

REPRESENTATION D'ASSEMBLAGES DE CUBES AU C.M.

(Annie BESSOT - Madeleine EBERHARD)

Dans cet article, nous décrivons et analysons des activités qui permettent d'aborder quelques problèmes posés par la représentation d'objets relativement complexes de l'espace.

Les objectifs généraux de ces activités relèvent de ceux du programme du cycle Moyen (B.O. n° 31 du 11.9.80) :

” – accumuler des expériences qui serviront de support à des formalisations ultérieures”
et, plus précisément pour la géométrie :

” – savoir pour différents objets géométriques

- * les reproduire
- * les décrire et les représenter
- * les construire à partir d'une description ou d'une représentation.”

Ces activités se sont déroulées dans la classe de CM₂ de Christian Soulas à l'école de Meylan-Mi-Plaine de février à avril 1981. Elles s'insèrent dans des recherches sur la géométrie dans l'espace que mène l'équipe Élémentaire de l'IREM de Grenoble. Des activités du même type ont été également expérimentées dans des classes de 5e par Marie-Thérèse Chabroulet et Maryvonne Verjus.

Christian Soulas a eu la gentillesse d'ouvrir sa classe (33 élèves) à cette expérience : Madeleine Eberhard a mené la séquence (c'est M. dans le texte !) et Annie Bessot a observé et tenu une chronique très détaillée du déroulement.

La séquence (7 séances) a comporté deux phases bien distinctes :

Dans une première phase (correspondant à la partie I de l'article) nous avons confronté les élèves à la diversité des représentations possibles d'assemblages de cubes .

Dans la deuxième phase (partie II de l'article) nous avons voulu enrichir l'expérience géométrique des enfants : changement du point de vue vis à vis d'un objet (ici **empilement de cubes**), passage d'une représentation à une autre . . .

Avertissement :

Nous recommandons au lecteur de se munir d'une dizaine de cubes pour illustrer définitions et exemples, et pour suivre le déroulement et l'analyse des activités décrites. En effet la compréhension du fonctionnement des représentations proposées ne va pas forcément de soi ; elle peut, dans un premier temps, poser des problèmes même à des adultes, indépendamment de leur niveau mathématique.

PARTIE I : REPRESENTATION D'ASSEMBLAGES DE CUBES.

Matériel : des cubes accrochables de deux couleurs (ici jaune et bleu), du papier blanc.

Séance 1 (9 février)

Chaque enfant reçoit 8 cubes jaunes et 8 cubes bleus.

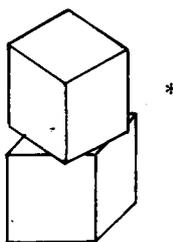
➔ **Mise en place des contraintes que devront respecter les assemblages.**

Les enfants assemblent spontanément des cubes. Les contraintes sont alors formulées à partir d'exemples d'assemblages rejetés ou acceptés par la maîtresse .

– **Première contrainte**

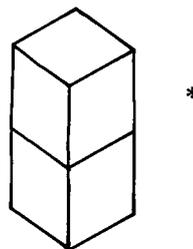
M : "Il va y avoir une règle du jeu : je ne peux pas faire ce qu'a fait Pascal :

assemblage de Pascal



Par contre je suis d'accord si on fait comme ça :

assemblage de Pascal
rectifié et montré.



* Les dessins en perspective figurant dans cette partie sont seulement destinés à illustrer notre propos. Nous n'avons jamais (sauf une fois : voir page 50 les commentaires faits à ce propos) réalisé de tels dessins au tableau.

Comment pourrait-on dire ? ”.

E₁ : ”Il faut qu’ils se touchent tous les 2 ensembles. Il ne faut pas qu’ils dépassent.”

E₂ : ”Il ne faut pas qu’ils soient tordus”.

E₃ : ”Il ne faut pas qu’il y ait des carrés qui dépassent”.

E₄ : ”Il faut que les 2 faces se collent l’une contre l’autre”.

M : ”Oui, il faut que les 2 faces soient bien l’une contre l’autre”.

Les élèves construisent des assemblages de 8 cubes bleus en respectant cette contrainte. Remarquons que cette contrainte apparaît aux enfants comme très naturelle.

– **Deuxième contrainte.**

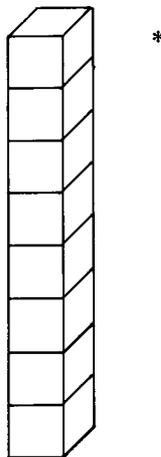
Les assemblages réalisés sont en majorité des assemblages ”plans” c’est-à-dire formés d’une seule ”couche” de cubes.

La maîtresse rejette ces assemblages particuliers en les décrivant ainsi : ”si on les pose à plat, il n’y a qu’une couche de cubes”. Cette **formulation** de la contrainte soulève des difficultés ; en effet la reconnaissance de ces assemblages plans peut nécessiter, pour les enfants, un changement de position des assemblages.

Dans un premier temps seuls 16 assemblages ”plans” sont reconnus comme tels.

M : ”Un assemblage de 8 cubes comme celui-ci est-il permis ? ”.

La maîtresse montre l’assemblage suivant :



E : ”Ça dépend comment on le met”.

Un accord intervient dans la classe : cet assemblage peut être posé de façon à n'avoir qu'une couche. Il n'est donc pas permis.

Finalement il s'avère que 25 assemblages sur 31 sont "plans". La difficulté d'identifier un assemblage "plan" réapparaîtra par la suite pour quelques enfants.

➔ **Jeu de communication.**

– **Description.**

Dans ce jeu, chaque élève devra réaliser un assemblage respectant les deux contraintes (assemblage permis) ; puis il devra élaborer un message s'adressant à un autre élève : ce message devra contenir des renseignements permettant au partenaire de reconstituer l'assemblage. Ce sera donc un jeu de communication entre deux partenaires, l'enjeu étant la reconstitution exacte des deux assemblages.

– **Objectifs de l'activité.**

Nous avons choisi de proposer un jeu de communication **entre élèves** pour favoriser l'émergence de descriptions ou de représentations spontanées et diversifiées d'assemblages de cubes. Le fait que le message s'adresse à un autre enfant et non à la maîtresse devrait diminuer le rôle des représentations conventionnelles, telles les perspectives.

Dans le déroulement du jeu M. n'a désigné le récepteur du message qu'après la réalisation de ce message pour ne pas faire dépendre son contenu d'un élève particulier.

– **Déroulement de la 1ère partie du jeu : écriture des messages.**

Chaque élève reçoit une feuille de papier blanc sur laquelle il écrit son nom.

M. affiche au tableau la première consigne :

1) Avec tes cubes bleus réalise un assemblage permis.

E : "Est-ce qu'on peut faire des assemblages tout plats ? "

M : "Non, on n'a pas le droit".

Puis on affiche la deuxième consigne :

2) Ecris sur ta feuille les renseignements nécessaires pour que celui qui les recevra puisse refaire le même assemblage (en jaune).

■ Cette consigne suscite des réactions diverses.

E : "On explique ce que ça veut dire notre assemblage ?".

M : "Vous faites ce que vous voulez, en pensant bien qu'un autre devra refaire votre assemblage".

E₁ : "Est-ce qu'on peut dessiner des cubes et mettre des flèches pour montrer comment on assemble ?".

E₂ : "On doit expliquer son assemblage".

E₃ : "On fait un seul assemblage ?".

E₄ : "Il ne faut pas qu'ils soient plats".

E₅ : "Est-ce qu'on peut dessiner le cube, l'assemblage ?".

M : "On peut faire tous les dessins qu'on veut, écrire tous les mots qu'on veut pour que l'autre comprenne".

M. rappelle une nouvelle fois la deuxième contrainte et, cependant, quand les enfants réalisent leur assemblage, certains ont encore du mal à ne pas faire d'assemblages "plans" (ou "plats" comme disent les enfants).

— Messages produits : analyse.

La nature de l'assemblage et le contenu des messages vont interférer.

On peut faire l'hypothèse que le type de description sera lié à la nature de l'assemblage représenté. C'est pour cela que dans l'analyse des productions des enfants (**assemblage et message**) nous avons distingué deux types d'assemblages : les empilements et ceux qui n'en sont pas. Un **empilement de cubes** est une construction qui peut être réalisée sur une table avec des cubes non accrochables, en respectant la première contrainte. Les constructions qui ne sont pas des empilements* sont plus complexes et posent des problèmes de représentation plus difficiles : en particulier, comment décrire certains "décrochements", "trous", "surplombs" . . . ? Soulignons que le matériel proposé aux enfants (cubes accrochables dans toutes les directions) ne favorise pas particulièrement les empilements.

La difficulté à décrire leur assemblage va amener certains enfants à simplifier leur construction (jusqu'à la rendre "plate" pour deux d'entre eux). On peut supposer que cela conduira beaucoup d'enfants à réaliser des empilements.

Malgré l'absence de directives concernant la forme du message ("On peut faire tous les dessins qu'on veut, écrire tous les mots qu'on veut") la nature de l'activité favorisera des messages de type figural.

* Pour bien comprendre cette définition, nous conseillons au lecteur de réaliser tous les assemblages de 4 cubes respectant les deux contraintes : ce sont toujours des empilements. Il faut au moins 5 cubes pour trouver un assemblage qui ne soit pas un empilement.

