# LES PREMIERES ACQUISITIONS DE LA NOTION DE NOMBRE PAR L'ENFANT ENTRANT EN CYCLE PREPARATOIRE.

*(Claude COMITI)*

*L'article qui suit est paru dans la revue Educational Studies in Mathématics - vol. 11 (1980). Il présente les résultats d'une première expérimentation menée dans le cadre d'une recherche plus globale.*

*Les objectifs de cette recherche sont, d'une part la clarification des conditions dans lesquelles l'élève du Cours Préparatoire construit et s'approprie le concept de nombre naturel, d'autre part l'élaboration de situations d'enseignement permettant de faire progresser l'apprentissage de ce concept.*

*Or cette notion ne se construit pas d'emblée, chez le jeune enfant, ni au cours d'une suite d'activités de complexification croissante. Si l'on suit la théorie opératoire de l'intelligence développée par Piaget, on sait que l'enfant, pour appréhender un champ plus large de propriétés, ne généralise pas simplement l'application des outils cognitifs dont il dispose, mais passe au contraire par un processus de reconstruction : ceci l'amène, à chaque étape, à se fabriquer une classe d'outils intellectuels nouveaux qui continuent par la suite, d'une part à se développer en tant que tels, d'autre part à s'intégrer et à se coordonner selon des modalités diverses.*

*Cette recherche, subventionnée de 1978 à 1980 par le Ministère des Universités, a été conduite par une équipe composée d'Annie Bessot, Claude Comiti et Claude Pariselle, avec la collaboration des trois institutrices Yvette Berthier (école de Meylan-mi plaine), Françoise Giard (école Paul Cocat, Grenoble) et Solange Michallet (groupe Vercors, Sassenage).*

## PREAMBULE

Dans cet article, nous étudions les acquisitions de la notion de nombre par l'enfant avant son entrée dans le Cycle Préparatoire.

C'est dans ce but que nous avons utilisé la méthodologie des entretiens individuels, entretiens centrés sur les problèmes suivants :

– détermination du domaine numérique dans lequel l'enfant sait réciter la comptine (c'est-à-dire la suite des noms des premiers nombres, par exemple "un, deux, trois, quatre.").

– fonctionnements divers de cette comptine numérique lorsque l'enfant doit résoudre des problèmes simples de dénombrement, de comparaison . . .

Les entretiens individuels, qui ont porté sur seize enfants, ont duré chacun entre 1/4 d'heure et 3/4 d'heure. Ils ont été réalisés dans la semaine du 15 au 22 septembre 1978 par deux d'entre nous (un expérimentateur et un observateur). Pour plus de facilité, nous les découperons, au niveau de la présentation qui suit, en trois parties.

Nous présenterons pour chaque situation :

- un bref résumé des objectifs,
- la description de la situation,
- les comportements des enfants,
- un essai d'analyse et d'interprétation de ces comportements.

**PREMIERE PARTIE.**

*La première question posée, destinée en même temps à mettre l'enfant en confiance et à nous donner une idée du domaine numérique qui lui est familier se décompose en trois étapes :*

*"Tu sais compter ?" "Jusqu'où ?" "Montre-moi".*

On arrête les enfants récitant sans problème le début de la comptine des nombres aux environs de trente, la plupart des enfants stoppant en général bien avant (à sept pour certains, seize pour d'autres).

Trois enfants seulement nous affirment ne pas "savoir compter" :

Isabelle dont on s'apercevra par la suite qu'elle connaît en fait très bien la comptine jusqu'à dix (elle sera amenée à s'en servir) ;

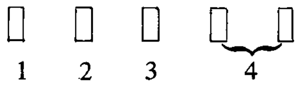
Michaël qui est dans le même cas qu'Isabelle ;

Patrick qui ne connaît effectivement même pas le tout début (un, deux, trois ...) de la comptine, mais qui est capable de fournir à la demande quatre allumettes (sans doute par perception globale du nombre).

*Après avoir posé sept allumettes sur la table, en vrac, on demande à l'enfant : "combien y a-t-il d'allumettes sur la table ?".*

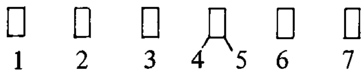
On constate alors que ce n'est pas parce que l'enfant sait énumérer correctement les nombres de un à sept qu'il sait dire qu'il y a sept allumettes sur la table.

On observe en effet parfois une non-adéquation de la parole (un, deux, trois, ...) au geste accompagnant le comptage. Comme si le fait de toucher un objet du doigt et celui de dire un nombre étaient deux actes qu'il fait parallèlement mais sans bien comprendre qu'un nombre donné va avec un objet et un seul.

Marion compte 


son doigt se posant successivement sur les deux dernières allumettes pendant qu'elle compte quatre.

Dans la suite de l'entretien, elle s'y prendra comme ceci :




et dira "quatre-cinq" tout en laissant son doigt sur la même allumette.

*La plupart des enfants ne rencontrant cependant pas de problème pour répondre à notre question, nous l'avons reprise dans un domaine numérique plus grand mais restant, pour chacun d'entre eux, inclus dans leur domaine familier.*

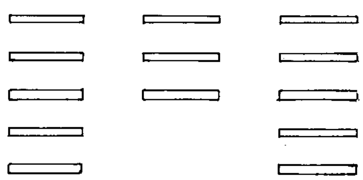
On voit alors des enfants ayant récité correctement la comptine assez loin et ayant dénombré sans difficulté et rapidement les sept allumettes, se heurter à un problème important d'organisation dans ce nouveau domaine numérique et devoir s'y prendre à plusieurs fois, sans que cela soit dû à des erreurs de comptine.

