un seul côté.

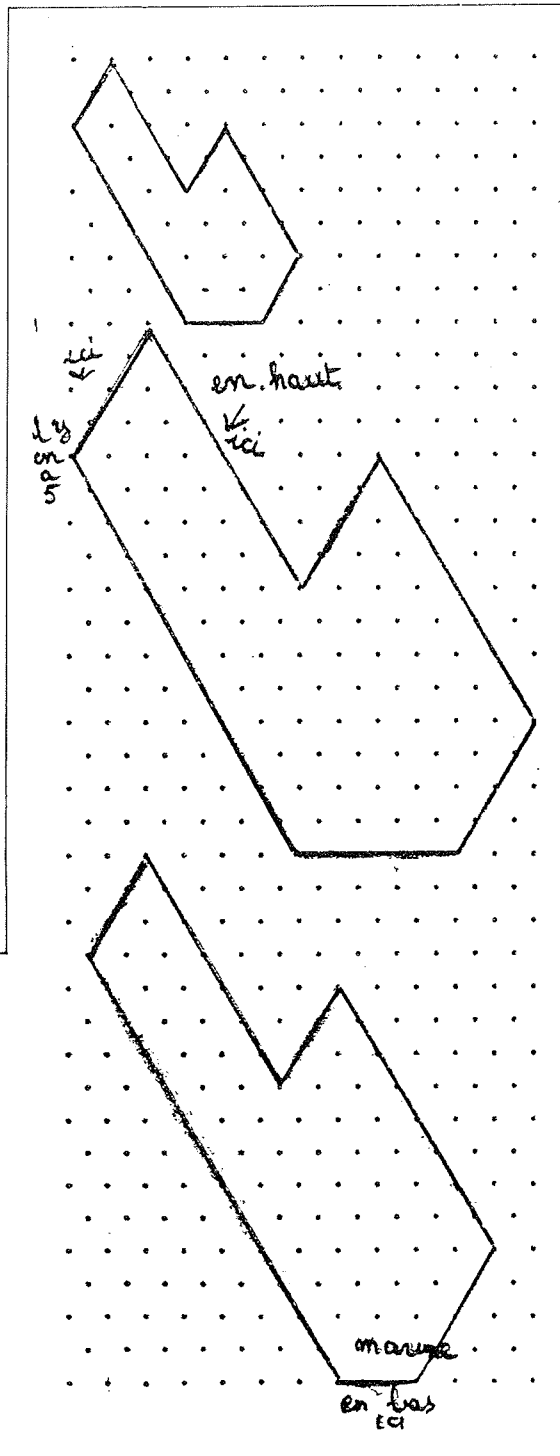
Prenom : Benjamin

La figure de Mélanie est ^{plus} grosse
que celle de Marine et la figure
n°1, parce-que celle de Méla-
nie a 5 points au côté d'en bas

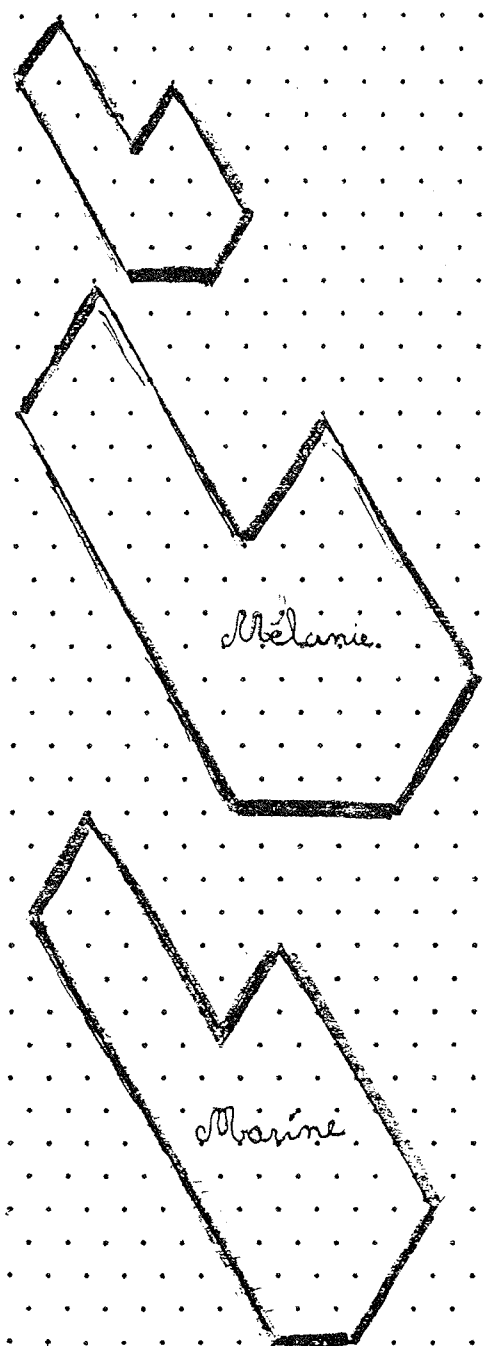
Constat de différence à partir de plusieurs
côtés se correspondant.

Julie

Dans la figure de
Mélanie il y a plus
de points que Marine
car même Mélanie en a
5 et Marine 3. En haut
Marine en a 8 et Mélanie
en a 9



— trois enfants étudient la conservation de certains rapports des côtés de la figure A dans les agrandissements proposés.

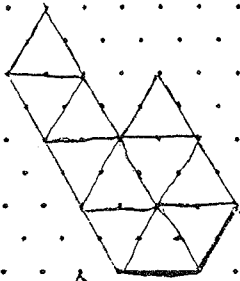


Prénom : Marine

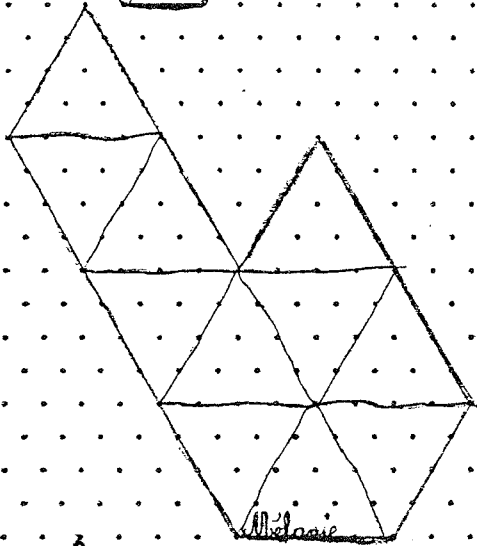
Marine a agrandi sa figure mais un côté est pareille que la petite. Dans la petite figure il y a deux côtés qui ont trois points et dans celle de Marine les deux côtés ne sont pas pareilles. La petite figure a un côté qui a trois points et a côté il y a 5 points et dans celle de Marine il y a d'un côté il y a 6 points et de l'autre côté il y a 9 points.

Trois enfants comparent les figures par le pavage qui les structure.

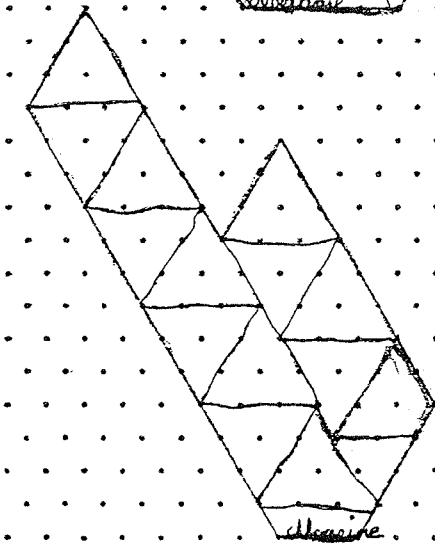
Prénom: David



La figure numéro 1, fait 3 points pour un triangle, et aussi elle fait 11 triangles.



La figure de Mélodie, fait 5 points pour un triangle, et cela de Mélodie fait aussi 11 triangles.



La figure de Maxime, fait 4 points pour un triangle, mais cela de Maxime fait 15 triangle.

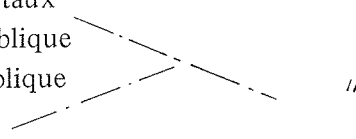
b – Phase collective s'appuyant sur l'étude individuelle.

Nous avons prévu d'exploiter collectivement les remarques des élèves à propos des côtés des figures (leur nombre, les mesures des côtés, les relations d'égalité de certains côtés) et à propos des directions des côtés (changements de directions quand on suit le contour).

Déroulement : la maîtresse demande aux enfants qui le veulent de lire leurs messages. A l'occasion de cette lecture elle introduit le mot côté ainsi que le terme trait pour désigner un segment élémentaire. Puis elle met l'accent sur les directions des côtés en questionnant les enfants sur ce qui se passe quand on suit le contour de la figure : "quand on change de côté, on change de direction".

Consigne : "Vous allez colorier de la même couleur les côtés qui ont la même direction dans les trois figures :

rouge pour les côtés horizontaux
bleue pour cette direction oblique
verte pour cette direction oblique



Deux élèves seulement font des erreurs .

Puis la maîtresse demande aux élèves de dénombrer les côtés de la figure A qui ont même direction. Certains enfants font remarquer que "sur les autres (Marine et Mélanie), c'est la même chose !".

A partir d'une remarque fréquente "ces côtés sont pareils", la maîtresse met en place la notion d'égalité de côtés, en s'appuyant sur la mesure avec pour unité le segment élémentaire.

PARTIE II – Agrandissements par deux procédures de type contour.

Séance 4 – Etude d'une première procédure d'agrandissement : similitude.

Chaque élève reçoit la feuille sur laquelle il a travaillé dans la séance précédente (figure A et figures de Marine et Mélanie dont les côtés sont coloriés en rouge, bleu ou vert).

