

AVEC DES CARRÉS BICOLORES (suite)

(R. NEYRET)

Dans IN n° 14, nous nous étions intéressés à des grilles 4×4 et en particulier aux grilles présentant des symétries. Nous avons rencontré un problème intéressant, à savoir que diverses productions étaient "les mêmes", c'est-à-dire se déduisaient les unes des autres soit par rotation, soit par symétrie-droite. Mais le nombre considérable de grilles 4×4 ne nous permettait pas de faire une étude exhaustive de toutes les productions différentes à une symétrie ou une rotation près.

Par contre si on se limite aux grilles 2×2 , on peut envisager cette étude qui amène à se poser quelques questions intéressantes.

Avec des 2×2 , puisqu'il y a quatre façons différentes de poser un carré sur un carreau de la grille, nous trouvons $4 \times 4 \times 4 \times 4$ c'est-à-dire 256 productions.

Mais comme nous le soulignons plus haut certaines figures se retrouvent plusieurs fois dans différentes positions.

ainsi :



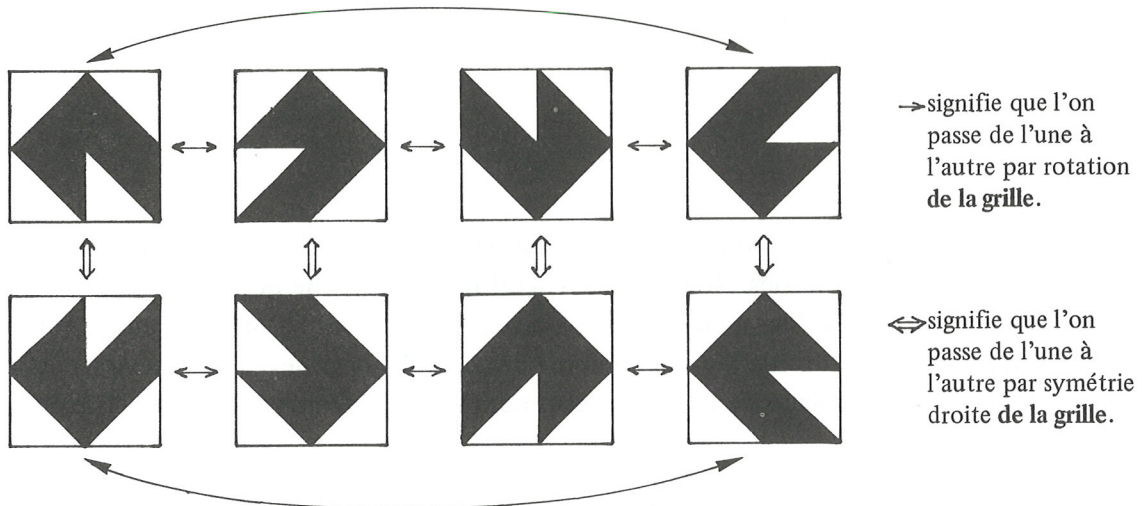
Ce qui nous amène à étudier les différentes positions d'une figure (*).

(*) Par la suite on appellera carreau un carré bicolore et figure le dessin obtenu avec quatre carreaux formant une grille 2×2 .

I – INCIDENCE DES ROTATIONS ET DES SYMETRIES SUIVANT LA NATURE DES FIGURES.