En effet, d'une part la description verbale d'un assemblage de 8 cubes est une tâche complexe et inhabituelle, d'autre part beaucoup de ces enfants ont déjà eu l'occasion de faire des dessins de cubes.

Tableau des messages produits par les enfants selon le type de leur assemblage.

Dans ce tableau nous avons distingué pour l'analyse deux types d'assemblages : les empilements et ceux qui n'en sont pas.

Nous avons qualifié de "verbale" les descriptions sans aucun dessin.

Voici un exemple de message verbal :

Mets trois cubes horizontal sur ta table
et assemble les. accroche un cube en
verticale sur le deuxième et mets
en encore un sur suis que tu
as mis verticale. mets un cube
derrière le deuxième ^{cube} que tu as
mis verticale. Ensuite mets un
cube à droite de suis que tu as
mis derrière l'autre cube.
Enfin mets un cube derrière
celui que tu as mis à droite.

Ce message concerne un assemblage qui n'est pas un empilement.

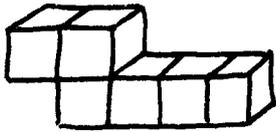
A l'intérieur des descriptions non verbales nous avons mis en évidence trois types de représentations : les dessins codés, les "vues" et les dessins en perspective.

Les dessins en perspective possèdent une certaine ressemblance visuelle avec l'assemblage qu'ils représentent. Cette ressemblance résulte d'artifices graphiques qui reposent sur des conventions ingénieuses et complexes, aboutissement d'un long cheminement historique. Les dessins en perspective sont très présents dans l'environnement social ce qui explique que les enfants tentent "spontanément" de s'en inspirer. Ces tentatives, même réussies, ne sont généralement pas l'indice d'une prise de conscience des conventions qui lient les propriétés de l'objet à sa représentation.

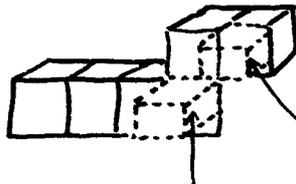
Voici un exemple de message utilisant des dessins en perspective.

après

face 1



tourne le



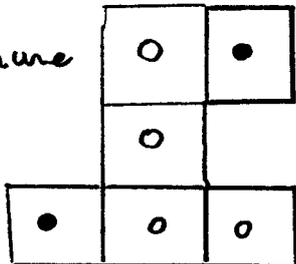
rajoute un cube ici

rajoute un cube ici

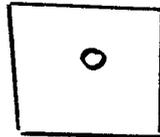
Si les représentations en perspective reposent sur des conventions implicites fixées socialement pour rendre compte de la vision, les dessins codés au contraire résultent de l'élaboration individuelle d'un symbolisme arbitraire explicité par une légende. Ce symbolisme que nous appellerons "code" complète en général le dessin de parties "plates" de l'assemblage. Remarquons cependant que certains signes arbitraires peuvent se passer de légende parce qu'ils sont déjà porteurs de sens : par exemple les flèches, fréquemment utilisées pour représenter une action.

Voici un exemple de messages utilisant des dessins codés :

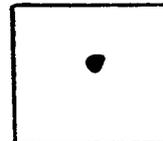
Marie - Saune



sur la table

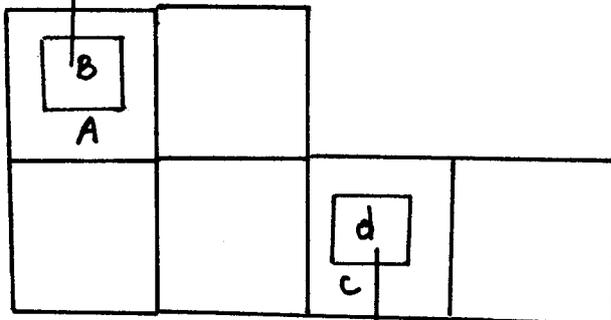


sur le cube



l'échelle

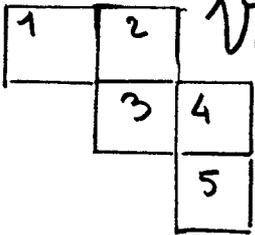
B est en dessus de A.



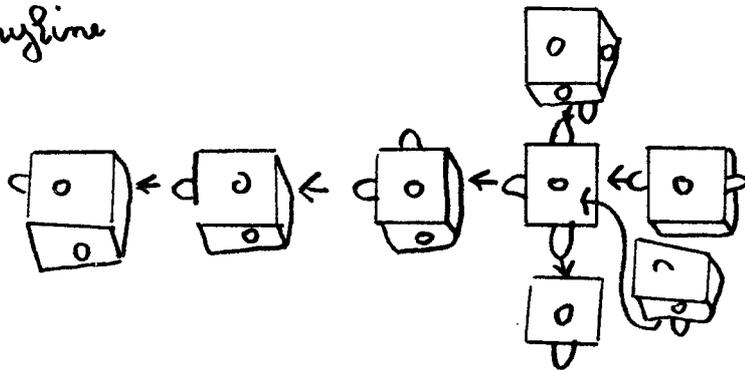
d est en dessus de c.

Sur les cubes : 1-3-5. il y a
1 cube dessus.

Ludovic V. Voici la moitié plate



Maryline

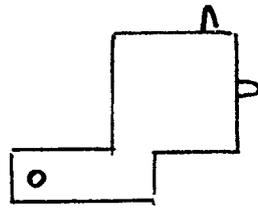
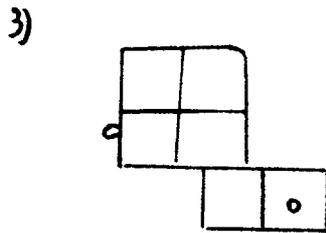
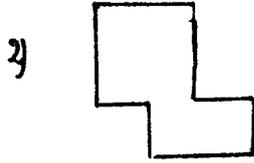


Nous avons distingué les "vues" comme type de représentations intermédiaires. Il s'agit, pour nous, de dessins se rattachant aux "vues" du dessin technique. Ces représentations reposent sur des conventions relativement simples privilégiant des positions particulières et normalisées de l'observateur par rapport à l'objet (en face, au dessus . . .). Effaçant l'une des trois dimensions, une vue rend compte d'une perception très partielle de l'objet.

Voici un exemple de message utilisant des vues :

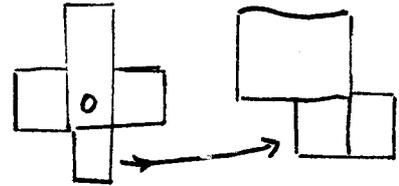
Anne S.

1) carré de cubes



4) mettre 2 cubes sur le carré :

(face)



Cette classification des descriptions non verbales n'est pas sans poser de problèmes puisque dans plusieurs dessins codés interviennent des éléments de perspective ou une vue de l'assemblage (en général la vue de dessus).

Nous avons choisi de mettre dans les "dessins codés" tout message reflétant un effort d'élaboration de codage.

Tableau des productions (assemblage et message)

type de message \ type d'assemblage		empilement	non empilement	M
verbal		1	2	3
non verbal	dessins cadrés	17	4	21
	dessins en perspective	4	1	5
	vues	1	1	2
M		23	8	31

- Comme nous l'avions prévu la majorité des élèves (23 sur 31) construit des empilements, assemblages plus simples à décrire.

- 6 enfants ont produit des dessins en perspective ; 3 ont utilisé la perspective dans leur "dessin codé". Seul un enfant a fait un dessin respectant les règles de la perspective. On peut supposer que la difficulté à représenter en perspective un assemblage de cubes a conduit des enfants (21) à élaborer des codages (message de Caroline, voir page 42).

- Précisons que 3 enfants seulement réalisent des vues sans codage : 2 enfants ont pris soin d'expliciter la position de l'objet par rapport à l'observateur ; l'un d'eux complète deux vues de l'assemblage par un dessin en perspective (message de Daniel : voir page 44 ; nous l'avons classé dans "dessin en perspective"). Le 3ème enfant a simplifié à l'extrême le problème de représentation puisqu'il construit un assemblage plan de 8 cubes, déterminé par une seule vue!

– Déroulement de la 2ème partie du jeu : lecture des messages.

Une fois les messages terminés, M. forme les équipes arbitrairement. Les partenaires d'une même équipe échantent leur message. M. affiche la 3ème consigne :

3) Au bas du message que tu as reçu, note ton nom. Indique si tu as compris le message et si tu as refait le même assemblage.

Si tu n'as pas compris, indique ce que tu n'as pas compris.

Cette consigne est complexe et devra être détaillée.

Dans un premier temps, M. précise :

M. : "Vous essayez de faire exactement l'assemblage décrit par le message avec vos cubes jaunes. Vous gardez l'assemblage bleu et vous le cachez".

Après un temps de recherche, M. ajoute :

M. : "Ceux qui ont fini vous allez sans faire de bruit voir votre partenaire pour vérifier votre assemblage".

Puis M. demande qu'en cas d'échec soit noté sur le message le nombre d'essais qui ont été nécessaires pour obtenir un assemblage jaune identique au bleu et qu'il soit indiqué ce qui n'est pas clair ou ce qui manque dans le message.

La réussite est reconnue par les deux partenaires dès lors que les deux assemblages sont les mêmes. Ici le rôle de la maîtresse est simplement d'organiser les échanges.

