

VU DANS LES CLASSES
COMBIEN Y-A-T-IL DE GRAINS DANS 1 Kg DE RIZ ?

par Claude Pariselle

Les séquences décrites ici se sont déroulées dans la classe de C.M.₁ de Mme VIDAL (Ecole Pasteur à Chambéry) du 23 novembre 78 au 17 janvier 79, à raison de deux séances de une heure par semaine.

Il s'agissait, dans une situation dont le traitement est fortement simplifié par l'emploi du modèle de proportionnalité :

- 1 — de voir dans quelle mesure ce modèle est spontanément utilisé par les enfants de début de C.M.₁
- 2 — de contribuer à sa construction pour les enfants n'ayant pas achevé celle-ci.

La proportionnalité est en effet souvent présentée comme une nouvelle règle à appliquer (ou à appliquer **selon les cas**, ce qui est préférable), comme une technique qui s'accomplit dans un tableau (de la même façon que la division "s'exécute sur une potence".....).

Or l'introduction d'une technique n'implique pas forcément la construction d'un nouvel outil.

Cette dernière se fait par nécessité, à travers le vécu d'une situation dont les outils déjà acquis ne permettent pas de se sortir (l'enfant aboutissant soit à une contradiction, soit à une impossibilité matérielle comme on le verra ici).

Voilà pourquoi il nous* a paru intéressant d'expérimenter un travail en C.M.₁ à partir de l'idée trouvée dans une fiche Nuffield (série verte) sur laquelle il était simplement écrit : "Combien de grains de riz y-a-t-il dans 1 Kg ?

(*) Equipe E.L.E.M. (groupe C.M.) de l'I.R.E.M. de Grenoble.

Voici comment a été développée cette idée en collaboration avec Madame VIDAL :

JEUDI 23-XI (1 h.30)

Les enfants (26) sont répartis en sept groupes de 3 ou 4 élèves. La maîtresse * distribue à chaque groupe un paquet de 1 Kg de riz (de même qualité pour tous les groupes) et donne les consignes :

- Il s'agit de répondre le mieux possible à la question : "Combien y-a-t-il de grains de riz dans ce paquet de 1 Kg ?".
- On peut faire tout ce que l'on veut avec le riz (sauf le renverser par terre !).
- On peut demander n'importe quel instrument à la maîtresse qui tâchera de le trouver dans l'école.

Au bout de cinq minutes, les premières demandes arrivent :

- Une cuillère (demande non prévue, mais le groupe se satisfait d'un petit pot).
- "Quelque chose qui pèse 1 g." (Frank explique que c'est pour pouvoir comparer avec un grain de riz).
- Un verre à mesure de pâtisserie (là encore ce n'était pas prévu, mais, à défaut de verre à mesure, le groupe pense pouvoir utiliser la série des capacités).
- Une balance et des poids.

A partir de ce moment, la plupart des groupes demandent d'une part une balance et des poids, d'autre part des petits pots.

Cependant, seuls deux groupes (② et ③) ont déjà l'idée à peu près claire d'une méthode liée à la proportionnalité. Tous les autres groupes passent par une longue période de tâtonnement. La réflexion semble s'organiser autour de deux pôles :

1) à travers un début de comptage, il apparaît qu'il faut déjà beaucoup de temps pour compter les grains d'une toute petite quantité de riz (que les lecteurs incroyables essayent !).

2) il y a sur la table des outils (balance et petits pots) implicitement liés aux notions de masse et de volume, mais comment s'en servir ?

La construction d'une méthode est assez typique pour le groupe ⑧ (voir plus loin). Leur récit fait apparaître nettement comment a "mûri" leur idée à travers toute une première phase de comptage.

(*) Ce terme sera employé pour désigner indifféremment les deux "maîtresses".

Au bout d'une heure de travail, c'est la mise en commun : chaque rapporteur raconte tout ce que son groupe a fait.

Voici un résumé du travail de chaque groupe.

