

## A PROPOS DES CONCEPTIONS DU CERCLE

### PRESENTATION DE SITUATION DE CLASSES PRIVILEGIANT CERTAINES DE CES CONCEPTIONS (CE 2 et CM)

(Michèle ARTIGUE – IREM de Paris-Sud)

*Dans le numéro 25 de la revue "Grand IN" est paru un article intitulé "Cibles au CE". Le thème de l'article était le repérage, mais la façon dont il était traité conduisait à aborder d'autres notions, et en particulier celle de cercle.*

*Ayant mené en collaboration avec J. Robinet dans le cadre de mon travail à l'IREM de Paris-Sud, une recherche sur le cercle avec des enfants du même âge, je me suis sentie spécialement concernée par cet article :*

- les faits relatés concordaient-ils ou non avec nos propres observations ?*
- pouvait-on interpréter les conduites des élèves en termes de conception du cercle comme nous l'avions fait dans notre recherche ? Si oui, retrouvions-nous les conceptions que nous avons répertoriées ?*
- l'analyse faite par les auteurs des conduites des élèves se rapprochait-elle de celle que nous avons pu tenter au vu des données présentées ?*

*Dans cet article, je préciserai ce que nous entendons par "conception du cercle". J'utiliserai cette notion pour commenter l'article sur les cibles (Grand IN - numéro 25). Puis je présenterai certaines des situations utilisées dans les classes au cours de notre recherche.*

#### I – DEFINITIONS DU CERCLE – CONCEPTIONS DU CERCLE.

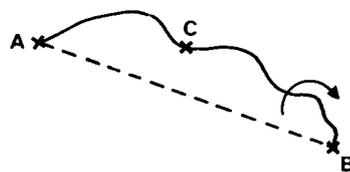
Les manuels de mathématiques, à l'heure actuelle, donnent quasiment tous la même définition du cercle :

(1) – Le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  est, dans le plan, l'ensemble des points situés à la distance  $R$  de  $O$ .

Mais l'on peut définir un cercle de bien d'autres façons. Citons-en quelques unes :

- (2) – Le cercle est une courbe\* fermée de courbure constante.
- (3) – Le cercle est une courbe admettant une infinité d'axes de symétrie.
- (4) – Le cercle est la courbe fermée qui, pour une longueur donnée, enferme l'aire maximale.
- (5) – Le cercle est l'ensemble des points M tels que le rapport  $\frac{AM}{BM}$  de ses distances à deux points fixes A et B est constant.
- (6) – Une ligne en mouvement étant placée de telle sorte que deux de ses points A et B restent immobiles, un autre point quelconque C de cette ligne décrit une circonférence.

(Les définitions (4) et (5) sont extraites de (Halbwachs, 81). La (6) est due à Leibnitz et définit le cercle en passant par l'espace :



*la "ligne" rigide ACB tourne autour de l'axe AB :  
le point C décrit alors un cercle.)*

Ces définitions sont toutes logiquement équivalentes : elles définissent le même objet mathématique. On peut montrer que l'une quelconque d'entre elles implique toutes les autres. Mais elles sont liées à des **conceptions du cercle** différentes : elles correspondent à des façons différentes de voir le cercle, d'utiliser ses propriétés et elles mettent l'accent sur des éléments géométriques et des relations entre ces éléments, différents.

Par exemple dans (1), (5), (6) le cercle est présenté comme un ensemble de points, dans (2), (3), (4), il s'agit avant tout d'une courbe. Nous pensons que ce sont deux points de vue distincts sur le cercle : l'un ponctuel (1), (5), (6), l'autre global (3) et (4) ou local (2).

La définition (6) s'oppose à toutes celles qui précèdent par son caractère dynamique. Le cercle y apparaît lié à un mouvement. Dans toutes les autres, il est donné de manière statique\*\*.

A chaque définition, on peut ainsi associer un point de vue sur le cercle, ce que nous appelons une conception.

La classification opérée ci-dessus est sommaire : opposition ponctuel - local, global ; opposition statique, dynamique. Elle demande à être complétée par une analyse des éléments géométriques, des propriétés de ces éléments, des relations entre éléments que privilégie chaque définition : ainsi, la définition (3) met l'accent sur les diamètres du cercle, mais les diamètres en tant qu'axes de symétrie et non, par exemple, en tant que cordes maximales. On pourrait envisager une définition qui, au contraire, présenterait les diamètres comme des cordes maximales (M. Artigue et J. Robinet, 1982).

(\*) – On entend ici par courbe une application continue du segment  $(0,1)$  dans le plan, sans point double, excepté éventuellement  $\varphi(0) = \varphi(1)$ . Dans ce cas, On dit que la courbe est fermée.

(\*\*) – Halbwachs, 1981, distingue des définitions statiques et des définitions génératives ou constructives.

La distinction que nous opérons ainsi entre l'objet mathématique, le cercle, qui est unique et les conceptions variées qui peuvent lui être associées nous paraît importante pour diverses raisons :

– Elle constitue un **outil d'analyse des situations** que nous proposons aux élèves comme de leurs **procédures**. En effet, chaque activité privilégie à des degrés différents tel ou tel point de vue sur le cercle, pas nécessairement l'aspect ponctuel et statique qui correspond à la définition des manuels. Par exemple, si l'on demande à un enfant de trier des formes géométriques, il est capable d'isoler celles qui sont des disques très tôt donc bien avant de maîtriser la notion de distance. Il est clair qu'alors ce n'est pas à la conception liée à la définition classique qu'il se raccroche.

La recherche que nous avons menée tend à prouver que, confrontés à des situations adéquates, les enfants de cet âge sont capables de mettre en œuvre de façon opératoire diverses conceptions du cercle, la conception classique mais aussi les suivantes, par exemple :

- cercle comme figure ayant même mesure dans toutes les directions du plan,
- cercle comme trajectoire d'un point animé d'un mouvement de rotation plane,
- cercle comme figure de courbure constante,
- cercle comme figure invariante par rotation autour de son centre.

Mais notre recherche tend aussi à prouver que les conceptions sont étroitement dépendantes des situations proposées, que si une situation favorise trop exclusivement un point de vue elle occulte par la même occasion les autres. Certaines propriétés du cercle spontanément utilisées par les enfants auparavant dans d'autres activités pourront être là difficilement mobilisables.

– Cette distinction nous paraît également un **moyen de se déprendre de la simplicité apparente des objets géométriques**. L'uniformité des définitions et exercices proposés par les manuels masque en effet la richesse et la complexité des conceptions qui peuvent être associées à ces objets. Elle tend de plus, à imposer, au niveau de l'enseignement, un point de vue unique, sans tenir compte des connaissances plus ou moins élaborées que possède déjà l'enfant lorsqu'il est confronté à cet enseignement, connaissances dont l'efficacité dans beaucoup de situations est certaine.

## II – QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE L'ARTICLE "CIBLES AU CE" (Grand IN n. 25)

Les effets de l'uniformité de l'enseignement que nous avons signalés se font sentir nettement dans cet article, à la fois dans la conduite des activités et les commentaires qui en sont faits.

Citons-en quelques exemples :

p. 26 : "On retrouve la **définition mathématique du cercle** : ensemble des points à égale distance d'un point donné".

p. 27 : "Toutefois, pour l'introduction des notions de cercle ou de disque, cette situation est peu favorable, parce que le centre n'est pas matérialisé".

p. 30 : "Il serait dommage de favoriser trop tôt l'usage d'un instrument performant tel le compas, se privant ainsi de l'occasion de faire préciser aux enfants les contraintes du tracé d'un cercle, contraintes liées au concept de cercle : distance constante et point fixe".

Lorsque l'on envisage de construire une cible à partir de disques pré-découpés, il semble aller de soi, pour les auteurs, que le moyen de résoudre le problème est de déterminer le centre de chaque disque puis de coller en superposant les centres.

On peut penser que dans ces conditions, la conduite de la classe visera à faire prendre conscience aux élèves du fait que dans une cible les centres des disques sont nécessairement confondus. Pour en construire une il faut donc déterminer les centres si on dispose de disques pré-découpés et tracer des cercles concentriques sinon.

Mais ce théorème n'a pour les élèves rien d'évident comme le prouvent les phrases qui expriment les difficultés rencontrées au cours de cette activité:

– "D'autres ne relient pas cette exigence (avoir la même largeur partout) à la nécessité de conserver le même centre".

– "Quelques uns des autres ne retrouvent pas le centre du premier cercle, n'ayant pas prévu son utilité pour le tracé du second".

L'expérience de notre recherche m'inciterait à penser que si un enfant de cet âge doit fabriquer une cible avec des disques pré-découpés ce n'est pas nécessairement vers la recherche du centre de chaque disque qu'il va s'orienter. Il peut plutôt essayer de reproduire une épaisseur régulière : placer progressivement un disque sur l'autre puis rectifier par ajustements successifs pour égaliser les écarts dans les deux directions privilégiées que sont l'horizontale et la verticale, jusqu'à obtenir un résultat satisfaisant. Notons qu'ils n'auront à aucun moment matérialisé le centre du disque.

