

POLYEDRES ET GRAPHS PLANAIRES .

(Raymond GUINET – E.N. de Grenoble)

Les activités qui suivent ont été menées lors d'un stage d'instituteurs d'une durée de deux semaines à l'Ecole Normale de Grenoble. Le thème en était : **Géométrie et travail manuel éducatif**.

Les objectifs que nous nous étions fixés étaient :

- l'étude des polyèdres en particulier des polyèdres réguliers
- leur nomenclature
- leurs représentations
- leur génération
- et leur construction.

I – GENERALITES.

Nous sommes convenus qu'un polyèdre est un solide limité par des faces polygonales planes, que deux faces voisines ont une arête en commun et que dans un polyèdre il existe au moins trois faces ayant un point commun appelé sommet. Nous ne nous sommes intéressés qu'aux polyèdres simples, c'est-à-dire ceux qui sont homéomorphes* à la sphère.

La nomenclature des polyèdres n'est pas toujours très aisée. Si l'on ne complique pas trop les choses, et en s'appuyant sur la nomenclature des polygones on obtient :

quatre faces	: tétraèdre
cinq faces	: pentaèdre
six faces	: hexaèdre
sept faces	: heptaèdre
huit faces	: octaèdre
douze faces	: dodécaèdre
vingt faces	: icosaèdre, etc ...

* Il s'agit de polyèdres que l'on peut déformer continûment sans les déchirer jusqu'à les rendre sphériques. Ce n'est pas le cas d'une chambre à air que l'on appelle *tore* en mathématique.

Il n'en va pas de même si ces polyèdres sont issus d'autres polyèdres. On aura alors des noms aussi évocateurs que : triacontaèdre, hexacontraèdre, anticube et autres snubcube.

II – REPRESENTATION DES POLYEDRES.

Le procédé le plus classique pour représenter un polyèdre est d'en donner une perspective cavalière comme par exemple le cube figure 1-a ci-contre. Mais, imaginons une boîte cubique dont les faces sont numérotées comme ci-contre. Imaginons que l'on enlève le couvercle 1 et que l'on regarde par cette face. On peut voir ainsi ce qui est représenté par la figure 1-b.

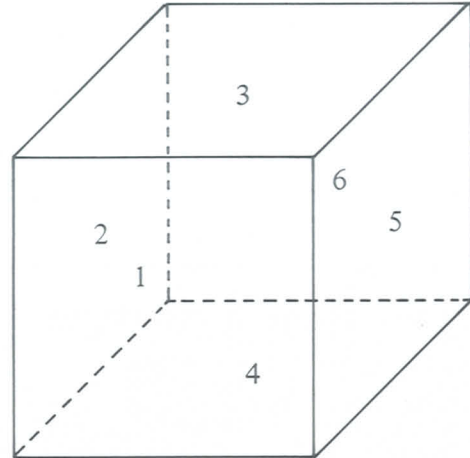


figure 1 - a

On désignera cette représentation par **représentation plane du cube** ou **graphe planaire du cube**.

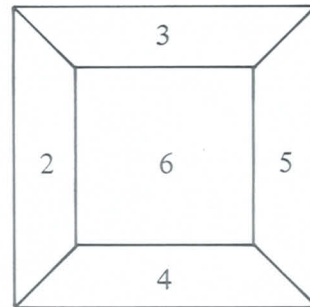


figure 1 - b

La figure 2-a ci-contre représente un prisme à base triangulaire. Si l'on regarde ce prisme "par dessus", on peut voir la figure 2-b.

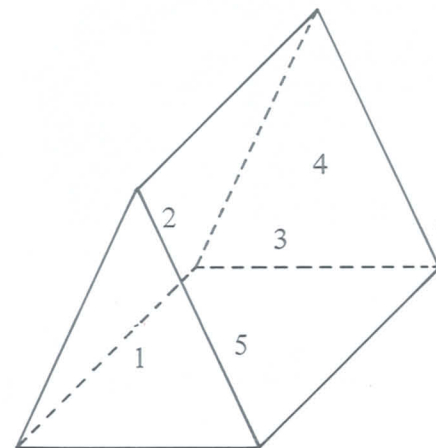


figure 2 - a

Par contre si l'on regarde par la face 1 on peut voir le graphe planaire de la figure 2-c.

La représentation plane des polyèdres permet une meilleure étude du nombre de faces, d'arêtes ou de sommets du solide. Elle permet en outre de mieux percevoir la position relative des faces et ainsi, comme nous le verrons au paragraphe IV de construire des développements de polyèdres.

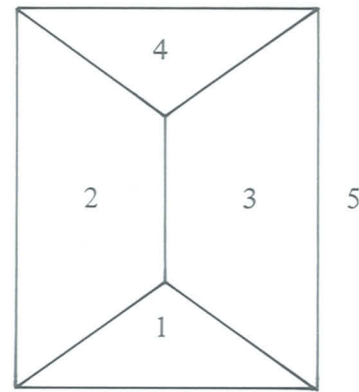


figure 2 - b

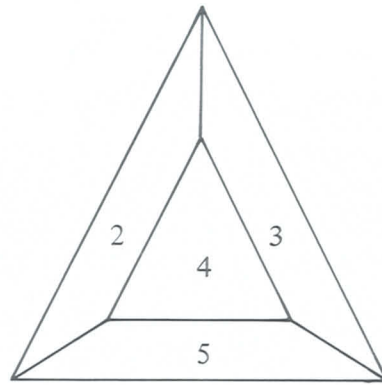


figure 2 - c

III – POLYEDRES REGULIERS CONVEXES.

Il s'agit de polyèdres convexes dont toutes les faces sont superposables et sont des polygones réguliers.

1 – Polyèdres réguliers constitués de triangles équilatéraux.

Pour constituer un sommet, il faut au moins trois faces. Or tous les sommets sont de même degré *.

Cherchons le polyèdre régulier constitué de triangles équilatéraux et dont tous les sommets sont de degré 3.

Sa représentation plane est immédiate. Le polyèdre est "vu" sous un triangle. Le nombre de faces est de quatre. Le polyèdre obtenu est le tétraèdre régulier.

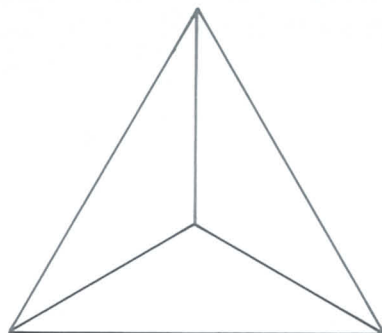


figure 3

* On appelle degré d'un sommet, le nombre d'arêtes y aboutissant.