Annexe :

a) Tableau des résultats du jeu selon le type de message

Ce n'est pas une évaluation mais une analyse faite après les séquences.

type de message résultat du jeu	verbal	non verbal			M
		dessin codé	dessin en perspective	vues	
réussite (1 essai)	2	10	2	1	15
échec (plus d'un essai)	1	11	2	1	15
M	3	21	4	2	30

(Un élève n'a pas eu le temps d'achever son message, dessin en perspective d'un assemblage plan. Il lui a fallu toute la séance pour terminer son dessin).

- La réussite ou l'échec ne semblent pas dépendre du type de message.

b) Compléments.

Par contre la nature de l'assemblage et son interférence avec la description semblent jouer un rôle puisqu'il y a échec pour 7 récepteurs (sur 8) de messages concernant des "non empilements".

- La réussite dépend bien sûr de la qualité du message : pour les dessins codés, nombre d'échecs résultent de l'absence ou de l'insuffisance de la légende.

- Mais il va de soi que la réussite dépend aussi du récepteur et de l'expérience acquise lors de l'écriture de son message.

Séances 2 et 3 (16 février et 9 mars)

Pour construire ces deux séances, nous nous sommes appuyés sur une analyse des productions des enfants classées par type d'assemblages et types de messages.

➔ **Objectifs.**

Nous avons voulu

1) confronter chaque élève aux représentations variées produites par la classe ; ceci afin de favoriser la prise de conscience de la diversité des représentations possibles, de leur pertinence, de leur fiabilité, du fait que certaines sont plus performantes que d'autres

2) privilégier un codage lié aux empilements et provoquer sa transformation pour en faire un outil collectif.

➔ **Déroulement des séances 2 et 3.**

Chaque élève dispose de 8 cubes emboîtables.

M. rappelle les deux contraintes d'assemblages et fait raconter aux élèves le jeu de la séance précédente.

a) Lecture de messages par des groupes d'élèves.

M. forme des groupes de 4 enfants à qui elle remet une feuille blanche et deux ou trois messages : ces messages ont été préalablement choisis de types divers et distincts de ceux produits par les membres du groupe.

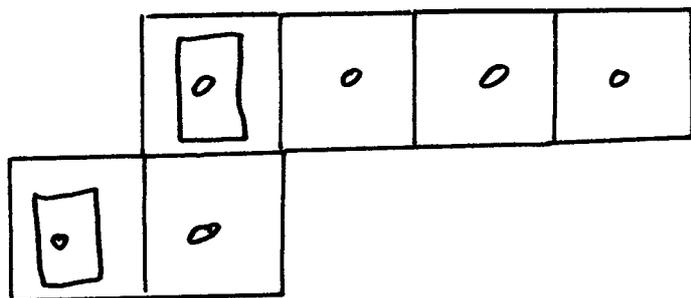
M. : "Vous essayez de refaire l'assemblage décrit dans le message. Si vous y arrivez bien, vous écrivez sur la feuille blanche que c'est clair. Vous pouvez essayer de rendre le message encore plus clair. Si vous n'y arrivez pas, vous précisez ce que vous ne comprenez pas".

Trois groupes (sur 7) ont proposé de rendre "plus clairs" certains messages :

L'un de ces messages décrivait, par une succession de dessins codés, un assemblage qui n'était pas un empilement ; les deux autres représentaient des empilements, l'un par un dessin en perspective, l'autre par des dessins codés.

Toutes les propositions des groupes ont utilisé le **même codage**.

Voici par exemple la proposition concernant le message d'Agnès. (voir p. 35).



Quant la forme est comme ça  ça veut dire qu'il y en a un dessus de l'autre

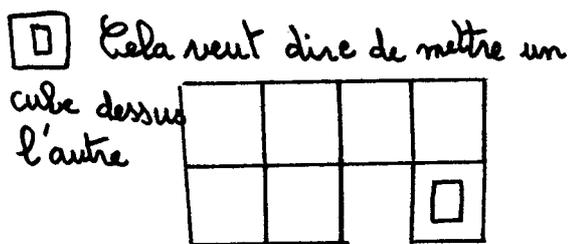
Remarque : c'est ce codage que nous envisageons de privilégier par la suite. Pour cela chaque groupe avait reçu un dessin codé de ce type.

L'activité se conclut par un questionnement de la classe par M. : "Est-ce que quelqu'un peut dire quel message il a trouvé simple et pourquoi ?". L'une des réponses caractérise bien ce que sont pour les enfants les qualités d'un dessin codé : "c'est expliqué en pas beaucoup de choses et bien expliqué" (à propos du message de Cécile, voir p. 35).

b) Présentation du codage de Murielle.

M. affiche le message de Murielle* et demande à chaque élève de réaliser l'assemblage qu'il décrit.

Murielle



empilement ; dessin codé.

Tous les enfants réussissent la construction ; la maîtresse souligne que certains enfants "ont simplifié les messages avec cette idée" (de codage).

c) Lecture de messages et simplification.

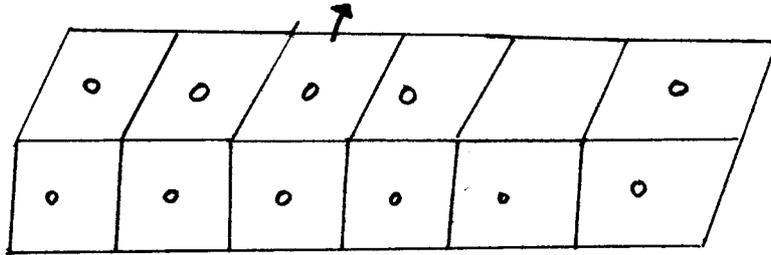
M. affiche successivement plusieurs messages d'élèves et répète à chaque fois les consignes du type : "Est-ce que vous comprenez le message ? Réalisez la construction . Est-ce que vous pouvez le simplifier ?"

* Les messages affichés au tableau sont des agrandissements fidèles des originaux.

Nous présentons successivement les messages affichés par M. et les simplifications proposées par la classe.

– Premier message.

Caroline P.

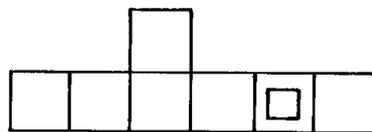


Les cubes noir veut dire qu'il en a un autre devant et celui qui va une flèche en a 2 et noir et qui

Empilement ; dessin codé suite à un échec dans l'utilisation de la perspective.

Peu de difficultés pour réaliser la construction du fait de la simplicité de l'assemblage.

Simplification :



– Deuxième message.

Anne M.

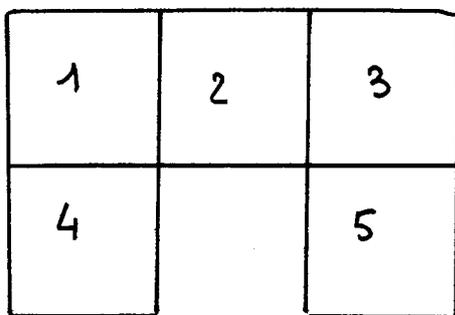


Figure 1

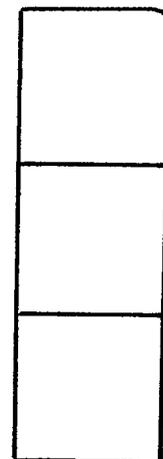


Figure 2

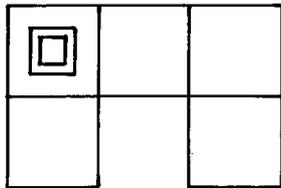
Empilement ; dessin codé.

- ① D'abord il faut faire la figure 1 et 2
- ② La figure 1 est plate
- ③ La figure 2 est en hauteur
- ④ La figure 2 doit être placée sur la figure 1 sur le cube n°1

Aucune difficulté à faire la construction.

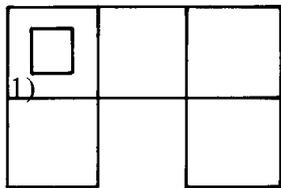
Simplifications :

1ère proposition



Commentaire oral donnant la légende du dessin :
"c'est les petits cubes les uns sur les autres".

2ème proposition

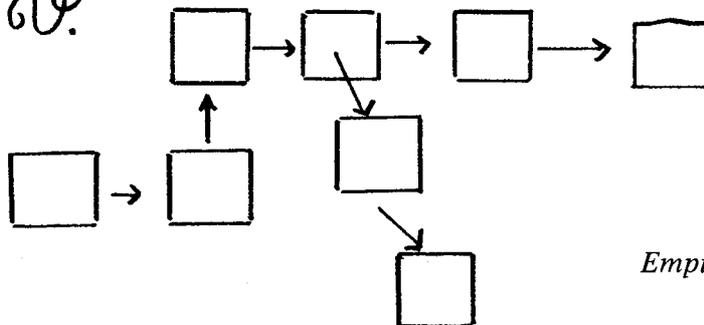


1) cela veut dire qu'il y a 3 cubes.

3ème proposition : on complète la légende de la proposition précédente par . . . 3 cubes dessus.

– Troisième message.

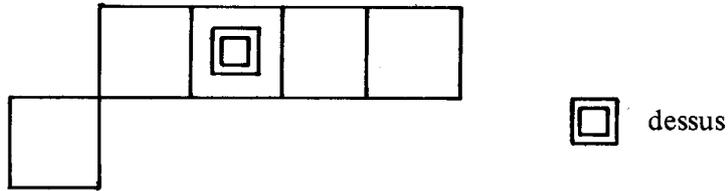
Laurent V.