Michel trouve treize allumettes au lieu de quatorze. Il en a oublié une. "Vérifie, je crois que tu en as oubliées". Il recompte, oublie la même et dit encore "treize". "Es-tu sûr de ne pas en avoir oubliées ? Tu peux faire ce que tu veux avec les allumettes, mais je voudrais que tu sois sûr de ton résultat".

Michel prend alors les allumettes une à une dans sa main gauche et arrive sans difficulté à quatorze.

Frédéric compte les allumettes sans trop oser les bouger. Il en trouve douze (il y en a treize).

Lorsqu'on lui demande de vérifier, il recompte et en trouve toujours douze. Il finira par arranger spatialement les allumettes avant de les compter et sera alors tout étonné de s'être trompé auparavant, car il est maintenant bien sûr qu'il y a treize allumettes :



Les enfants comptant tous à haute voix et pointant en général les objets du doigt au fur et à mesure du comptage, nous voyons bien qu'il s'agit à ce niveau non plus d'une mauvaise connaissance de la comptine dans le domaine considéré, ni d'une non-adéquation du geste à l'énumération, mais tout simplement du fait qu'il y a trop d'allumettes pour qu'en les pointant successivement on soit bien sûr de les avoir pointées une fois et une seule.

Ici se trouve posée la très importante question de la coordination du mouvement des mains et de ceux de l'œil. Le rôle de l'œil est en effet très important car il doit être capable, non seulement d'accompagner la main, mais aussi d'organiser le mouvement de cette dernière (d'une part, en anticipant sur lui, d'autre part, en récapitulant de façon rapide et synthétique les mouvements divers effectués par la main). Ceci pourrait expliquer la nécessité ressentie par l'enfant de distribuer les allumettes par petites quantités dans l'espace, dès que leur nombre augmente.

On rejoint là le problème de l'organisation des divers outils corporels de l'enfant qui se projette dans le monde réel sur lequel il agit. Le comptage de l'enfant ne devient sûr et efficace que lorsque ce dernier a réussi à s'organiser d'une façon ou d'une autre avant ou pendant le comptage.

Ceci nous amène à poser deux questions :

– quand et comment se déclenche chez l'enfant ce besoin d'organisation sans lequel il ne peut répondre avec succès et certitude à la question "combien ... ?" ;

– quand et comment l'intégration subtile des divers outils corporels de l'enfant atteint-elle le niveau qui est la condition et l'ébauche d'une pensée déjà élaborée ? Peut-on faciliter cette intégration et si oui, par quel genre d'activités ?

*Avant d'aller plus loin, il nous a semblé indispensable de savoir si l'enfant est bien sûr de ce que, lorsqu'il a compté sept allumettes (ou treize), sur la table, le nombre sept (ou treize) est lié à cet ensemble d'allumettes, quoi qu'on fasse.*

*Nous poussons donc, sous les yeux de l'enfant, les sept allumettes d'un bout de la table à l'autre en demandant :*

*"et maintenant, il y en a combien ?".*

- Six enfants répondent spontanément, sans hésiter : "ben, sept !".

Sylvain rit en nous disant : "c'est sept, comme d'habitude !".

Rachel nous dit : "c'est toujours sept !" d'un air qui signifie : "vous vous moquez de moi !".

Pourtant, lorsque nous lui poserons la même question pour quinze allumettes (qu'elle a correctement dénombrées) elle répondra d'abord seize puis quatorze et devra recompter avant de retrouver quinze.

● Six autres enfants éprouvent le besoin de recompter avant de répondre sept. On leur repose alors la question sous d'autres habillages, par exemple : "prends-les dans ta main". "Combien as-tu d'allumettes dans ta main ?". Ils répondent cette fois spontanément : sept.

Parmi eux Michaël, Nalila et Jean-François connaissent la comptine plus loin et ont dénombré sans problème quatorze allumettes. Lorsqu'on déplacera ces allumettes, Michaël et Nalila diront sans hésiter qu'il y en a toujours quatorze. Jean-François recomptera.

● Les autres enfants concernés (trois puisque Patrick ne sait pas compter) non seulement éprouvent le besoin de recompter mais ne sont pas gênés le moins du monde de trouver un résultat différent.

Naïma répond sans recompter les allumettes : "y'en a cinq". "Pourquoi ?". "Il en manque !" "Ah, bon, recompte-les pour vérifier". "Sept". (On les pousse). "Et si je les mets là ?" "Il y en a huit". "Vérifie". "Sept". "Mets-les là-bas". "Y'en a combien ?". "Huit". Après vérification : "sept". "Et si je les prends dans ma main ?". "Huit". "Regarde et dis-moi combien il y en a". Elle les compte : "sept". "Prends-les et cache-les dans ta main, il y en a combien ?" "Huit". "compte-les". "Sept" . . . on n'en sort pas.