Cherchons à présent s'il existe un polyèdre régulier dont tous les sommets sont de degré 4. Pour ceci essayons de déterminer le graphe planaire d'un tel polyèdre. Partons d'un triangle et saturons * les trois sommets à quatre arêtes (figure 4-a) ; puisque c'est le nombre d'arêtes qui aboutissent à chaque sommet. Les arêtes autres que celles du triangle de base se rencontrent, deux à deux, en trois points A, B et C représentant de nouveaux sommets.

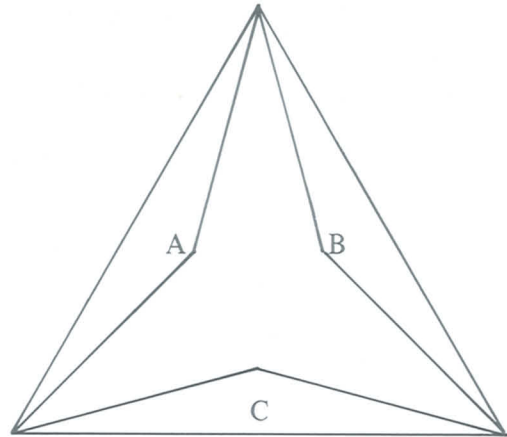


figure 4 - a

Saturons à présent ces trois sommets à quatre arêtes (figure 4-b) nous obtenons le graphe planaire d'un polyèdre de huit faces, dénommé octaèdre régulier. Ce polyèdre est formé de huit faces, six sommets et douze arêtes.

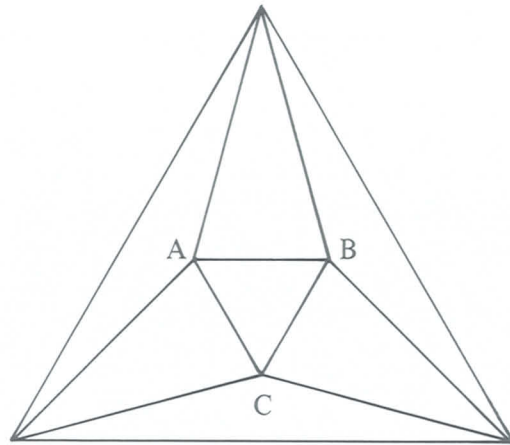


figure 4 - b

Octaèdre régulier

Cherchons maintenant s'il existe un polyèdre régulier dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux et dont tous les sommets sont de degré 5. Essayons de déterminer son graphe planaire. Pour ceci, partons d'un triangle équilatéral et saturons chaque sommet à cinq arêtes. Pour chaque sommet, deux arêtes autres que les côtés du triangle initial se rencontrent deux à deux en trois points A, B et C. (figure 5-a). La cinquième arête conduit à des sommets libres D, E et F. Si on prolongeait ces arêtes, elles se rencontreraient en un sommet de degré 3, ce qui ne convient pas.

Saturons ces sommets (A, B, C, D, E et F) à cinq arêtes chacun (figure 5-b). On obtient, puisque les faces sont triangulaires, trois nouveaux sommets G, H et I qui eux sont de degré 3. Saturons ces trois nouveaux sommets à cinq arêtes (figure 5-c). On obtient le graphe complet dont chaque sommet est de degré 5. Ce graphe planaire correspond à un polyèdre régulier de 20 faces, 12 sommets et 30 arêtes. Il s'agit de l'icosaèdre régulier.

* Ce qui revient à faire partir quatre arêtes de chaque sommet.

Enfin, si nous voulons construire un polyèdre régulier constitué de triangles équilatéraux et dont chaque sommet est de degré 6, chaque sommet sera constitué d'angles pleins car $6 \times 60^\circ = 360^\circ$.

On en conclut que : il n'existe pas de polyèdre régulier convexe constitué de triangle équilatéraux et dont chaque sommet est de degré supérieur à 5.