Ceci serait l'analogie, dans cette situation, d'une procédure qui est apparue extrêmement tenace, au cours de notre recherche : pour chercher le centre d'un disque (même lorsqu'ils disposaient de moyens plus efficaces comme le pliage) beaucoup d'enfants, dans un premier temps, traçaient à l'œil un diamètre vertical et un diamètre horizontal et plaçaient le centre à leur intersection. Pour vérifier, ils mesuraient soit les deux diamètres, soit les quatre rayons, et, si les mesures n'étaient pas égales, ils essayaient de procéder par ajustements successifs.

A mon avis, le problème est différent si, pour tracer une cible, l'élève dispose non de disques pré-découpés mais d'une feuille blanche et d'un compas. Le fait d'utiliser le compas accorde, au moment du tracé, une importance particulière au centre. Mais il se peut néanmoins qu'une fois le cercle terminé, le centre, intermédiaire du tracé, soit aussitôt oublié : on se retrouve alors dans la situation précédente.

Bien sûr, il ne s'agit là que d'hypothèses ! Mais, au vu des résultats de notre recherche et des commentaires des auteurs de l'article, elles paraissent plausibles.

Pour terminer ce paragraphe, je voudrais souligner une remarque faite p. 26 qui recoupe elle aussi nos observations (les enfants cherchent tous les points qui sont à la même distance d'un point donné) :

– "Nous avons observé qu'il a fallu parfois un très grand nombre de points pour que les enfants reconnaissent que cela forme un rond".

Nous avons posé à 36 élèves le problème suivant :

– Etant donné deux points A et B distants de 8 cm, trouver un point M qui soit à la fois à 6 cm de A et à 5 cm de B. Cet exercice s'est avéré très difficile et nous avons remarqué que beaucoup d'élèves devaient placer de nombreux points à 6 cm de A avant de redécouvrir que ces points étaient tous sur le cercle de centre A et de rayon 6 cm. Ceci est lié, à notre avis, au fait que les premières conceptions que les enfants ont du cercle sont des conceptions globales. L'enrichissement des conceptions par l'adjonction de conceptions ponctuelles ne se fait pas aisément. Piaget avait souligné il y a déjà longtemps la difficulté qu'ont les enfants à concevoir une droite comme un ensemble de points, difficulté du même ordre que celle observée ici.

### III – QUELQUES ACTIVITES A PROPOS DU CERCLE.

Il s'agit de présenter ici quelques unes des situations que nous avons utilisées au cours de notre recherche. Elle s'est étalée sur 2 ans. Les classes concernées ont été la première année le CE2 et le CM1 de l'école d'observation de l'Almont I à Melun, la deuxième année le CE2 de l'Almont I et un CE2 de Montrouge.

#### A – Messages à partir de constructions à la règle et au compas.

##### 1) Matériel - Consignes :

Chaque élève dispose d'une règle graduée, d'un compas, d'une feuille blanche et d'un quart de feuille.

Des équipes de deux élèves ont été constituées :

**Consignes :** Chaque élève trace un dessin à la règle et au compas sur la feuille blanche puis écrit sur le quart de feuille un message pour son coéquipier qui devra essayer de reproduire le même dessin. Le message doit pouvoir être transmis par téléphone. Les dessins reproduits seront confrontés par transparence aux originaux. En cas d'échec, une concertation est prévue entre les deux équipes.

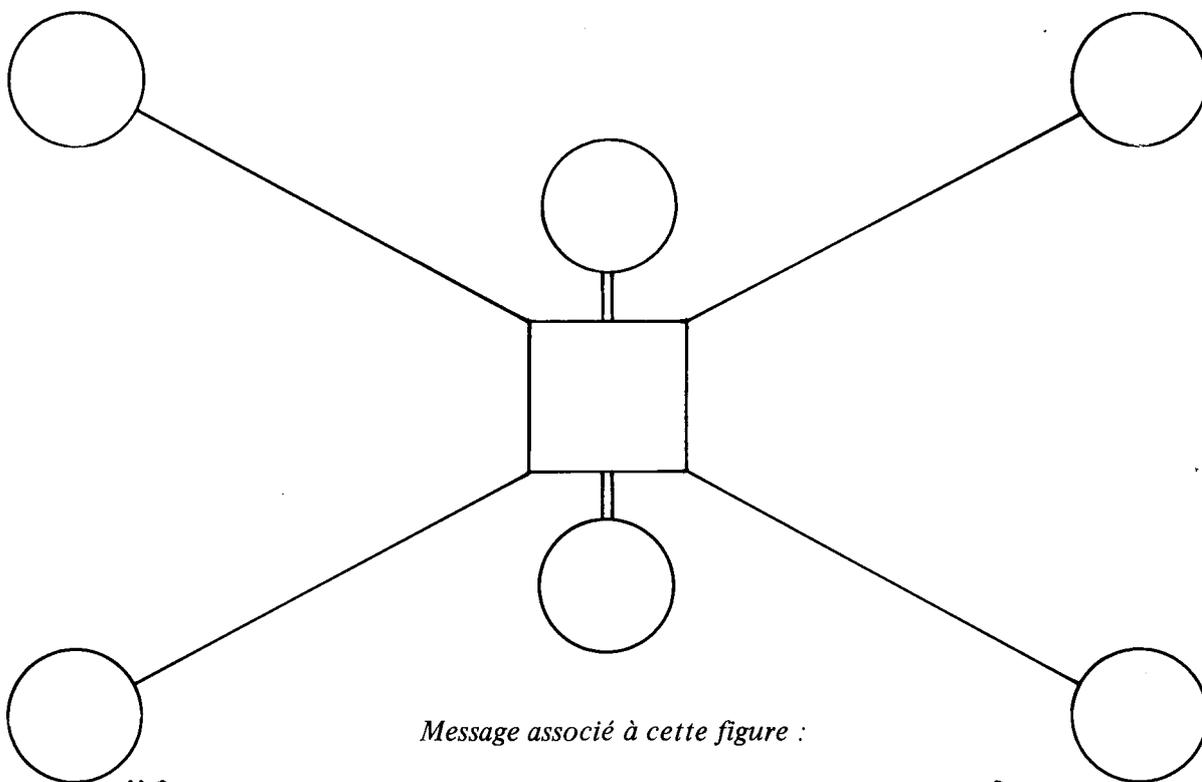
## 2) Observations :

Cette activité a été proposée :

- la première année **au début** de l'enseignement relatif au cercle à la fois au CE2 et au CM1.
- la deuxième année dans une forme simplifiée, à **la fin** de l'enseignement.

a) La première année **au CM 1** les élèves ont conçu leur dessin sans anticiper sur l'activité d'écriture du message. Ils ont tracé des figures compliquées se prêtant mal à une description écrite. Puis, ils ont rédigé des messages assez longs, donnant une idée de l'agencement de la figure mais ne permettant pas une reproduction précise.

*Exemple de figure et de message :*



*Message associé à cette figure :*

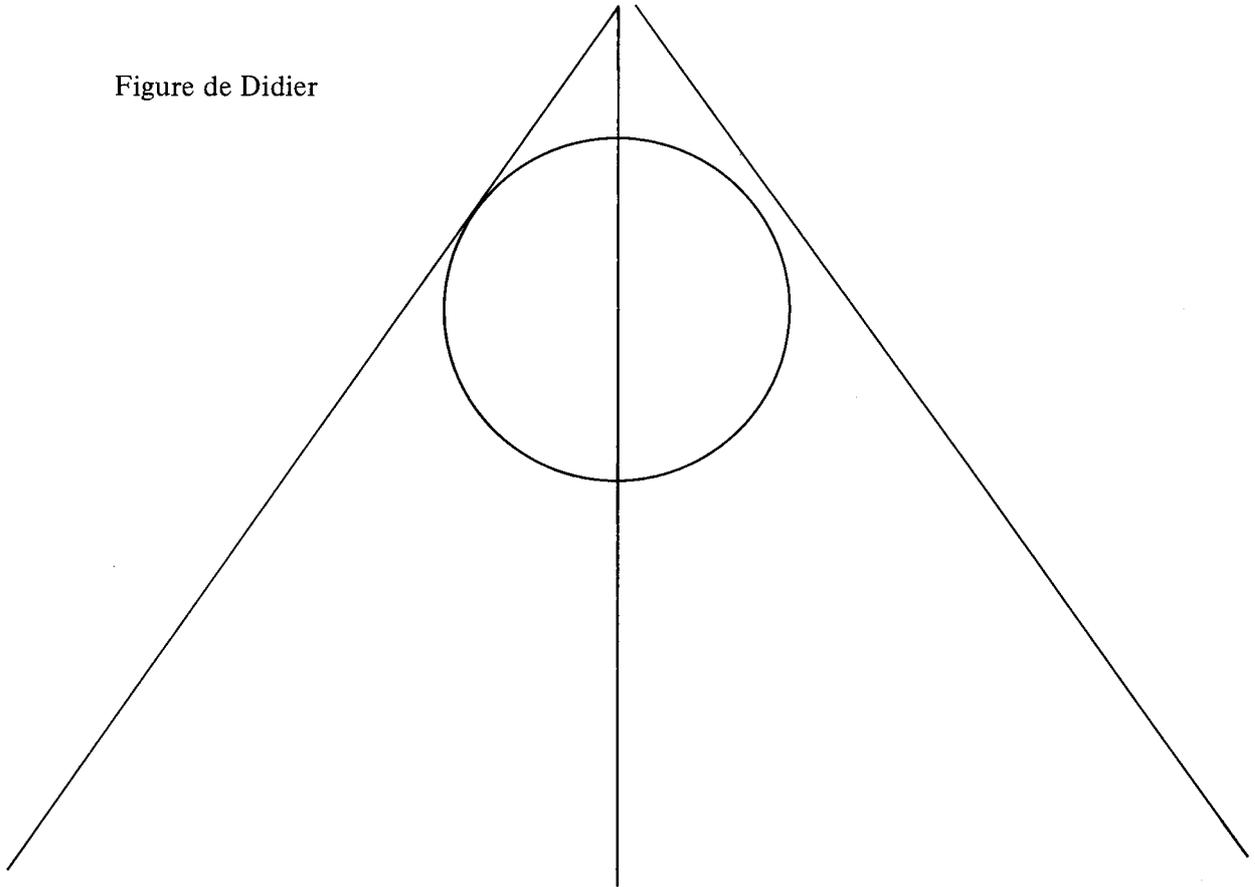
Il y a quatre rond dans chaque coin de la feuille après il y a un carré au milieu de la feuille .tu fais un rond au dessus du carré et en dessous du carré après tu fais deux bar en dessous du rond pour rejoindre le carré et le rond qui est en dessous tu lui fais deux bar au dessus pour rejoindre le carré .