Empilement ; dessin codé.

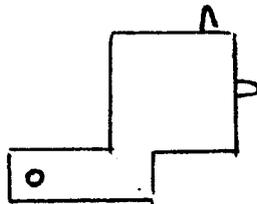
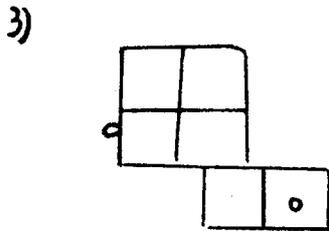
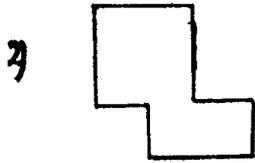
Des difficultés à ne pas faire des assemblages plans : il manque une légende précisant la signification à donner aux flèches.

Simplification :

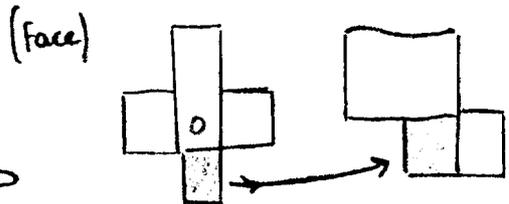


– Quatrième message.

1) caré de cubes



4) mettre 2 cubes sur le caré :

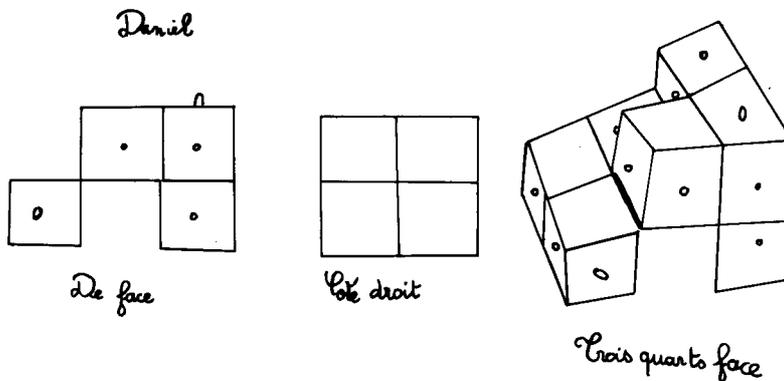


Non empilement ; vues.

Ce message n'a pas été compris même par celle qui l'a écrit. En effet, il conjugue deux difficultés : il concerne une construction qui n'est pas un empilement et utilise maladroitement des vues. Nous n'avons pas voulu proposer nous-même de solution et les difficultés n'ont pas pu être surmontées.

Nous fournissons alors dans la séance 3 deux autres occasions plus simples pour élaborer des codages de "non empilements".

– Cinquième message.

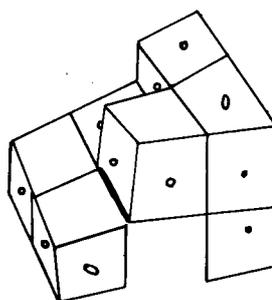


Non empilement ; dessin en perspective (et vues)

Beaucoup d'élèves réalisent rapidement l'assemblage.

Quelques élèves seulement ont des difficultés à lire ce message. Pour les aider la maîtresse intervient : "côté droit, qu'est-ce que ça veut dire ? Quelqu'un veut-il venir au tableau me le montrer sur le dessin «trois quart face» ?".

Daniel, lui-même vient montrer :



← "Ce serait là derrière".

Trois quart face

Cette intervention n'est pas suffisante pour 4 élèves que l'on doit aider individuellement.

Simplification :

Consigne : Est-ce que vous pouvez simplifier le message de Daniel à l'aide du codage de Murielle ?

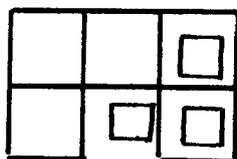
Le mot codage est utilisé ici pour la première fois sans être explicité : il semble avoir été compris, dans le cadre de ces activités.

Après avoir déclaré : "non, non, on ne va pas y arriver", les élèves cherchent activement.

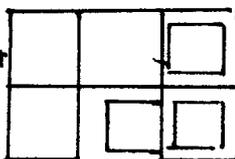
Propositions individuelles.

- dessins codés sans perspective.

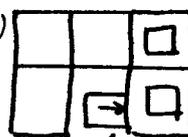
1) Stéphane H.



2) Laurent



3) Stéphane B.



Cela veut dire qu'il y a un cube sur le côté

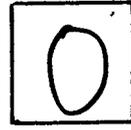
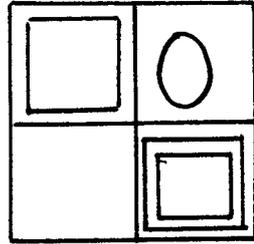


Cécile

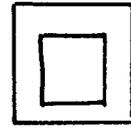
Le cube □→ s'accroche sur le côté de celui qui est en haut

Autre proposition (à partir d'une position différente de l'assemblage) :

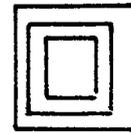
Céline



Cela veut dire souder
le cube au cube
le plus haut.

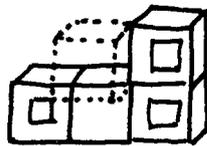


Cela veut dire mettre
un cube dessus.



cela veut dire mettre
deux cubes dessus l'un à côté de l'autre.

- dessins codés avec perspective.

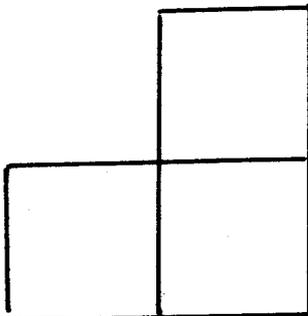


Agnès

– Exemple de dessin codé avec un autre codage que celui de Murielle :

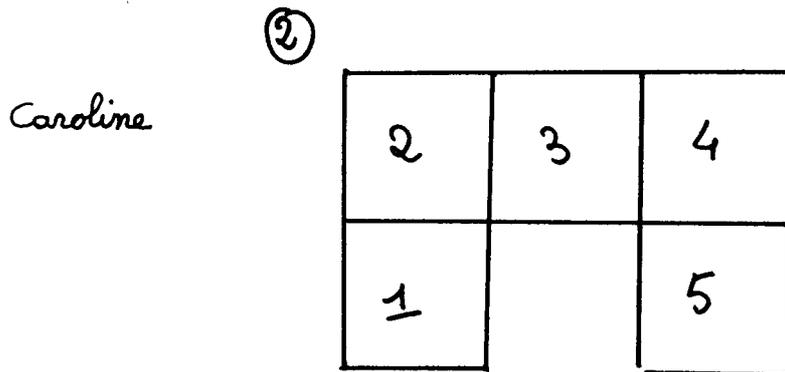
Caroline

①



La figure 1 est à placer sur

la figure 2 sur les chiffres 4 et 5



Un tel dessin codé nécessite un complément de légende !

– Mise en commun.

M. : "Pourquoi avez-vous dit au début qu'on ne pouvait pas utiliser le codage de Murielle ?".

E₁ : "Il y a toujours un cube qui ne sera pas collé aux autres".

E₂ : "Celui du milieu, il faut l'accrocher à un cube de devant".

M. : "Oul, et pas à un cube posé sur la table.

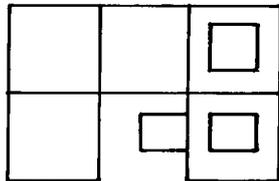
Est-ce qu'on peut poser la construction autrement ?

Est-ce que vous avez toujours le même problème ?".

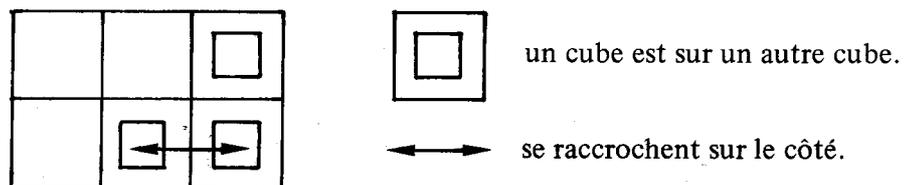
Es : "Oui".

Par son questionnement la maîtresse évoque le problème de la reconnaissance d'un "empilement", problème lié à l'utilisation de cubes accrochables : les assemblages qu'ils forment peuvent être placés dans n'importe quelle position. Aussi il peut arriver que certains assemblages de type "empilement" ne soient pas forcément identifiés en tant qu'empilements, cette identification dépendant de positions particulières de l'assemblage.