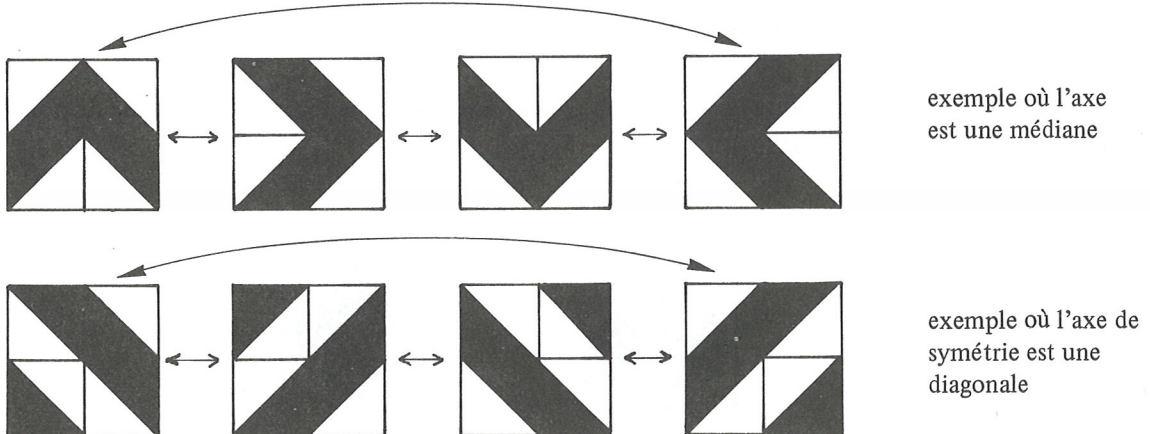
a) Figure ne présentant ni axe de symétrie ni centre de rotation.

Nous la retrouvons huit fois comme l'indique le schéma ci-dessous.



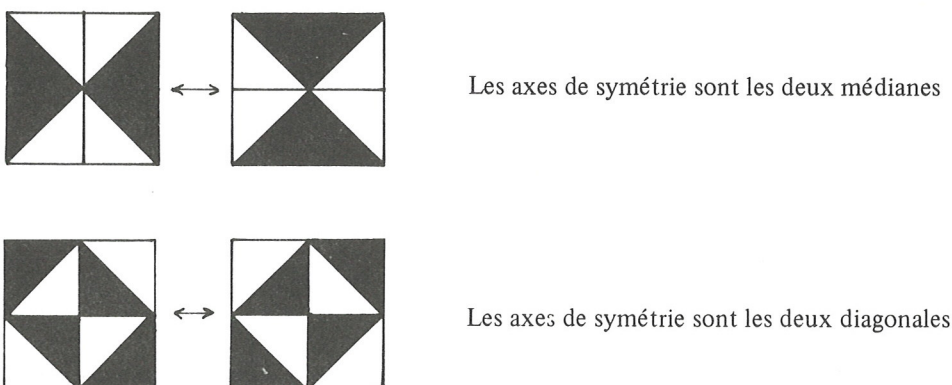
b) Figure présentant un seul axe de symétrie (donc pas de centre de rotation)

Nous la retrouvons quatre fois (que l'axe soit une médiane ou une diagonale)



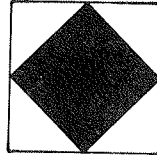
c) Figure présentant deux axes de symétrie (donc un centre de rotation).

Nous la retrouvons deux fois.



d) Figure présentant quatre axes de symétrie (donc un centre de rotation)

Nous trouvons ces figures une seule fois par exemple le carré :

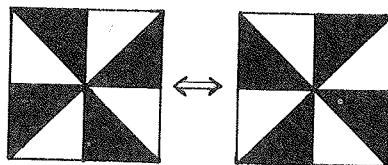


e) Figures ayant un centre de rotation.

Nous avons examiné jusqu'à présent les figures ayant un ou plusieurs axes de symétrie. Il nous reste à examiner les cas où les figures n'ont pas d'axes de symétrie, mais ont cependant un centre de rotation. Les rotations qui appliquent un carré ne peuvent être que le quart de tour et le demi-tour.

f) Figure restant inchangée par rotation d'un quart de tour.

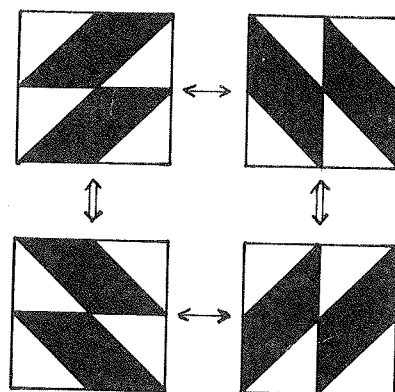
Alors nous la trouvons deux fois par exemple.