Les récepteurs ont, eux, tracé un dessin correspondant en général aux indications fournies en accordant visiblement moins d'intérêt à cette phase de l'activité. Aucune équipe ne réussit et l'écart entre la complexité des figures produites et les capacités de codage des élèves est tel qu'il voue d'avance à l'échec la tentative initialement prévue de mise au point des messages par concertation entre émetteurs et récepteurs.

Conscient de cela, le maître demande aux élèves de **recommencer avec un dessin plus simple**. Et, effectivement, les dessins de la deuxième génération seront plus simples, mais très souvent encore d'une complexité disproportionnée aux capacités de description des élèves. Peu de messages sont réellement décodables, encore moins seront convenablement décodés. Citons 2 messages représentatifs de cette période :

*Premier message :*

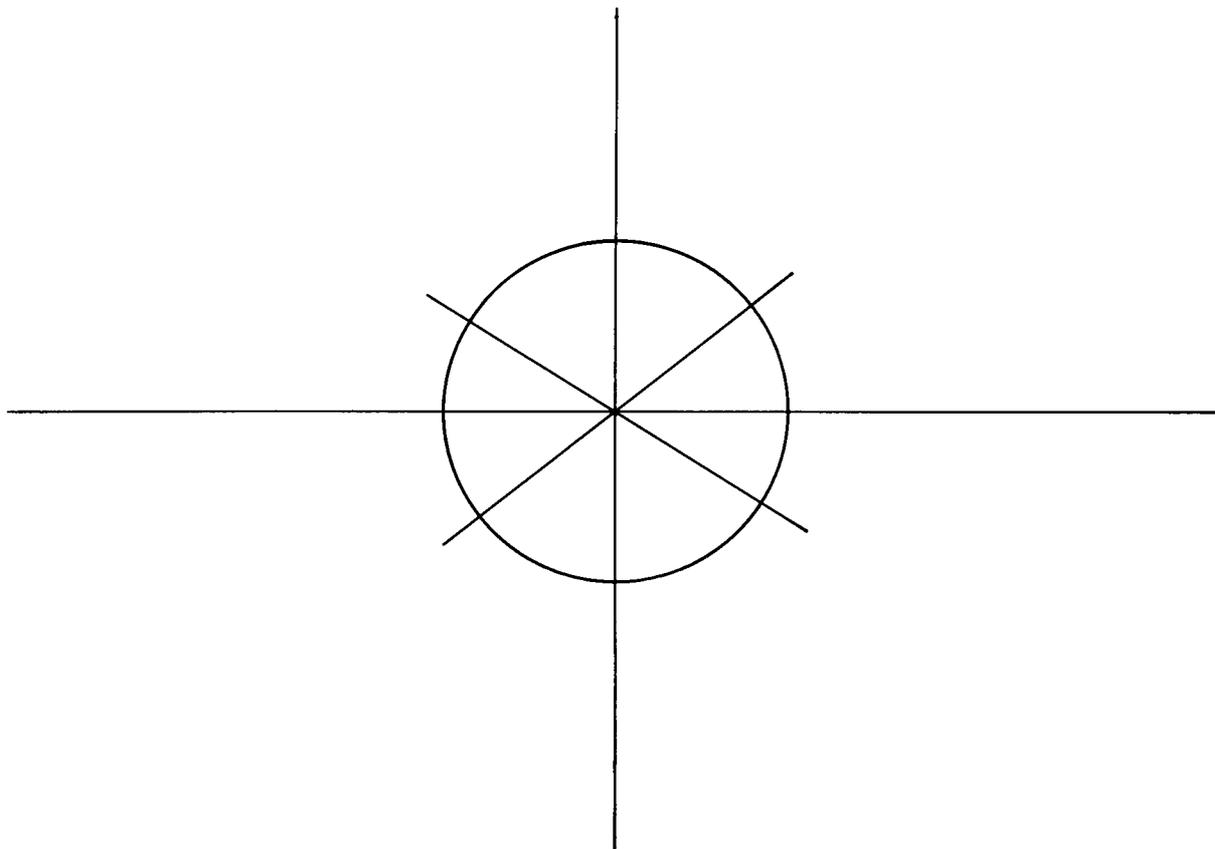
Figure de Didier



Message de Didier :

DIDIER  
 au le milieu Je plie la feuille en deux, je trace un trait  
 suivant le pliage, ensuite je fait une diagonale  
 le pliage et et le cong de la feuille, je  
 fait pareil pour l'autre <sup>ale</sup> <sub>en bas</sub> côté après je  
 fait un rond qui mesure : rayon 3 cm et le  
 diamètre 5,7 le rond join les deux diagonale

Décodage du message de Didier par le récepteur :



Deuxième message :

Message de Anne-Laure

Commence ton dessin au milieu de la  
feuille  
Fais un rond dont le rayon est de  
1 cm  
En partant du même point, fait  
un autre rond dont le rayon est de  
2 cm  
En partant toujours du même point  
fait un rond dont le rayon est de  
3 cm  
En partant du même point, fait  
un rond dont le rayon est de  
4 cm  
Tu a maintenant sur ta feuille mon  
"Popotogram"

C'est un des rares messages "correctement" écrits et décodés. Cependant le récepteur a demandé la position exacte du centre des quatre cercles et a reçu comme réponse :

x  
Plie ta feuille en quatre  
a droite 17,1 cm  
a gauche: 9,5 cm  
en haut 6 cm et en bas 7,2 cm

Cette fois-ci la concertation émetteur-récepteur est organisée. Elle aboutira rarement faute de temps mais aussi, nous semble-t-il, parce que les élèves ont d'énormes difficultés à déterminer :

- au vu d'un dessin (pour l'émetteur), quelles sont les informations pertinentes à donner,
- au vu d'un message, (pour le récepteur), quelles sont les informations supplémentaires dont il désirerait disposer.

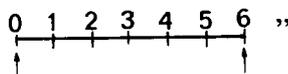
Quoi qu'il en soit, 49 messages sont rédigés au cours de cette séance. 4 sont incompréhensibles, 7 correspondent à des dessins sans cercles. En classant les 38 restants, suivant le langage utilisé pour décrire les cercles, nous avons distingué 5 catégories :

Catégorie	Nombre d'élèves	Caractéristiques
I	8	Pas d'indication de mesures
II	3	Référence à l'écartement du compas
III	14 $\left\{ \begin{array}{l} 8 R \\ 6 D \end{array} \right.$	Une indication de mesure mais sans préciser s'il s'agit du rayon ou du diamètre : 8 élèves dans le 1er cas, 6 dans le second.
IV	2	Référence à la longueur et à la largeur du cercle
V	11 $\left\{ \begin{array}{l} 1 D \\ 3 R \\ 7(D+R) \end{array} \right.$	Référence au diamètre (D), au rayon (R) ou aux deux (D + R)

● Voici quelques extraits de messages représentatifs de chaque catégorie :

( I ) : "deux ronds, un petit et un grand ; le petit est à l'intérieur du grand, il y a un trait au milieu des deux ronds. Il fait 12 - 5". Dans les messages de cette catégorie, lorsque l'élève veut préciser les tailles respectives de plusieurs cercles il les qualifie de "petit", "moyen" ou "grand" comme dans le message ci-dessus, de façon très sommaire.

( II ) : "tu fais un cercle de 6 m. Tu prends la règle et tu plantes l'aiguille au zéro. Ensuite tu mets la mine au 6.



( III ) : "Un rond de 9 cm et deux ronds de 1 cm 2".

"Un rond de 14 cm, 5 mm".

De tels messages ne sont pas nécessairement ambigus : 14,5 cm, compte-tenu des dimensions de la feuille de papier, est sûrement une mesure de diamètre. De même 1 cm 2 est sans doute une mesure de rayon.