La maîtresse fait dessiner au tableau le dessin codé du type le plus courant :



Ce dessin est amélioré collectivement et on aboutit à la proposition suivante :

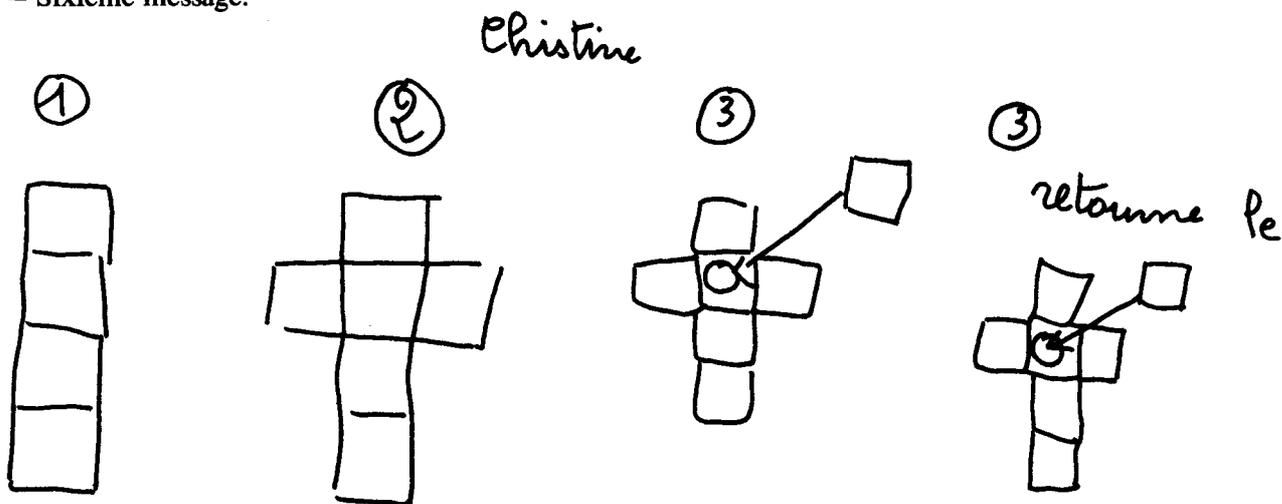


• La légende rédigée par la classe n'explique pas toute la signification liée à la taille des carrés :

- un grand carré représente un cube posé sur la table ou de la première couche
- un petit carré représente un cube de la deuxième couche de l'assemblage.

• Plus généralement, la part d'implicite augmente avec le degré de familiarité d'un codage. Par exemple, pour beaucoup d'enfants, le codage de Murielle se passe rapidement de légende.

– Sixième message.



Aucun problème.

Non empilement ; dessin codé.

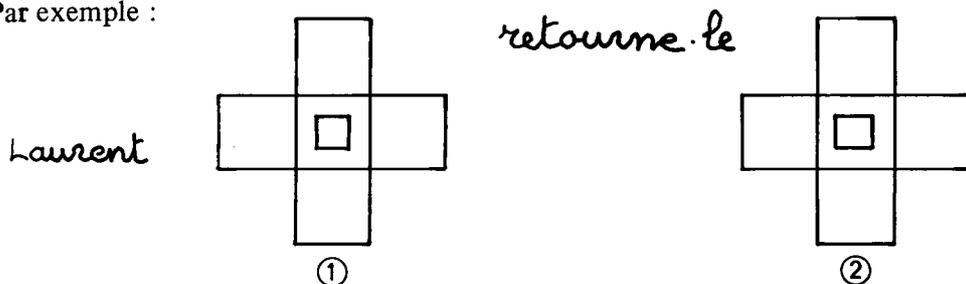
Simplification :

Consigne : Cherchez un message plus simple en utilisant un codage ressemblant à celui de Murielle.

Puis : Essayez de mettre tout sur un seul dessin, comme Murielle.

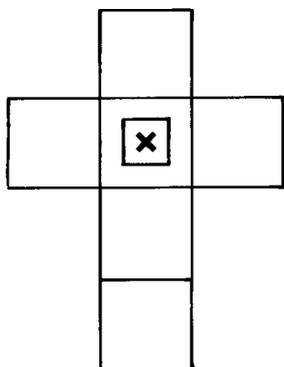
Les propositions les plus courantes consistent à faire successivement le dessin de ce que l'on voit dans deux positions symétriques de l'assemblage :

Par exemple :



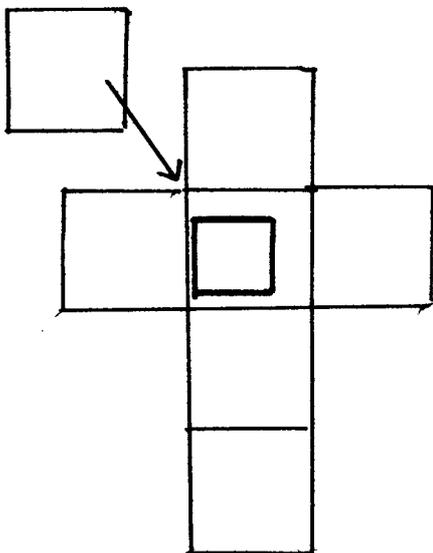
La maîtresse fait dessiner au tableau des propositions où n'intervient qu'un dessin :

Caroline

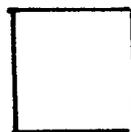


Cela veut dire qu'il y a un cube devant et un cube derrière.

Murielle

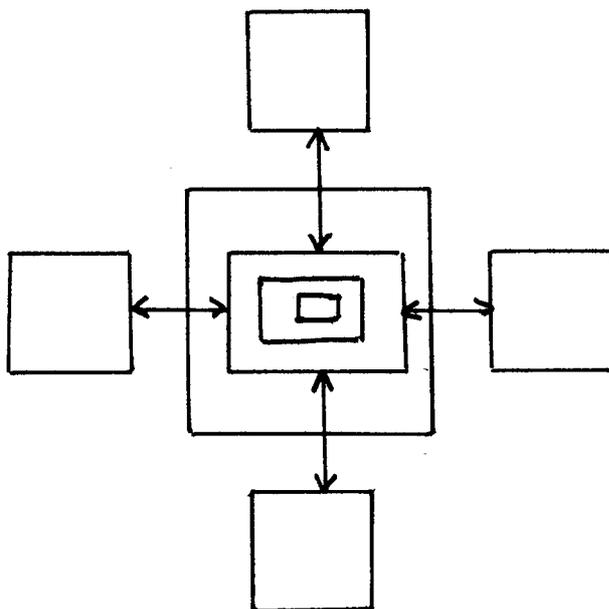


Cela veut dire de mettre un cube sur l'autre.



La flèche indique qu'il y a un cube devant l'autre.

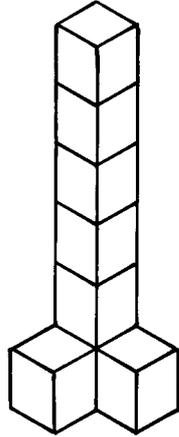
Valerie



d) Evolution provoquée du codage de Murielle dans le cas des empilements.

Nous voulions proposer aux élèves une situation dans laquelle le codage de Murielle soit difficile à utiliser.

M. affiche le dessin en perspective d'une construction avec 8 cubes :



8 cubes

Certains enfants protestent : "il en manque un, il n'y en a que 7".

M. : Il y a bien 8 cubes comme je l'ai dit. Où est le huitième ?"

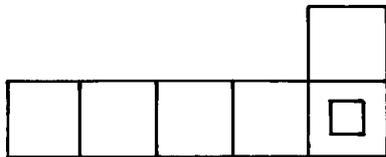
E. : "Derrière".

Les réactions montrent les difficultés d'interprétation de dessins en perspective, même dans le cas d'une construction simple. Etant donné nos objectifs, il aurait été préférable de présenter à la classe un assemblage déjà fait et de le faire reproduire par les élèves.

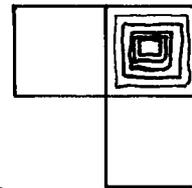
Chaque élève réalise la construction.

M. : "Vous essayez de coder comme Murielle".

M. retient les deux propositions les plus courantes :



Norbert

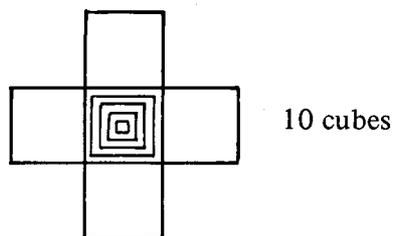


Anne

• Ces dessins codés n'ont plus de légende : la signification du codage de Murielle est devenue implicite pour la classe.

• Le codage se fait à partir de la couche de cubes qui touchent la table. Des élèves dont Norbert, ont changé la position de l'assemblage, privilégiée par le dessin, pour pouvoir utiliser plus facilement le codage de Murielle. Notre assemblage n'était donc pas bien choisi, puisqu'il pouvait correspondre à deux empilements dont l'un ne remet pas en question le codage de Murielle.

Exemple de construction qui correspond à un seul empilement et pour laquelle le codage de Murielle donne :



Es. : "Norbert, c'est plus facile".

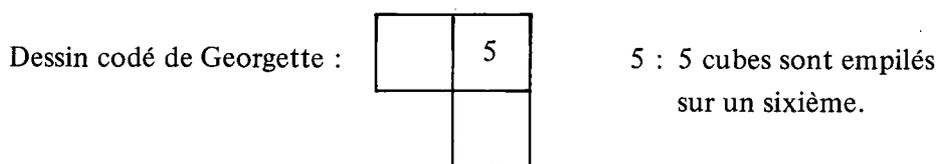
M. : "Effectivement, il y avait plusieurs façons de coder. Il ne faut pas oublier que la légende serait la même que celle de Murielle. Que pensez-vous du dessin d'Anne ?".