La maîtresse fait rappeler le vocabulaire mis en place : côtés, direction, égalité des côtés.

a – Travail individuel : procédure d'agrandissement de Mélanie.

Consigne : "Expliquez par écrit comment Mélanie a agrandi la figure A. Je vous rappelle qu'elle nous a dit qu'elle avait suivi le contour. Comment a-t-elle fait pour tracer son contour ?"

Résultats

— quatre élèves ne donnent pas de procédé d'agrandissement : ils se contentent de décrire la figure de Mélanie ou de reprendre l'activité de comparaison de la séance 3 en s'aidant des couleurs pour désigner les côtés.

Quels sont les procédés d'agrandissements décrits par les autres élèves ?

— quatre élèves expriment que Mélanie a mis plus de traits sur l'un des côtés ou sur l'ensemble des côtés qu'il n'y en avait dans A.

Corinne

Elle a rajouté plus de petits trait
que la petite figure. La petite
figure a 22 petits trait, Et la figure
de Mélanie en a 44, et celle de
Marine en a 40.

— cinq élèves prennent en compte tous les côtés, direction par direction, en donnant le nombre de traits ajouté par Mélanie pour chaque côté. La plupart d'entre eux expriment que le même nombre de traits (2) a pu être ajouté à certains côtés, mais pas à d'autres.

Sylvie A

Mélanie à rajouté 4 traits
à 2 côtés en bleu sauf 1
ou elle a rajouté au
plus grand trait bleu 6 trait
Et à la couleur verte
elle a rajouté 2 traits
vert, Mais la couleur
rouge elle a aussi
rajouté 2 traits comme
la couleur verte.

— trois élèves expriment que le même nombre de traits (2) a été ajouté à certains côtés et ne parlent pas des autres côtés, comme s'ils voulaient dégager une règle systématique d'agrandissement.

Mélanie a rajoutai des
petit trait.

Charlotte

Sur les côté vert elle a
rajoutai 2 trait.

Sur le côté rouge 2
trait aussi.

- six élèves ont trouvé une règle d'agrandissement s'appliquant à tous les côtés :
- trois expriment cette règle sous forme additive :

Marion

la figure de Mélanie a
les côtés verts et rouge de
même nombre de trait
Mélanie a rajouté 4 trait
quand il y en avait 4 Elle
a rajouté 2 traits quand
il en avait 2 et elle en
rajouté 6 quand il en
avait 6.

- trois expriment cette règle sous forme multiplicative :

Pablo

Elle a doublé tous les côtés.

b – Phase collective : explicitation d’une règle d’agrandissement.

La maîtresse centre la discussion sur l’agrandissement des côtés ”verts” : elle interroge les élèves sur la mesure en petits traits des côtés verts de la figure de Mélanie et de la figure A. Elle présente ces données dans un tableau :

figure A	figure de Mélanie	
2	4	(écrit en vert)

Puis la maîtresse déclare : ”Plusieurs enfants ont écrit que Mélanie a ajouté 2 traits à tous les côtés. Qui pense que c’est vrai ?”

Seul un élève lève le doigt. Les autres ne sont pas d’accord. La maîtresse fait alors mesurer systématiquement les autres côtés des deux figures. On obtient le tableau :

figure A	figure de Mélanie	
2	4	(écrit en vert)
6	12	} (écrit en bleu)
4	8	
2	4	(écrit en rouge)

M : ”Certains ont écrit que Mélanie a ajouté 2 traits à 2 traits, 4 traits à 4 traits, 6 traits à traits. D’autres ont expliqué plus vite.”

E : ”Elle a multiplié en 2 tous les côtés”.

Es : ”Elle a doublé tous les côtés” .

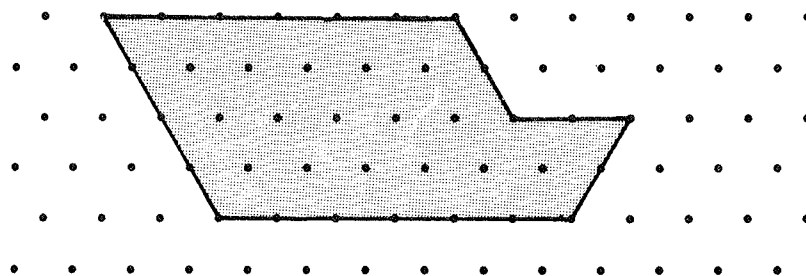
M : ”Multiplier par 2 ou doubler les côtés, c’est la même chose”.

La maîtresse écrit au tableau : ”Mélanie a doublé le nombre de traits de chacun des côtés”.

c – Phase individuelle : agrandissement d’une nouvelle figure à la manière de Mélanie.

matériel : chaque élève reçoit une feuille à réseau pointé 0,75 avec la figure suivante,

figure B

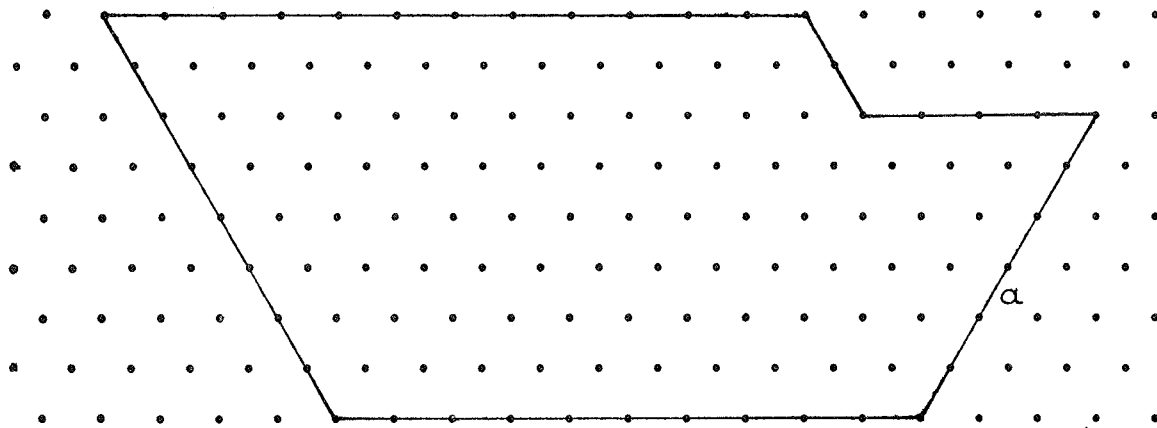


Consigne : ”Vous allez agrandir la figure B à la manière de Mélanie en doublant les côtés. Vous pouvez colorier les côtés. Vous pouvez colorier les côtés avec les trois couleurs”.

Quelques erreurs, corrigées individuellement, apparaissent :

– deux enfants ont des difficultés à suivre les directions principales du réseau.

— quatre enfants considèrent les points d'un côté de la figure B ; par exemple, ils comptent 3 points pour le côté a de B et ils tracent un segment a de 6 traits :



Il est remarquable que cette erreur soit locale et que les enfants s'arrangent pour fermer la figure.

La maîtresse fait vérifier par les enfants que les figures B sont superposables et demande : "Les figures agrandies sont-elles superposables ?"

Les élèves sont convaincus que s'ils ont respecté la règle de Mélanie, les figures agrandies sont bien superposables. Deux par deux, ils comparent leur agrandissement. Les dernières erreurs sont corrigées. La maîtresse récapitule dans un tableau les mesures en nombre de traits de la figure B et de la figure agrandie à la manière de Mélanie.

Séance 5 : Etude d'une seconde procédure d'agrandissement : déformation .

Chaque élève reçoit la feuille sur laquelle il a travaillé dans les deux séances précédentes (figure A et figures de Marine et Mélanie dont les côtés sont coloriés en rouge, bleu ou vert)

La maîtresse fait rappeler par les élèves comment Mélanie a agrandi la figure : "Elle suivait le contour et elle doublait le nombre de chacun des côtés".

a — Travail individuel : procédure d'agrandissement de Marine

Consigne : "Expliquez par écrit comment Marine a agrandi la figure A. Je vous rappelle que Marine a suivi le contour : comment a-t-elle fait pour tracer son contour ?" (même consigne que dans la partie a de la séance 4)

Résultats

— un élève n'a rien fait.

— quatre élèves ne donnent pas de procédé d'agrandissement. Ils se contentent de reprendre l'activité de comparaison de la séance 3 entre la figure de Marine et celle de Mélanie.

Quels sont les procédés d'agrandissements décrits ?

Nous retrouvons des descriptions identiques à celles fournies par Mélanie :

— un élève dit simplement que Marine a mis plus de traits pour l'un des côtés qu'il n'y en avait dans A.

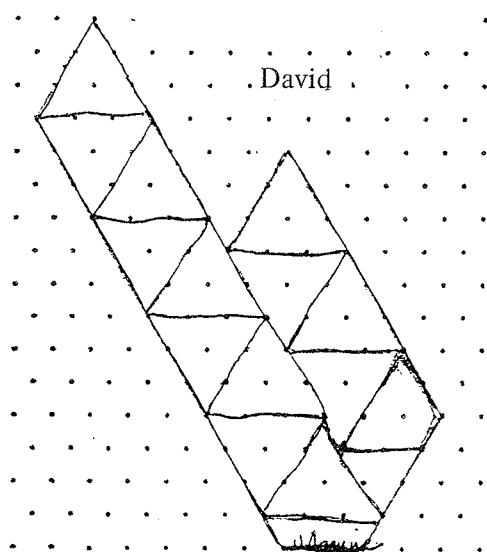
— deux élèves prennent en compte tous les côtés, direction par direction et donnent le nombre de côtés ajoutés par Marine.