Frédéric qui sait réciter la comptine sans hésitation jusqu'à quinze recompte les sept allumettes, en trouve six. Cela ne le gêne pas le moins du monde. On les lui fait recompter, il en trouve bien sept. "Mets-les dans ta main. Il y en a combien ?" "Sept" sans hésiter. "Reposeles sur les tables. Il y en a combien ?" "Sept". Lorsqu'on lui repose la question pour treize, il recompte à nouveau les allumettes, en trouve quinze car il compte deux fois les mêmes. Il ne sera convaincu qu'il y a bien toujours treize allumettes qu'après les avoir arrangées exactement comme précédemment. Après cette vérification, il dira sans hésitation qu'on en a toujours treize.

Delphine aura le même comportement pour dix-huit allumettes. Elle devra recompter quatre fois de suite sa collection après déplacement avant de constater qu'elle trouve toujours dix-huit et d'être capable de prévoir ce résultat après un nouveau déplacement.

On voit sur ces exemples que pour de nombreux enfants en début de Cours Préparatoire, ce n'est pas parce qu'ils ont associé 1 à une allumette, 2 à une autre ... 7 à la dernière qu'ils ont comptée, qu'ils sont sûrs, s'ils recommencent l'opération de comptage des allumettes déplacées, de s'arrêter encore sur le nombre 7.

> Le nombre semble encore pour ces enfants une propriété inhérente à l'objet, il fait partie de la qualité de l'objet compté. Il n'est pas interchangeable. A partir du moment où la configuration d'ensemble des objets comptés est modifiée, il n'est pas évident pour l'enfant que le nombre d'objets reste le même.
>
> Ceci souligne le fait que l'activité de compter ne peut être ramenée à savoir faire se succéder des signes (désignations des nombres) dans un ordre donné en les associant correctement à des objets ; en rester là escamote totalement l'aspect cardinal du nombre sans pour autant en renforcer l'aspect ordinal, comme on le verra par la suite. Il est également important de noter que ce n'est pas parce que certaines propriétés du nombre semblent acquises dans un domaine numérique donné, qu'elles vont automatiquement se transférer lorsque l'on changera de domaine numérique

(ce qui est le fait de toute acquisition en voie de formation, en quelque domaine que ce soit). On constate également que, pendant un certain temps, sur un même domaine numérique, l'enfant tantôt réussit, tantôt échoue, selon la situation proposée, selon la présentation du problème posé ...

**DEUXIEME PARTIE.**

*Dans l'intention de faire mémoriser par l'enfant un nombre N sur lequel nous désirons travailler par la suite (au niveau de la recherche du précédent et du suivant) nous demandons à l'enfant qui dispose d'une boîte d'allumettes : "maintenant, c'est toi qui vas mettre sur la table N allumettes". (N variant en fonction de l'enfant et de ses réponses aux questions précédentes).*

Cette question, bien que posée à chaque fois dans un domaine numérique qui nous semblait familier à l'enfant, a été source de nombreuses difficultés puisque seuls cinq enfants ont pu sortir du premier coup, sans erreur, le nombre d'allumettes voulu. (Sylvain et Fred pour N = 6, Rose-Marie N = 11, Michaël N = 13, Michel N = 14).

● Certains enfants se sont contentés de prendre une poignée d'allumettes estimant qu'ils avaient ainsi répondu à la question (Naïma N = 7, Nalila N = 8, Frédéric N = 13, Rachel N = 15). Leur propre conviction leur suffisant, ils ne se mettront à compter les allumettes sorties de la boîte que lorsqu'on leur demandera de vérifier qu'ils ont bien fourni le nombre d'allumettes réclamé.

● D'autres enfants se mettent à faire, dans cette situation nouvelle (construction d'une collection de cardinal donné) des erreurs qu'ils n'avaient pas commises auparavant :

Isabelle qui avait compté sans hésitation ni erreur les sept allumettes déposées devant elle dira ici, en sortant six allumettes : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Sandrine à qui on en demande six en fournira sept en disant : 1, 2, 3, 4, 5, 6 (non adéquation de la parole au geste).

D'autres oublient, en cours d'exécution, le nombre N qu'on leur a demandé. Jean-François fournit vingt-deux allumettes (toute la boîte) et Paula dix-sept. Sur répétition de la consigne (N =15) ils rectifient.

● Deux cas particuliers nous semblent intéressants à détailler : ceux de Delphine et de Rose-Marie.

Delphine semble connaître sans hésitation la comptine jusqu'à trente environ. Jusqu'alors, elle n'a pas fait de grosses fautes de "comptage". Elle a seulement attiré notre attention par son incompréhension totale du nombre en tant que cardinal lié à un ensemble de dix-huit éléments, quelle que soit la configuration de ce dernier.

Cette fois, on lui demande quinze allumettes. Elle sort toutes les allumettes de la boîte en les comptant et en trouve vingt-six (faux : erreur de comptage). Lorsqu'on précise la consigne, elle dit "je ne peux pas, il n'y en a pas assez". Elle recommence pourtant l'opération précédente en comptant à haute voix et dépasse le "15" sans s'arrêter alors qu'elle veut prendre quinze allumettes dans la boîte.

Lorsqu'on repose la même question pour N = 7, Delphine n'a alors aucune hésitation. On restera dorénavant dans un domaine numérique voisin de 7 - 8 qui est en réalité celui où Delphine est à l'aise.