- Groupe①:** Ils prennent une balance, puis renoncent à s'en servir.
Ils se mettent alors à compter les grains en se partageant le travail.
Au bout d'un moment, Sandra remplit une petite capacité avec 900 grains et commence à mesurer en écrivant sur sa feuille : 900 - 900 - 900 - 900
- Groupe②:** Ils commencent à peser le riz (sans compter les grains) puis délaissent la balance.
Carole et Cécile se mettent ensuite à compter le nombre de grains nécessaires pour remplir la même petite capacité. L'une trouve 800, l'autre 802. Elles décident alors qu'une petite capacité pleine équivaut à 800 grains et elles utilisent celle-ci pour mesurer le riz en marquant chaque fois 800 sur une feuille.
- Groupe③:** Elles mesurent le riz avec la plus grande capacité "On a trouvé douze et trois-quarts, enfin à peu près trois quarts".
Chacune pose ensuite devant elle une mesure de riz et commence à compter.
(Elles ont l'intention de comparer leurs résultats, mais, d'après ce qu'elles disent, il s'agit surtout de contrôler les erreurs de manipulation ou de comptage).
Voyant que le comptage est trop long, elles ne changent pas leur instrument de mesure, mais elles se groupent par deux, puis par quatre (renonçant à la comparaison des résultats).
"Quand on aura fini de compter, on va multiplier par douze, mais il faudra nous expliquer comment on multiplie par trois-quarts".
- Groupe④:** Après avoir renoncé à se servir de la balance, ils décident de compter le plus de grains possibles. Ils nous montrent une série de petits pots avec chacun une étiquette indiquant le nombre de grains (1247, 930, . . .).
Ils envisageaient de compter tous les grains, mais, après avoir entendu les autres groupes, ils disent qu'ils vont se servir "d'un petit pot plein jusqu'au bord".
- Groupe⑤:** Ils entament tout de suite un travail de dénombrement (chacun d'eux compte des grains — ils en viennent d'ailleurs rapidement à les compter cent par cent — et Marie inscrit au fur et à mesure les nombres de grains comptés) très efficace.
Au bout d'un moment, ils pèsent les 1457 grains qu'ils avaient comptés et constatent que cela fait 37 grammes. [Une discussion avec eux montre qu'à cette étape, ils ne savent pas comment ils pourraient exploiter ce résultat — ou un résultat de ce type, même plus simple].
Ils laissent alors grains et poids sur la balance et continuent à compter (rajoutant sur les plateaux le grain compté et des poids pour équilibrer, ceci plusieurs fois).
Puis l'envie leur vient de compter assez de grains pour faire 100 grammes (ils arrivent à 4000 grains).

Et c'est seulement à ce moment là qu'ils formulent une hypothèse : "Maintenant, chaque fois qu'on pèsera 100 g de riz, on marquera 4000 grains".

Plus tard l'un d'entre eux ajoute : "Je **crois** qu'on en aura pour dix fois". Et **encore** plus tard : "Je **crois** qu'on va trouver 40 000 grains".

Groupe⑥: Après des hésitations pour le choix d'une méthode, ils comptent les grains de riz et arrivent tous ensemble à 1 150 grains. (Franck explique que, pour aller plus vite, il s'est servi du capuchon de son stylo-bille qui contient 20 grains de riz). Ils pèsent les 1 150 grains, trouvent 27 grammes, et décident qu'ils écriront 1 150 chaque fois qu'ils pèseront 27 grammes de riz.

Groupe⑦: Comme le groupe ④, ils envisageaient de compter tous les grains ; mais après cette mise en commun ils décident d'utiliser "un gobelet plein à ras-bord".

LUNDI 27-XI (1 h.)

La séance est à nouveau consacrée entièrement au travail de groupe.

L'étape de tâtonnement est maintenant terminée ; il s'agit d'achever les manipulations, de faire les calculs nécessaires pour répondre à la question, et de rédiger un résumé du travail dans chaque groupe.

Voici ce qui a été noté à ce sujet :

Groupe②: Ayant terminé rapidement (voir le compte rendu en annexe), ils décident de peser le contenu de leur "mesure", puis de recommencer l'évaluation du nombre total de grains de riz en se servant de cette pesée. Ils utilisent une méthode analogue à celle du groupe ⑥ (décrite ci-dessous) et trouvent un deuxième résultat : 52 800 grains.