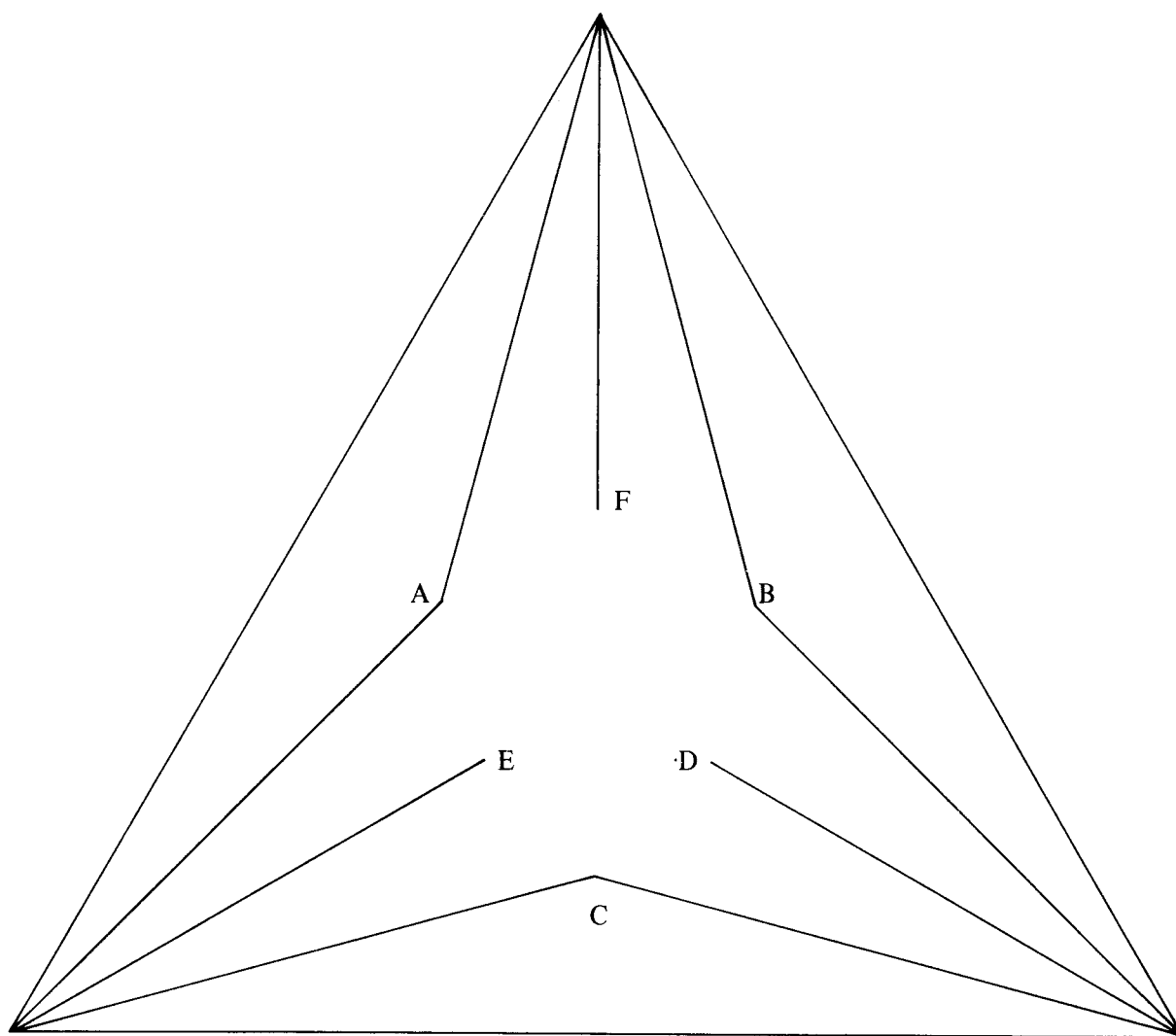


figure 5 - a

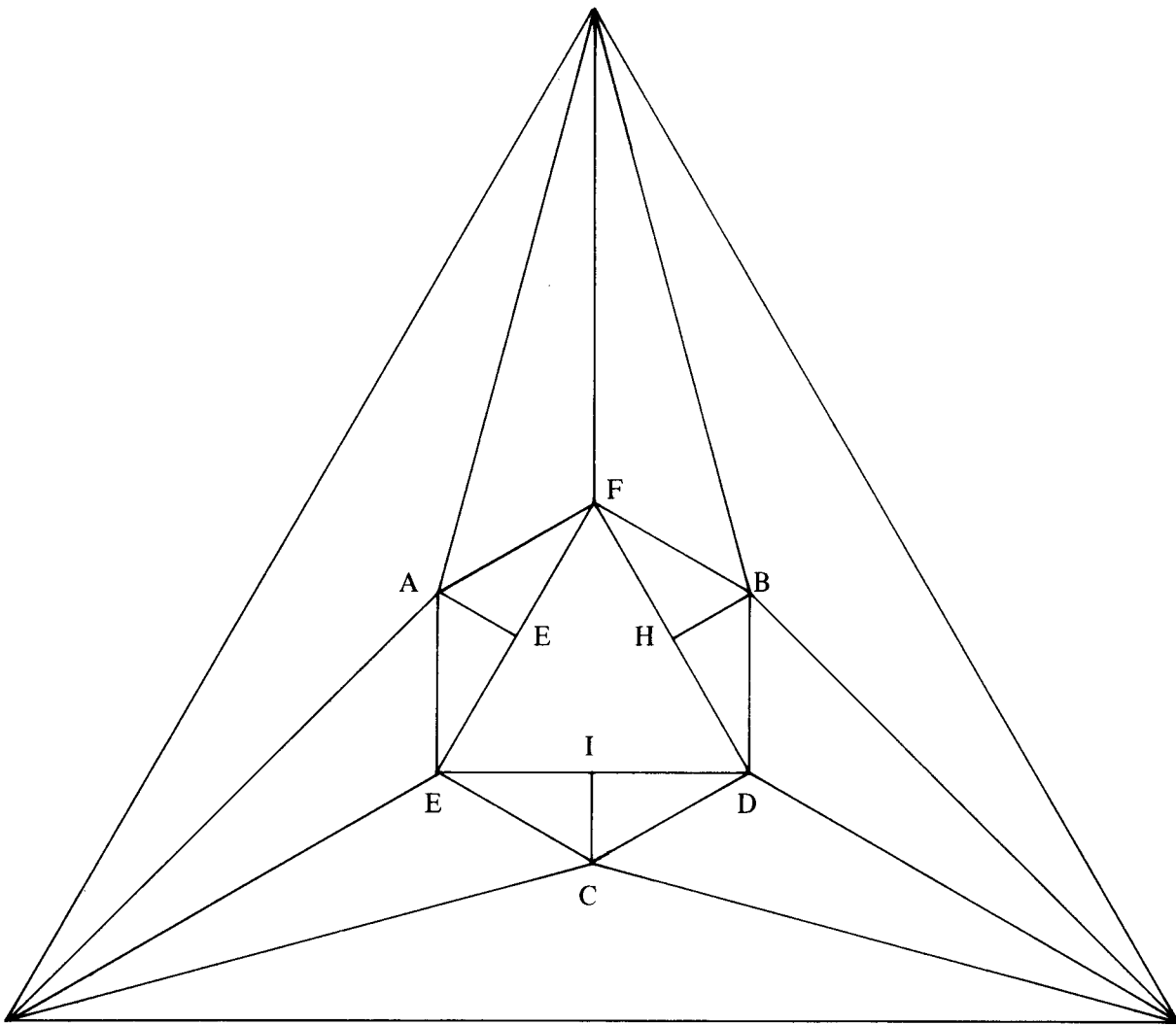


figure 5 - b

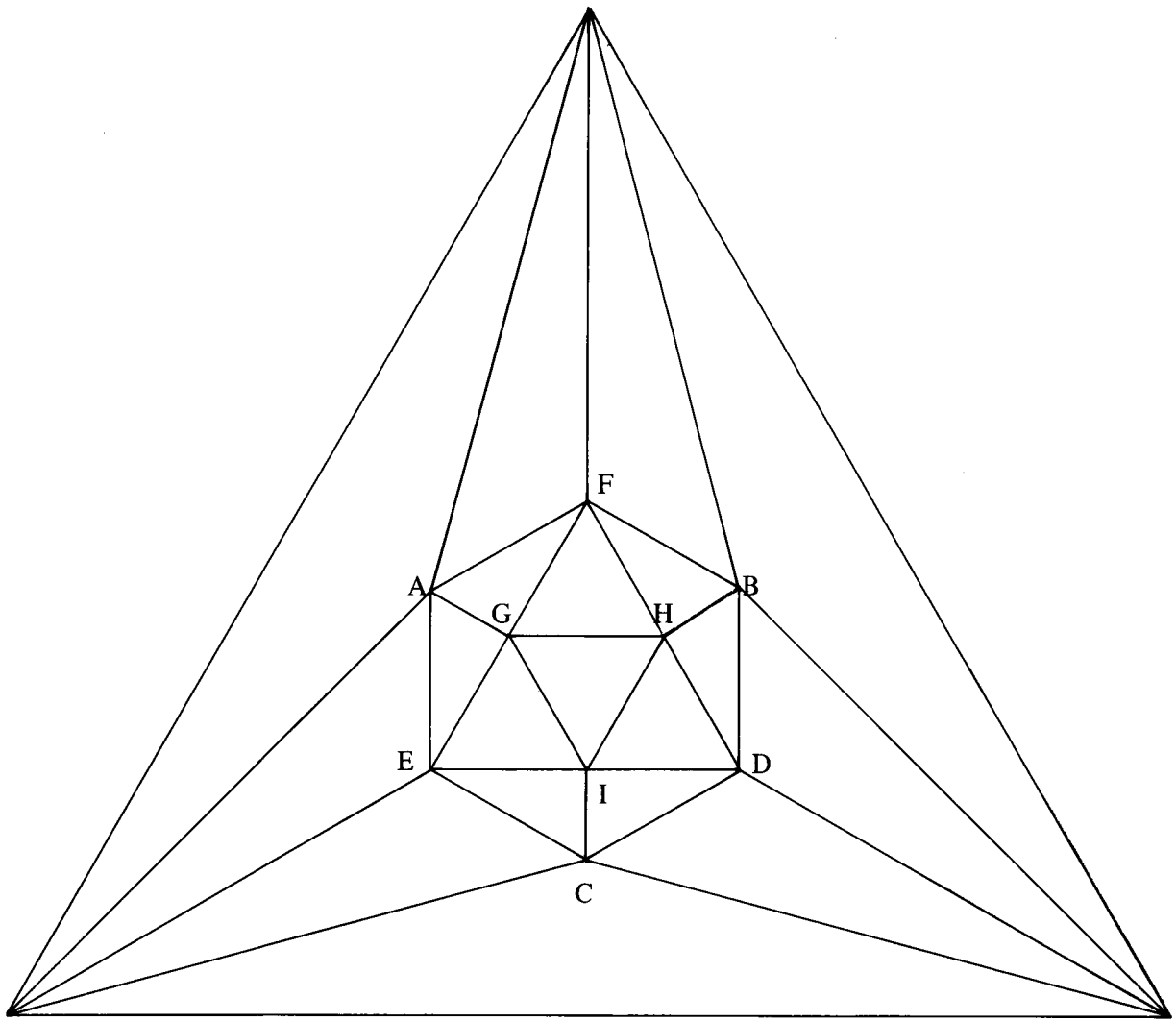


figure 5 - c

Icosaèdre

2 – Polyèdres réguliers dont toutes les faces sont des carrés.

Cherchons d'abord le polyèdre régulier constitué de faces carrées et dont tous les sommets sont de degré 3.

Déterminons sa représentation plane en partant d'un carré.

Saturons les quatre sommets de ce carré à trois arêtes.

On obtient quatre arêtes aboutissant à quatre sommets libres A, B, C et D (figure 6-a) (Si on avait prolongé ces quatre arêtes, on aurait obtenu des faces triangulaires, ce qui ne convient pas).

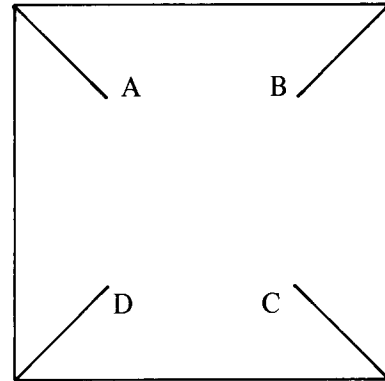


figure 6 - a

Partant de ces quatre sommets A, B, C et D, saturons les à trois arêtes chacun. On obtient le graphe de la figure 6-b, représentant le graphe planaire du cube ou hexaèdre régulier.

Ce polyèdre comporte six faces, huit sommets et douze arêtes.

Il est clair que l'on ne pourra pas construire un polyèdre dont toutes les faces sont des carrés et dont tous les sommets sont de degré 4, car :

$$4 \times 90^\circ = 360^\circ$$

Chaque sommet aurait un angle plein.

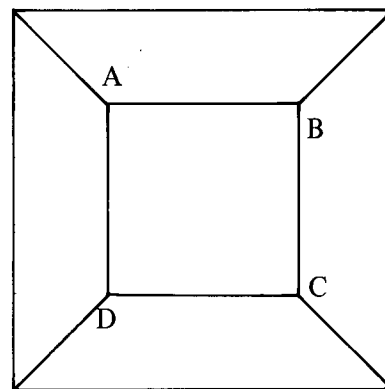


figure 6 - b

3 – Polyèdres réguliers dont toutes les faces sont des pentagones réguliers.