Es. : "Heureusement qu'il n'y en a que 8 !".

M. : "En effet. Et s'il y avait 10 cubes . . . ?".

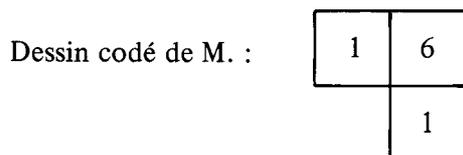
E. : "Elle les aurait faits plus grands" (les carrés) ".

M. : "Plus il y en a, plus c'est difficile. Il y a Georgette qui a une idée pour faire plus simple qu'Anne".



(le mot "empilé" est soufflé à Georgette par un autre élève).

M. : "Je vais vous proposer un autre codage. Vous allez voir si vous le comprenez".

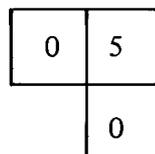


L'absence de légende gêne quelques enfants pour lesquels un carré représente un cube :

E₁ : "C'est mieux 5 parce qu'il y en a déjà 1 : on peut croire qu'il y en a 7".

E₂ : "Il manque une légende".

M. : "Il faut une légende ou se mettre d'accord".



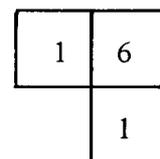
M. dessine au tableau le dessin codé ci-contre :

M. : "Est-ce que ça vous plait ?".

E₁ : "Les deux manières sont bonnes, mais ce n'est pas la même légende".

E₂ : "On ne comprend pas beaucoup, il y a déjà 3 cubes. Alors ça fait plus".

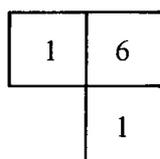
M. donne oralement la légende du dessin codé :



M. : "On commence par poser les cubes sur la table : le nombre indique le nombre de cubes que l'on a empilés ou le nombre d'étages.

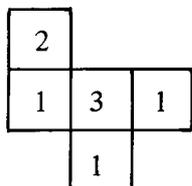
E. : "Je ne suis pas d'accord. Tout à l'heure on a mis 5. Ici cela veut dire qu'on en a mis 6 sur 1".

M. écrit alors la légende près du dessin codé :



les nombres indiquent le nombre de cubes que l'on a empilés **sur la table**.

M. propose aux élèves de réaliser l'assemblage suivant :



E. : "On regarde de haut, de face ou . . . ?".

M. : "Tu empiles sur la table".

Tous les élèves réussissent.

*Pourquoi avoir voulu **imposer** le codage donnant le nombre de cubes empilés sur la table plutôt que celui (proposé par les élèves) donnant le nombre de cubes empilés sur la première couche de cubes ?*

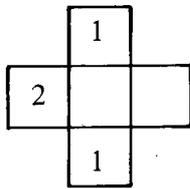
Il nous a semblé qu'une fois apparu le premier codage numérique, le second, plus satisfaisant, pourrait facilement être compris.

Pourquoi ce second codage numérique est-il plus satisfaisant ?

– *il donne par simple addition des nombres inscrits le nombre total de cubes de l'assemblage.*

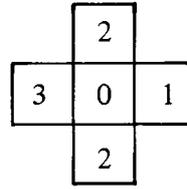
– il ne comporte aucune ambiguïté contrairement au premier codage.

Voici un exemple d'ambiguïté liée à l'utilisation du premier codage :



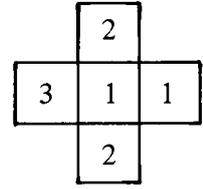
(1er codage)

peut correspondre à



(2ème codage)

ou à



C'est ce codage qui va être utilisé dans les leçons suivantes.

PARTIE II : VUES ET DESSINS CODES D'EMPILEMENTS.

Matériel : des cubes à faces lisses (non emboîtables). Chaque cube est de 3 couleurs, les faces opposées étant de même couleur.

Avec un tel matériel, les seules constructions possibles avec la contrainte 1 sont des empilements.



Objectifs.

Le codage numérique mis en place dans la séance précédente permet aux élèves de représenter simplement et de manière univoque n'importe quel empilement. Cette représentation, qui revient à donner l'emplacement des piles de cubes et leur hauteur, est très efficace pour communiquer ; mais elle met peu de propriétés géométriques en évidence. C'est pour cela que nous avons voulu faire travailler les élèves sur les "vues", représentation plus complexe :

– Cette représentation impose à l'observateur des changements de point de vue dont il doit rendre compte. Cette activité nous semble une expérience essentielle pour "voir dans l'espace".

– Les "vues", en conservant et en privilégiant certaines propriétés géométriques font des empilements un objet géométrique plus riche : elles permettent aux élèves de travailler implicitement sur des notions telles que parallélisme, orthogonalité, projection orthogonale . . .

Il nous a semblé important, également, d'amener les élèves à passer d'une représentation à l'autre (vues et dessus codés) et de provoquer ainsi leur comparaison à travers leur fonctionnement.

Seances 4 et 5 : Mise en plan de la notion de "vue". (7 et 23 mars).



Définition de contraintes supplémentaires que devront respecter les empilements.

Chaque enfant reçoit 6 cubes de 3 couleurs (jaune, rouge et bleu).

Après que les élèves ont remarqué que 2 faces opposées d'un cube ont la même couleur, M. introduit une nouvelle contrainte :

M. : "Les faces jaunes doivent être parallèles au plafond. Construisez un assemblage comme cela".

Le mot "parallèle" ne soulève pas de difficulté dans ce contexte.

Puis M. ajoute des contraintes de disposition pour les faces rouges (parallèles au tableau) et donc pour les faces bleues (parallèles aux fenêtres).

➔ **Précision sur la légende des derniers codes (codage numérique).**

M. : "La dernière fois, on a remarqué qu'il y avait une façon assez simple de décrire certains assemblages. Puis en discutant, on est arrivé peu à peu à cette description" :

2	1
1	2

(M. fait ce dessin au tableau et rappelle la signification des nombres).

M. : "Chacun va construire cet assemblage avec ses cubes. Essayez de mettre vos cubes comme on l'a dit : les faces jaunes parallèles au plafond, les faces rouges parallèles au tableau . . .".

Les enfants réalisent sans problème la construction. Puis M. fait remarquer : "la plupart d'entre vous avez, devant vous, à votre droite, une tour de 2 étages et, à gauche, vers le tableau, une tour de 2 étages" et elle ajoute au dessin codé du tableau des indications supplémentaires de position :

tableau

2	1
1	2

élève

M. commente : "Avec ces indications, il faut respecter l'orientation".

Les élèves rectifient, si c'est nécessaire, la position de leur construction.



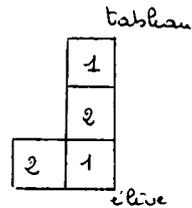
Introduction de la notion de vue :

Chaque élève reçoit la fiche suivante :

Nom :

Prénom :

1) Voici le codage d'un assemblage de cubes :



Recto :

- Réalise cet assemblage en plaçant chaque cube de la manière suivante :

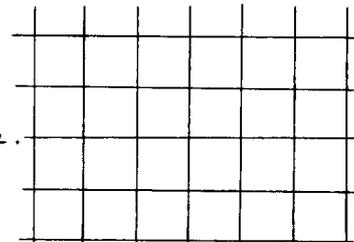
- les faces jaunes parallèles au plafond
- les faces rouges parallèles au tableau
- les faces bleues parallèles aux fenêtres.

Voici la vue de dessus de cet assemblage :
(c'est ce que tu vois quand tu regardes par dessus et que tu ne vois que des faces jaunes).



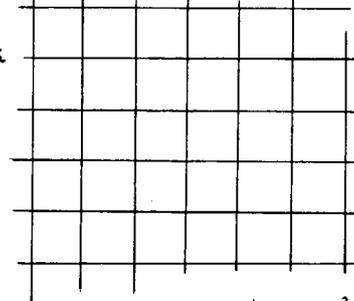
vue de dessus

- Dessine la vue de face de l'assemblage : c'est ce que tu vois devant toi en rouge.



vue de face

- Dessine la vue de gauche : c'est ce que tu vois devant toi si tu te mets dos à la fenêtre.



vue de gauche

.../...

Les élèves réalisent sans problème la construction du 1). Certains enfants contestent la définition de la **vue de dessus**.

E. : "On voit plusieurs vues. On en voit (des cubes) qui sont plus hauts que d'autres et on ne voit pas sur le dessin".

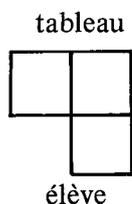
Un autre enfant répond : "On le voit parce qu'on est mal placé : si on est bien placé et si les cubes sont bien placés, on ne le voit pas, on voit comme sur le dessin". Un accord se fait dans la classe sur cette justification et M. s'y réfère à propos de la **vue de face** : "C'est ce qu'on voit de face en mettant la tête presque au niveau de la table ; c'est quand on ne voit que du rouge. Comme pour la vue de dessus, il ne faut pas faire attention aux cubes qui sont plus en avant". Cette convention d'absence de représentation pour les décodages des faces, imposée par le dessin de la vue de dessus, va poser des problèmes au moment de son utilisation : par exemple Jean-Noël propose comme "vue de face" :



Il représente le décalage des faces par la non-contiguïté des carrés. On retrouve également cette erreur dans les dessins de vue de gauche.