Groupe③: La maîtresse les fait travailler avec l'opérateur $\times \frac{3}{4}$ d'abord sur des dessins, puis sur des nombres simples. Elles calculent alors le nombre de grains de riz correspondant aux trois-quarts de leur mesure de la façon suivante :

la moitié de 4000 c'est 2000	la moitié de 2000 c'est 1000
" 200 c'est 100	" 100 c'est 50
" 80 c'est 40	" 40 c'est 20
" 4280 c'est 2140	" 2140 c'est 1070

Les trois-quarts de 4280 c'est $2140 + 1070 = 3210$

Groupe ⑥: Le travail se fait de façon très organisée à partir de l'évaluation : 1 150 grains pour 27 grammes. L'un pèse 27 grammes de riz, le deuxième écrit sur une feuille + 1 150, le troisième range le riz déjà pesé et l'on recommence.

Comme c'est assez long, la maîtresse intervient pour demander si on peut prévoir combien il y a de grains dans 270 grammes de riz. Ils savent répondre, se servent de cette remarque, puis reviennent à des pesées de 27 grammes lorsqu'il ne reste plus assez de riz. Enfin ils comptent les derniers grains.

On peut noter aussi que les groupes ④ et ⑦ fonctionnent de façon très organisée et sans intervention extérieure. Ils semblent donc avoir bien assimilé la méthode suggérée par le récit des autres groupes.

On trouvera (en annexe 1) les comptes rendus des groupes ② ③ ⑥ et ⑦ .

JEUDI 30-XI (1 h.)

Tout d'abord un enfant de chaque groupe expose la façon dont le travail s'est terminé et les résultats obtenus.

Au fur et à mesure, on écrit au tableau les résultats des groupes.

A l'occasion de l'exposé du groupe ③ , la maîtresse entame avec toute la classe un premier travail sur la notion de "trois-quarts". Elle demande d'abord à tous les enfants de donner une évaluation intuitive des trois-quarts de 800 . Les réponses les plus fréquentes dans la classe sont 750 et 300. La maîtresse lance alors la discussion sur la moitié, le quart (que presque tous les enfants définissent comme étant "la moitié de la moitié"), et, après cette mise au point, toute la classe vérifie les résultats du groupe ③ .

LUNDI 4-XII (1 h.)

Les derniers groupes font à leur tour leur compte rendu, et on complète au tableau la liste des résultats :

Groupe 1 :	54 000
Groupe 2 :	{ 1ère méthode : 51 222 2ème méthode : 52 800
Groupe 3 :	54 570
Groupe 4 :	45 448
Groupe 5 :	40 000
Groupe 6 :	40 200
Groupe 7 :	43 520

La discussion s'engage sur les écarts entre les résultats mais aucune référence n'est faite aux imprécisions de mesures liées soit à l'usage de la balance, soit à la façon de remplir les "mesures".

Les explications données par les enfants sont les suivantes :

- * "On s'est peut-être trompé en comptant ou en faisant nos calculs".
- * "On n'a peut-être pas tous fait pareil quand il y avait des grains cassés".
- * "Il y en a qui ont peut-être perdu des grains, ou qui en ont mangé" (!).

{ JEUDI 7-XII (1 h.)
 { LUNDI 11-XII (1 h.)
 { JEUDI 14-XII (1 h.)

Après la phase de manipulation, trois séances de travail collectif sont consacrées à mettre en œuvre plus systématiquement le modèle de proportionnalité, et à le faire fonctionner directement sur des nombres en abandonnant le matériel.

La maîtresse fait travailler toute la classe à partir de l' "hypothèse" du groupe ⑤ (4 000 grains pour 100 grammes) puis de celle du groupe ① (900 grains pour une mesure), enfin de celle du groupe ⑥ (1 150 grains pour 27 grammes) [Cette dernière étant plus complexe dans la mesure où le coefficient de proportionnalité n'apparaît pas].

Les enfants doivent chaque fois utiliser l'hypothèse et les propriétés de linéarité pour répondre à une série de questions.

Dès les premières questions les résultats sont organisés en tableaux.