Cherchons le polyèdre régulier dont toutes les faces sont des pentagones réguliers et dont tous les sommets sont de degré 3. Pour ceci, construisons sa représentation plane. Partons d'un pentagone régulier et saturons chaque sommet à trois arêtes. On obtient cinq nouvelles arêtes, autres que les côtés du pentagone, aboutissant à cinq sommets libres A, B, C, D et E (figure 7-a).

A partir de ces cinq sommets, saturons-les à trois arêtes. On obtient d'une part cinq faces et cinq nouveaux sommets F, G, H, I et J (figure 7-b).

Saturons ces cinq nouveaux sommets à trois arêtes. On obtient cinq nouvelles arêtes aboutissant à cinq sommets libres K, L, M, N et O (figure 7-c).

Saturons ces cinq nouveaux sommets à trois arêtes. On obtient le graphe de la figure 7-d où chaque sommet est de degré 3 et où chaque face est pentagonale.

Ce graphe planaire est représentatif d'un polyèdre de 12 faces, 20 sommets et 30 arêtes. Il s'agit en l'occurrence du dodécaèdre régulier convexe.

Bien entendu, il n'est pas possible de construire un polyèdre convexe à faces pentagonales régulières et dont tous les sommets sont de degré 4.

Si les faces sont des hexagones réguliers, on ne peut pas constituer de sommets car :

$$3 \times 120^\circ = 360^\circ$$

En conclusion, il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes à savoir : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