$\Leftrightarrow$ signifie que l'on passe d'une figure à l'autre par un quart de tour.

g) Figure restant inchangée seulement par rotation d'un demi-tour.

Nous allons la trouver quatre fois.



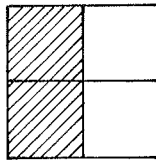
Ainsi pour étudier toutes les figures différentes (à une rotation ou une symétrie près, nous sommes amenés à étudier **toutes** les figures présentant des symétries ou des centres de rotation.

II – ETUDE DE TOUTES LES FIGURES PRESENTANT DES SYMETRIES OU DES CENTRES DE ROTATION.

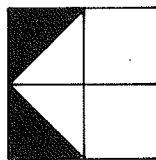
a) Figures présentant un seul axe de symétrie.

Nous allons chercher celles qui possèdent une médiane pour axe de symétrie et nous pouvons faire le même raisonnement pour celles possédant une diagonale pour axe de symétrie.

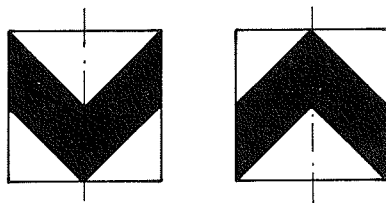
La position de deux carreaux détermine entièrement la figure, par exemple les carreaux correspondant à la partie hachurée de la figure.



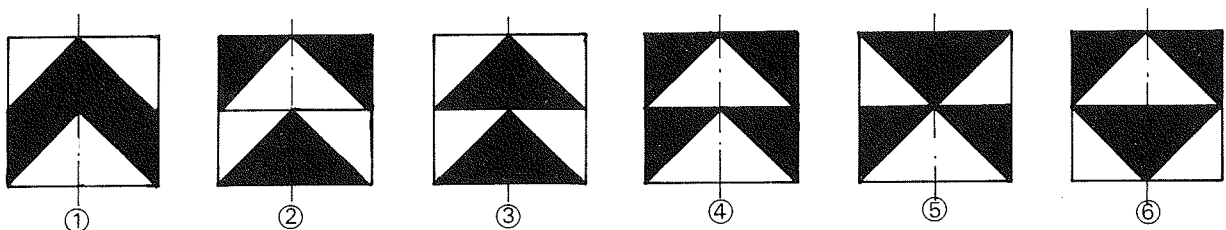
Donc nous trouverons au maximum seize figures distinctes correspondant aux quatre positions possibles sur la première case et aux quatre autres sur la seconde. Mais il faut déjà éliminer quatre figures qui correspondent aux placements de deux carreaux, symétriquement par rapport à l'autre médiane car il y aurait deux axes de symétrie.



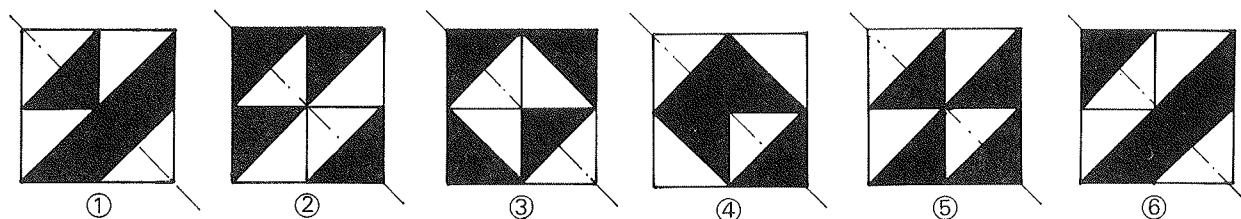
Les douze restantes s'appuient deux par deux par symétrie par rapport à la deuxième médiane par exemple.