Voici par exemple le tableau obtenu à la fin de la deuxième séance (les nombres soulignés correspondent aux questions posées par la maîtresse) :

nbre de mesures	1	<u>10</u>	<u>2</u>	<u>5</u>	<u>20</u>	<u>30</u>	3	<u>15</u>	50	$10\frac{1}{2}$
nbre de grains	900	9000	1800	4500	18000	27000	<u>2700</u>	13 500	<u>45 000</u>	<u>9450</u>

A la fin des trois séances, cinq enfants ont encore de grosses difficultés. Par contre, une bonne partie des élèves est à même de proposer, quand cela est possible, plusieurs méthodes de calcul. (Par exemple, pour calculer le nombre de grains correspondant à 15 mesures, ils proposent 900×15 ou 2700×5 ou $9000 + 4500$ ou 4500×3) Quelques uns enfin ont acquis assez de maîtrise pour poser à la place de la maîtresse, des questions auxquelles on peut facilement répondre.

LUNDI 18-XII (1 h.)

La maîtresse propose de reprendre l'hypothèse du groupe ⑥. Les enfants reconstruisent un tableau, l'enrichissent.

Puis la maîtresse leur propose de continuer à l'enrichir en essayant de "tomber le plus près possible de 1 000 grammes" et de trouver le nombre de grains correspondant. (ce qui permettra de vérifier les résultats du groupe ⑥).

Les enfants sont assez actifs et, assez vite, plusieurs d'entre eux arrivent à 999 grammes avec un calcul correct du nombre de grains correspondant.

Ils y parviennent d'ailleurs par plusieurs méthodes.

En voici deux :

grammes	27	270	540	1080	1026	999
grains	1150	11500	23000	46000	43700	42550

$$\begin{array}{r}
 270 \\
 + 270 \\
 \hline
 540 \\
 + 270 \\
 \hline
 810 \\
 + 27 \\
 \hline
 837 \\
 + 27 \\
 \hline
 864 \\
 + 27 \\
 \hline
 891 \\
 + 27 \\
 \hline
 918 \\
 + 27 \\
 \hline
 945 \\
 + 27 \\
 \hline
 972 \\
 + 27 \\
 \hline
 999
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11500 \\
 + 11500 \\
 \hline
 23000 \\
 + 11500 \\
 \hline
 345000 \\
 \\
 1150 \\
 \times 7 \\
 \hline
 8050 \\
 \\
 34500 \\
 + 8050 \\
 \hline
 42550
 \end{array}$$

La séance se termine par un travail collectif :

On évalue le nombre de grains correspondant à un gramme (entre 40 et 50 grains).

On en déduit une approximation du nombre de grains correspondant à un kilogramme (42 600), et l'on compare avec le résultat du groupe ⑥ (légèrement différent).

JEUDI 11-I (1 h.)

La maîtresse entame un travail sur les agrandissements et les réductions *.

Elle distribue la feuille jointe en annexe ainsi qu'une feuille quadrillée de la même façon mais comportant 13×18 carreaux au lieu de 26×18 .

Elle demande aux enfants de dessiner sur cette dernière une "photographie" du camion. Lorsque tous les enfants ont terminé, la maîtresse lance une discussion collective sur les dessins obtenus, discussion qui entraîne une reformulation de la consigne : il s'agit maintenant de dessiner la "photographie" du camion obtenue en réduisant les dimensions de moitié.

La séance se termine par la construction d'un tableau de dimensions du modèle et de la "photographie", qui permet aux enfants de vérifier leur dessin.

En prévision du travail du 17 janvier :

Pendant cette séance, trois groupes de deux enfants se sont relayés de 9 h. à 9 h.30 pour compter toutes les voitures et camions qui sont passés dans la rue (dans les deux sens).

La maîtresse a simplement recueilli le résultat (302) qui sera exploité plus tard.

LUNDI 15-I (1 h.)

Sur une feuille quadrillée (13×18 carreaux toujours de même dimension), les enfants doivent aujourd'hui faire un agrandissement "photographique" du chien (le plus grand possible compte tenu des dimensions de la feuille).

Plusieurs enfants doublent les dimensions, d'autres les triplent (avec plus ou moins d'erreurs) ; deux enfants essayent de les quadrupler et se rendent compte qu'il n'y a pas assez de place. Lorsqu'ils ont terminé, une mise en commun permet de discuter des différentes solutions et de choisir la seconde.