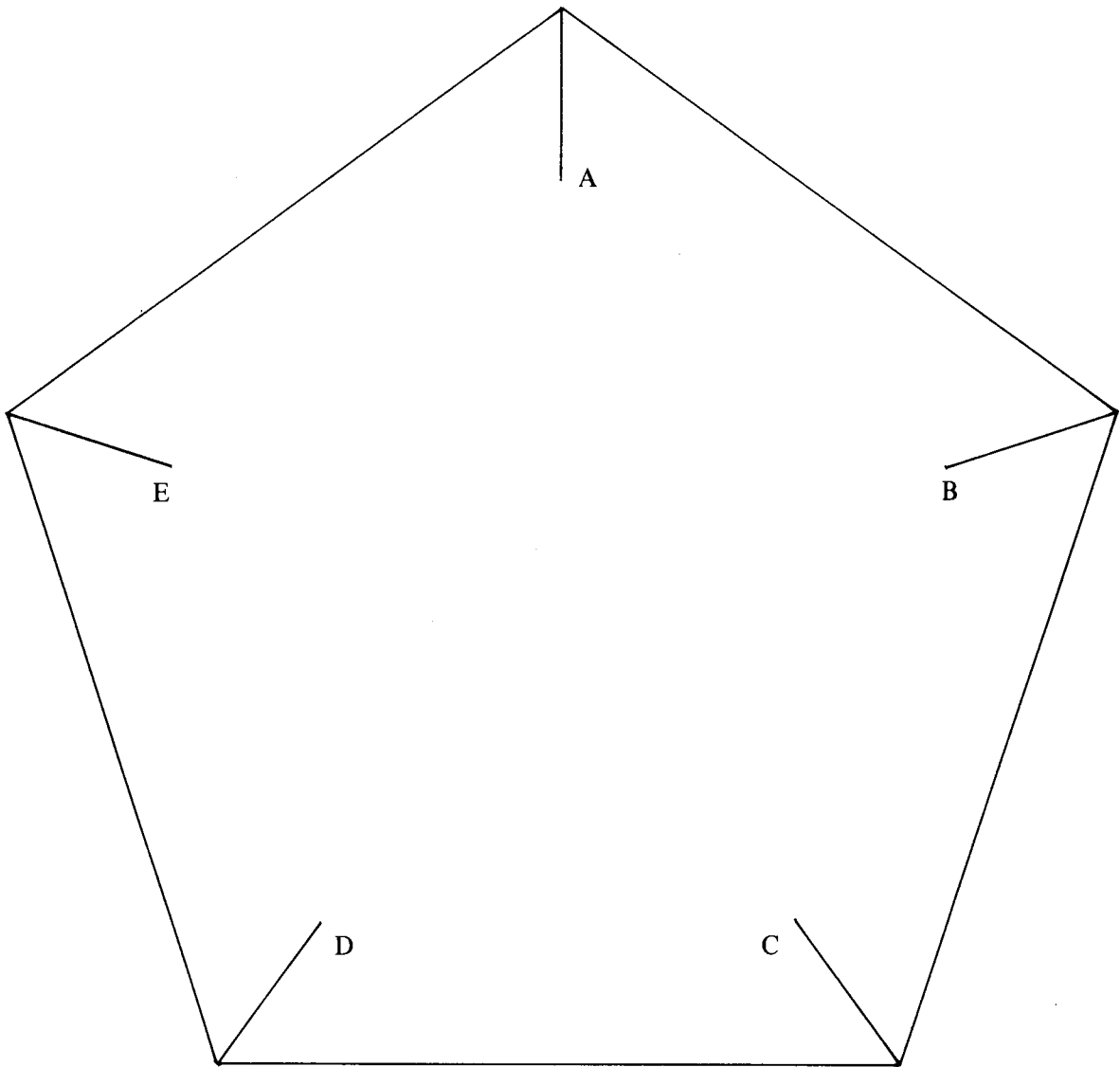


figure 7 - a

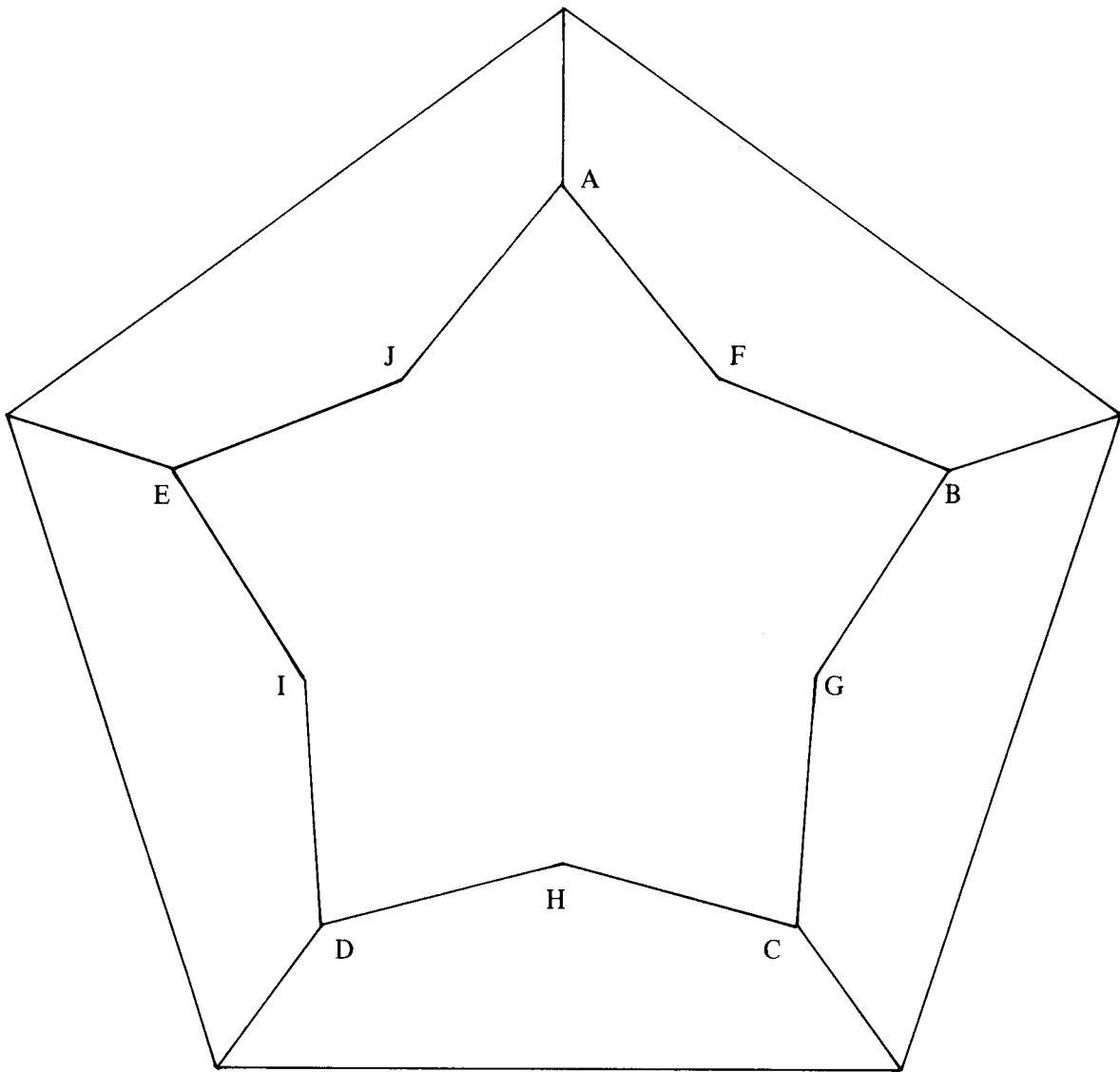


figure 7 - b

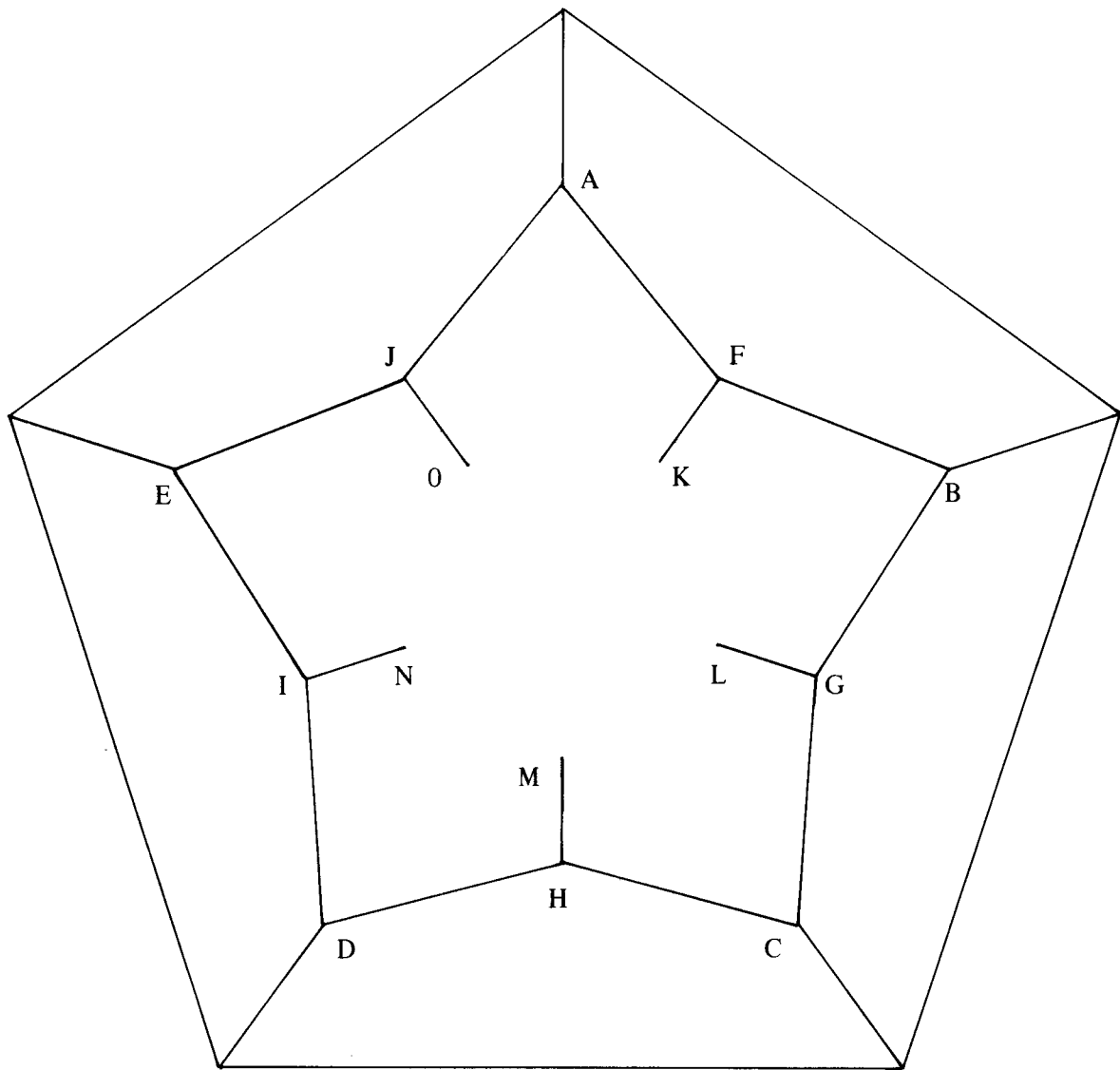


figure 7 - c

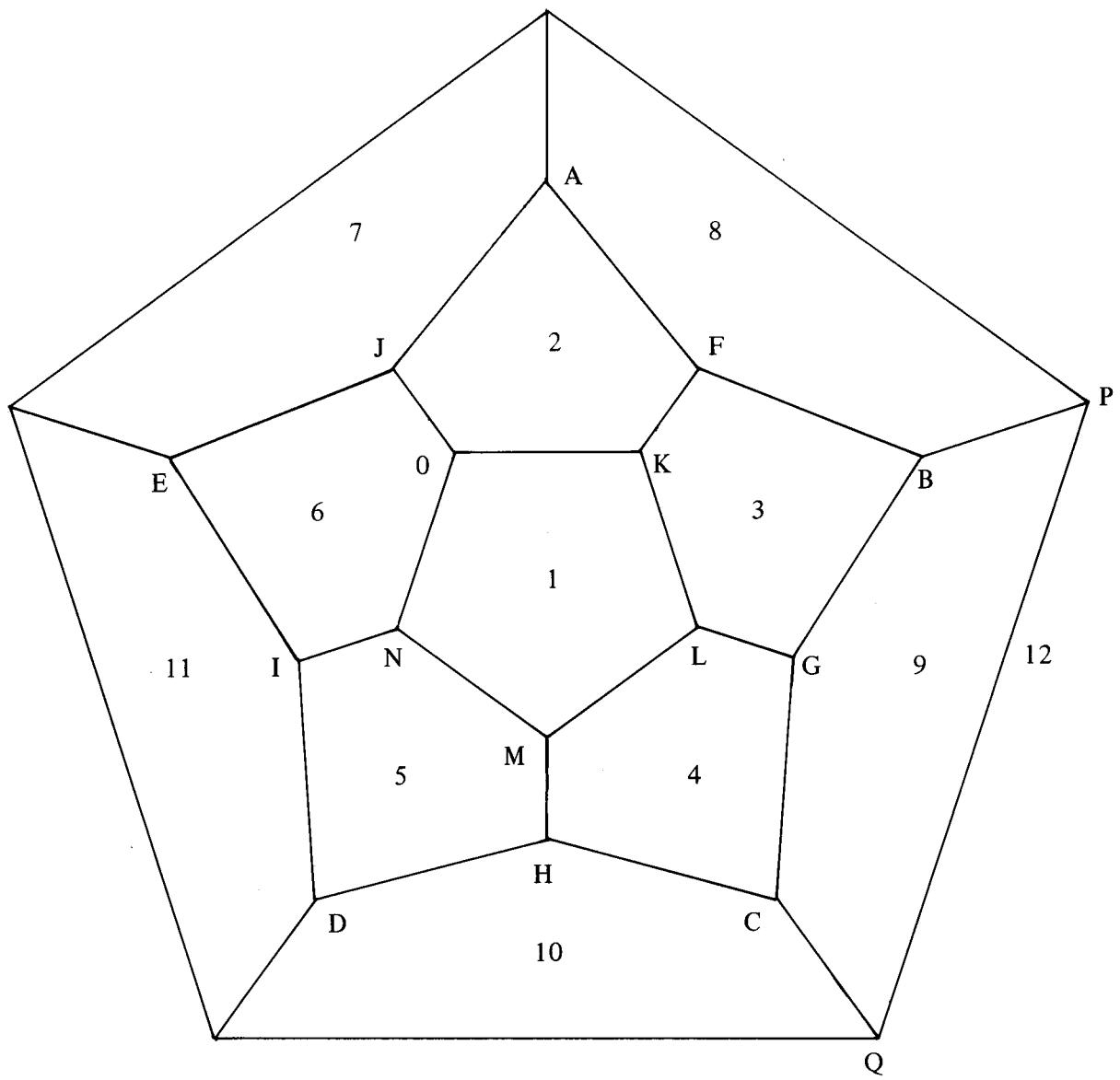


figure 7 - d

Dans le tableau ci-dessous, on a indiqué le nombre de faces, de sommets et d'arêtes des cinq polyèdres précédents.

Polyèdres	F	S	A
Tétraèdre	4	4	6
Cube	6	8	12
Octaèdre	8	6	12
Dodécaèdre	12	20	30
Icosaèdre	20	12	30

Nous avons vérifié sur ce tableau la formule de Descartes liant le nombre de faces de sommets et d'arêtes et telle que :

$$F + S = A + 2$$

Bien entendu, cette relation est vraie pour tout polyèdre simple.

IV – GRAPHE PLANAIRE ET DEVELOPPEMENT D'UN POLYEDRE.