Donc en définitive on ne trouve que six figures présentant un seul axe de symétrie qui sont les suivantes :



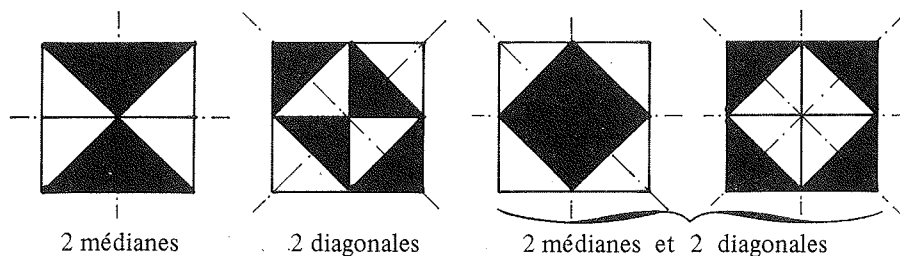
De même la recherche des figures ayant une seule diagonale comme axe de symétrie nous conduit aux six figures suivantes.



Remarquons que les figures ① et ② puis ③ et ④ se correspondent par "négatifs" et que les figures ⑤ et ⑥ sont leurs propres négatifs.

b) Figures ayant au moins deux axes de symétrie.

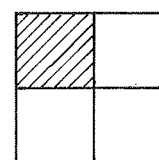
La disposition d'un seul carreau sur un carré de la grille permet de déterminer les différentes figures ayant deux axes de symétrie (médianes ou diagonales) ou quatre axes de symétrie.



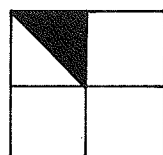
c) Figures ayant un centre de rotation mais pas d'axes de symétrie.

- Figure ayant un centre de rotation d'un quart de tour

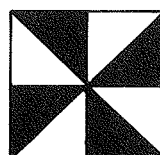
La connaissance de la position d'un seul carreau permet de déterminer complètement la figure.



En fait la position suivante



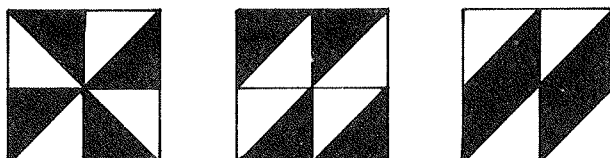
conduit à



Les autres positions conduisent ou à la même figure à une symétrie près ou à des figures qui possèdent des axes de symétrie.

- Figure ayant un centre de rotation d'un demi-tour.

La position de deux carreaux détermine entièrement la figure ce qui produit 16 figures dont il faut en enlever quatre correspondant à deux carreaux posés symétriquement par rapport à une médiane, les douze restant s'apparient quatre par quatre et conduisent aux trois figures.



La première a déjà été trouvée précédemment, ce qui n'est pas étonnant puisque une figure invariante par quart de tour, l'est aussi par demi-tour.

En résumé nous pouvons dresser le tableau suivant.

Nbre de figures 6 figures	Caractéristiques	Nbre de fois ou elle apparaît
6	axe de symétrie : médiane	24
6	axe de symétrie : diagonale	24
1	axes de symétrie : deux médianes	2
1	axes de symétrie : deux diagonales	2
2	axes de symétrie : deux médianes et deux diagonales	2
1	centre de rotation : quart de tour	2
2	centre de rotation : demi-tour	8
19		64

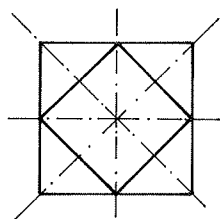
Il reste $256 - 64$ c'est-à-dire 192 figures n'ayant ni symétries ni autres rotations. On peut donc prévoir, puisque de telles figures sont comptées 8 fois (voir paragraphe 1) qu'il reste $\frac{192}{8}$ donc 24 figures différentes à une rotation ou symétrie près.

III – FIGURES N'AYANT NI AXE DE SYMETRIE NI CENTRE DE ROTATION.

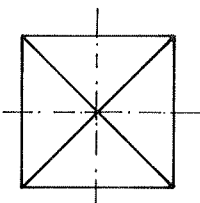
On peut penser à faire une recherche exhaustive à partir des dispositions des différents carrés. Mais on peut remarquer que la position des **diagonales** des carrés bicolores va déterminer les différentes dispositions à une symétrie ou rotation près.