Là encore un tableau permet de résoudre quelques difficultés.

Modèle	1	2	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
agrandissement	3	6	$6 + 1\frac{1}{2}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$ $7\frac{1}{2}$	$3 + 1\frac{1}{2}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$ $4\frac{1}{2}$

(*) Cf. l'article de R. NEYRET dans JN n° 13.

JEUDI 17-I (1/2 h.)

La maîtresse rappelle que le jeudi précédent, de 9 h. à 9 h.30, les enfants avaient compté 302 passages de voitures dans la rue.

M. — "Et si nous avions compté de 9 h. à 10 h. ?"

E. — "On aurait trouvé environ 604"

M. — "Et si nous nous étions relayés pour continuer à compter jusqu'au lendemain matin 9 h. ?"

E. — "On ne peut pas tellement savoir"

— "Ca ferait peut-être seulement 1 000 parce que la nuit il y a moins de voitures"

Il s'ensuit toute une discussion sur les heures de pointe et sur le trafic nocturne, qui montre que tous les enfants sont bien convaincus que le flux des voitures n'est pas du tout régulier.

Cependant une élève dit qu'un tableau pourrait peut-être être utile, et la maîtresse lui demande de le faire avec l'aide de toute la classe. Elle va au tableau, et le travail se fait facilement, et pratiquement sans intervention de la maîtresse.

nombre d'heures	$\frac{1}{2}$	1	10	20	4	24
nombre de voitures	302	604	6040	12 080	2416	14 496

M. — "C'est très bien, on va pouvoir écrire au service des Ponts-et-Chaussées. Ca leur sera très utile de savoir qu'il passe chaque jour 14 496 voitures dans la rue Pasteur"

E. — "Ah! non parce que ce n'est pas sûr"

M. — "Alors on leur écrira qu'il passe **environ 14 496** voitures"

E. — "Non. Il faudrait plutôt qu'on vienne compter la nuit pour vérifier".

M. — "Alors vous ne voulez pas leur écrire ?"

E. — "On pourrait leur écrire, mais on leur dirait seulement que de 9 h. à 9 h.30 il passe 302 voitures".

— "Non, on leur dirait que jeudi 11 janvier, de 9 h. à 9 h.30, on a compté 302 voitures. Et je crois que ça ne leur servira pas tellement"

Pour finir, quelques questions :

■ Les enfants qui ont déjà acquis le modèle de proportionnalité ("intuition" ? rôle du milieu familial ? rôle préparatoire de la scolarité antérieure ?) comprennent très facilement comment les propriétés de linéarité se traduisent dans les techniques de calcul.

Par contre, tant que ce modèle n'est pas en voie de construction, il paraît clair qu'on ne peut au'apprendre aux élèves des procédés qu'ils sauront à la rigueur faire fonctionner mais auxquels ils ne sauront faire appel au moment opportun.

Cela pose donc les questions fondamentales :

- Comment se construit le modèle de proportionnalité ?
- Comment le maître peut-il favoriser cette construction ? *

Il est évident que des situations dont le traitement est fortement simplifié par l'emploi des propriétés de linéarité stimulent l'enfant dans la construction du modèle.

A cet égard la situation proposée ci-dessus (les grains de riz) est relativement satisfaisante.

Cependant elle comporte un gros inconvénient : elle ne nécessite vraiment que l'emploi de ce que nous appellerons la **pré-proportionnalité** c'est-à-dire l'hypothèse qu'il y a le "même nombre" de grains de riz dans chaque unité (de volume ou de masse). [L' "unité" en question pouvant être le petit pot, ou 27 grammes, etc.]. On remarque d'ailleurs que, **lors de la manipulation**, plusieurs groupes en sont restés là.

Exemples : • Le groupe 1 écrit $900 + 900 + 900 \dots$

• Malgré la lenteur des pesées, le groupe ⑥ ne cherche pas à savoir "combien de fois 27 g. dans 1 Kg ?".

D'autre part, ce n'est que sur sollicitation de la maîtresse qu'il passe à des pesées de 270 grammes.

