

SOUSTRACTION AU CE₁

par Marie Thérèse CHABROULET

Dans cet article vous ne trouverez pas l'étude des situations "soustractives" car la diversité de ces situations pourrait faire penser qu'il y a plusieurs soustractions. C'est ainsi que les auteurs des instructions de 1945 concernant le cours préparatoire écrivaient :

"Une particularité intéressante de beaucoup de réalisations matérielles d'additions est qu'elles constituent en réalité un apprentissage de la soustraction ou plus précisément de la recherche d'une partie inconnue d'une somme dont on connaît l'autre partie ; comment composer 9 avec deux nombres dont l'un est 6 ?

La soustraction peut aussi être une recherche de restes : j'ai 9 pommes, j'en donne 6, combien en reste-t-il ?

Ce peut être encore une comparaison : un crayon a 9 centimètres, un autre 6 centimètres, quel est le plus grand et quelle est leur différence ?

Dans l'équipe ELEM de l'IREM de Grenoble nous considérons qu'il n'existe qu'une seule soustraction. Toutes ces situations "soustractives", d'apparence fort diverses, pourront être modélisées par les élèves du CE₁ par une "addition à trou" du type :

$$9 = 6 + \dots, \quad 9 = \dots + 6, \quad 6 + \dots = 9 \quad \text{ou} \quad \dots + 6 = 9$$

dès qu'ils se situent au niveau numérique.

La recherche du modèle adéquat pour traiter une situation déborde le cadre de la soustraction et n'est pas l'objet de cet article.

Les activités décrites ci-dessous ont été réalisées en 1976-77 et en 1977-78 dans divers CE₁ de l'Isère travaillant en liaison avec l'IREM de Grenoble et avec l'INRDP *. L'expérience acquise les années précédentes a conduit notre équipe à :

(*) Le document de recherche numéro 3 du CE₁ de l'Institut National de Recherche Pédagogique (INRDP) a servi de base à la réflexion de notre équipe.

1 – Proposer des situations "soustractives" dès le premier trimestre, au cours de l'étude de l'addition. Toutes les situations envisagées pourront être modélisées par :

$$a + \dots = b \quad , \quad \dots + a = b \quad , \quad b = a + \dots \quad \text{ou} \quad b = \dots + a$$

La modélisation de ces situations est trouvée directement par certains enfants, pour d'autres il est indispensable de les représenter, la recherche de représentations pertinentes constitue une partie de l'activité tout aussi importante que le calcul.

2 – Rechercher un moyen commode pour visualiser les nombres et les calculs effectués sur ces nombres de façon à aider les enfants dans l'élaboration de procédés de calcul très divers (mentaux et écrits) de différences.

3 – Retarder l'introduction du signe moins dont on pourrait pratiquement se passer au CE1, les enfants calculent des différences, sans le savoir, grâce à la distance de deux nombres.

4 – N'envisager le calcul de distances qu'à partir du troisième trimestre au moment où la numération est bien en place, la table d'addition mémorisée et la technique de l'addition maîtrisée par la plupart des enfants.

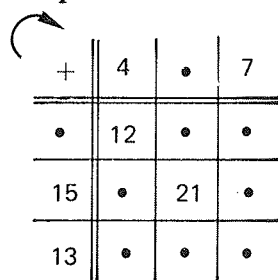
I – ACTIVITES LIEES AU TRAVAIL SUR L'ADDITION.

Ces activités sont proposées dès le premier trimestre et se poursuivent tout au long du second trimestre parallèlement à des activités géométriques et au travail sur la multiplication.

Remarque : Les numéros des paragraphes suivants n'indiquent pas un ordre chronologique des activités mentionnées.

1.1 – Compter de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10, de 100 en 100 etc....., dans un sens et dans l'autre, à partir d'un nombre donné éventuellement assez grand.

1.2 – Compléter des tables partielles d'addition, par exemple :



+	4	•	7
•	12	•	•
15	•	21	•
13	•	•	•

1.3 – Retrouver des chiffres effacés dans des additions du type :

$$\begin{array}{r}
 38 \\
 + \cdot 1 \\
 \hline
 5 \cdot
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \cdot \\
 + 13 \cdot \\
 \hline
 \cdot \cdot 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 \cdot 72 \\
 + 31 \cdot \\
 \hline
 15 \cdot 7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \cdot \\
 + 26 \\
 \hline
 84
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \cdot 5 \\
 + 184 \\
 \hline
 15 \cdot
 \end{array}$$

Certaines additions proposées sont "impossibles"

1.4 – Compléter des égalités du type :

$$a + \dots = b$$

$$\dots + a = b$$

$$b = a + \dots$$

$$b = \dots + a$$

Les égalités peuvent être données par la maîtresse ou trouvées par les enfants pour résoudre les petits problèmes classiques que l'adulte résoudrait par un calcul de différence (en utilisant le signe moins).