Des formulations nouvelles apparaissent :

— treize élèves se réfèrent à la règle d'agrandissement de Mélanie en précisant qu'elle est mise en défaut pour certains côtés.

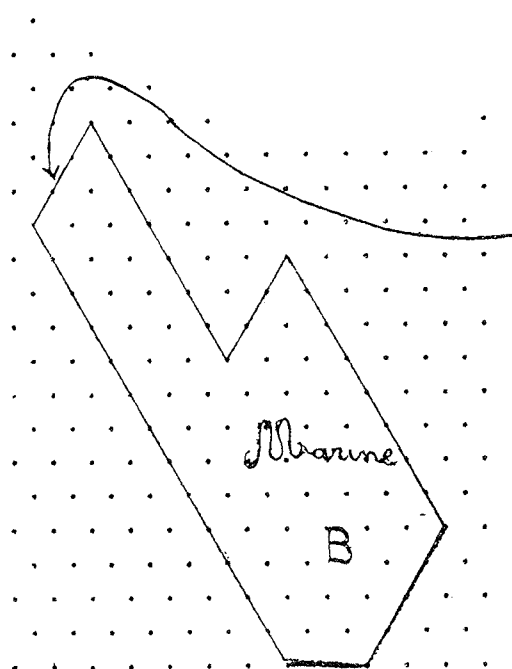
Charlotte

Marine a doublé certain
côté pas tous.
Le côté rouge Marine
ne la pas doublé
Le grand côté bleu
a un trait en tro
.



Marine a doublé les côté
mais pas tous. Elle a doublé
le moyen côté bleu et le grand
vert. Et les autres ne sont
pas doublé.

— deux élèves expriment que la propriété d'égalité des côtés verts de la figure A n'est pas conservée dans l'agrandissement de Marine.



Tout les côtés oblique
 Vers je n'est pas mi le
 nombre de traits égaux car
 en haut j'ai mis trois traits
 et celle qui monte en bas
 en quatre

b – Phase collective : comparaison de procédures d'agrandissement de Mélanie et de Marine. Notion de similitude et de déformation.

La maîtresse commence par demander si Marine a fait comme Mélanie : "Est-ce que Marine a doublé les côtés ?". Si quelques enfants remarquent que Marine a doublé des côtés, aucun ne pense que Marine a doublé tous les côtés.

Ensuite la maîtresse fait expliciter les mesures en petits traits des côtés qui se correspondent dans la figure A et dans celle de Marine.

figure A		figure de Marine	
2		3	} (écrits en vert)
2		3	
2		4	
4		7	} (écrits en bleu)
4		8	
6		13	
2		2	(écrit en rouge)

La maîtresse conclut : "Mélanie a agrandi la figure A en doublant la mesure des côtés ; Marine a agrandi la figure A en agrandissant chaque côté. On va dire que la figure de Mélanie est

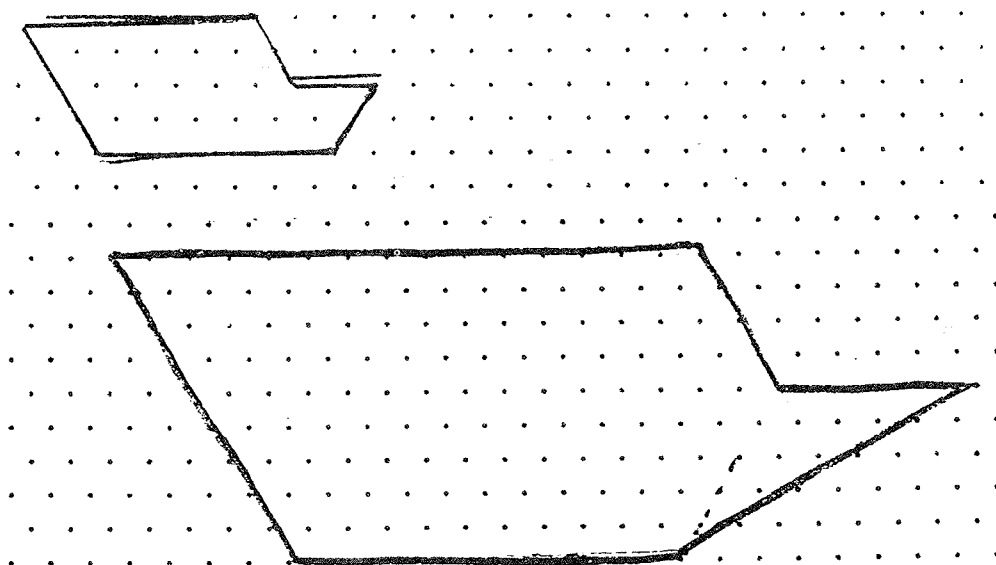
semblable à la figure A. Marine a agrandi la figure A mais en la déformant”.

c — phase individuelle : agrandissement de la figure B en la déformant à la manière de Marine.

matériel : chaque élève reçoit une feuille blanche et reprend la feuille à réseau pointé 0,75 sur laquelle il a déjà agrandi la figure B en doublant les côtés.

Consigne : ” Vous agrandissez la figure B en la déformant, à la manière de Marine”. Plus tard : ”Vous coloriez la nouvelle figure avec les trois couleurs : rouge pour les côtés horizontaux, vert et bleu pour les côtés obliques. Vous expliquez sur la feuille blanche comment vous avez agrandi les côtés, comme on l’a fait pour Marine”.

Quelques difficultés apparaissent sur lesquelles la maîtresse fait discuter les enfants. Philippe, par exemple, a réalisé l’agrandissement suivant :



(extrait de la feuille de Philippe)

La maîtresse affiche la feuille de Philippe et demande : ”Qui veut expliquer ce que la figure de Philippe a de particulier ?”

E : ”Ce côté vert est plutôt plus penché que là-haut (figure B)”

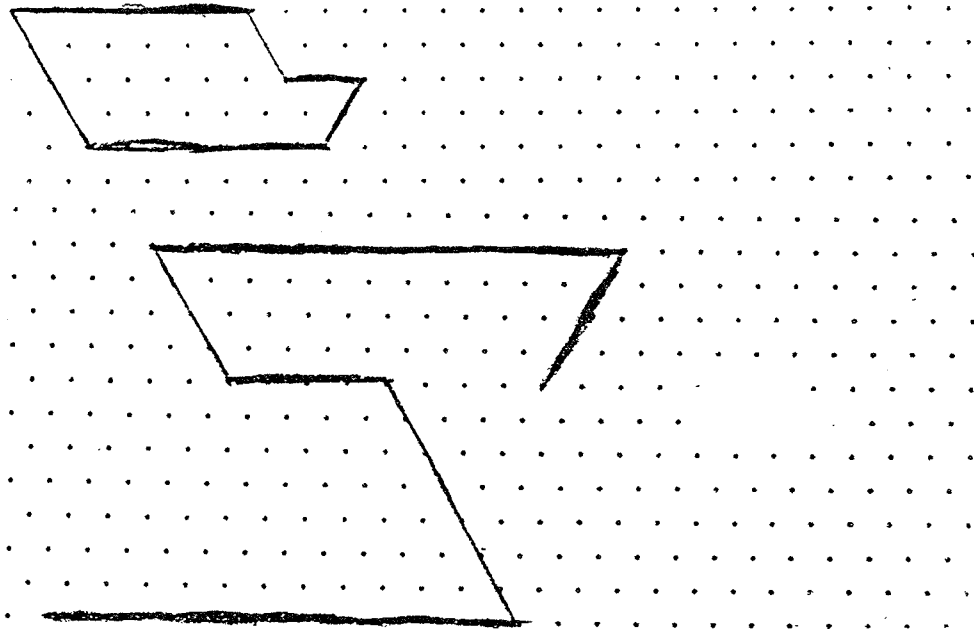
M : ”Oui. C’est aussi un côté oblique, mais pas de la même direction. Philippe n’a pas respecté la direction, alors que Marine a respecté toutes les directions”.

Cette difficulté prévisible a concerné au moins quatre élèves. Elle permet de faire réfléchir les enfants sur l’une des propriétés de l’agrandissement de Marine : cet agrandissement respecte le nombre de côtés et leur direction.

Le non-respect d’une direction se produit en général lors du tracé du dernier segment : en effet, l’agrandissement **successif** de chaque côté, en respectant les directions, n’assure pas que le dernier segment ait la bonne direction tout en joignant les deux extrémités libres.

Les élèves qui ont réussi à agrandir comme Marine, en respectant donc les directions ont dû le plus souvent modifier après coup l’un des côtés pour fermer correctement le contour.

La maîtresse affiche la feuille de Catherine :



(extrait de la feuille de Catherine)

Remarque : cette figure était plutôt inattendue !

M : "Catherine a fait autre chose. Que lui est-il arrivé ?"