Sur les 14 messages de cette catégorie, 9 sont décodés correctement :

R. en cm.	4 cm	9 1 cm 2	6 cm,5 mm	2 cm	2 cm	4 cm 3 cm	1,7 cm 0,8 cm 0,2 cm	1,7 cm 1,9 cm
décodage	R	R	non décodé	R	R	D	R	R
D. en cm	20 cm	3,7 cm	14 cm,5 mm	2 cm	2,2 cm 3,4 cm		2,1 cm	
décodage	D	R	D	D	R D		non décodé	

( IV ) : "Un rond de 9,8 cm de largeur et 9,8 de longueur. Ensuite deux ronds de 2 cm verticalement et horizontalement pour les deux".

( V ) : "Un rond de 8 cm de diamètre." "Un rond dont le rayon est 1 cm" "Un rond qui mesure, le diamètre mesure 9,3 et le rayon 4,7 et des ronds vers le haut qui mesurent diamètre 6 et rayon 3".

Dans ces 11 messages, il n'y a aucune confusion entre rayon et diamètre. Par contre la relation  $D = 2R$  n'est respectée, pour les 7 messages qui fournissent deux mesures, que dans 3 cas sur 8. Elle ne l'est même pas systématiquement lorsque la mesure du rayon est entière.

b) au CE 2 :

Aux difficultés déjà signalées au CM<sub>1</sub>, s'ajoutent des difficultés d'ordre technologique : les cercles tracés sont très approximatifs car les élèves ont du mal à garder fixe la pointe du compas, à maintenir l'écartement (cela est aussi signalé dans "Cibles au C.E.") De ce fait, diamètres horizontaux et verticaux n'ont pas toujours même mesure. Les premiers messages ne comportent aucune indication de mesure, les seconds font référence soit au diamètre, mais sans le dire explicitement, soit à une longueur et une largeur (ou une hauteur et une largeur), sans qu'elles soient toujours égales.

Voyant cela, le maître interrompt l'activité pour une mise au point collective :

Pour tracer un cercle au tableau, un élève propose d'utiliser une ficelle. Il le fait en enroulant un morceau de ficelle autour d'une main, en plaçant une craie à l'autre bout de la ficelle et en tournant autour de la main.

Pour vérifier que la figure tracée est bien un cercle, les autres proposent de la mesurer horizontalement et verticalement puis dans d'autres directions : le cercle doit avoir même mesure dans toutes les directions. Ils placent alors la règle à l'œil au milieu du disque mais sans marquer le centre, ni même en parler. Ils semblent plutôt chercher à partager le disque en deux morceaux de même taille. Les écarts relevés étant de plusieurs centimètres, la figure est rejetée. Le maître en trace un autre en punaisant la ficelle. Une fois le cercle terminé, il enlève la punaise ; de ce fait, le centre n'est plus matérialisé. Les élèves reprennent les vérifications, toujours dans le même ordre. Cette fois-ci toutes les mesures sont comprises entre 75 et 76 cm ; le cercle est accepté.

Le maître trace plusieurs cordes à partir d'un point quelconque du disque et s'étonne de ne pas les trouver toutes de même mesure. Les élèves rétorquent aussitôt que c'est parce qu'il n'a pas pris comme point le milieu du disque.

Ensuite, l'un des observateurs présents demande si l'on pourrait trouver une corde qui mesure plus de 76 cm. Au début, les élèves semblent persuadés que oui ; ils cherchent d'abord avec une corde verticale, ensuite avec une corde horizontale. Ensuite ils prennent des points au hasard dans le disque et cherchent chaque fois à tracer la corde issue de ce point la plus grande possible. Chaque fois, ils tombent sur la corde qui passe par le centre. Au bout de 10 minutes, l'un dit : "ça pourra pas, c'est par le milieu le plus grand" ; les autres acquiescent.

### 3) Commentaires :

– Ces observations font apparaître clairement un certain nombre de faits :

- \* Les élèves ont la conviction que le cercle a même mesure dans toutes les directions autour d'un point, ce point étant le milieu du cercle.
- \* Il existe deux directions privilégiées, l'horizontale et la verticale : toutes les procédures de vérification et la recherche de contre-exemples débutent par l'utilisation de ces deux directions.
- \* La conviction que les diamètres sont des cordes maximales semble ici, résulter principalement de la recherche infructueuse de contre-exemples. On peut d'ailleurs se demander quelle est sa solidité à la fin de la séance du CE 2.
- \* Au CM 1, la relation  $D = 2R$  n'est pas systématiquement vérifiée dans les messages qui mentionnent les deux mesures. Au CE 2, au cours d'une deuxième séance, le maître introduit les termes "rayon", "diamètre". L'après-midi, il reprend l'activité de message en la simplifiant : il s'agit de tracer 2 cercles et d'écrire un message correspondant. L'évolution des messages est notable : tous les messages comportent des indications de mesure ; toutes celles fournies sans précision sont des mesures de diamètre ; plusieurs élèves écrivent : "la taille du cercle est ...". Mais lorsque les messages fournissent à la fois des mesures de rayon et de diamètre, 5 données sur 10 ne vérifient pas la relation  $D = 2R$ . Ces faits recourent les observations du CM 1 : il nous semble difficile de les

attribuer uniquement au manque de maîtrise des nombres à virgules des élèves du CE 2.\*

\* Quand les élèves mesurent le cercle dans différentes directions, le centre n'étant pas encore matérialisé, il semble qu'avant tout la règle soit placée de manière à partager le cercle en deux parties de même taille. Nous sommes tentées de rattacher à cette pratique une conception des diamètres comme axes de symétrie du cercle.

– Cette situation nous paraît intéressante en début d'apprentissage car elle conduit les enfants à se poser vis-à-vis du cercle des questions importantes : qu'est-ce qui détermine un cercle ? Quel sens donner à sa ou ses mesures ? Quel rapport avec l'ouverture du compas ?

De plus elle fait apparaître la nécessité d'un consensus à l'intérieur de la classe sur un vocabulaire précis.

Mais, pour aplanir certaines difficultés inutiles, il semble qu'il serait préférable :

– de faire tracer la figure et écrire les messages par deux élèves (et non un seul comme cela a été fait ici), ce qui conduirait à former des équipes de 4 élèves. Ceci permettrait à la concertation de jouer un rôle, non seulement entre émetteurs et récepteurs mais au moment même de l'écriture du message.

– de simplifier la consigne en demandant aux élèves de tracer uniquement des cercles : deux me paraît un nombre suffisant.

## B – Disques et Couronnes.

### 1) Matériel - Consignes :

**Disques** : Chaque élève reçoit une enveloppe contenant trois disques découpés dans du carton suivant des rayons. Ces disques sont tous de rayons différents et l'un d'eux est incomplet.

**Consigne 1** : Nous avons découpé des disques différents. Les morceaux se sont mélangés. Pouvez-vous reconstituer les disques ?

**Consigne 2** : Nous avons égaré un morceau d'un disque. Voici du carton, pouvez-vous fabriquer le morceau manquant ?

---

(\*) – La même activité menée l'année suivante en fin d'apprentissage donnera des résultats tout à fait différents :

– 87 % des messages appartiennent à la catégorie V  
 – La relation  $D = 2R$  est satisfaite par 18 messages sur 20.

**Couronnes** : Chaque élève reçoit une enveloppe contenant trois couronnes circulaires découpées dans du carton suivant des rayons. Ces couronnes sont soit de rayons différents, soit de même rayon mais d'épaisseurs différentes.

*Consigne 1* : Nous avons découpé des couronnes différentes, les morceaux se sont mélangés. **Pouvez-vous reconstituer les couronnes ?**

*Consigne 2* : Nous avons égaré un morceau d'une des couronnes, pouvez-vous le refabriquer ?

VOIR PLANCHES PAGES SUIVANTES.

## 2) Remarques :

Ces deux situations ont été proposées aux élèves de CE 2 la seconde année, au début de l'enseignement sur le cercle. Elles visaient à **privilégier la conception du cercle comme courbe de courbure constante**. Il s'agissait pour nous de savoir si cette conception du cercle pouvait être mise en œuvre par les enfants de cet âge dans une situation adaptée, de façon opératoire et non seulement perceptible. C'est pourquoi nous avons inclus dans l'activité une phase de construction. Pour être sûres que cette phase de construction ne fasse pas simplement appel à une approche perceptive, nous avons voulu que la situation ne se restreigne pas à un puzzle : le secteur (ou le morceau de couronne) manquant était plus grand que tous les morceaux existants et n'était pas réunion de plusieurs d'entre eux.