Pour Rose-Marie, c'est au contraire parce que tout a bien marché pour N = 11, que nous avons eu envie de voir son comportement dans un domaine plus grand. Nous lui avons donc demandé de sortir seize allumettes. Rose-Marie compte (on ne l'entend pas) les allumettes de la boîte et dit "y en a pas assez". On lui demande de les recompter à haute voix après s'être assuré qu'elle a bien compris la consigne. Elle compte 1..., 15,16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 et dit à nouveau "ce n'est pas possible, il en manque !" "Il en manque ?" "J'arrive pas à compter".

En fait, les deux enfants ne dominent pas suffisamment la suite des premiers nombres pour situer quinze (ou seize) dans cette suite. Ne pouvant donc pas prévoir ce nombre, elles ne l'entendent pas passer.

Ce serait donc une erreur profonde de croire qu'un enfant qui récite, même parfaitement, la comptine dans un domaine numérique donné domine l'aspect ordinal du nombre dans ce domaine alors que pour lui, cette comptine n'est pendant longtemps qu'une chanson globalement connue.

De plus les difficultés rencontrées par Rose-Marie et Delphine pour extraire seize allumettes d'une boîte qui en contient vingt-deux, sont également liées à une incompréhension des rapports entre la partie et le tout, incompréhension qui constitue longtemps un obstacle, chez les jeunes enfants, à la synthèse entre l'aspect ordinal du nombre et son aspect cardinal, dès que l'on sort des petits nombres.

*Après un petit dialogue destiné à bien faire mémoriser par l'enfant le nombre N, nous ajoutons une allumette en disant : "tu vois, j'en mets encore une, maintenant dis-moi combien il y en a".*

A notre étonnement, plus de la moitié des enfants répondent sans hésitation en donnant immédiatement le suivant de N (Naïma, Isabelle, Fred, Delphine, pour N = 7, Rose-Marie, Jean-François, Rachel, Nalila et Paula pour $12 \leqslant N \leqslant 15$ ).

Seuls quatre enfants sont incapables de prévoir la réponse et recommencent à dénombrer les allumettes, parfois en se trompant au niveau du comptage (Sandrine N = 7, Sylvain trouve 8 pour 7, Frédéric N = 13, Michel N = 15).

Remarquons au passage qu'il arrive que la notion de suivant fonctionne sur une comptine hésitante. C'est ainsi que Michaël, lorsqu'on ajoute une allumette aux treize qu'il vient de sortir de la boîte annonce qu'il y en a onze. On lui demande comment il le sait. Réponse : "parce que après treize, il y a onze".

*Pour voir ce qui se passe au niveau du précédent, il nous a semblé préférable de commencer par revenir à la collection antérieure (N allumettes) en demandant "débrouille-toi pour qu'il n'y ait plus que N allumettes sur la table" avant de demander "j'enlève une allumette, combien y en a-t-il maintenant ?".*

On remarque que c'est encore Sandrine, Sylvain, Frédéric et Michel qui éprouvent le besoin de recompter les $N + 1$ allumettes jusqu'à N avant d'enlever l'allumette de trop pour se ramener à une collection équipotente à celle de départ. Ces mêmes enfants recompteront une troisième fois (avec plus ou moins de succès) pour dénombrer les allumettes restantes alors qu'on en a enlevé une.

Parmi ceux qui avaient trouvé le suivant de N sans recompter, tous, sauf Naïma qui a quelques problèmes, enlèvent sans hésiter une allumette. Isabelle, Frédéric et Delphine répondent ensuite immédiatement.

Quant aux autres, ils donnent également la bonne réponse, mais après un long silence. Voici quelques réponses fournies lorsqu'on leur demande d'expliquer ce qu'ils ont fait :

– j'ai réfléchi dans ma tête ;

– j'ai compté dans ma tête jusqu'à quatorze seulement, parce que vous en aviez enlevé une ;

– j'ai compté dans ma tête. Je me suis arrêté à quatorze parce qu'après j'avais quinze.

Ceci montre qu'ils savaient bien qu'ils devaient trouver le nombre situé juste avant N, mais il leur a fallu pour retrouver ce précédent "se réciter la comptine dans leur tête" jusqu'à "avant N" et à partir de un pour la plupart d'entre eux.

D'ailleurs, Michaël, qui se heurte là encore à une comptine mal connue nous fournit "onze" lorsqu'on enlève une allumette aux treize, en expliquant : "parce que j'ai compté dans ma tête : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, **11, 13**".

Lorsqu'on recommence pour Michaël avec $N = 8$, Michaël répondra sans hésitation neuf pour le suivant, puis sept pour le précédent.

> Ceci met en évidence que
>
> – si certains enfants ont besoin de recompter toute la collection d'objets pour en donner le cardinal après l'ajout ou le retrait d'un élément, d'autres au contraire savent déjà qu'il est inutile de dénombrer à nouveau la collection obtenue et associent correctement le suivant de N ou son précédent selon que l'on ajoute ou retranche un objet aux N déjà comptés.
>
> – Même si les réponses sont immédiates pour le suivant, ce n'est pas le cas pour le précédent dès que N dépasse 9. Au-delà, certains enfants doivent recompter les éléments (ce qui confirme les résultats de recherches bien connues qui montrent que la suite des nombres s'arithmétise progressivement, par fragments successifs). D'autres continuent à chercher le précédent de N mais ils ont besoin de se réciter à nouveau la comptine pour le trouver.