Nous nous attendions à cette erreur, liée au conflit entre cette convention et la perception ; aussi sommes-nous intervenues immédiatement chaque fois qu'elle est apparue.

Chaque élève va à son rythme mais à la fin de la séance 4 tous les élèves ont trouvé et codé les assemblages différents formés de 5 cubes dont la vue de dessus est :

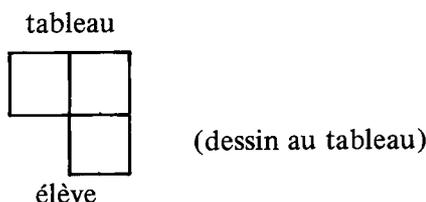


Après avoir comparé leurs propositions avec la fiche de correction fournie par M. , certains abordent le même problème avec 6 cubes. Par contre, très peu d'élèves donnent des assemblages ayant même vue de gauche.

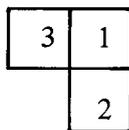
Le début de la séance 5 est consacré à des commentaires sur les représentations et à la correction des erreurs relevées par M. sur les fiches des élèves. Durant cette partie collective les élèves n'ont pas leur fiche.

● **Sens des nombres du codage numérique.**

M. : "J'ai regardé vos fiches. Vous avez cherché tous les empilements de 5 cubes qui avaient pour vue de dessus :



J'ai trouvé ce codage :



(dessin au tableau)

Est-ce que ça va ?

Es : "Non! Il y a 6 cubes".

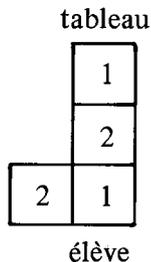
M. : "Comment le savez-vous ?".

Es. : "On calcule les nombres" , "On additionne les nombres".

● **Vue de dessus, lien avec le dessin codé.**

Trois élèves ont complété la vue de dessus, coloriée en jaune, par les nombres du dessin codé, confondant les deux notions. Quand il n'y a pas confusion, les élèves explicitent difficilement le lien existant entre vue de dessus et dessin codé, comme va le montrer ce qui suit.

M. dessine au tableau le dessin codé du début de la fiche :



M. : "Certains ont dit, c'est facile de trouver la vue de dessus. Pourquoi ?".

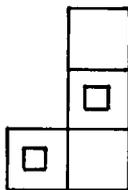
Un seul élève réagit : "On regarde bien au dessus"

ce qui n'établit pas de rapport entre vue de dessus et dessin codé !

M. fait refaire par chacun la construction. Celle-ci va rester en place durant toute la partie collective.

M. : "Comment pourrait-on donner très vite la vue de dessus ? "

Un élève propose au tableau :



Nos conventions sur les vues de dessus ne sont pas encore en place ! Nous retrouvons la confusion entre dessin codé et vue de dessus.

M. : "Qu'est-ce que vous en pensez ?".

E : "On ne voit pas ce qu'elle a mis dessus. Il faut enlever".

M. : "Ce qui te gêne, ce sont les carrés qui sont à l'extérieur ?".

E : "Oui".

M. : "En effet, on avait décidé qu'on ne faisait pas attention à la hauteur (des piles)".

M. efface les carrés.

M. : "Est-ce que vous n'avez pas une idée qui aurait permis d'aller plus vite ?".

Deux doigts seulement se lèvent et M. insiste : "Quand on regarde les deux dessins (vue de dessus et dessin codé) est-ce qu'ils ont quelque chose de semblable ?".

Es : "La forme".

M. : "C'est étonnant ?".

Es : "Non, c'est la même construction".

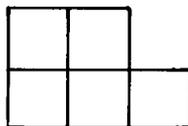
M. : "Comment peut-on passer de l'un à l'autre (du dessin codé à la vue de dessus) ?".

E : "En enlevant les nombres".

Tous les élèves n'en semblent pas persuadés.

● Les erreurs concernant la vue de gauche.

1ère erreur : M. dessine au tableau la "vue de gauche" proposée par 4 élèves :



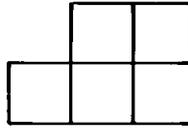
M. : "Qu'en pensez-vous ?".

Céline : "Le carré devrait être de l'autre côté".

M. : "Quel carré ? Quel côté ?".

Céline : "Le premier carré à droite devrait être à gauche".

On dessine au tableau la proposition de Céline.



M. : "Etes-vous d'accord ?".

Les élèves se mettent d'accord sur cette dernière proposition.

M. : "Qui peut expliquer cette erreur ?". (M. montre le premier dessin)

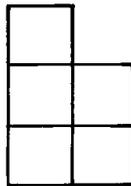
E : "Là, c'est la vue de droite".

M. : "Vérifiez".

E : "Oui, on voit exactement la première solution".

M. : "Il faut bien faire attention : certains se sont trompés tout simplement de position".

2ème erreur : La maîtresse dessine au tableau la vue de gauche (erronée) donnée par 2 élèves.



M. : "Qui veut expliquer pourquoi ça ne va pas".

Les élèves réfléchissent longuement.

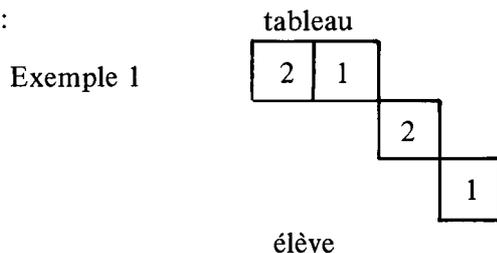
Christine : "On le regarde comme ça. (Elle penche la tête) : ils ont penché la tête".

M. : "Ils ont tellement penché la tête qu'ils l'ont relevée (la vue de gauche !)".

Christine : "Ils l'ont mise debout".

M. indique par un trait rouge sur la vue de gauche et sur celle qui est "relevée" le dessin des arêtes qui touchent la table : "Il faut faire attention que les arêtes qui touchent la table soient horizontales".

M. fait vérifier la compréhension de la vue de gauche d'un empilement sur deux exemples :



C'est la première fois qu'est proposée une telle construction non réalisable d'un seul tenant avec des cubes accrochables.

Exemple 2

tableau	
2	1
1	
1	1
élève	

Des explications s'avèrent nécessaires pour 3 élèves qui relèvent encore leur vue de gauche.



Certaines limites de "vues".

Une vue ne suffit pas pour décrire un empilement.

Ce problème est abordé au verso de la fiche individuelle, puisque l'on demande aux enfants de déterminer tous les empilements de 5 ou 6 cubes correspondant à une vue de dessus.

Deux vues ne suffisent pas non plus !

*Nous soulevons ce problème (au verso de la fiche) quand nous demandons aux enfants de regrouper les assemblages de même nombre de cubes qui ont même vue de dessus et même vue de gauche *.*

Nous verrons par la suite (séance 7) qu'en général trois vues ne représentent pas un empilement de façon univoque.

A la fin de la séance, chaque enfant reprend sa fiche, la corrige et la termine.

Voici les fiches solution dont les élèves pouvaient disposer pour vérifier leurs propositions et les numéroter :

* L'activité prend tout son sens ici car chaque élève ne dispose que du nombre de cubes nécessité par une construction.

Avec 5 cubes. Voici tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



Avec 6 cubes. Voici tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



2	2
1	1

2	1
2	2

1	2
3	2

2	2
1	2

2	3
2	1

3	2
3	1

3	1
4	1

1	1
5	3

1	3
6	1

3	1
4	2

2	1
5	3

1	2
6	3

1	3
7	2

1	1
8	4

4	1
9	1

1	4
10	1

Avec 5 cubes, les numéros des empilements qui ont même vue de gauche sont : 2 et 3 ; 4 et 6.

Avec 6 cubes : 2 et 3 ; 5 et 6 ; 7 et 4 ; 9 et 10.

– Résultats :

24 élèves terminent la fiche sans erreur.

9 élèves laissent leur fiche inachevée : sur ces 9 élèves, 1 seul ne trouve pas tous les emplacements avec 6 cubes ; 3 autres ne donnent aucun groupe d'empilements ayant même vue de gauche (avec 6 cubes).

Mais, en définitive tous les élèves ont réussi l'exercice avec 5 cubes.

Séances 6 et 7 (30 mars et 27 avril) – Jeu mettant en rapport vues et dessin codé.

→ Construction d'un empilement correspondant à 3 vues données.