1.4.1 – On commence par proposer des égalités dans lesquelles a, b et le nombre à trouver sont dans la table d'addition en vue d'apprendre à l'enfant à se servir de cette table et de lui faire découvrir que certaines équations n'ont pas de solution.

On peut par ailleurs utiliser des exercices de ce genre pour faciliter l'apprentissage de la table d'addition.

1.4.2 – On considère ensuite des équations dans lesquelles a, b et le nombre à trouver n'appartiennent plus forcément à la table, ces équations peuvent être facilement résolues par des moyens divers : comptine numérique, technique de l'addition . . .

par exemple :

$$19 = 17 + \dots$$

$$13 = 3 + \dots$$

$$25 = \dots + 21$$

$$\dots + 30 = 40$$

$$50 = 1 + \dots$$

$$30 = 10 + \dots$$

$$42 + \dots = 38$$

$$200 + \dots = 220$$

$$100 = 110 + \dots$$

$$12 + \dots = 45$$

Des équations "impossibles" sont proposées pour que les enfants remarquent qu'il n'y a pas de solution lorsque le "résultat" de l'addition est plus petit que l'autre nombre donné.

L'expérience montre que de nombreux enfants savent résoudre sans difficulté $19 = \dots + 17$ ou $100 = 98 + \dots$ mais restent muets devant $19 = 2 + \dots$ ou $100 = 2 + \dots$. Il ne paraît pas nécessaire de s'attarder sur cette difficulté puisque le travail ultérieur * aidera à la surmonter.

1.4.3 – Equations nécessitant la pose d'une addition

– *sans retenue* :

L'équation $145 + \dots = 179$ est résolue directement par certains enfants qui écrivent la solution sur la ligne, quant à la plupart, ils posent :

$$\begin{array}{r} 145 \\ + \dots \\ \hline 179 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} \dots \\ + 145 \\ \hline 179 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 179 \\ 145 \\ + \dots \\ \hline \end{array}$$

– *avec retenue* :

Par exemple, $15 + \dots = 42$

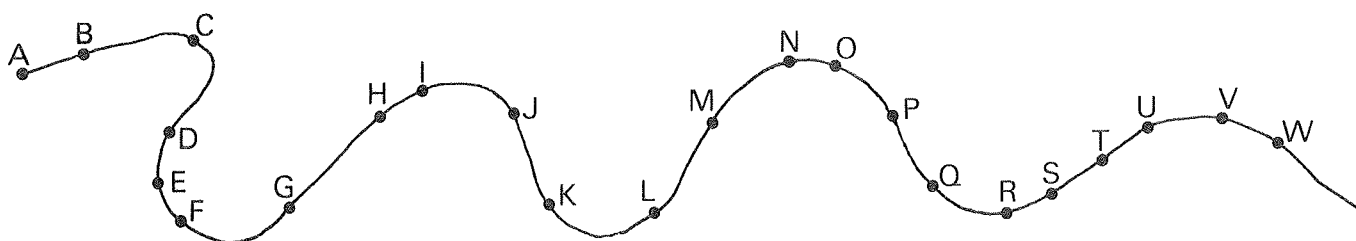
Si les équations de ce type sont rencontrées lorsque l'enfant maîtrise la technique de l'addition, il dit très souvent "5 plus quelque chose égale 2 c'est pas possible alors c'est 12", et trouve 7 pour chiffre des unités du nombre cherché. Cependant, certains enfants ne voient pas qu'ils doivent chercher 12 et non 2 dans la ligne du 5 de la table d'addition ; pour franchir cette étape différentes façons peuvent être envisagées, en voici une. L'essai successif de tous les naturels de 0 à 9 pour chiffre des unités du nombre cherché montre qu'un seul d'entre eux convient (ici 7). On recommence ensuite pour le chiffre des dizaines ; si l'enfant obtient alors 37 on lui demande de calculer $15 + 37$, il trouve 52, ce résultat lui prouve que 37 ne convient pas. Une discussion montre que pour déterminer le chiffre des dizaines du nombre cherché il faut tenir compte du fait que $5 + 7$ égale 12 et non 2. C'est à la suite de nombreux tâtonnements sur divers exemples que les enfants élaborent une technique de l'"addition à trou".

(*) Se reporter à la page 14.

II – DISTANCE DE DEUX NOMBRES.