Montrons à partir d'un exemple comment l'on peut passer du graphe planaire d'un polyèdre à un de ses patrons pour pouvoir le construire.

Partons du graphe planaire du dodécaèdre régulier de la figure 7-d.

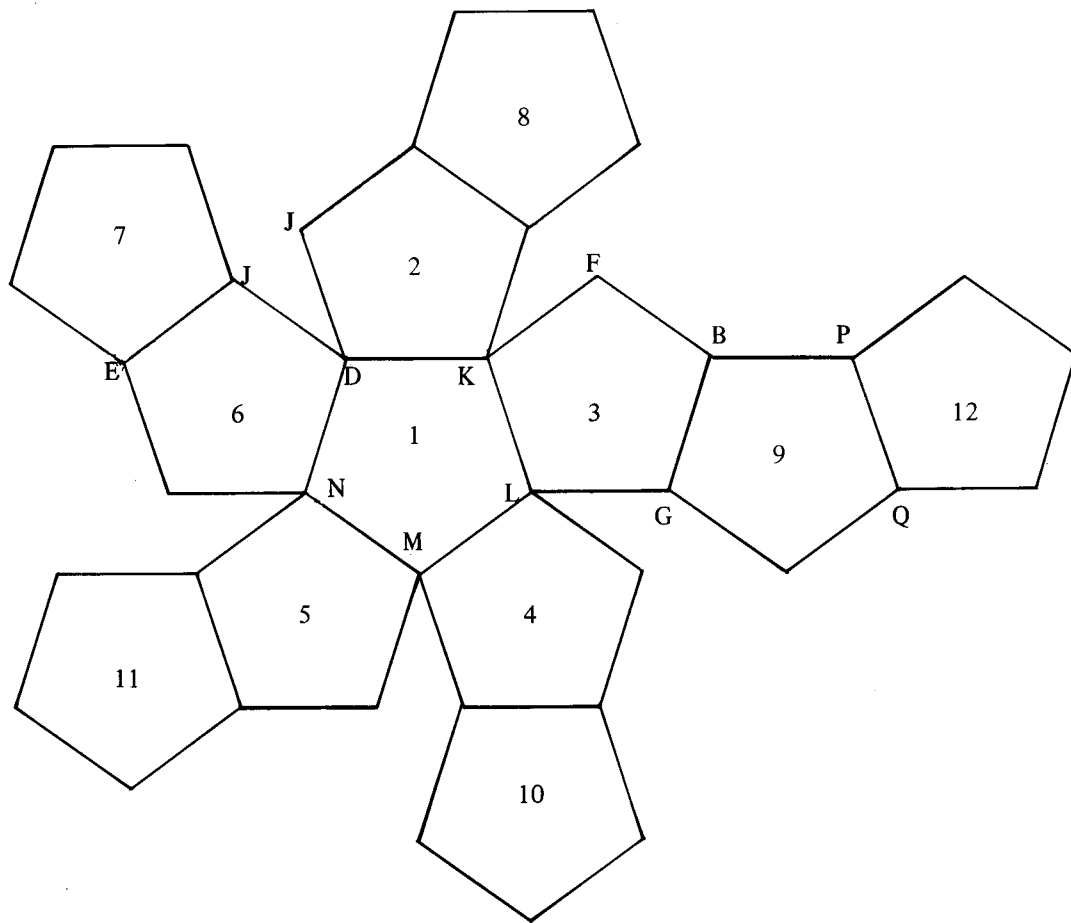
Numérotions les faces de 1 à 12.

A l'aide d'un gabarit découpé dans du carton fort, traçons le pentagone 1 puis les pentagones 2, 3, 4, 5 et 6 qui lui sont contigus. A ces derniers nous accolons cinq autres pentagones numérotés 7, 8, 9, 10 et 11.

Par exemple, pour placer la face numéro 7, notons que l'arête J E est commune aux faces 6 et 7 et l'on procède ainsi pour les quatre autres faces 8, 9, 10 et 11.

Pour placer la dernière face n°12, notons que l'arête P Q par exemple est commune aux faces 9 et 12.

On obtient ainsi à la figure 8 un patron du dodécaèdre régulier où nous n'avons pas fait figurer les onglets.



Patron d'un dodécaèdre régulier
figure 8 .

V – GENERATIONS DE POLYEDRES.

Il existe divers procédés pour engendrer un polyèdre à partir d'un ou plusieurs polyèdres.

L'un d'entre eux consiste à tronquer les sommets d'un polyèdre donné.

Voyons sur un exemple comment procéder.

– Considérons un cube dont il est donné une perspective cavalière* en pointillé sur la figure 9.

Si l'on tronque les sommets de telle sorte que chaque face du cube soit transformée en un carré, on obtient un polyèdre dont la perspective cavalière est donnée en traits pleins sur cette même figure 9 . Il s'agit du cuboctaèdre dont il est facile de faire l'inventaire du nombre de faces, de sommets et d'arêtes.