"Elle a fait un côté pas dans l'ordre"

"Elle n'a pas mis les côtés où il fallait"

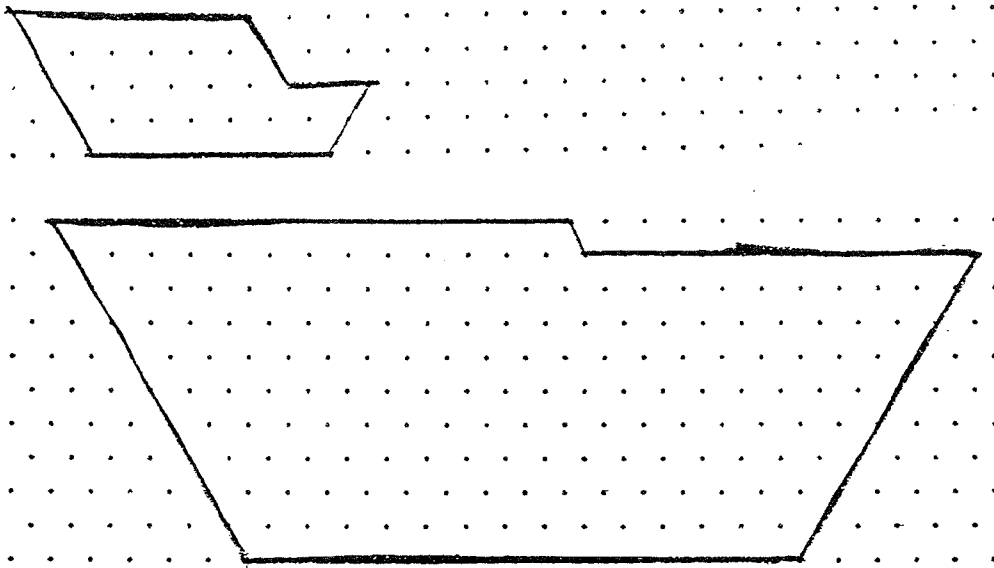
"On dirait qu'elle a mis les côtés n'importe où".

La maîtresse conclut : "Quand Marine a agrandi elle a suivi le contour en tournant du même côté et en gardant les mêmes directions".

Pour finir la maîtresse affiche les tableaux de certains enfants expliquant l'agrandissement. Par exemple, Benjamin :

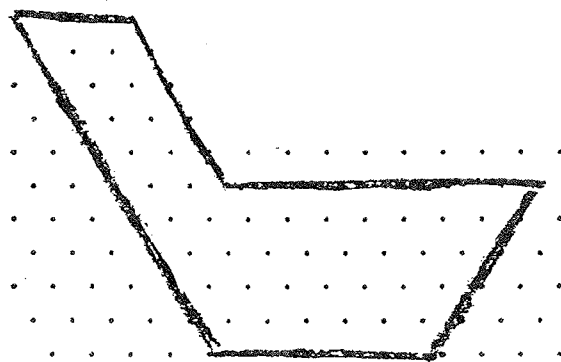
Benjamin
petite grande
 $2 \rightarrow 9$
 $2 \rightarrow 1$
 $4 \rightarrow 10$
 $6 \rightarrow 13$
 $2 \rightarrow 10$
 $6 \rightarrow 14$

On remarque que Benjamin a diminué l'un des côtés :



(extrait de la feuille de Benjamin)

La maîtresse affiche alors la feuille d'Edgar :



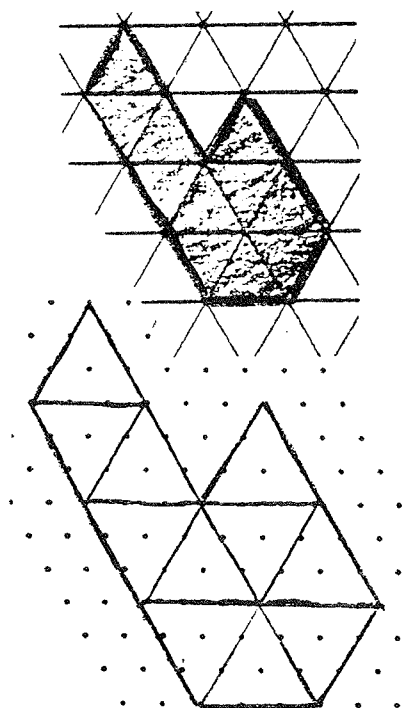
Les élèves sont perplexes et concluent : "C'est quand même plus sûr (qu'on a agrandi) si on agrandit chaque côté".

PARTIE III – Agrandissement par une procédure de type triangle. Pavage d'une figure.

Séance 6 – Etude d'une procédure de type triangle : pavage et similitude.

a – Travail individuel : procédure d'agrandissement de Laurent

Matériel : chaque élève reçoit une feuille sur laquelle sont reproduites la figure A et la figure agrandie par Laurent en séance 2 :



(réduction de moitié)

Consigne : "Chacun doit essayer d'écrire comment Laurent a fait pour agrandir la figure A". Puis, un instant après, elle ajoute : "Je peux vous dire que Laurent n'a pas du tout fait comme Marine et Mélanie".

Cette information supplémentaire débloque les élèves.

Résultats

Trois élèves parlent de la structure de la figure de Laurent, soit pour la décrire, soit pour donner l'une des propriétés conservées dans l'agrandissement.

prénom : Lyboie C.

Sur le côté il a mis le même
nombre de triangles que sur
la petite figure.

Les autres enfants parlent d'agrandissement :

— quatre élèves décrivent un procédé d'agrandissement du contour, avec des formulations semblables à celles des séances 4 et 5

prénom : David

Les côtés obliques bleus de Laurent, font six
traits sauf un qui fait 9 traits. Et
les côtés vert font 3 traits, et le
côté horizontal fait 3 traits.

Laurent a agrandi, les côtés de
trois trait. Pas tous

— les autres élèves mettent en relation l'agrandissement de la figure avec celui des triangles.

— quatre disent simplement que Laurent a agrandi les triangles.

prénom : Eoriste

Il a fait des plus grand triangles
La petite figure a des petits triangles.
Les triangles ont fait agrandir la
figure. Il a agrandi sa figure.

— sept précisent la règle d'agrandissement du contour des triangles.

prénom : Charlotte

Laurent a agrandi les triangles. Il a agrandi tous les côtés de trois trait

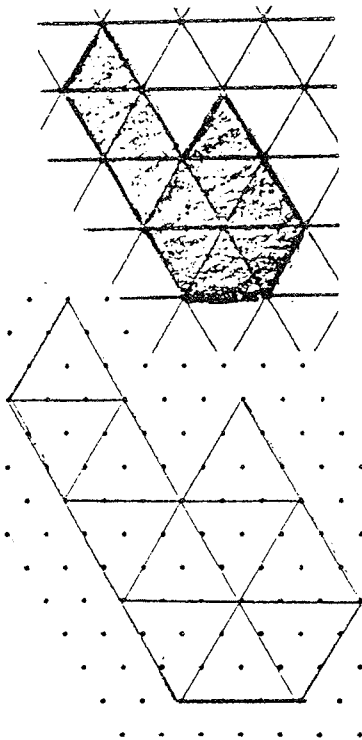
— deux élèves formulent une règle d'agrandissement qui concerne l'intérieur des triangles.

prénom : Stéphanie R.

Il a agrandi les triangles en rajoutant 1 point au milieu.

— trois élèves considèrent l'agrandissement de plusieurs points de vue : agrandissement du contour, agrandissement du contour ou de l'intérieur des triangles

prénom : Sablo



Laurent a mis 1 petit trait de plus ou 1 point de plus pour faire les triangles. Il a mis un petit point au milieu de chaque triangle et dans la petite il n'en n'a pas. Le trait rouge a un petit trait de plus ou un point.

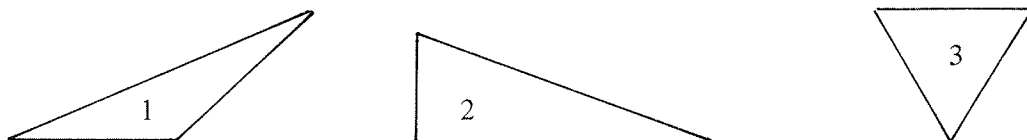
Les petit trait bleu de la petite figure ont 4 point et se de la figure de Laurent en ont 6.

b - Phase collective : pavage et similitude

M : "Est-ce qu'il y a des éléments des deux figures que vous voyez bien et qui ne sont pas dans la figure de Mélanie ?" (La maîtresse affiche la figure de Mélanie cf. p. 59)

E : "On voit tout de suite les triangles"

La maîtresse amorce alors une discussion sur ce qu'on appelle un triangle. Certains élèves précisent qu'un triangle est une figure à trois faces : la maîtresse ne se contente pas de cette déclaration. Elle dessine au tableau les trois figures suivantes :



Pour tous les élèves, ces figures ont trois côtés mais seule la figure 3 est un triangle.

E En effet : "les côtés ne sont pas droits" (pour 1), "au bout, elles n'ont pas toutes le même coin" (pour 1 et 2).

La maîtresse impose une caractérisation des triangles : "Il y a beaucoup d'autres figures que la figure 3 qui ont trois côtés. Nous allons appeler triangles toutes les figures qui ont trois côtés".

Puis on revient sur les triangles de la figure A.

M : "Comment sont les trois côtés des triangles ?"

E : "Ils sont égaux".

M : "Ces triangles sont très particuliers. Ils ont trois côtés égaux. Ils s'appellent triangles équilatéraux. On dit : un triangle équilatéral. C'est un mot spécial pour ces triangles que vous pensiez être les seuls à s'appeler triangles".

Ensuite la maîtresse fait lire à certains enfants leur message de façon :

- à mettre en évidence que l'agrandissement de Laurent est en relation avec l'agrandissement des triangles (message du type de celui de Corinne)
- à préciser la règle d'agrandissement des triangles (messages du type de ceux de Charlotte et de Stéphanie R.)
- à expliciter la conservation de la structure du pavage dans l'agrandissement de la figure A (message du type de celui de Sylvie C.)

Puis, à partir de messages considérant le contour de la figure (message du type de ceux de David et de Pablo), la maîtresse fait étudier l'égalité des côtés dans les deux figures. On constate que l'égalité est conservée dans l'agrandissement de Laurent ; de plus les élèves remarquent que le pavage réalise un découpage en segments égaux de chaque côté de la figure, découpage conservé dans l'agrandissement (voir le message de Sylvie C.).

La maîtresse conclut : "Laurent a fait une figure semblable à la figure de départ".