L'article "Activités sur quadrillage au CE1" de Grand IN n° 15 décrit dans le détail les activités géométriques conduisant les enfants à déterminer la distance de deux nœuds d'un quadrillage. Ces activités ayant été faites au préalable, les enfants se sont déjà familiarisés avec la notation $d(A, B)$.

Le maître dessine au tableau :



Certains enfants voient dans ce dessin "le serpent des lettres" *, d'autres "l'alphabet sur une montagne", "des vagues", "une ficelle avec des nœuds".

Cette dernière proposition est retenue, il s'agit du dessin d'une ficelle avec des nœuds, les lettres de l'alphabet servant à désigner les différents nœuds.

2.1 – Distance de deux nœuds désignés par des lettres.

Une puce saute sur la ficelle d'un nœud à l'autre, elle choisit toujours le chemin le plus court. Par exemple, pour aller de E à H, la puce ne peut pas sauter directement de E sur H mais elle doit sauter d'abord de E sur F puis de F sur G et enfin de G sur H. Elle a donc fait trois sauts. Nous disons alors que la distance de E à H est trois et nous notons :

$$d(E, H) = 3$$

Plusieurs distances sont déterminées collectivement ; on s'aperçoit que certains enfants comptent les nœuds sur lesquels passe la puce et non les sauts (ils trouvent 3 au lieu de 2 pour la distance de N à L). Ensuite individuellement les élèves complètent les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} d(F, M) = \cdot & d(T, R) = \cdot \\ d(C, P) = \cdot & d(H, S) = \cdot \\ d(S, H) = \cdot & d(A, B) = \cdot \end{array}$$

Peu d'erreurs sont relevées au cours de ce travail, ils complètent alors :

$$d(N, \cdot) = 5 \quad , \quad d(\cdot, K) = 3 \quad \text{et} \quad d(E, \cdot) = 8$$

(*) Les enfants concernés par cette activité ont déjà rencontré le "serpent des nombres" dont on parle dans l'article de Grand IN numéro 9 : "A propos de l'approche de la notion de nombre au CP".

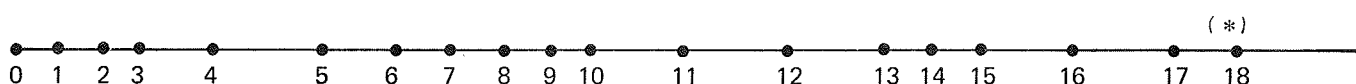
Peu d'erreurs sont relevées au cours de ce travail. Nous demandons alors de compléter :

$$d(N, \cdot) = 5 \quad , \quad d(\cdot, K) = 3 \quad \text{et} \quad d(E, \cdot) = 8$$

Les différentes solutions trouvées par les enfants permettent de voir qu'il y a deux nœuds situés à la distance 5 de N (S et I), deux nœuds situés à la distance 3 de K (N et H) mais un seul nœud situé à la distance 8 de E (M).

2.2 – Distance de deux nœuds désignés par des numéros.

On distribue à chaque enfant la feuille polycopiée suivante :



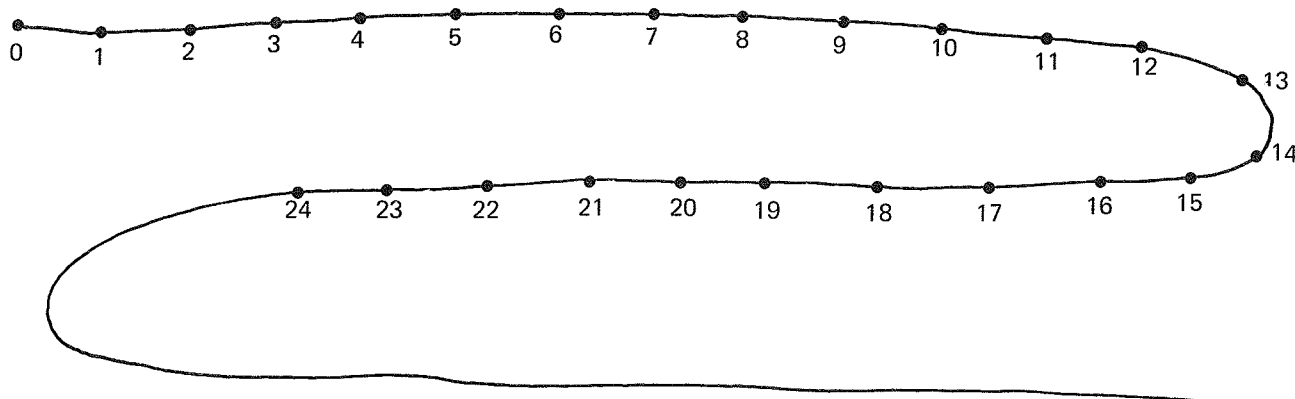
$$\begin{array}{lll} d(8, 10) = \cdot & d(14, 5) = \cdot & d(1, 11) = \cdot \\ d(0, 5) = \cdot & d(10, 0) = \cdot & d(12, \cdot) = 4 \end{array}$$

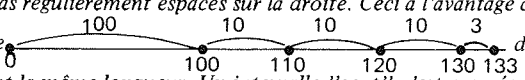
sur laquelle il doit remplacer le point par le nombre qui convient.