Dans une première étape nous allons rechercher parmi les $2 \times 2 \times 2 \times 2$ soit 16 dispositions possibles, celles qui sont distinctes à une symétrie droite ou rotation près ce qui donne

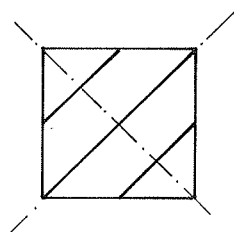
Deux figures ayant quatre axes de symétrie



que nous trouverons chacune une seule fois

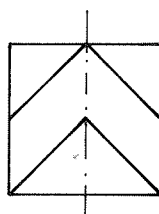


Une figure ayant deux diagonales comme axes de symétrie



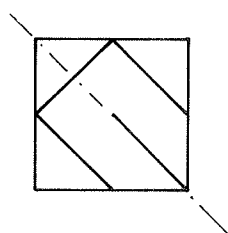
que nous trouverons deux fois

Une figure ayant une médiane comme axe de symétrie

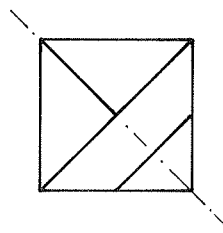


que nous trouverons quatre fois

Deux figures ayant une diagonale comme axe de symétrie

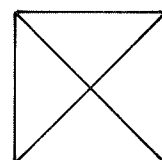
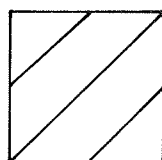
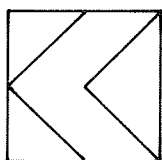
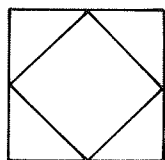