– On peut enfin remarquer que les notions de précédent et de suivant fonctionnent parfois sans que la comptine soit parfaitement connue. Ce n'est pas étonnant car les notions de "juste avant" et de "juste après" peuvent avoir été introduites avant la connaissance et l'étude des nombres, lors d'activités sur des files (ensembles totalement ordonnés) non numériques.

Il ne faudrait pas en déduire pour autant que l'enfant connaît les propriétés de la suite des nombres et sait les utiliser.

En fait, on pourra constater dans la suite des entretiens que même lorsque ces notions fonctionnent bien dans cette situation, elles ne sont pas forcément opératoires dans d'autres situations. C'est ainsi que Michaël, pour rendre équipotentes deux collections de sept et neuf éléments, rajoutera un élément à la première, recomptera le nombre d'éléments ainsi obtenus, rajoutera encore un élément et recomptera à nouveau.

**TROISIEME PARTIE.**

*Il s'agissait pour nous, dans cette troisième partie de l'entretien, de voir comment l'enfant s'y prend, dans un domaine numérique familier, pour :*

*– comparer deux collections données ;*

*– construire deux collections équipotentes ;*

*– passer de deux collections équipotentes à deux collections non équipotentes et réciproquement.*

Le choix du matériel a été guidé par les considérations suivantes.

Chaque collection est constituée d'éléments homogènes, indifférenciables entre eux et donc permutables à l'intérieur de la collection, ce qui élimine toute intervention, dans une mise en correspondance éventuelle, des qualités ou des aspects propres aux éléments ; ceci permet de plus, puisque les collections en présence sont bien sûr constituées d'éléments différents d'une collection à l'autre, d'énumérer les éléments de chaque collection dans n'importe quel ordre, pourvu que chacun soit pris en compte une fois et une seule.

De plus, dans le cas des cartons et des macaronis, nous avons choisi des cartons assez larges, (5 X 7) cm, pour voir dans quelle mesure l'enfant de début de cours préparatoire est encore soumis au leurre créé par la confusion quantité de matière-quantité numérique et dans quelle mesure cette contradiction est en voie d'être dépassée.

Voici quel a été l'agencement des situations proposées et des questions posées.

*Sur la table il y a sept jetons et neuf allumettes, bien séparés ainsi qu'une boîte de jetons et une boîte d'allumettes.*

*– "Montre moi de quel côté il y a plus d'objets" puis – "qu'est-ce que tu peux faire pour qu'il y ait pareil d'allumettes et de jetons ?".*

• Une seule enfant, Naïma, annonce d'emblée "y a plus de jetons". Quand on lui demande comment elle le sait, elle colle les allumettes les unes aux autres et affirme "y a plus d'allumettes". On insiste pour savoir comment elle le voit : "j'en sais rien". Cet aveu l'amène sans doute à chercher un moyen objectif de prendre une décision correcte. Elle se met alors à dénombrer les deux collections et annonce, cette fois sûr d'elle : "y a plus d'allumettes".

• Huit enfants répondent immédiatement (sans doute aidés par une perception globale) qu'il y a plus d'allumettes. Quand on leur demande comment ils le savent, ils fournissent des réponses du style :

Marion : "parce qu'y en a un peu là" (montrant les jetons) ;

Fred : "parce que là il y en a beaucoup et là y en a moins" ; ou encore : "comme ça" ou "parce que je l'ai vu" ;

Michaël seul ne répond pas tout de suite, se met à compter les deux collections et dit "parce qu'y en avait sept et neuf".

• Les autres enfants (Paula, Michel, Rose-Marie, Rachel, Delphine, Jean-François et Sylvain) ne répondent à la question posée qu'après avoir dénombré les collections annonçant seulement ensuite "y a plus d'allumettes parce que j'ai compté sept jetons et neuf allumettes". (Rose-Marie et Sylvain qui ont des problèmes de dénombrement doivent s'y prendre à plusieurs fois pour obtenir ce résultat).

Parmi ces derniers enfants qui ont dénombré les collections avant de répondre à la question précédente, Paula, Michel, Rose-Marie et Rachel enlèvent sans hésitation deux allumettes. Delphine et Jean-François ont besoin de compter jetons et allumettes mais ou bien ils se trompent dans leurs comptes, ou bien ils oublient un résultat pendant qu'ils cherchent l'autre.

• Certains s'obstinent et finissent par s'en sortir par approximations successives en s'appuyant parfois sur une organisation spatiale :

Michaël met ainsi les jetons en ligne, prend un jeton de plus, recompte, reprend encore un jeton, recompte ;

Nalila ajoute trois jetons, vérifie en recomptant les allumettes et enlève un jeton.

• D'autres ne s'en sortent pas ;

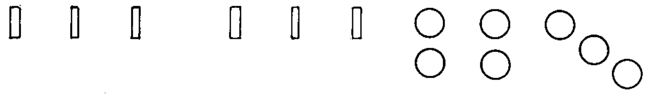
Naïma recompte neuf et sept et enlève quatre allumettes. "Es-tu sûre ?" "je m'en rappelle plus". "Y a six jetons". "Recompte-les". "Y en a sept". "Peux-tu te débrouiller pour qu'il y ait pareil d'allumettes et de jetons ?". Elle rajoute trois allumettes. "Maintenant tu es sûre ?". Elle recompte : "sept et huit c'est pas pareil". "Alors ?". Elle enlève trois allumettes. "Tu crois que c'est pareil maintenant ?". "Je sais pas". Elle compte sept et sept alors qu'il y a sept jetons et cinq allumettes.