— La phase de construction du morceau de disque manquant pouvait, à priori, faire émerger diverses conceptions du cercle :

PLANCHE 1 : LES DISQUES

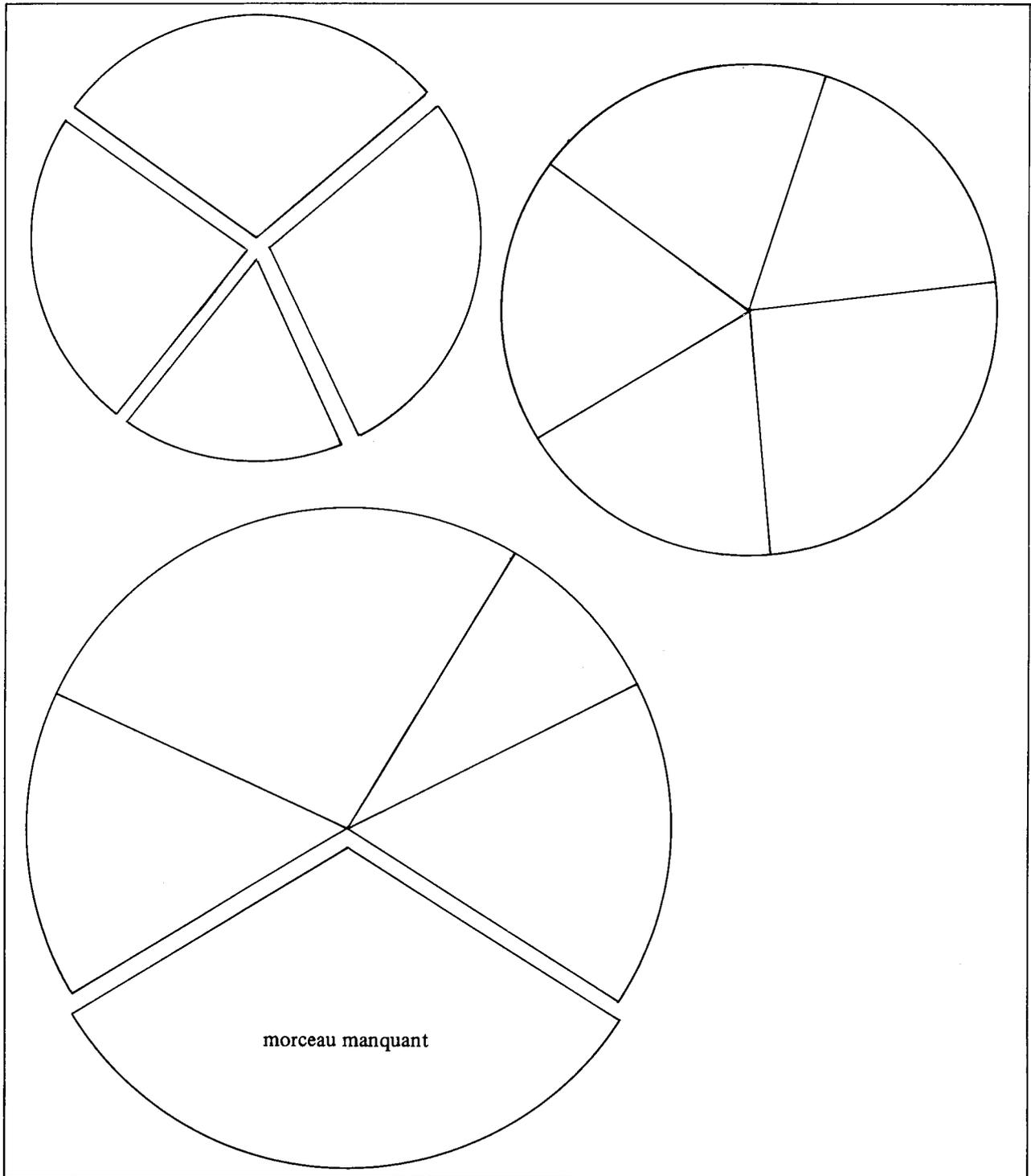
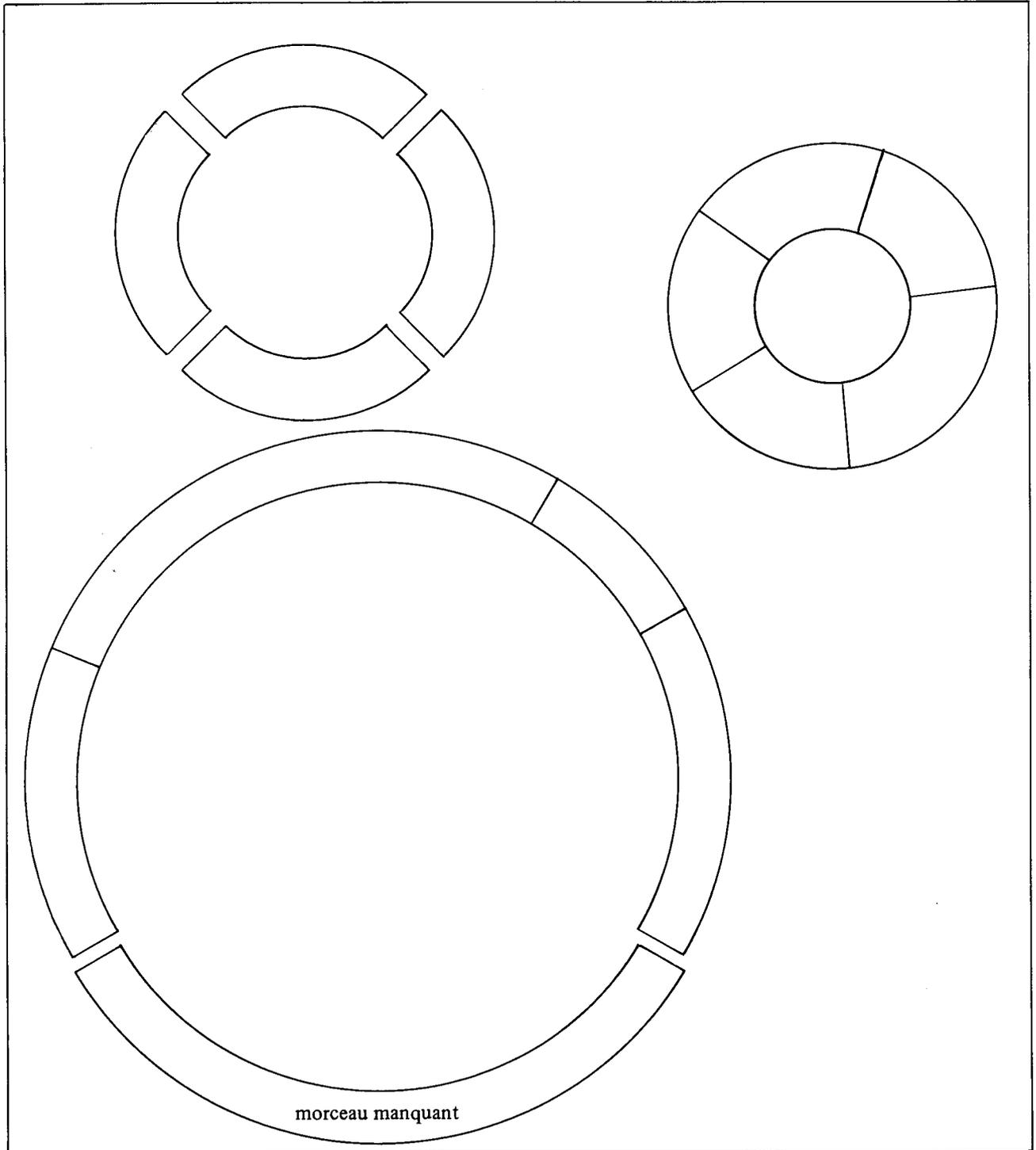
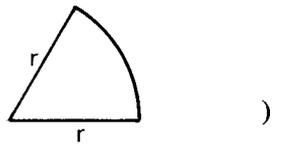


PLANCHE 2 : LES COURONNES



a) figure de courbure constante (le bord courbe du secteur à construire a même courbure que les autres morceaux).

b) ensemble des points à distance donnée d'un point fixé (tous les points du bord courbe du secteur à construire sont à la distance "r" du centre, "r" désignant la mesure commune des bords droits des secteurs constituant un même disque :



c) figure invariante par rotation autour de son centre (pour construire le morceau manquant, il suffit de faire tourner un morceau existant et de suivre la trajectoire du bord courbe.)

Comme les élèves ne disposaient pas encore de compas, la conception (b) exigeait une procédure de tracé point par point, ce qui la défavorisait technologiquement par rapport aux deux autres : elle était beaucoup plus longue et le tracé obtenu était difficilement lisse.

– La situation des couronnes se différençait de la précédente en ce que le centre et les rayons des cercles en jeu n'étaient plus matérialisés. Mais comme les morceaux étaient découpés suivant les rayons il était théoriquement possible de construire rapidement le centre comme point de concours des droites portant les bords droits des morceaux et de déterminer ainsi les rayons. La nécessité d'une construction intermédiaire défavorisait les conceptions (b) et (c) et privilégiait donc l'utilisation de la constance de la courbure.

### 3) Observations :

**Disques :** Les élèves reconstituent très vite les disques sans aucune difficulté, et expliquent que si deux morceaux correspondent au même disque, leurs bords droits ont la même mesure.

Pour la construction du morceau manquant, dans un premier temps, dans les deux classes du CE 2 tous les enfants procèdent de la même façon. Ils reconstituent le disque incomplet, le posent sur le carton puis tracent les deux rayons délimitant le secteur manquant. Ensuite, tous sauf deux, placent dans l'ouverture le plus grand des morceaux, suivent son contour avec le crayon et terminent le tracé à la main parfois même à la règle. Deux élèves procèdent différemment :

- Nathalie trace un grand nombre de rayons, marque leur extrémité puis les joint par un arrondi
- Stéphane, après avoir suivi le contour du plus grand secteur, le fait tourner autour de son centre pour terminer le tracé.