que nous trouverons chacune quatre fois

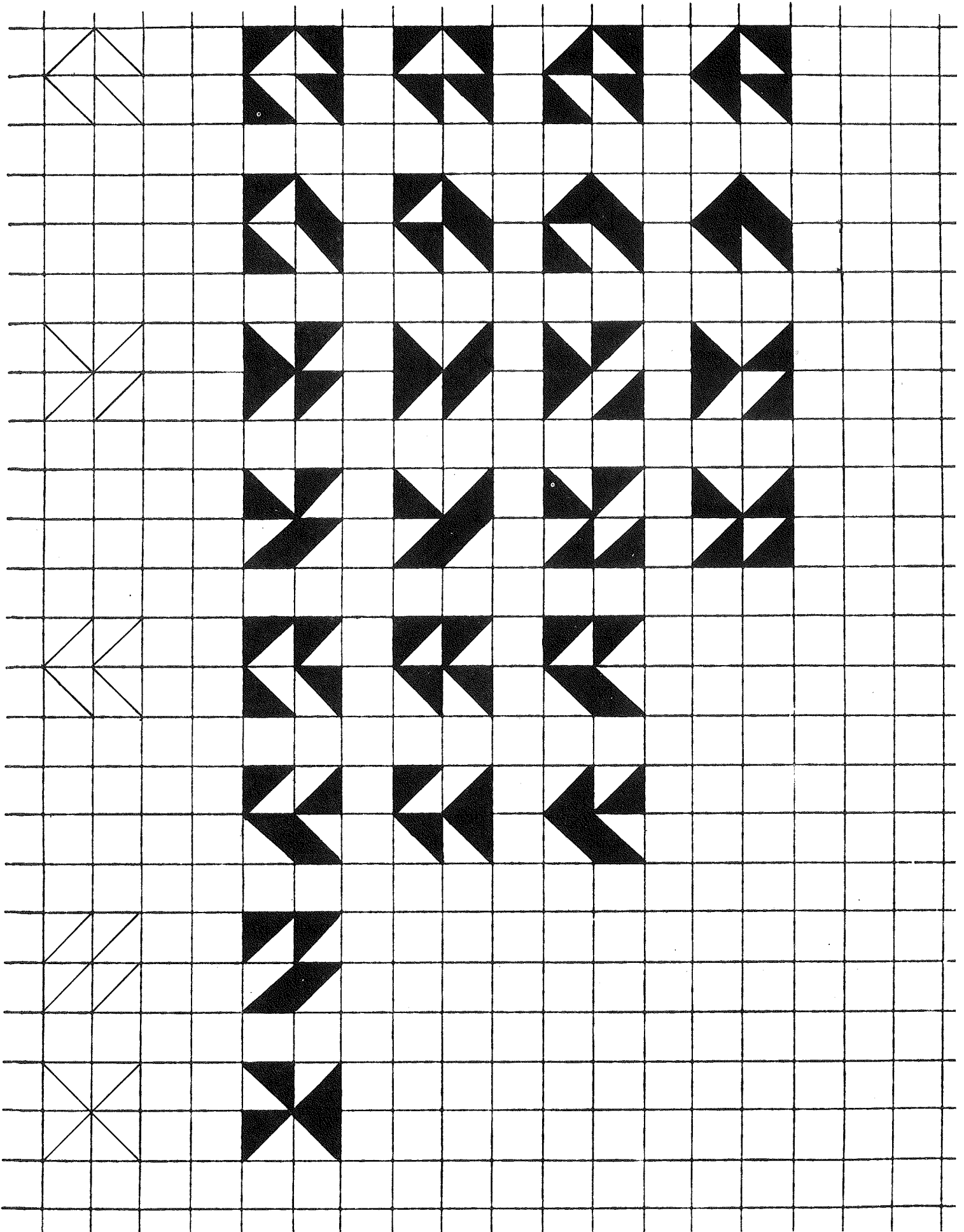


Ces six figures de base engendrent donc $1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 4$ c'est-à-dire les 16 figures précédentes : il est donc inutile d'en chercher d'autres.

Ces six dispositions de diagonales permettent à présent de déterminer les 24 dispositions annoncées précédemment (voir p. 40). Il est à noter que les quatre dispositions suivantes permettent de retrouver les figures ayant certains axes de symétrie ou un centre de rotation (voir p. 38).



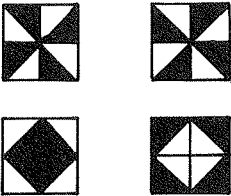
Figures n'ayant aucun axe de symétrie ni centre de rotation.



	Figures ayant quatre axes de symétrie	Figures ayant deux axes de symétrie	Figures ayant un axe de symétrie	Figures ayant un centre de rotation mais pas d'axes de symétrie
			   	
			   	 
				
	 		  	

CONCLUSION.

Nous avons donc trouvé $24 + 19$ soit 43 figures différentes à une rotation ou symétrie près, ce qui rend la recherche raisonnable. Cependant à l'école élémentaire, comme nous avons pu le remarquer dans des articles précédents, si deux figures qui se déduisent par rotation sont perçues par les enfants comme étant "les mêmes", ce n'est pas pareil pour deux figures se déduisant par symétrie droite. Si nous cherchons les figures distinctes à une rotation près, il nous faut chercher les figures ayant un centre de rotation. Compte-tenu du tableau fait dans le paragraphe 3 nous pensons établir le tableau suivant :

Nombre de figures	Caractéristique	Nombre de fois où elles apparaissent
4	centre de rotation d'un quart de tour 	$4 \times 1 = 4$
6	centre de rotation d'un demi-tour 	$6 \times 2 = 12$
10		16

Finalement il reste $256 - 16$ soit 240 fig. n'ayant pas de centre de rotation, donc que l'on trouve quatre fois. Il en résulte qu'il y a $\frac{240}{4}$ soit 60 figures distinctes à une rotation près, donc au total 70 figures, ce qui reste toutefois un nombre élevé si on veut en faire une étude exhaustive.

Un certain nombre d'articles sur les carrés bicolores sont parus depuis quelque temps, notamment dans les brochures suivantes :

- Géométrie à l'école élémentaire – MORDELET – C.D.D.P. de St Etienne.
- Géométrie et Travail manuel – Brochure de l'IREM de Lyon.
- Bulletin de l'IREM de Nantes (en particulier sur l'utilisation des carrés bicolores au cours préparatoire – un article de M. DUFOUR, détaillant un travail fait avec des normaliens portant sur une partie de l'article précédent).