Frédéric, tout en disant "faut en mettre plus de jetons", rajoute en guettant un regard approbateur, un puis deux puis trois jusqu'à quinze jetons !

Trois enfants (Patrick qui ne sait pas compter ainsi que Marion et Fred) répondent à la question sans utiliser le comptage.

Fred dit "je les mets à côté l'un de l'autre" et réalise une correspondance terme à terme. Il enlève alors les deux allumettes sans jeton et dit "y en a pareil".

Patrick dit "j'enlève un peu d'allumettes". Il en ôte trois. On lui demande comment il sait qu'il y en a pareil. Il les dispose alors comme ci-dessous, voit son erreur et rajoute une allumette.



Marion enlève cinq allumettes, on lui demande : "tu es sûre qu'il y en a pareil ?". "Non, y en a plus là (jetons)". Elle enlève alors trois jetons et se ramène ainsi à quatre allumettes, quatre jetons.

*Sur la table on dépose huit cartons et huit macaronis. L'enfant a à sa disposition une boîte de cartons et une boîte de macaronis.*

*"A ton avis, est-ce qu'il y a plus de cartons ? Ou plus de macaronis ?".*

*Après réponse : "comment pourrais-tu faire pour qu'il y ait sur la table plus de macaronis que de cartons ?".*

*Lorsque l'enfant a enlevé des cartons ou ajouté des macaronis, on diminue de un en un le nombre de macaronis en demandant "et maintenant, est-ce qu'il y a plus de macaronis que de cartons ?".*

A l'exception de Nalila, les enfants qui ont répondu dans la première situation en se fiant à leur perception, répondent tous, spontanément ici, qu'il y a plus de cartons que de macaronis. Mais quand on leur demande comment ils le savent :

- La plupart se mettent à compter et rectifient alors : "non, y en a pareil : y en a huit et huit".

- Fred répond "parce que les cartons, y sont les uns sur les autres". A la consigne "montre-moi", il étale les cartons, essaie de les compter sans succès puis se met à faire une correspondance terme à terme et annonce "y en a pareil : y sont tous les uns à côté des autres, y en manque point. Y en a point de trop !".

- Patrick dit : "je les ai comptés !" et explique en touchant du doigt un carton, un macaroni : "comme ça". Comme on lui dit : "moi je ne vois pas", il arrange son matériel et essaie de mettre en évidence la correspondance terme à terme qu'il a réalisée précédemment. Il hésite tellement malgré cela à dire "c'est pareil" que l'on regroupe cartons d'un côté et pâtes de l'autre en disant "et maintenant ?". "Y a plus de pâtes que de cartons !". "Montre-le moi". "Non, y a plus de cartons". "Montre-moi pourquoi". "Y en a pareil parce que tu as pas enlevé de cartons et tu as pas enlevé de pâtes et que tout à l'heure j'ai vu que c'était pareil".

● Marion sera la seule à se contenter comme précédemment de "parce que il y en a un peu là" montrant les pâtes. On arrête là l'entretien avec elle.

● Ceux du groupe de Paula, ainsi que Nalila, commencent cette fois encore par dénombrer cartons et macaronis avant de répondre à la question. Certains le font correctement, d'autres avec des erreurs dans le comptage d'une ou des deux collections. Il faudra parfois que l'examinateur intervienne plusieurs fois par des "es-tu sûr ?" ou "montre-moi" pour que l'on arrive à des dénombrements exacts.

Pour ces enfants cependant, "autant que" ou "pareil" semblent vraiment liés au fait qu'ils s'arrêtent sur le même nombre (ordinal) lorsqu'ils dénombrent les deux collections.

*Pour répondre à la question "comment pourrais-tu faire pour qu'il y ait sur la table plus de macaronis que de cartons ?".*

● La plupart des enfants proposent immédiatement d'ajouter des macaronis. Ils en ajoutent effectivement en général plusieurs. Seul un enfant n'ajoute qu'un macaroni. Les autres en ajoutent trois, quatre ou cinq.

● Deux enfants seulement proposent d'enlever des cartons. Il est intéressant de noter que ce sont ceux qui ont précédemment constaté l'équivalence des deux collections en réalisant une correspondance terme à terme qui est toujours sous leurs yeux (Fred enlève, par exemple, trois cartons).

● Deux enfants ne parviennent pas à réaliser la transformation demandée.

Naïma qui a eu beaucoup de mal à trouver qu'il y avait huit cartons et huit macaronis, oppose à toutes nos sollicitations "sais pas" ou "me rappelle plus".