Après cette première phase, dans les deux classes, les élèves, peu satisfaits, se relancent dans la recherche.

Prenons l'exemple de la classe de Stéphane et de Nathalie : d'autres méthodes vont apparaître mais elles seront le fait de peu d'élèves.

- deux fabriquent un morceau trop grand en mettant bout à bout deux morceaux existants puis le réduisent aux bonnes dimensions en le posant sur le trou,
- deux mesurent les cordes de tous les secteurs y compris celle du secteur manquant. Ils constatent que cette dernière est égale à la somme de la longueur de la corde du plus grand morceau et de la moitié de la longueur de la corde du plus petit. Ils fabriquent un secteur en mettant bout à bout le plus grand morceau et le plus petit plié en deux puis suivent son contour pour construire le secteur manquant. Ce faisant, ils commettent une erreur théorique, négligeable dans la pratique, vues la taille du petit morceau et la précision du tracé. Autour des inventeurs, quelques élèves essaient de les imiter le plus souvent sans grand succès.

Repérant un certain découragement chez les élèves, l'enseignante interrompt l'activité et les invite à faire le point sur les difficultés rencontrées, les méthodes trouvées. Les enfants estiment en général leurs courbes trop plates mais il s'agit d'une conviction purement perceptive qu'ils ne parviennent pas à analyser. Nathalie finit par prendre la parole et dit que l'erreur vient de ce que l'on n'a pas reporté partout la mesure du bout droit du morceau. Ceci est vérifié sur divers tracés puis Nathalie expose sa méthode de construction. Stéphane a aussi l'occasion d'exposer sa méthode mais son tracé est approximatif. Personne ne semble s'intéresser à son cas. Les élèves sont ensuite invités à choisir un des procédés exposés pour construire le secteur manquant. Beaucoup essaient de reprendre la méthode de Nathalie. Peu obtiennent des résultats satisfaisants et finalement, petit à petit, c'est la procédure de rotation du plus grand secteur qui s'impose comme la plus performante.

Dans l'autre classe, seule la procédure de Stéphane est découverte et elle s'impose rapidement.

**Couronnes :** Les élèves reconstituent aisément les couronnes mais cette fois-ci, dans l'une des classes, l'explicitation des raisons pour lesquelles deux morceaux appartiennent à la même couronne est laborieuse. Finalement ils obtiennent des formulations que nous pourrions résumer ainsi : "deux morceaux appartiennent à la même couronne si et seulement ils ont même courbure et même épaisseur". L'épaisseur est repérée par la mesure des bords droits mais elle ne sera reliée que beaucoup plus tard à la différence des rayons des deux cercles délimitant le morceau. L'expression : "les morceaux ont même courbure" signifie que l'on peut superposer leurs bords courbes extérieurs.

Au début pour la construction du morceau manquant, la plupart des élèves réagissent exactement comme lors de la séance des disques : ils repèrent les bords du trou, placent dessus le plus grand morceau, en suivent les deux contours circulaires puis terminent le tracé à main levée.

Cependant, cette phase est beaucoup plus courte que dans la situation précédente. D'autres procédures apparaissent qui diffusent rapidement dans les classes :

- fabrication d'un morceau plus grand que nécessaire par mise bout-à-bout de deux morceaux et réduction aux bonnes dimensions,
- construction du morceau manquant avec le grand morceau auquel on rajoute un petit morceau plié et replié jusqu'à ce que le résultat soit correct,
- construction du patron de la couronne sur une feuille de papier blanc par glissement des morceaux assemblés. Ensuite, il ne reste plus qu'à poser sur le patron les morceaux de la couronne pour avoir l'empreinte du morceau manquant (une équipe)

D'autre part, dans une équipe, les élèves essaient de trouver le centre du grand cercle de la couronne. Ne sachant pas, disent-ils, trouver le centre du cercle incomplet, ils essaient de le placer à l'œil puis vérifient en mesurant des "rayons". Ils n'aboutissent pas.

#### 4) Commentaires.

Peu d'élèves utilisent uniquement la constance de la courbure. A cela une explication : nous avons constaté que s'ils disposent d'un morceau trop grand – obtenu par assemblage – ils cherchent à le réduire aux bonnes dimensions par pliages en deux. Ils envisagent difficilement de prendre une partie quelconque du morceau construit. Cet obstacle serait passé inaperçu si nous avions seulement proposé une situation de type "puzzle".

\* Dans la fabrication du morceau de **couronne**, c'est l'utilisation de la constance de la courbure qui devient majoritaire. Mais pour la plupart des élèves, elle ne vient qu'après une phase de tracé à main levée lorsque l'échec d'une telle tentative est une fois de plus constaté.

Une équipe utilise l'invariance du cercle par glissement sur lui-même pour construire un patron de la couronne. C'est justement celle de Stéphane qui avait inventé la rotation du secteur pour les disques. Quant à la recherche intermédiaire du centre, une seule équipe l'adopte sans d'ailleurs s'aider de la présence des bouts de rayons.

\* Ces deux situations nous paraissent intéressantes car elles obligent l'élève, pour construire le morceau manquant, à dépasser une approche purement perceptive, et permettent ainsi la mise en œuvre opératoire de propriétés du cercle variées : constance de la courbure, invariance par rotation autour du centre, invariance par glissement sur lui-même, constance de la distance au centre.

Mais la réalisation matérielle de cette activité est exigeante :

- pour le maître, car le tracé des morceaux et le découpage doivent être réalisés avec beaucoup de minutie. Le choix des tailles respectives des morceaux, en particulier celui des morceaux manquants doit permettre d'éviter que la construction à main levée telle que la pratiquent les élèves en début de séance ne donne des résultats satisfaisants.

– pour les élèves, car s'ils ne s'appliquent pas, ils ne construisent pas nécessairement des morceaux plus satisfaisants en utilisant une méthode correcte plutôt qu'en effectuant un tracé à main levée.

### C – Trajectoire de l'extrémité d'une porte.

Cette activité a été proposée les deux années mais sous des formes sensiblement différentes.

**La première année :** Il s'agit d'une séance collective. Les enfants sont groupés par équipes de 2, ils sont rassemblés près de la porte de la classe qui est ouverte. Une grande feuille de papier est fixée sur le sol. Le maître ferme la porte puis la rouvre. Chaque équipe doit ensuite placer un point sur la feuille de papier à un endroit où passera l'extrémité de la porte quand on la refermera.

Lorsque toutes les équipes ont placé un point, on ferme la porte pour vérifier. Ceux qui ont échoué peuvent faire une seconde tentative. Après deux tentatives, on discute collectivement des diverses méthodes utilisées.

**La deuxième année :** Les élèves sont groupés par 4. Chaque équipe est devant une porte (portes de la classe, portes de placards . . . ). Une grande feuille de papier est fixée sous chaque porte. Les enfants ouvrent et ferment la porte et on leur demande de bien observer où passe le coin de la porte. Ensuite la consigne est donnée :

**Pouvez-vous dessiner la trajectoire du coin de la porte en laissant la porte ouverte ? Vous avez le droit de fermer la porte pour vérifier votre tracé. Si vous le modifiez (ce que vous ne pouvez faire qu'après avoir rouvert la porte), vous utilisez un crayon d'une autre couleur.**

#### – Observations :

**La première année :** Les comportements dans les deux classes CE 2 et CM 1 sont semblables.

Au CM 1, la première équipe mesure la largeur de la porte puis reporte la distance à partir de l'axe de la porte. Les deux équipes suivantes essaient, à l'œil, de faire un arrondi à partir de cette position pour placer leur point. La trajectoire s'infléchit. La quatrième équipe re-mesure et place un point plus loin. Les suivantes continuent à l'œil. Une équipe place un point aberrant. Une autre mesure la largeur de la porte mais la reporte comme une corde à partir de l'un des points.

Par contre les élèves qui ont à corriger leurs points utilisent systématiquement la procédure correcte.

Lors de la phase collective qui suit, ils s'expriment très clairement : "Nous, on a mesuré du bout de la porte à l'autre bout et on a reporté en mettant le bout de la règle en-dessous du coin de la porte. On a tourné la règle et Sophie a choisi un point n'importe où".

”Moi, c’est quand même un petit peu au hasard mais j’ai quand même fait quelque chose. J’ai regardé la porte. Avec mon doigt, j’ai essayé d’imaginer comment elle s’ouvrait. J’ai rejoint les autres croix mais j’ai quand même mis un peu plus bas parce que je croyais que la numéro 4, elle était un peu haute”.

Ils explicitent aussi le fait que la trajectoire tracée ensuite par un crayon fixé à l’extrémité de la porte est un morceau de cercle, mais ont un peu plus de mal à dire ce que représente pour ce cercle la largeur de la porte.

Au CE 2 la même procédure correcte est découverte par quelques équipes dès le premier tracé. Lors des corrections, elle est reprise par toutes les équipes, sauf deux.

**La deuxième année** : L’activité se révèle très difficile dans les deux classes de CE 2 concernées. La plupart des équipes essaient de faire des tracés à main levée entre le point de départ et le point d’arrivée de la porte, et échouent. Quelques unes essaient d’utiliser l’ombre de leur porte et échouent aussi.