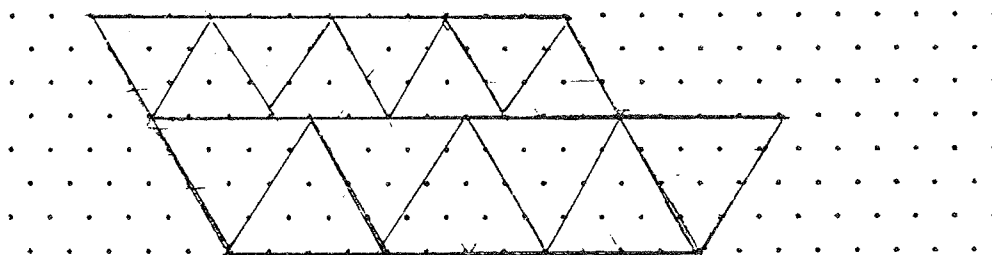
c – Phase individuelle : agrandissement de la figure B à la manière de Laurent

matériel : chaque élève reçoit de nouveau une feuille à réseau pointé avec la figure B

Consigne : "Vous allez agrandir cette figure à la manière de Laurent en dessinant des triangles et en les agrandissant".

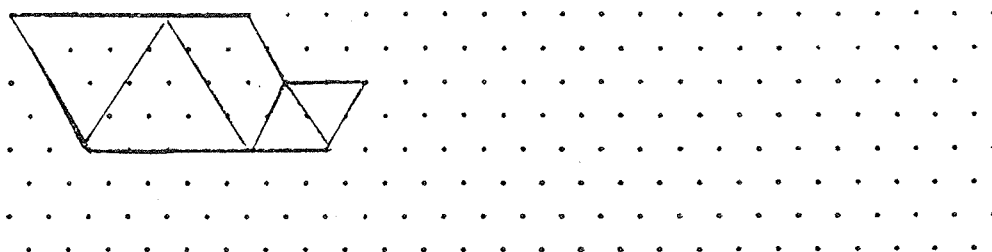
La majorité des élèves essaie d'agrandir la figure B par une procédure contour, sans avoir pavé la figure initiale, puis tente ensuite de paver la figure agrandie :

Catherine

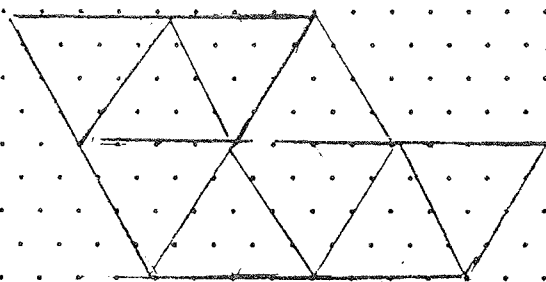
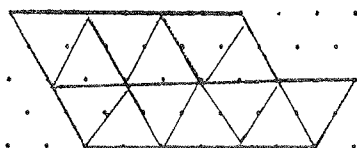


Philippe

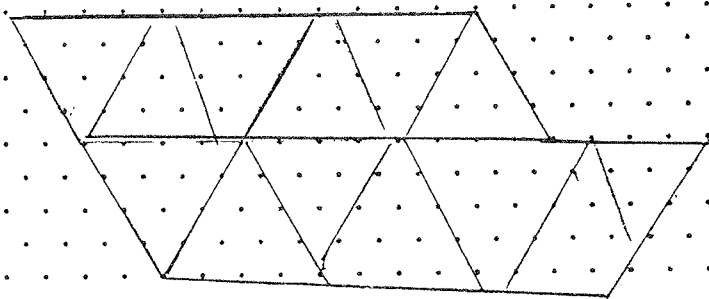
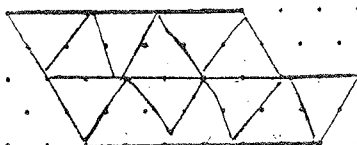
La maîtresse intervient pour que les élèves pavent la figure B avant de l'agrandir. Cette intervention permet à seize élèves de réaliser au moins une figure semblable agrandie. Neuf en construisent même plusieurs. Par contre sept élèves ne parviennent pas soit à paver la figure B soit à utiliser leur pavage de cette figure pour l'agrandir :



Prénom : Laurent



Prénom : Julia



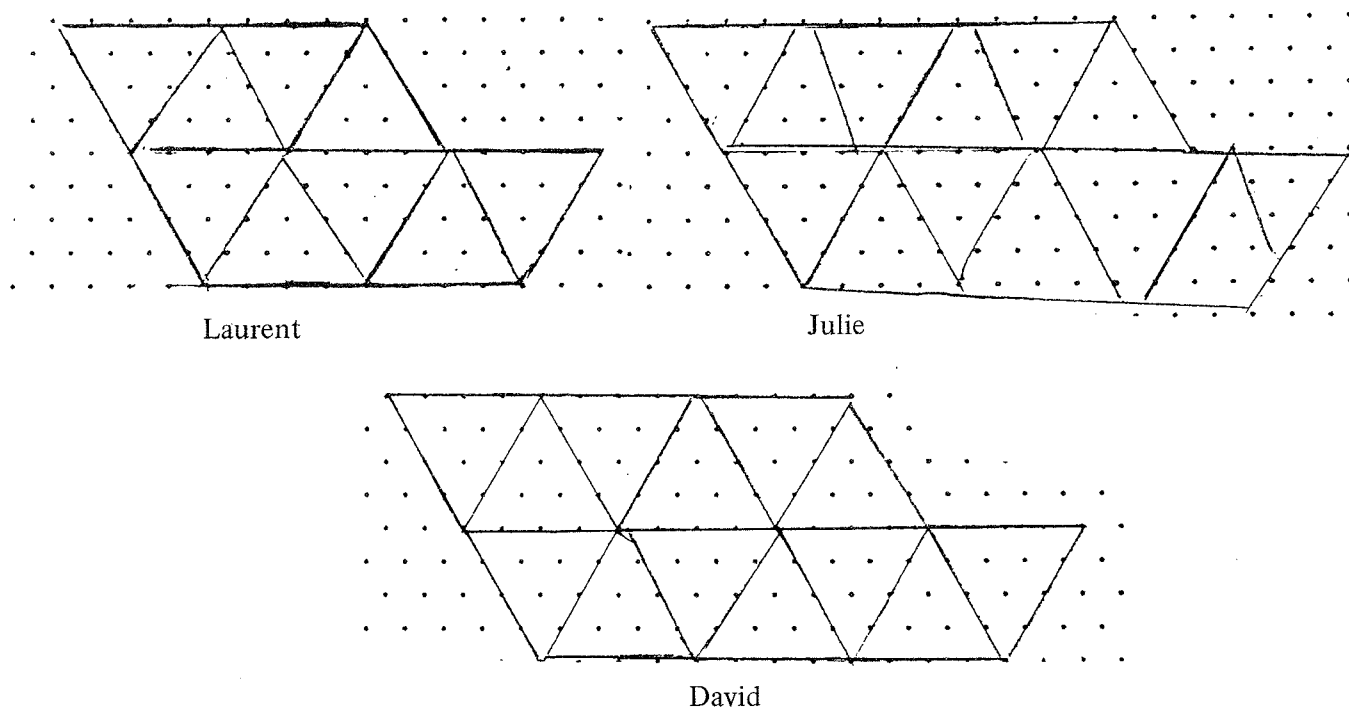
Ces difficultés à réaliser un pavage de la figure et à l'utiliser pour agrandir la figure nous ont amenées à centrer le travail de la séance suivante sur des activités de pavage.

Séance 7 – Activités de pavage

a – Analyse des erreurs dans le pavage des figures agrandies (séance 6)

Notre objectif est de définir collectivement les caractéristiques d'un pavage régulier de figures tracées sur réseau pointé.

La maîtresse affiche les agrandissements de la figure B proposés par Laurent, Julie et David lors de la séance 6 :



M : "Que peut-on dire de ces agrandissements ?"

Voici les réactions des élèves :

Pour la figure de Julie :

- "Celle de Julie, elle a un trait qui va vers là-bas".
- "Il y a un triangle qui est plus petit que les autres"
- "C'est pas bien un triangle"

Pour la figure de Laurent :

- "Elle est plus courte que celle de Julie et David. Il semble que l'on aurait dû la continuer"
- "Celle de David est plus allongée. Il y a les triangles qu'il faut. Laurent en a oublié"