Rose-Marie qui au contraire nous a dit spontanément tout à l'heure "là y en a huit et là il y en a huit, y en a pareil", répond à la question : "peux-tu te débrouiller pour qu'il y ait plus de pâtes que de cartons ?" par "y a plus de pâtes que de cartons !". Surprise. "Ah bon, tu es sûre ?". Elle recompte et répète : "y a huit pâtes et huit cartons, y a plus de pâtes que de cartons". "Peux-tu te débrouiller pour qu'il y en ait pareil ?". Elle enlève un carton et un macaroni et dit "y en a sept, y a plus de cartons que de macaronis"(renversant les termes), enlève encore un macaroni et un carton et dit "y en a six, y a plus de cartons que de macaronis". "Pourquoi ?" "Parce qu'il y en a plus là", (montrant les cartons étalés).

*Lorsqu'on enlève alors, sous les yeux de l'enfant un macaroni, puis un autre ..... en lui demandant "et maintenant, est-ce qu'il y a plus de macaronis que de cartons ?".*

On constate qu'un grand nombre d'enfants (dont le groupe des enfants qui ont déjà accédé à la nécessité de la preuve) répond correctement, certains sans recompter (ce qui semble signifier qu'ils ont gardé en mémoire le nombre de macaronis qu'ils ont précédemment ajoutés, et qu'ils savent qu'il suffit qu'il y en ait juste un de plus pour avoir la relation -plus que-).

Jean-François en a ajouté trois. On en enlève un : "y en a toujours plus". On en enlève un autre : "y en a un de plus". On en enlève un autre : "y en a pareil".

Rachel en a rajouté cinq. On en enlève un : "oui". On en enlève un autre : "oui". On en enlève un autre : "attends" (elle compte, en trouve deux de plus) "oui". On en enlève un autre : "oui". On en enlève un autre : "non, c'est les deux pareil ".

Mais pour certains enfants, il semble y avoir passage direct de la relation "plus que" à la relation "moins que" sans passer par "autant que".

Patrick a ajouté deux macaronis. On en enlève un : "y a toujours plus de pâtes". On en enlève un : "y a moins de pâtes".

Nalila a ajouté quatre macaronis. On en enlève un : elle recompte et dit "y en a encore plus de pâtes". On en enlève un autre : "non maintenant y en a plus de cartons". On lui demande de vérifier : elle trouve neuf pâtes et sept cartons. On en enlève un : "ça fait pire de cartons !".

Sandrine a ajouté elle aussi quatre pâtes. On en enlève un : "y en a plus". On en enlève encore un : "y en a moins".

Nous avions l'intention, dans cette phase de l'entretien d'étudier la conservation de la relation existant entre deux ensembles $A_1$ et $B_1$. "$B_1$ a plus d'éléments que $A_1$ " lorsque l'on fait subir à $B_1$ une suite de transformations (consistant chacune d'entre elles à lui enlever un élément) de manière à le ramener à un ensemble $B_1$ équipotent à $A_1$ .

Les observations précédentes nous amènent à nous demander s'il n'y a pas pour certains enfants une contradiction entre le geste d'enlever et le fait de dire qu'il y a toujours plus (contradiction se résolvant très vite au profit du geste d'enlever qui entraîne la réponse "y en a moins").

On peut aussi se demander si le problème n'est pas en réalité compliqué par le fait que la conservation de la relation "plus que" porte en fait sur quatre ensembles :

$A_1$ au temps $t_1$ .
$A_2$ qui n'est autre que $A_1$ non modifié mais pris au temps $t_2$ .
$B_1$ au temps $t_1$ .
$B_2$ qui est $B_1$ transformé par retrait des macaronis au temps $t_2$ .
Ce qui peut amener les enfants à substituer à la comparaison entre $B_2$ et $A_2$ demandée la comparaison entre $B_2$ et $B_1$ .

Revenons à une analyse plus globale de cette troisième partie.

*L'un de nos objectifs, dans cette partie, était de savoir si, dans une situation imposée par l'expérimentateur (par exemple comparaison d'un ensemble de sept jetons et d'un ensemble de neuf allumettes, ou encore comparaison d'un ensemble de huit cartons et d'un ensemble de huit macaronis), l'enfant est capable de déterminer la relation ("plus que", "moins que" ou "autant que") existant entre les ensembles en présence.*

Les entretiens précédemment décrits nous montrent que pour déterminer la relation numérique existant entre deux ensembles donnés, un grand nombre d'enfants interviewés s'appuient sur leur perception et n'éprouvent aucunement le besoin de se donner un moyen objectif d'être sûrs de ce qu'ils avancent. Leur intime conviction leur suffit.

Pourtant, on doit constater que lorsque l'expérimentateur leur demande "comment tu le sais ?" ou "es-tu sûr ?" ou encore "essaie de me montrer", ils ne mettent en général pas leur perception en doute dans le premier cas (sept jetons, neuf allumettes) alors qu'ils éprouvent tous le besoin de justifier leur réponse dans le deuxième cas (huit cartons, huit pâtes), ce qu'ils font par comptage en général ou par correspondance terme à terme (3 cas).

Le comportement de Rose-Marie, qui n'est en rien gênée par le fait qu'elle compte huit cartons et huit pâtes (ou sept et sept) pour dire qu'il y a plus de cartons que de pâtes parce que les cartons tiennent plus de place, semble montrer qu'elle ne voit aucune contradiction entre ce qu'elle voit et ce qu'elle compte, ce qui est typique du stade pré-opératoire où la pensée oscille entre une vérité empirique ("est vrai ce que je compte" mais aussi "est vrai ce que je vois") et une vérité notionelle ("est vrai ce que je conclus").