Dans l’une des classes, la maîtresse passe dans les diverses équipes et pose la question suivante : ”C’est quoi la trajectoire ? ”. Chaque fois, quelqu’un répond : ”Une ligne courbe”. (Jusqu’alors ce terme a désigné les bords courbes des secteurs de disques, des morceaux de couronne et par extension les arcs de cercles).

La maîtresse demande alors : ”Où est le centre ? ”.

Dans deux équipes, les enfants pensent que ce centre est un coin de leur feuille (le plus près de l’axe de la porte). Mais ils se rendent rapidement compte que ce n’est pas le cas puisque les rayons qui joignent le centre présumé aux points de départ et d’arrivée de la porte n’ont pas même mesure.

Puis dans trois équipes, des élèves découvrent que le centre est à l’aplomb du gond, que le rayon est la largeur de la porte (l’une d’elles avait découvert assez vite que le rayon était la largeur de la porte mais n’en cherchait pas moins le centre au coin de la feuille !). Ils convainquent en général facilement leurs camarades et le tracé est effectué avec de la ficelle ou une règle dont une extrémité est maintenue à l’aplomb du gond. Les autres équipes échouent. Au cours du bilan collectif qui suit, la maîtresse insiste sur le fait que la trajectoire de l’extrémité de la porte est une ligne courbe dont le centre est à l’aplomb du gond et le rayon, la longueur du bas de la porte. Ensuite les élèves marquent un point quelconque en bas de leur porte et tracent sa trajectoire sans rencontrer la moindre difficulté.

Dans l’autre classe, la maîtresse laisse les élèves ”tricher” et tracer la trajectoire en fixant un crayon à l’extrémité de la porte. Ils parlent de ces trajectoires en utilisant le mot ”courbure” qui a le même sens que l’expression ”ligne courbe” dans l’autre classe. La maîtresse demande ce qu’il faut connaître pour pouvoir tracer une courbure. Après un moment de flottement, ils répondent : ”le centre et le rayon”. Elle leur demande alors de déterminer le centre et le rayon des

trajectoires qui ont été utilisées entre temps. S'apercevant très vite qu'ils ne savent comment faire et voulant les aider, elle les renvoie avec leurs feuilles près de leurs portes respectives. Les élèves essaient d'abord sans succès de replacer les feuilles sous les portes de manière à ce que l'extrémité de la porte suive la trajectoire tracée.

Une seule équipe résoudra le problème posé sans aide : une des élèves a l'idée de plier la feuille pour trouver le centre de l'arc. Mais les traits de pliage ne concourent pas sur la feuille. Découragés, les enfants abandonnent cette stratégie. Un autre élève déclare peu après que le centre est à l'aplomb du gond et que le rayon correspond à la longueur du bas de la porte. Les autres en sont facilement convaincus ; quelqu'un pense alors à prolonger l'un des bouts des rayons tracés pour reporter dessus la longueur de la porte. Ils le font en scotchant une seconde feuille de papier à la leur. Le problème est résolu.

Les autres équipes soit ne font rien, soit cherchent le centre en des points privilégiés de la feuille (coin, centre, . . .) et ne s'en sortiraient pas sans de multiples interventions de la maîtresse.

– **Commentaires :**

Le cercle apparaît dans cette situation comme la trajectoire d'un point rigidement lié à un point fixe et en rotation autour de ce point fixe, donc sous un aspect à la fois dynamique et ponctuel.

**La maîtrise de la situation repose sur la reconnaissance dans le mouvement de certains invariants :**

- \* l'axe de la porte,
- \* la largeur de la porte,

**mais aussi des propriétés suivantes :** dans un tel mouvement de rotation,

- \* la trajectoire du point mobile est circulaire,
- \* le centre de la trajectoire est justement le point fixe,
- \* la distance du point fixe au point mobile est le rayon de la trajectoire,

**donc un réseau de relations relativement complexe.**

Certaines des erreurs commises par les élèves prouvent qu'il y a chez eux une reconnaissance au moins partielle des invariants :

- \* la première année, une équipe au CM 1 et deux équipes au CE 2 reconnaissent un invariant, la largeur de la porte, mais faute d'avoir identifié le centre du cercle elles reportent sa mesure à partir d'un point particulier quelconque du système.

\* la deuxième année, une équipe trouve que le rayon de la trajectoire est donné par la largeur de la porte mais elle place le centre en un coin de la feuille de papier ; une autre équipe reconnaît elle aussi comme invariant la largeur de la porte mais elle pense qu'il s'agit d'un diamètre de la trajectoire et place le centre au milieu du bas de la porte.

Par contre, même si la mathématisation se révèle la seconde année très difficile, il faut noter que dans la plupart des équipes, lorsqu'avec ou sans aide quelqu'un exprime que le centre est situé à l'aplomb du gond, il emporte très rapidement l'adhésion des autres. La réussite aux exercices proposés ensuite montre que cette connaissance est réinvestie par tous.

Les difficultés rencontrées la première et la seconde année paraissent sans commune mesure. On ne peut raisonnablement estimer que la différence provient uniquement de l'organisation de la classe (séance collective dans un cas, par équipes dans l'autre). A notre avis, les problèmes posés les deux années ne sont pas équivalents. La première année, nous demandons de placer des points sur la trajectoire, la deuxième année de **prévoir** la trajectoire dans son ensemble. La première année, nous plaçons donc d'emblée l'élève dans une approche ponctuelle de la trajectoire, approche justement adaptée à la résolution du problème. On peut même penser qu'il suffit à l'élève d'imaginer la position de la porte à un instant donné, de matérialiser cette position sur un auxiliaire (comme la règle dont il dispose) pour placer un point correct : ici la réussite ne suppose pas nécessairement la prise de conscience du réseau de relations cité plus haut.

La deuxième année, en demandant de prévoir la trajectoire dans son ensemble, nous plaçons l'élève dans une approche globale de la trajectoire. Il peut bien sûr passer d'une approche globale à une approche ponctuelle en imaginant la trajectoire comme une suite de positions correspondant à des instants successifs et se ramener ainsi au cas précédent. Mais n'oublions pas, comme nous l'avons déjà signalé, que le passage dans la résolution d'un problème d'une conception globale à une conception ponctuelle, voire l'utilisation simultanée de deux telles conceptions, peut poser des problèmes. Si l'élève en reste à une approche globale et se convainc perceptivement que la trajectoire est un arc de cercle, il lui faut réaliser que pour pouvoir tracer cet arc, il est nécessaire de connaître le centre et le rayon puis de comprendre le rôle du point fixe dans le mouvement de rotation. La difficulté est alors toute autre.

Cette situation a trait à un aspect essentiel du cercle. Compte tenu des observations précédentes et de l'analyse que nous en faisons il paraît intéressant de la modifier de la façon suivante :

Organiser la classe en équipe de 4, une porte par équipe ; dans un premier temps, demander aux élèves de placer des points sur la trajectoire de l'extrémité de la porte (en utilisant des couleurs différentes pour les corrections successives) : ceci pour favoriser la prise en compte de l'aspect ponctuel de la trajectoire et permettre d'autre part une réussite par ajustements successifs ; passer ensuite au tracé complet des trajectoires. Ceci pourrait être envisagé sous l'une des deux formes suivantes :

\* chaque équipe marque un point sur le bas de sa porte et doit prévoir la trajectoire de ce point,

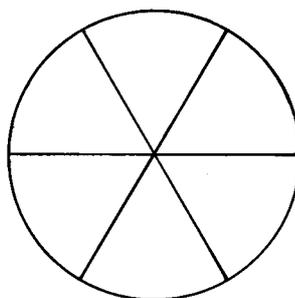
\* les équipes changent de porte et chacune doit prévoir la trajectoire de l'extrémité de sa nouvelle porte.

Enfin, notons qu'on peut envisager des problèmes où le cercle intervient de façon dynamique, mais sans être la trajectoire d'un point mobile lié rigidement à un point fixe : par exemple lorsque l'on étudie la trajectoire d'une petite voiture électrique dont la commande de direction a été bloquée. Mais nous n'avons pas expérimenté de situation de ce type.

## D – Les loteries.

### 1) Matériel - Consignes :

Les élèves travaillent par équipes de deux. Il s'agit de fabriquer des loteries sur du papier cartonné grand format. La maîtresse affiche une "loterie" qu'elle a réalisée :



(loterie à  
6 morceaux )

puis elle montre aux élèves diverses loteries tracées sur des feuilles de papier blanc de format normal. Les élèves examinent ces loteries au cours d'une phase collective. Ensuite la maîtresse donne les consignes du travail à effectuer.

**Consigne 1 :** Réaliser sur du papier blanc (format normal) le plus grand nombre possible de loteries différentes (différentes quant au nombre de morceaux) en trouvant des moyens pour faire des parts égales comme sur les loteries affichées.

**Consigne 2 :** Choisir une des loteries tracées et l'agrandir sur une feuille de papier grand format.

Après l'exécution de la consigne 1, un bilan est effectué :

– Quels partages a-t-on réussis ? Avec quelles méthodes ? Quels partages non obtenus semblent faciles à réaliser ? Comment ? Lesquels semblent difficiles ? Pourquoi ?