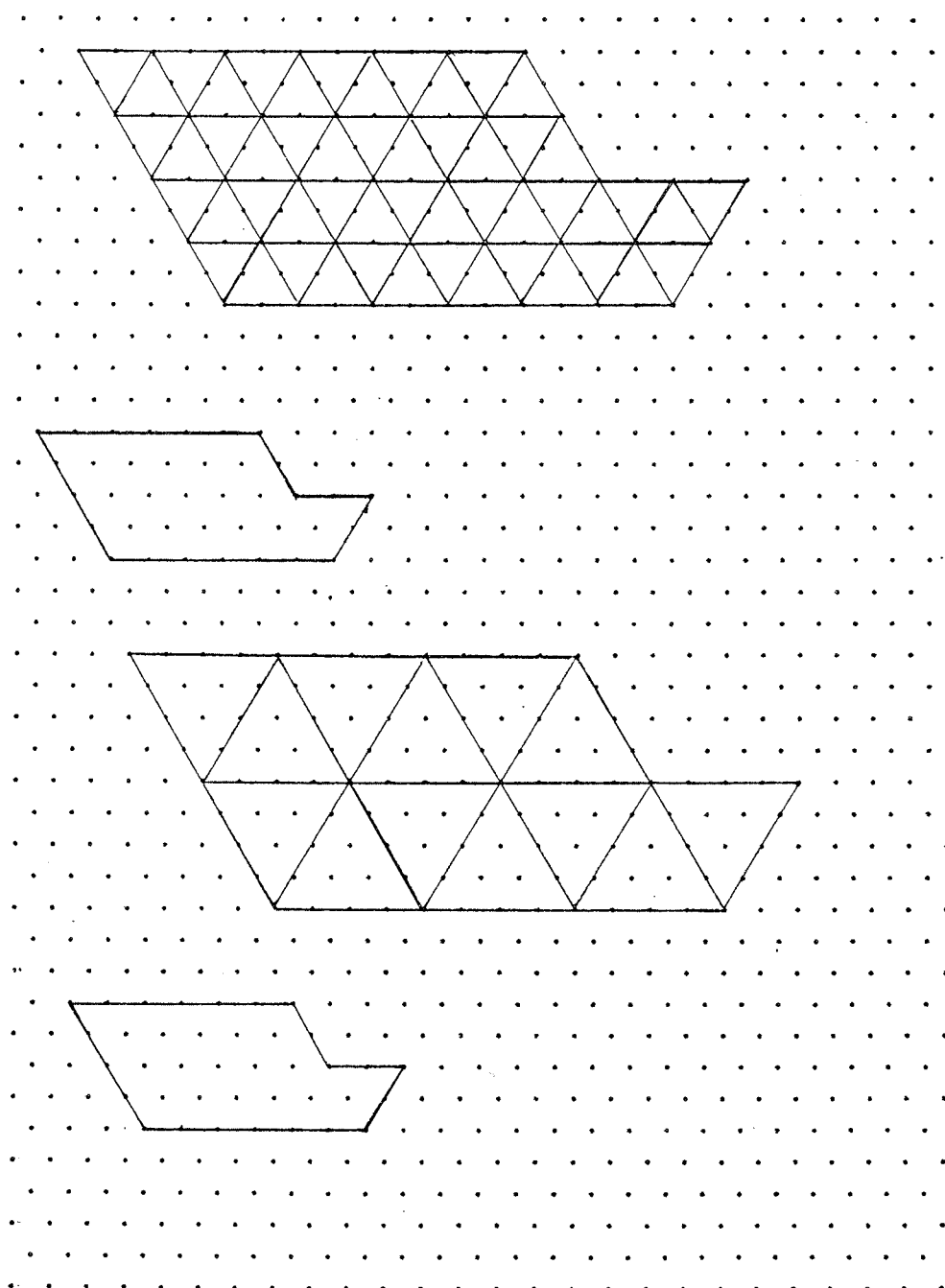
La maîtresse conclut à partir de l'agrandissement de David :

- "Il a réalisé un pavage avec des triangles : les triangles sont tous pareils et ils sont bien placés les

uns par rapport aux autres. Quand on a un pavage comme celui-ci, on voit apparaître des lignes : elles sont formées par les côtés de plusieurs triangles”.

b – Reconstitution d’un pavage .

matériel : chaque élève reçoit une feuille de papier pointé sur laquelle on a reproduit deux pavages différents d’un même agrandissement de la figure B :



(réduction de moitié)

Consigne : "Aujourd'hui, vous allez faire le contraire de la dernière fois. Sur la feuille que vous avez, nous avons donné deux agrandissements différents de la figure B. Vous dessinez, dans chaque cas, sur la figure B le pavage qui a permis de donner cet agrandissement".

La consigne ne doit être répétée qu'une seule fois et finalement tous les enfants réussissent à reconstituer les pavages. Quelles sont les procédures des élèves ?

Certains élèves élaborent leur pavage triangle par triangle, d'autres l'obtiennent directement en traçant de grands traits parallèles d'un côté à l'autre de la figure. La plupart des procédures sont un compromis entre ces deux procédures : par exemple, après avoir tracé de grands traits horizontaux, des élèves construisent leur pavage bande par bande et triangle par triangle (voir Sylvie p. 89)

La maîtresse intervient auprès des deux élèves en difficulté : ces élèves construisent leur pavage triangle par triangle mais en les dissociant comme s'ils n'avaient pas de vue globale du pavage (voir Mélanie p.90)

Une fois l'activité achevée, la maîtresse interroge les élèves sur le contrôle de la validité de leur production :

"Comment savez-vous que votre pavage est bien le pavage qui a permis d'agrandir à la manière de Laurent ?"

Voici les éléments de contrôle fournis par les élèves :

"J'ai compté les triangles".

"Il y a le même nombre de triangles entre la grande et la petite figure".

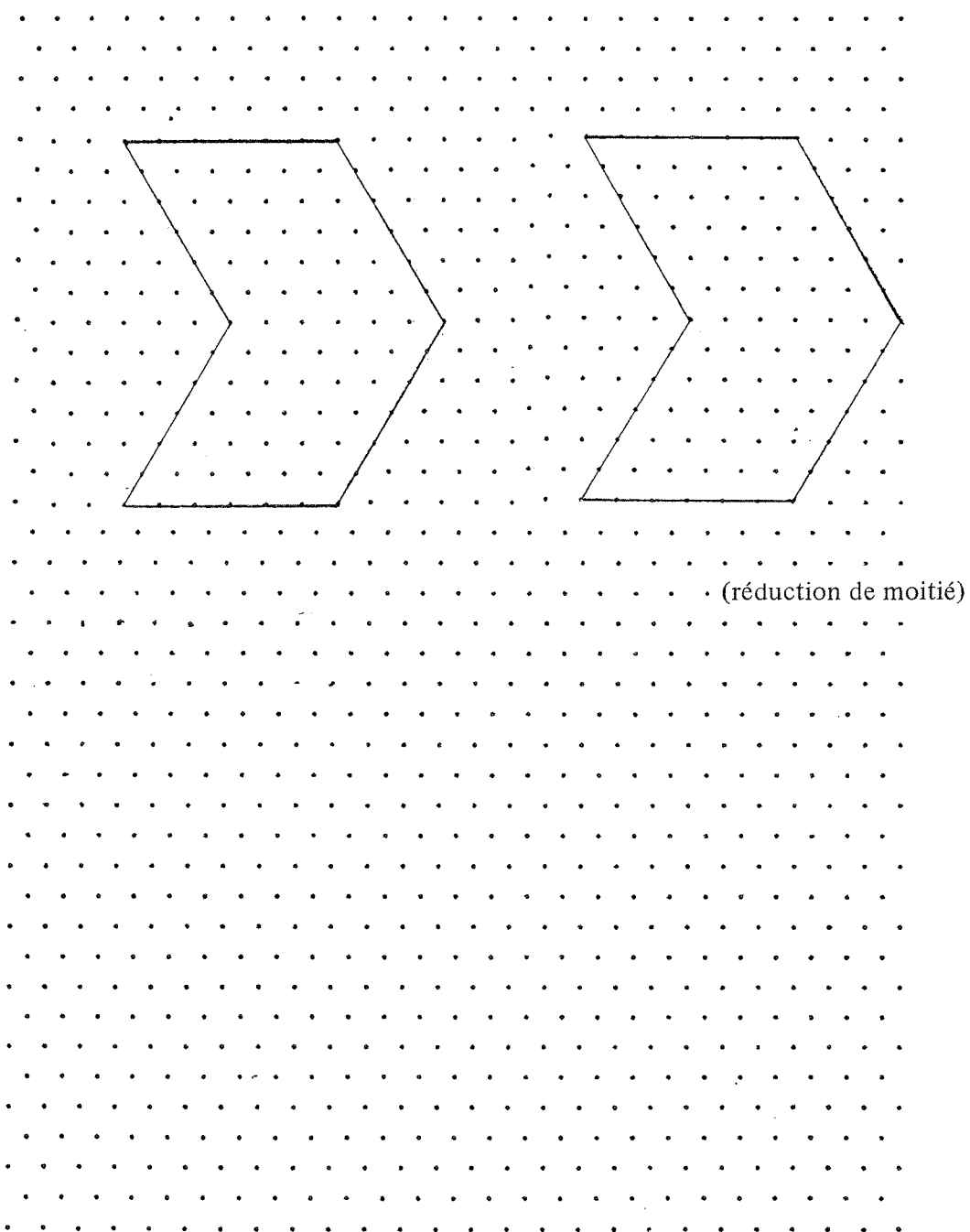
"J'ai regardé la première ligne du grand pavage. J'ai fait pareil dans la petite. Et après je suis sûre. J'ai recopié la première ligne en comptant les triangles et en les faisant plus petits".

"J'ai regardé si j'avais des lignes, si ça faisait bien droit".

La maîtresse revient sur les propriétés de la figure agrandie : dans chaque cas, la figure agrandie et la figure B sont semblables.

c – Travail individuel : pavages d'une figure et réduction.

matériel : chaque élève reçoit une feuille de papier pointé sur laquelle la même figure C est reproduite deux fois.



Consigne : "Vous allez d'abord chercher deux pavages différents de la figure C. Puis au lieu d'agrandir les triangles du pavage, vous allez les diminuer pour obtenir une réduction de la figure C".