Quant aux autres enfants, ils s'inclinent tous devant le résultat obtenu par comptage ou par correspondance terme à terme, bien que ce dernier infirme leur perception première. Il semble donc que, bien qu'encore soumis au leurre créé par la confusion quantité de matière-quantité numérique, ce qui les fait répondre spontanément en se fiant à leur perception première, ces enfants prennent conscience d'une contradiction lorsqu'ils essaient de prouver ce qu'ils avancent et la dépassent après avoir réussi à mettre en œuvre une méthode.

Il y a de plus un nombre non négligeable d'enfants qui, quelle que soit la situation proposée, ne donnent la relation existant qu'après avoir dénombré les deux ensembles en présence, ce qui signifie en particulier qu'ils se méfient sans doute de leur perception première et aussi qu'ils ont pris conscience de la nécessité de trouver un moyen objectif de savoir ce qui se passe (ce que nous appellerons une preuve) avant de répondre à la question posée.

*Notre deuxième objectif dans cette partie était de savoir si l'enfant qui a à sa disposition deux ensembles A et B ainsi que des boîtes contenant l'une des éléments identiques à ceux de A, l'autre des éléments identiques à ceux de B, est capable de se débrouiller pour transformer A et B en deux ensembles entre lesquels il y ait une relation ("autant que", "plus que" ou "moins que") imposée par l'expérimentateur.*

Les entretiens décrits ci-dessus nous montrent, là encore, que si les enfants du groupe de Paula n'ont, en général, pas eu trop de difficultés pour résoudre le problème posé (la manipulation ou le comptage précédemment effectués leur ayant permis de bien prendre conscience de la situation donnée), cela n'a pas été le cas des autres, surtout lorsqu'il s'agissait pour eux de transformer une situation de non-équipotence en une situation d'équipotence.

On constate alors que les mêmes enfants qui ont su dénombrer correctement sept allumettes dans la partie A et qui semblaient jusque là bien connaître et bien utiliser la comptine dans ce domaine numérique, ne maîtrisent plus le comptage lorsqu'ils veulent l'utiliser pour égaliser les deux collections.

On peut se demander si les problèmes rencontrés ne proviennent pas de ce que l'enfant se trouve confronté à plusieurs tâches successives :

– reconnaître ce qu'il faut faire (ici enlever des allumettes ou ajouter des jetons pour annuler la relation de départ "plus d'allumettes que de jetons" ,

– trouver de plus sur combien d'objets exactement doit porter l'acte d'enlever (ou d'ajouter) pour que l'on obtienne la relation recherchée (autant que) et pas une autre (moins que).

Ceci expliquerait que les mêmes enfants rencontrent moins de difficultés lorsque, à partir d'une situation d'équipotence (huit cartons, huit macaronis) on leur demande de faire en sorte qu'il y ait plus de pâtes. Puisque là le problème du nombre exact d'objets à ajouter ou à retrancher ne se pose plus.

## EN CONCLUSION.

Cette étude nous amène à attirer l'attention du lecteur sur les points suivants :

Le statut de l'objet compté n'est pas encore clair pour l'enfant entrant dans l'école obligatoire. De plus, la comptine numérique n'est bien souvent pour lui qu'une chanson connue globalement et qu'il ne peut pas utiliser dans des situations de dénombrement ou de comparaison de collections d'objets.

Les problèmes de dénombrement peuvent parfois, même dans des cas très simples être insurmontables pour l'enfant de cet âge, s'il ne voit pas que le nombre d'éléments d'un ensemble reste invariant lorsque l'on change la configuration des éléments (le nombre étant pour lui avant tout une propriété de l'objet compté et pas de l'ensemble des objets comptés).

Les notions de précédent et de suivant peuvent fonctionner, en liaison avec l'acte de retirer ou d'ajouter un élément, sans pour autant que l'enfant soit forcément capable de déterminer le précédent ou le suivant d'un nombre donné.

Les problèmes de comparaison trouvent encore souvent chez l'enfant des réponses basées sur la perception. Il semble cependant que l'entrée dans l'école obligatoire coïncide souvent pour l'enfant avec une période ou, bien qu'encore soumis au leurre quantité de matière-quantité numérique, il commence à prendre conscience de la nécessité d'avoir un moyen de "prouver" que sa réponse est correcte.

Dans un domaine numérique donné, l'enfant tantôt réussit, tantôt échoue, selon le problème qui lui est posé. De plus, même lorsqu'une propriété des naturels semble fonctionner dans un domaine numérique donné, elle n'est pas acquise pour autant. La même tâche, proposée dans un domaine numérique plus grand, fait surgir de nouveaux problèmes et nécessite une nouvelle approche. La variable "grandeur du domaine numérique" est donc une variable fondamentale dans l'étude de l'acquisition du concept de naturel par l'enfant.

Cette étude nous amène également à insister sur la nécessité, aussi bien pour le maître d'école que pour le chercheur, d'être conscient que des difficultés importantes d'acquisition d'une notion ou de propriétés apparemment triviales pour l'adulte, se posent pour l'enfant. Aussi souhaitons-nous tout particulièrement que se multiplient les recherches portant sur le chemin parcouru par l'enfant avant que ne se créée en lui ce sentiment d'évidence qui marque en fait l'appropriation véritable du savoir et de sa fonctionnalité.