Pour pallier à cet inconvénient, une nouvelle situation va être proposée dans une autre classe de C.M.₁ : la maîtresse distribuera un paquet de riz de **masse inconnue** à chaque groupe et demandera de trouver combien il y a de grains de riz **dans 1 Kg**. De cette façon toute technique pertinente nécessite l'emploi de l'hypothèse : le nombre de grains de riz est proportionnel à la masse.

■ Il faut noter aussi que ce type de situation pose les problèmes de l'approximation . Cela fait partie de sa richesse mais cela demande de **prendre des précautions**. En particulier, il faut aider les enfants à saisir clairement la différence entre la situation "grains de riz" (dans laquelle l'hypothèse de la constance du nombre de grains est une **approximation**) et la situation "passages de voitures (dans laquelle l'hypothèse de la constance du nombre de passages est à rejeter).

Lors du travail décrit ci-dessus, la maîtresse en a parlé aux enfants. Ceux-ci ont alors dit en substance :

— Il peut passer 302 voitures dans une demi-heure et 50 dans une autre ; ça dépend du moment.

(*) La réponse ne sera pas dans le prochain numéro . . . !

— Dans le petit pot ce n'était pas toujours exactement 800 grammes mais si on en avait mis 100 au lieu de 800 en s'en serait rendu compte.

Ce problème de l'approximation se pose d'ailleurs de façon plus large : à cet égard, la discussion du lundi 4 décembre sur la disparité des résultats obtenus a été assez décevante. Mais il ne faut pas négliger les difficultés que cache la notion d'incertitude de mesure.

■ Enfin il est intéressant de constater que des contradictions peuvent provisoirement cohabiter dans la réflexion des enfants. Par exemple, lorsque les enfants donnent un résultat qu'ils savent approximatif, ils ne l'arrondissent pas toujours ("54 570 peut-être" ; "environ 604").

Autre exemple plus frappant : lors de la discussion sur le nombre de passages de voitures, les enfants ont à la fois parlé des variations du trafic, et collaboré à la construction du tableau. (Il est d'ailleurs amusant de voir comment la proposition de lettre au service des Ponts-et-Chaussées a contribué à résoudre cette contradiction).

GROUPE 2

Nous avons pris une ^{petite} mesure
 qui contenait 800 grains de
 riz. Nous avons pris la
 mesure puis l'avons remplie
 à rebord; nous avons
 compté une mesure qui
 contenait (800 grains),
 puis chaque fois qu'on
 avait rempli ^{la mesure} nous avons
 compté 800 + 800 + 800 ----
 nous avons fait 64 fois (800)
Total: 51 222

GROUPE 6

Pour pouvoir calculer combien
 il y a de grains de ~~ry~~ riz dans un
 kg. Nous avons calculé que il
 y avait 1 150 grains dans 27 g, ~~en~~
 procédant comme cela. Il y a
 40 200 grains dans un kg. (appro-
 ximativement)

GROUPE 3

33

1) Combien y a-t-il de grains de riz dans un kg? ~~56 670~~ peut-être.

54 570

Annexe 1

Car 12 décilitres $3/4$ c'est un kg.

Nous avons pris chacune une mesure de d'un décilitre pour compter les grains et comparer. Impossible, c'est trop long. Alors nous nous sommes groupées par deux en gardant chacune une mesure par groupe.

puis on a compté par cent. Mais c'était long encore! Nous avons cependant continué pour trouver un décilitre.

Lorsque nous l'avons trouvé, nous avons compté combien il y avait de décilitre dans un kg. Il y en avait 12, $3/4$.

Un décilitre a 4 280 grains multipliés par 12 cela donnait 51 360.

Ce nombre multiplié par $3/4$ donne

~~56 670~~ 54 570

GROUPE 7

notre groupe a compté ^{des grains de riz} ~~des grains de riz~~ mais, ça allait trop lentement.

Alors, on a fait autrement, on n'a rempli un pot de riz on n'a renversé le pot sur la table et on n'a compté 1373 grains dans un pot.

On n'a multiplié par 10 et 24 et on n'a trouvé ~~13 730~~ 34 325.