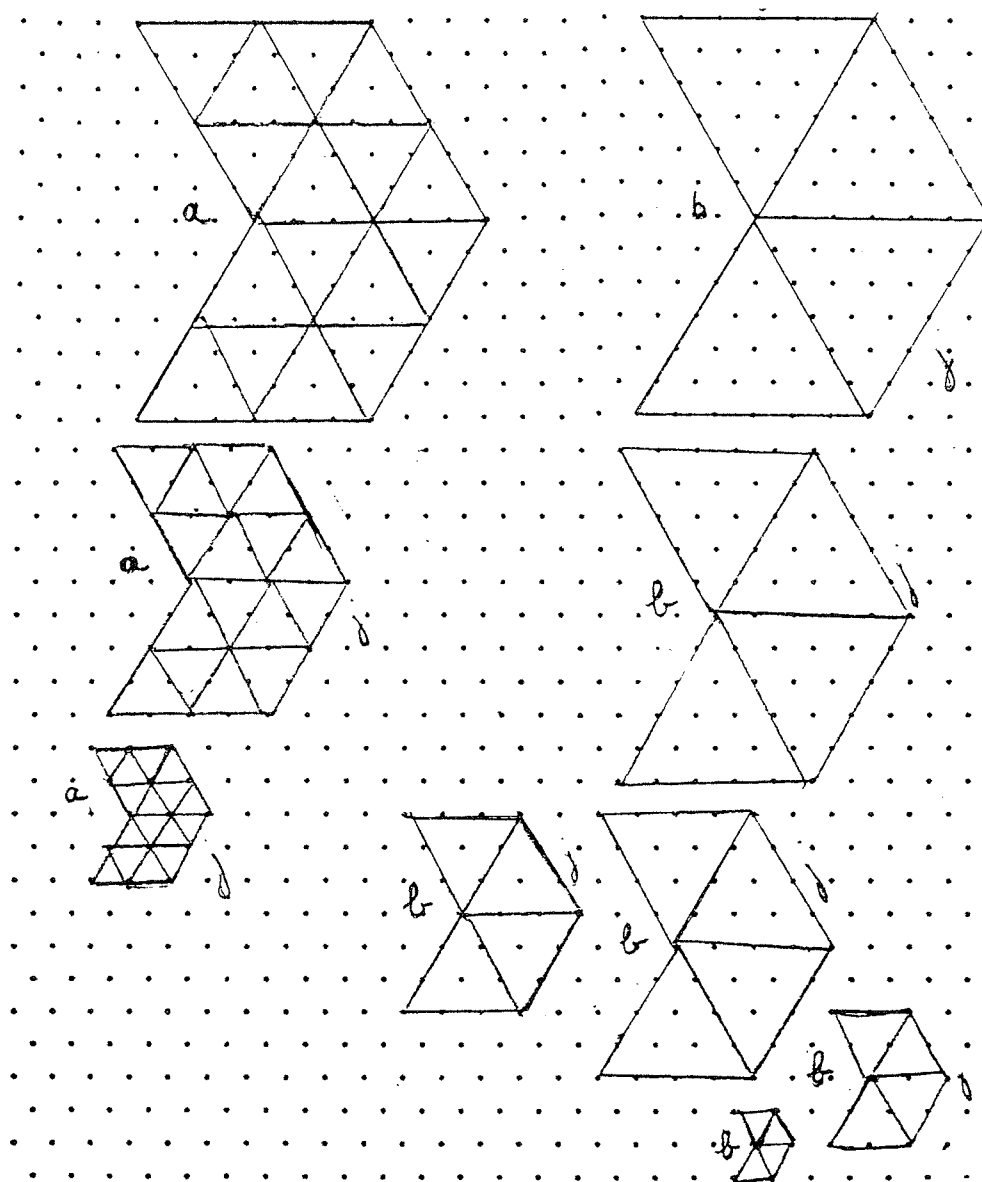
Plus tard, pour contrôler les réductions, la maîtresse fait désigner par a et b les deux pavages de la figure C et leurs réductions correspondantes.

Remarquons que la figure C a six côtés égaux ce qui facilite son pavage et qu'elle peut être pavée de quatre manières différentes à l'aide de triangles élémentaires de côtés de mesure 1, 2, 3 ou 6 (en nombre de traits). Le pavage avec les triangles élémentaires de côtés 1 ne permet évidemment pas d'obtenir à la manière de Laurent une réduction de la figure C, telle que les sommets des triangles élémentaires soient des points du réseau.

Résultats (trois élèves sont absents)

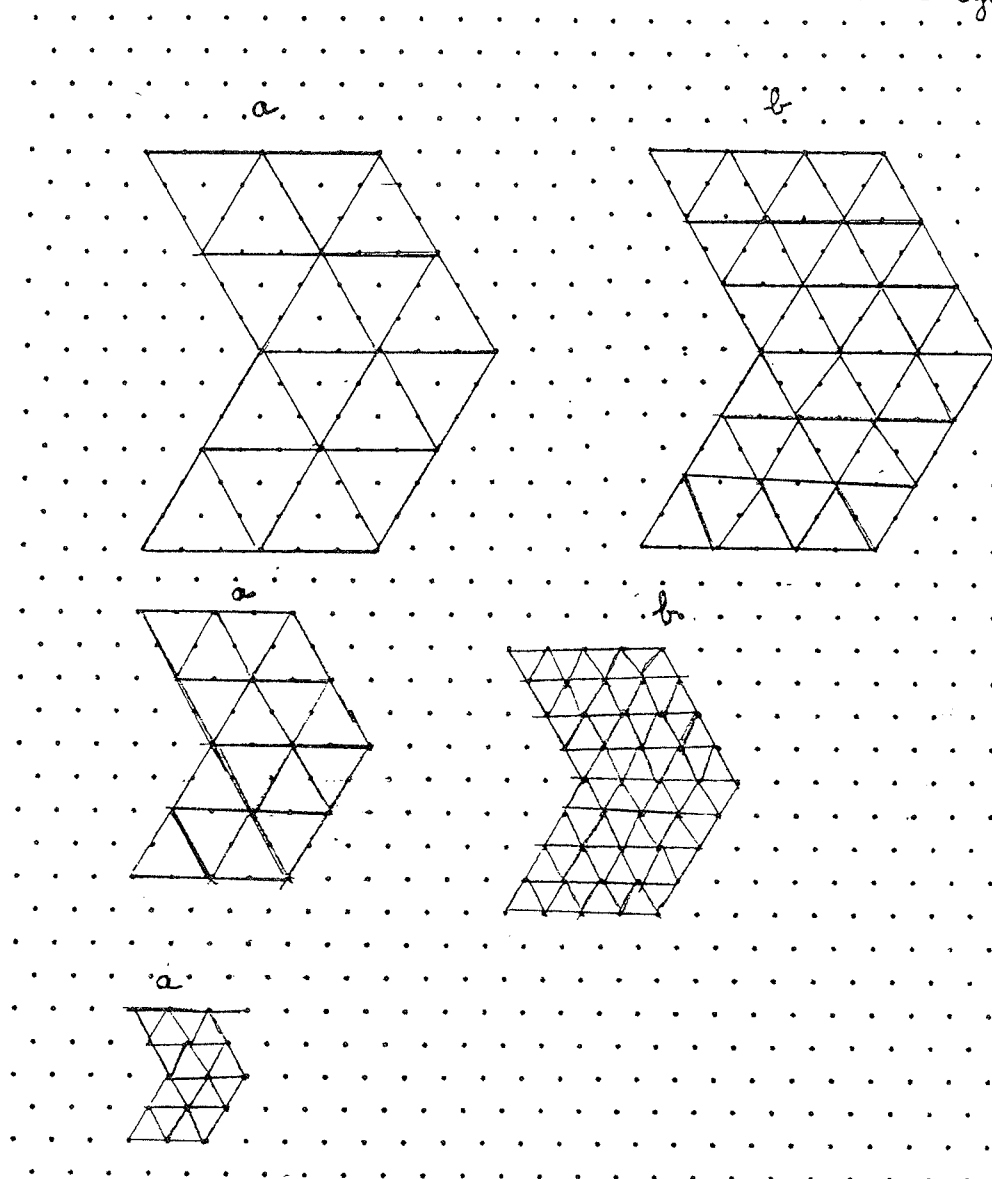
— neuf élèves réussissent à produire deux pavages différents et à réduire la figure C. Pour ces enfants la maîtresse demande de donner toutes les réductions possibles à partir d'un pavage.

Benjamin

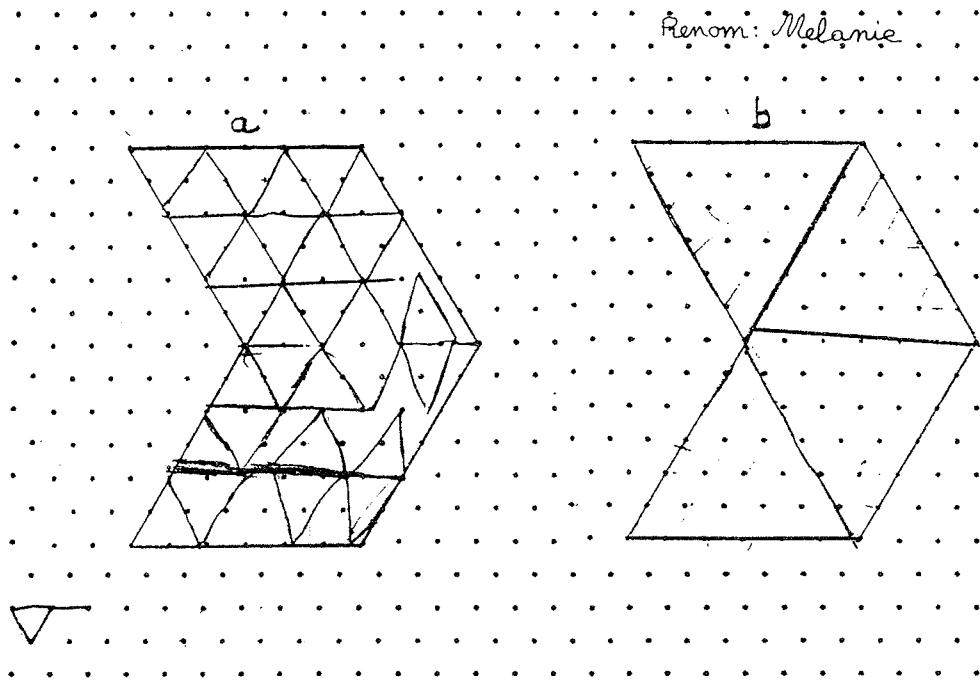


— dix élèves fournissent deux pavages différents mais ont des difficultés à réaliser la réduction correspondante au moins pour un pavage. Les erreurs portent en général sur le nombre de triangles et non sur la forme de la figure.