## 2) Observations :

Cette situation a été proposée seulement la première année et aux seuls CM 1. Lors de la phase collective d'observation des loteries, un fait étonnant se produit qui prouve la fragilité des convictions des élèves. Les élèves estiment que pour faire des loteries régulières, c'est-à-dire formées de parts égales, il faut faire des rayons égaux.

Si l'on rajoute d'autres rayons n'importe où sur une loterie déjà constituée, ils n'auront nécessairement pas même mesure que ceux qui délimitent les parts. La maîtresse en trace un et, comme il est oblique, ils le jugent à l'œil plus court que le rayon horizontal.

Ils effectuent une bonne dizaine de mesures de rayons tracés au hasard avant que ne se produise un revirement radical : l'un d'eux affirme "Bien sûr qu'ils ont la même longueur puisque c'est des rayons !". Cette propriété paraît à nouveau évidente.

Pour ce qui est de la construction des loteries :

Au bout de dix minutes, tous les élèves ont réalisé des loteries en 4 ou 8 morceaux. Le partage en 4 a souvent été obtenu par pliage. Dans quelques cas, les élèves ont tracé au jugé un diamètre horizontal et un vertical puis ils ont vérifié la construction en mesurant les 4 rayons (parfois aussi les 4 cordes des secteurs de la loterie).

Pour le partage en 8, la moitié environ des élèves plie, l'autre moitié prend le milieu des cordes correspondant au partage en 4. Une équipe a placé sous le cercle une feuille de papier quadrillé et partage en suivant la diagonale du quadrillage. Pour les itérations ultérieures, l'utilisation de la corde sera de plus en plus massive, les loteries tracées par pliage ayant du mal à rester planes.

Beaucoup d'élèves ont la conviction qu'il existe des relations algébriques simples entre les mesures du diamètre du cercle, des cordes et le nombre de parts. Ils basent au début leur recherche sur de telles hypothèses. Par exemple : "je vais faire un cercle de 8 cm de rayon, ça fait 16 cm de diamètre. Je divise par 8, ça me fait 2 cm et je porte 2 cm tout autour du cercle avec la règle. Ça fera 8 parts".

Voyant que ça ne marche pas, cet élève fabriquera comme les autres une loterie à 8 parts ; mais ensuite, il reviendra à son idée, reportera successivement des cordes de 4 cm et 8 cm et obtiendra finalement une loterie à 6 parts.

La réalisation d'une loterie à 6 parts s'avère pour la plupart difficile. Certains essaient par pliage (il y aura d'ailleurs recours au pliage chaque fois qu'un nouveau problème sera posé : partage en 6, en 10 . . . ). D'autres travaillent par approximations successives à partir d'un pliage en 2. La moitié environ patauge. La maîtresse les aide en demandant de mesurer les cordes des loteries terminées. Le fait que les cordes ont une mesure égale à celle du rayon se propage rapidement dans la classe.

Bien qu'ils ne l'aient pas réalisé, beaucoup pensent alors qu'un partage en 10 doit être possible. Certains essaient par pliage, d'autres en reportent des fractions du diamètre. La plupart, sans doute confortés dans leurs convictions par le cas des 6 secteurs pensent qu'il existe une solution exacte et se refusent à procéder par approximation. C'est l'échec. La maîtresse distribue une loterie à 10 parts et leur propose de l'utiliser pour tracer la leur. Ceci ne s'avèrera pas facile. Quelques équipes tracent des rayons doubles de celui de la loterie donnée et reportent des cordes doubles mais ils échouent lorsque les rayons ne sont pas dans des rapports simples. Trois équipes utilisent leurs rapporteurs pour mesurer l'angle des secteurs de la loterie fournie. La moitié des élèves, après avoir vainement utilisé la loterie donnée, se résoud à des tentatives d'approximation.

Au cours de la discussion collective qui suit, ceux qui ont utilisé leurs rapporteurs expliquent ce qu'ils ont fait. Puis la maîtresse propose d'utiliser la loterie donnée comme un rapporteur. Ceci débloque "la situation". L'agrandissement des loteries ne pose ensuite aucun problème.

### 3) Commentaires :

Cette situation concerne le cercle mais tout autant la notion d'angle. Elle a servi dans cette classe à assurer la transition entre les deux thèmes. Mais la prise en compte du rôle déterminant des angles dans le partage ne se fera que très difficilement. Par exemple, lors de la phase d'observation, il semble clair pour les élèves qu'il faut attribuer la régularité du partage des loteries à la conservation d'une certaine grandeur, mais laquelle ?

- celle de l'angle ? aucun n'y fait allusion ;
- celle de la corde ? elle interviendra comme moyen privilégié de construction lorsqu'ils auront à fabriquer effectivement des loteries. Mais ici il s'agit d'une activité de pure observation et les cordes ne sont pas matérialisées, elles n'interviendront pas.
- Il reste alors la possibilité de se raccrocher à l'autre élément caractéristique des parts de loterie : les bords droits des morceaux, et d'attribuer l'égalité des parts à l'invariance de leur mesure. Ceci est en conflit avec la conviction affirmée à plusieurs reprises de l'égalité des rayons du cercle mais cette égalité semble provisoirement effacée. Il y a régression à des conduites analogues à celles déjà observées au CE 2 au début de l'enseignement : un rayon en biais est jugé moins long qu'un rayon horizontal. Ce n'est que lorsque l'hypothèse est démentie par de nombreuses mesures que l'égalité des rayons refait surface et retrouve son statut d'évidence.

La difficulté à prendre en compte de façon opératoire la conservation de l'angle dans cette situation se manifeste également lors de la construction d'une loterie à 10 parts. Mais nous n'insisterons pas sur cette question qui ne fait pas partie du sujet.

## IV – CONCLUSION.

Les observations que nous avons présentées ici montrent, comme nous l'avions annoncé, que les élèves de cet âge confrontés à des situations adéquates, sont capables de mettre en œuvre diverses conceptions du cercle : globales ou ponctuelles, statiques ou dynamiques, parmi lesquelles la conception qui correspond à la définition usuelle.

Elles montrent aussi que la construction des connaissances relatives au cercle ne se fait pas aussi simplement qu'on aurait pu naïvement le penser. En particulier :

- Il semble que l'une des convictions les plus précoces est que le cercle est une figure qui a même mesure dans toutes les directions du plan : cette mesure est-elle déterminée par des considérations de symétrie ? Est-elle la mesure maximale dans une direction donnée ? Est-elle les deux à la fois ? On peut en douter.
- Le fait que tous les rayons aient même mesure semble aussi une conviction précoce (une situation comme celle des loteries montre comment cette conviction peut se trouver momentanément occultée).
- Les rapports entre rayons et diamètres ne sont sans doute pas aussi simples pour les enfants de cet âge qu'ils le sont pour nous, enseignants ou mathématiciens, même s'ils reconnaissent que les diamètres passent par le centre. De nombreux élèves dans leurs messages décrivant des cercles, en CE 2 comme au CM 1, précisent à la fois la mesure du rayon et celle du diamètre. Souvent la mesure du diamètre fournie n'est pas le double de celle du rayon. Nous serions tentées d'expliquer ces faits de la façon suivante : au début de l'enseignement, ces deux notions jouent, pour l'enfant, vis-à-vis du cercle, des rôles différents. Le diamètre donne la taille globale du cercle. Certes, il passe par le centre mais sa qualité première est de partager le disque en deux parties égales. Le centre n'intervient là qu'a posteriori, lorsqu'il est matérialisé comme intersection de plusieurs diamètres. Le rayon, lui, mesure la distance du centre du cercle au bord du cercle. Il peut donc avoir, dans un premier temps, un statut en quelque sorte indépendant de celui du diamètre.

La seconde année, à l'issue de l'enseignement sur le cercle, la relation entre ces deux invariants du cercle semble être solidement établie comme en témoignent les messages.

Pour toutes ces raisons, il nous semble nécessaire que l'enseignement relatif au cercle, à l'école élémentaire, ne se limite pas à l'apprentissage du maniement du compas et à la mémorisation de quelques formules. Il m'apparaît important de proposer aux élèves des situations variées qui lui permettront de mettre en œuvre et d'explicitier diverses conceptions du cercle ( tant ponctuelles que globales, statiques que dynamiques), d'enrichir et organiser leurs connaissances de façon cohérente.

*Bibliographie au verso de cette page.*

---

**BIBLIOGRAPHIE**

---

**ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982)** "Conceptions du cercle chez les enfants de 8 à 10 ans".  
*Rapport de Recherche - ed. IREM - Paris-Sud.*

**GUILLERAULT M. et LABORDE C. (1980)** "Une situation de communication en géométrie"  
*Séminaire de Recherche Pédagogique n° 17 – IMAG Université de Grenoble*

**HALBWACHS F. (1981)** "Significations et raisons dans la pensée scientifique"  
*Archives de Psychologie 49 (199, 229).*

**PIAGET J. et INHELDER B. (1947)** "La représentation de l'espace chez l'enfant"  
*PUF Paris 1977.*

**PIAGET J. INHELDER B. et SZEMINSKA A. (1948)** "La géométrie spontanée de l'enfant"  
*PUF Paris 1973.*

**SINCLAIR H. (1973)** "Acquisition du langage et développement de la pensée"  
*Dunod Paris.*

---