Chaque enfant reçoit 8 cubes de 3 couleurs et la fiche suivante :

Nom :

Prénom :

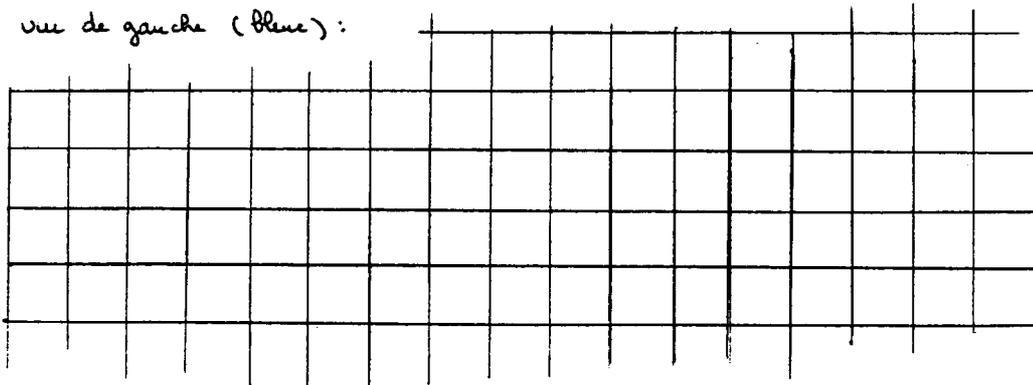
- Réalise cet assemblage :

tableau

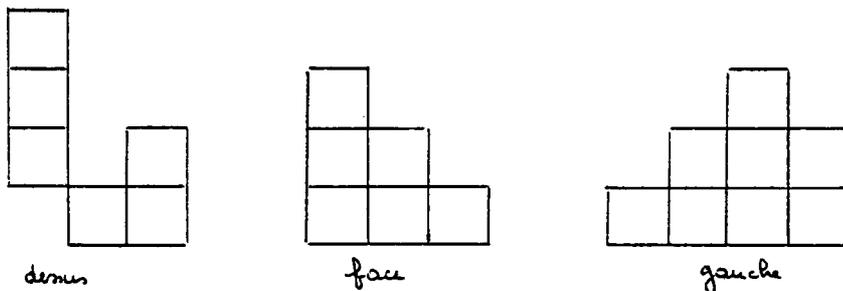
2	1	1
	1	3

élève

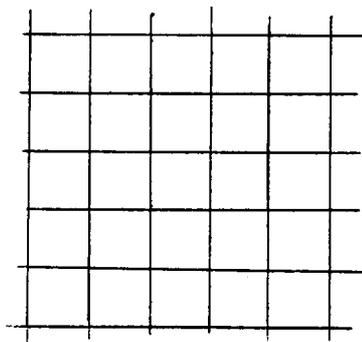
Dessine sa vue de dessus (jaune), sa vue de face (rouge) et sa vue de gauche (bleue) :



- Voici les trois vues d'un assemblage :



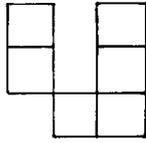
Colorie ces vues avec les couleurs qui conviennent. Réalise l'assemblage et code le



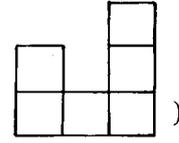
.../...

On retrouve dans la première partie, des difficultés (vite aplanies) pour utiliser la convention de non représentation des calages.

– par exemple Catherine propose comme "vue de face" :



(au lieu de



)

Mais c'est la seconde partie de la fiche qui va véritablement poser un problème aux élèves, puisque nous avons été amenées à aider individuellement 9 élèves.

En effet pour trouver un empilement correspondant aux 3 vues, il s'agit à la fois de coordonner les informations fournies par chacune des vues et de prendre conscience du rôle particulier de la vue de dessus qui donne la base de l'empilement.

De plus, la convention utilisée ici (absence de représentation des décalages des faces) peut être un obstacle à la prise en compte des possibilités de décalages. Par exemple, certains élèves se trouvent bloqués après avoir réalisé un empilement plan respectant la vue de face ($\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$).

➔ Construction du jeu .

Chaque élève reçoit 10 cubes de 3 couleurs et des fiches de bristol (une fiche blanche et une fiche jaune).

Au verso de la fiche distribuée en début de séance, figurent les explications pour la réalisation du jeu :

- Réalisation d'un jeu
- Prépare deux fiches en carton à petits carreaux :

Nom: _____ n°: _____
PROBLEME

Nom: _____ n°: _____
SOLUTION

- Réalise un assemblage avec le nombre de cubes que tu veux.
Sur la fiche "PROBLEME", dessine et colorie ses 3 vues (une face d'un cube est représentée par 4 petits carreaux).
Sur la fiche "SOLUTION", code ton assemblage.

Les fiches blanches seront les fiches "Problème", les fiches jaunes les fiches "Solution". Un numéro est attribué à chaque enfant pour faciliter le tri et la manipulation des fiches : ce numéro est inscrit à la place n°.....

A la fin de la séance 6, tous les enfants ont réalisé un problème et sa solution. Certains en ont proposé plusieurs sur des couples de fiches différents ; pour distinguer ces problèmes, ils ajoutent à leur numéro une lettre de l'alphabet différente pour chaque problème.

➔ Réalisation du jeu. (séance 7).

Chaque enfant dispose de 10 cubes.

Trois semaines se sont écoulées depuis la séance 6 : M. fait rappeler par les élèves ce qui figure sur les fiches jaunes et blanches. Puis, elle rend leur fiche aux 8 élèves qui ont fait des erreurs et les leur fait corriger : 1 erreur porte sur la vue de dessus, 3 sur la vue de face, et 5 sur la vue de gauche.

Pour faciliter le déplacement des élèves (33), le jeu s'organise autour de trois endroits : à chaque endroit sont disposées 2 boîtes, l'une marquée "problèmes" (des n° 1 à 11 par ex.), l'autre marquée "solutions" (des n° 1 à 11).

Consigne :

Dans le fond de la classe, il y a 3 endroits où nous avons mis des fiches problèmes et leurs solutions. Vous allez prendre chacun un problème et essayer de le résoudre. Vous écrivez au brouillon le codage de votre construction et vous le comparez à celui de la fiche solution du problème. Vous avez réussi si vous trouvez le même codage. Quand vous aurez résolu 3 problèmes, je vous donnerai un problème plus difficile que j'ai mis à part.

Nous avons retiré des lots de problèmes ceux que nous qualifierons d'ambigus : un problème ambigu est un problème qui peut avoir d'autres solutions que celle proposée par la fiche. En effet, trois vues ne déterminent pas, en général, un empilement unique, même si le nombre de cubes est connu. Dans cette première partie du jeu, il n'y a donc pas de difficultés pour valider la solution proposée.

La principale difficulté du jeu est toujours d'envisager les diverses possibilités d'empilement liées à une même vue : l'aspect ludique de l'activité conduit tous les enfants à la surmonter plusieurs fois.

Exemples de fiche "Problème".

Problème sans ambiguïté :

Nom : Bernard n° 24

Problème

J	J	J
		J

B	
B	B

R		R
R	R	R

Solution de Bernard :

2	1	2
		1

Problème ambigu :

Nom : Stéphane n° 27

Problème

R			
R	R		R
R	R	R	R

face

	J		J
J	J	J	J

dessus

	B
B	B
B	B

gauche

Solution de Stéphane :

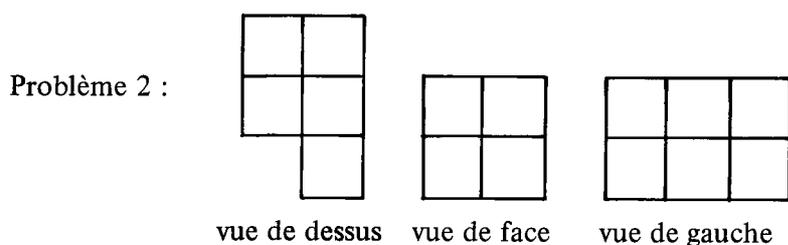
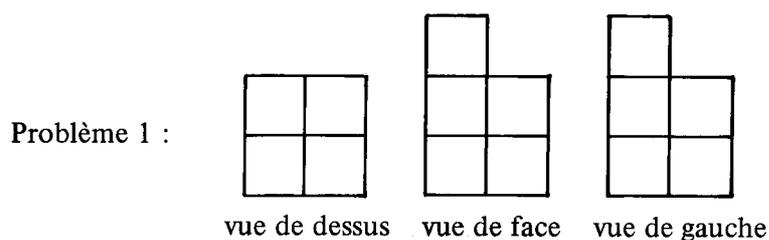
	1		2
3	2	1	1

*Il existe deux autres solutions
(avec 10 cubes).*

A ceux qui ont résolu 3 problèmes non ambigus, M. donne un problème plus difficile (problème ambigu) : certains élèves trouvent avec surprise une solution qui n'est pas celle proposée par la fiche solution. Il est alors intéressant de demander de rechercher systématiquement les solutions associées à un même problème. C'est ce que nous avons proposé à l'ensemble de la classe :

M. écrit au tableau :

Trouvez toutes les solutions des problèmes suivants (avec 10 cubes maximum).



Pour ces deux problèmes, il y a d'abord un travail individuel puis une présentation collective des solutions. M. suscite de nouvelles propositions tant que toutes les solutions n'ont pas été trouvées : à la fin de la séance, les 2 problèmes sont complètement résolus.

Voici les 5 solutions du problème 1 :

4	2
2	2

4	1
2	2

4	2
2	1

4	2
1	2

4	1
1	2

Voici les 8 solutions du problème 2 :

2	2
2	2
	2

2	1
2	2
	2

2	2
2	1
	2

2	1
2	1
	2

2	2
1	2
	2

2	1
1	2
	2

1	2
2	2
	2

1	2
2	1
	2

Dans cette dernière partie, nous avons constaté que certains enfants passaient directement des vues au dessin codé, sans construire effectivement d'empilements. Cette intériorisation reste encore fragile puisqu'elle peut conduire à des propositions de dessins codés ne respectant pas la vue de gauche.

Voici les seules erreurs commises par les élèves :

– par exemple, pour le problème 1, Pascal propose :

1	2
4	2

pour le problème 2, Jean-Christophe propose :

2	2
2	2
	1