Prénom C. Sylire



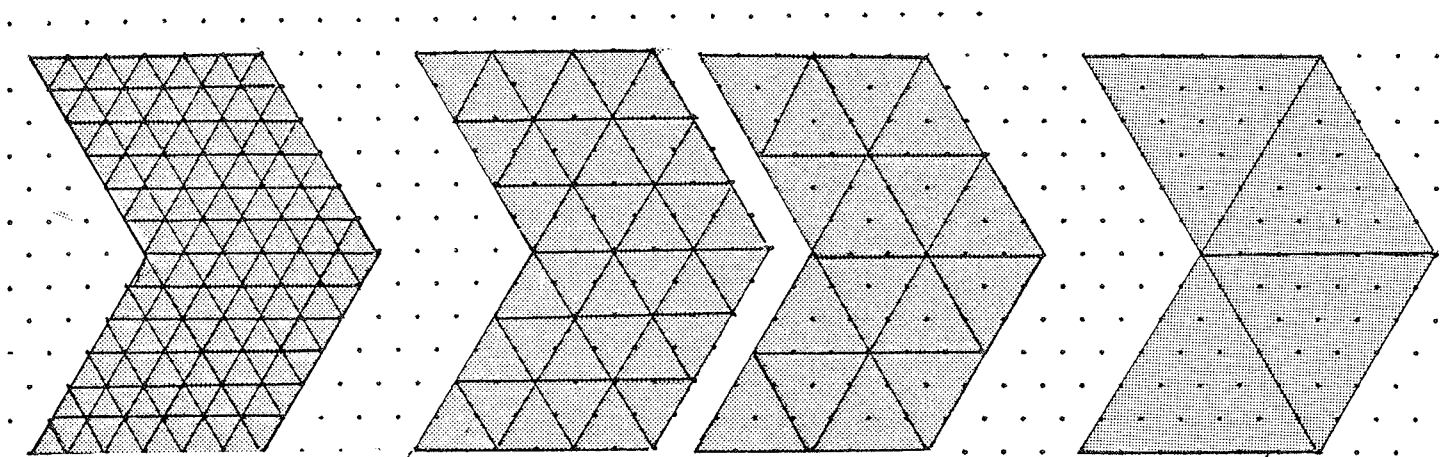
— une élève a des difficultés à produire des pavages de la figure C : remarquons que cette élève construit le pavage triangle par triangle en les dissociant :



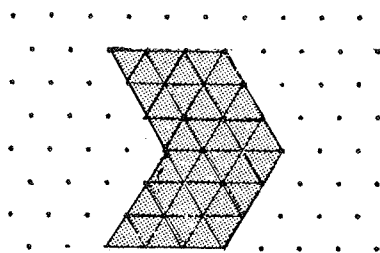
Séance 8 – Similitude : agrandissements et réductions

a – Comparaison de figures pavées

La maîtresse affiche la figure C au tableau et fait rappeler par les élèves l'activité précédente. Puis elle demande: "Avec quels triangles pouvait-on paver la figure C ?". Elle affiche les pavages au fur et à mesure des propositions. Ces pavages sont désignés par la mesure des côtés des triangles élémentaires.



Puis la maîtresse affiche la réduction suivante :



Consigne : "Essayez de trouver quel pavage a été utilisé pour réduire la flèche à la manière de Laurent".

M. "A-t-on utilisé ce pavage ? " (Elle montre le pavage 6). Les élèves rejettent ce pavage et l'un d'eux propose le pavage 3. Contrairement au pavage 6, la perception immédiate ne permet pas son rejet. La discussion s'engage alors et débouche sur des arguments numériques attendus.

"Ca ne peut pas être celui là parce qu'il n'y a pas le même nombre de triangles".

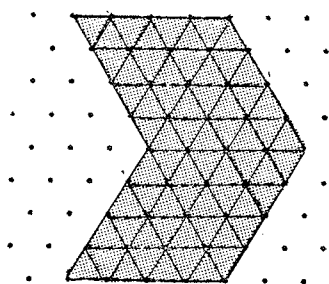
Puis un élève écarte le pavage 1 : "On ne peut pas le rétrécir". Finalement on vérifie que c'est le pavage 2 qui a été utilisé :

"Il y a là deux petits traits et là un".

"Dans la première rangée de triangles il y en a six, là et là".

"Il y en a six dans toutes les rangées".

La maîtresse affiche une autre réduction

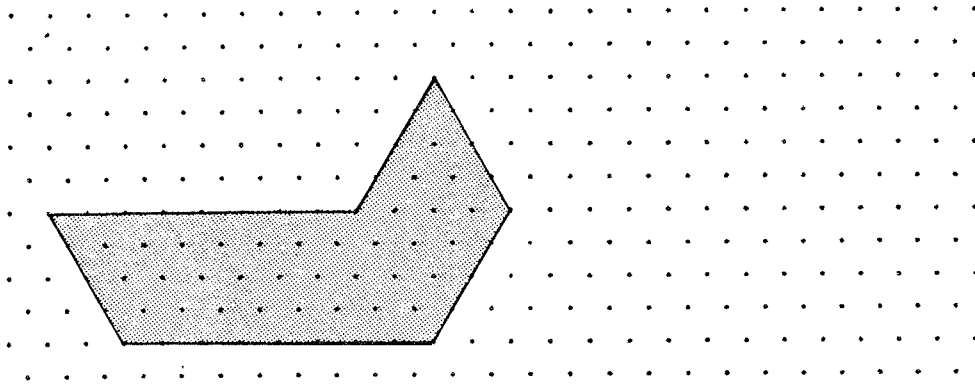


Les pavages 1 et 6 étant écartés d'emblée, les élèves discutent pour savoir si la réduction provient du pavage 2 ou du pavage 3. Ces deux pavages sont finalement rejetés : "Il n'y a pas le même nombre de triangles (dans une rangée)".

La maîtresse conclut : "La réduction est bien semblable à la figure C mais elle n'a pas été faite à la manière de Laurent".

b — Activité de synthèse. Agrandissement et réduction d'une nouvelle figure

matériel : chaque élève reçoit une feuille de papier pointé avec une nouvelle figure, la figure D :



Consigne : "Vous allez faire au moins une réduction et un agrandissement de la figure D de façon à obtenir des figures semblables (à la figure D). Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez pour agrandir, la méthode que vous voulez pour réduire".

Remarquons la simplicité des relations entre les côtés de cette nouvelle figure : quatre côtés égaux de mesure 4 et deux côtés égaux de mesure 8. Nous avons fait ce choix pour que les enfants puissent contrôler plus facilement la similitude de leurs figures. De plus les nombres 4 et 8 permettent deux divisions successives par 2 : ainsi une règle du type "diviser par 2" peut fonctionner pour réduire.

Les procédures de type "contour" sont fortement majoritaires, même pour les réductions : "J'ai doublé les côtés" ou "J'ai divisé par 2" - "J'ai ajouté un trait" ou "J'ai enlevé un trait". Ces dernières procédures conduisent à des déformations.

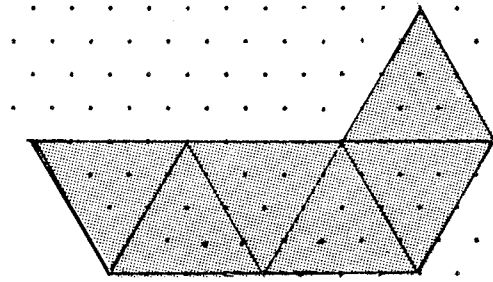
La maîtresse intervient alors pour préciser la consigne : "Vous vous souvenez : semblables, ce n'est pas déformé ! Vérifiez que vos figures sont bien semblables à la figure D".

Certains enfants rectifient alors leur tracé. Laurence explique comment elle procède : "J'ai fait $4 + 1 = 5$ (pour le petit côté) donc le grand côté fait 10".

Un peu plus tard, la maîtresse organise le bilan de toutes les figures obtenues dans la classe. Les élèves caractérisent leurs figures par la transformation d'un petit côté de la figure initiale : "Là où il y a 4, je mets....". La maîtresse relève au tableau les différentes figures obtenues en les désignant par la mesure de leurs petits côtés : toutes les figures de 1 à 9 ont été obtenues.

La maîtresse demande à chaque enfant de compléter sa collection en construisant toutes ces figures.

A ceux qui ne l'ont pas fait, elle demande de paver ainsi la figure D :



et de retrouver pour chaque figure le pavage associé.

Les élèves font fonctionner deux critères de similitude que nous pourrions expliciter ainsi :

- les relations entre côtés sont conservées.
- si on pave la figure initiale, on peut obtenir une famille de figures semblables dont les pavages sont de même structure (même nombre de triangles et même disposition).

La plupart des élèves obtiennent la collection complète des figures.

GRAND N

**Coordination
des articles** *Micheline Burgun*

**Coordination des
services techniques** *Christian Gaudin*

Secrétariat *Catherine Crimi*

Composition *Fernande Lionet*

**Dessins techniques,
photogravure
et mise en page** *Jacques Prunier*

Impression *Philippe Castellano*

Assemblage *Jean-François Berbel
Maurice Faure
Gilbert Jamet*

Diffusion *Catherine Crimi
Laure Ravel*

Publicité *Nicole Cornier*