En effet :

A chaque face du cube correspond une face carrée du cuboctaèdre, ce qui donne six faces carrées pour le cuboctaèdre. A chaque sommet du cube correspond une face triangulaire du cuboctaèdre , ce qui donne huit faces triangulaires pour le cuboctaèdre.

* Voir IN n° 11, page 49.

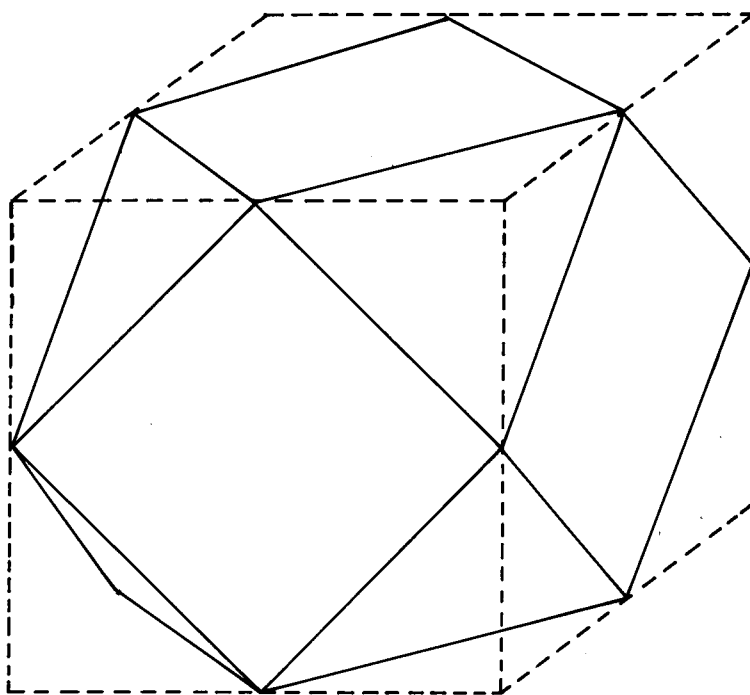
En résumé, le cuboctaèdre est formé de quatorze faces, six sont des carrés et huit sont des triangles équilatéraux.

Pour déterminer le nombre de sommets, remarquons qu'à chaque sommet du cube correspondent trois sommets du cuboctaèdre il y a donc $8 \times 3 = 24$ sommets pour le cuboctaèdre. Chacun étant compté deux fois, il y a donc douze sommets.

Le nombre d'arêtes est facile à déterminer à partir de la formule de Descartes :

$$\begin{aligned} A &= F + S - 2 \\ &= 14 + 12 - 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

En conclusion le cuboctaèdre est constitué de quatorze faces (six carrés et huit triangles équilatéraux) douze sommets et vingt-quatre arêtes.



Cuboctaèdre
figure 9

Voyons à présent comment construire une représentation plane de ce solide.

Notons tout d'abord que chaque face carrée du cuboctaèdre est contiguë à quatre faces triangulaires et que chaque sommet est de degré 4.

Partons donc d'un carré dont nous saturons chaque sommet à quatre arêtes. Nous obtenons la figure 10-a avec quatre nouveaux sommets A, B, C et D.

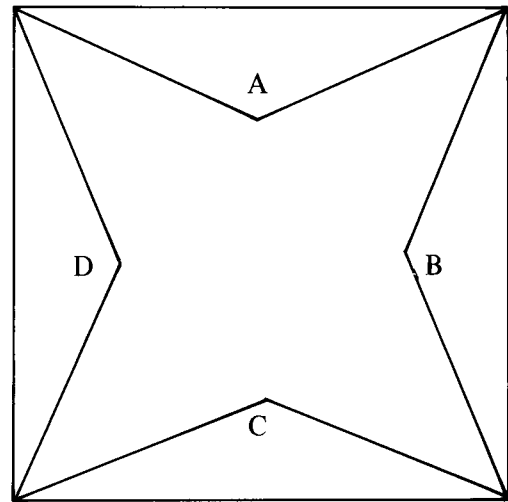


figure 10-a

Saturons les nouveaux sommets A, B, C et D à quatre arêtes. Nous obtenons la figure 10-b avec quatre nouveaux sommets E, F, G et H.

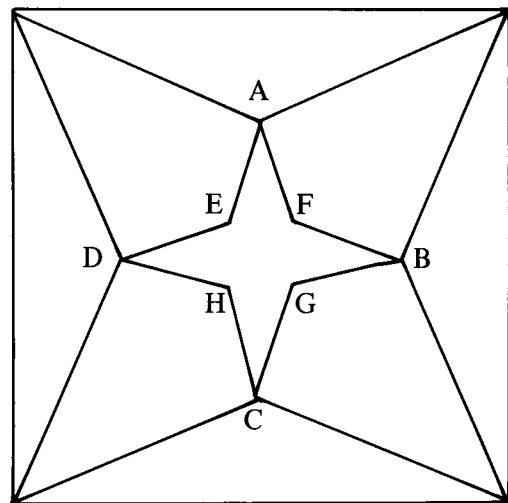


figure 10-b

Saturons enfin les nouveaux sommets E, F, G et H à quatre arêtes. Nous obtenons la figure 10-c où tous les sommets sont de degré 4 et où les faces "carrées" sont bordées de triangles.

La figure obtenue est une représentation plane du cuboctaèdre.

Bien entendu, on aurait pu partir non pas d'un carré, mais d'un triangle et la figure en aurait été totalement différente bien que représentative du même polyèdre.

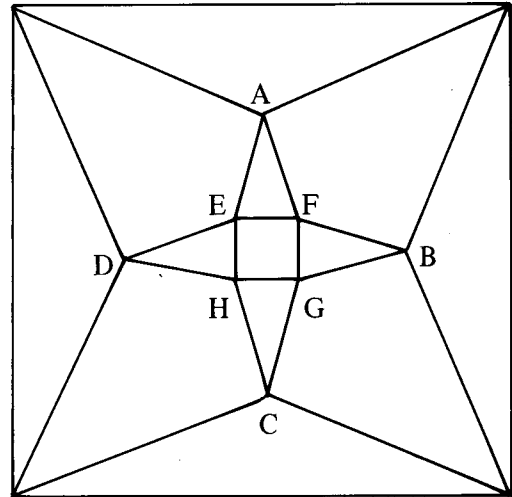


figure 10 - c

A partir de l'une de ces représentations planes, on peut construire un patron de cuboctaèdre.

Bien sûr, on aurait pu obtenir le patron par un autre procédé. Mais essayez de construire le patron du "ballon de foot-ball" ou triacontaèdre, formé de vingt hexagones et douze pentagones, sans réfléchir sur la disposition des différentes faces et sans représentation plane. Bon courage ! . . .