L'observation des enfants au cours de ce travail permet de remarquer que tous hésitent puis

- certains comptent les sauts de puce à l'aide du dessin de la ficelle à nœuds,
- d'autres "font des opérations", par exemple, pour $d(8, 10)$ trouvent 2 "parce que $8 + 2 = 10$ "
- d'autres récitent la suite des nombres et comptent sur leurs doigts les sauts de puce,
- d'autres, enfin, savent par exemple que "de 1 à 11", y a dix" ou de "10 à 0", y a dix" par référence aux exercices de comptage de dix en dix.

2.3 – Distance de deux nombres situés sur la ficelle à nœuds.



(*) On peut remarquer que les points ne sont pas régulièrement espacés sur la droite. Ceci a l'avantage de permettre par la suite d'accepter des représentations du type  dans lesquelles tous les intervalles "dix" n'ont pas nécessairement la même longueur. Un intervalle "cent" n'est pas nécessairement dix fois plus long qu'un intervalle "dix" etc.

Chaque enfant dispose de ce dessin et inscrit sur son ardoise les différentes distances proposées successivement par la maîtresse.

$d(8, 12)$

$d(19, 12)$

Pour ces deux distances la plupart des enfants comptent les sauts de puce sur la ficelle. Cependant on entend dans la classe :

”C’est facile, moi je compte pas les sauts de puce”

” $d(19, 12)$, c’est pareil que $d(12, 19)$ ”

$d(10, 20)$

Les 24 enfants de la classe trouvent dix mais leurs procédés de calcul sont fort divers. Voici les justifications formulées par les élèves :

- ”J’ai compté les sauts de puce” (14 élèves ont procédé ainsi)
- ”C’est sûr que c’est dix, parce que $10 + 10 = 20$ ” (8 enfants)
- ”Moi j’ai enlevé 10 à 20” (1 enfant)
- ”Moi j’ai fait 20 moins 10” (1 enfant)

$d(22, 22)$

Sans problème, tous les enfants inscrivent 0

(Ils avaient remarqué auparavant, sur quadrillage, que $d(A, A)$ égale zéro.)

2.4 – Distance de deux nombres situés ”près l’un de l’autre” et qu’on ne voit pas sur le dessin de la ficelle.

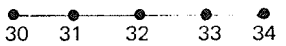
$d(30, 34)$

La plupart des enfants trouvent 4.

Voici toutes les démarches observées dans les CE₁ ayant travaillé en liaison avec l’IREM de Grenoble en 1977-78. L’observation porte sur une centaine d’enfants.

a – Les enfants comptent les intervalles situés entre 30 et 34 après avoir dessiné :

– soit une ficelle avec des nœuds qu’ils numérotent de 0 jusqu’à 34.

– soit seulement la partie de la ficelle comprise entre 30 et 34 ()

– soit le prolongement d’une ficelle avec des nœuds déjà numérotés de 0 jusqu’à 24 qu’ils complètent par des nœuds qu’ils numérotent de 25 jusqu’à 38.

b – Les enfants comptent les intervalles situés entre 30 et 34 en s'aidant soit de leurs doigts, soit de petits dessins du type $|||$ qu'ils élaborent en récitant 31, 32, 33, 34.

La plupart des erreurs relevées se trouvent chez les enfants utilisant ce procédé car très souvent ils disent 30, 31, 32, 33, 34 et lèvent ainsi cinq doigts ou dessinent cinq barres.

L'image des sauts de puce est intéressante pour ces enfants, ils comprennent qu'il ne faut pas dire 30 car la puce, en faisant son premier saut, arrive sur 31, par le deuxième elle arrive sur 32, par le troisième sur 33 et par le quatrième sur 34.

c – Les enfants comptent les intervalles situés sur leur feuille entre 20 et 24 après avoir remarqué :

”de 30 à 34 c'est comme de 20 à 24”

d – Les enfants ne comptent pas les intervalles un à un mais disent :

– ”pour aller de 30 à 34, y a 4”

– ”c'est 4 parce que $30 + 4 = 34$ ”

– ”c'est pareil que de 0 à 4”

La maîtresse demande ensuite de calculer :

d (45, 43)

d (57, 60)

d (112, 115)

d (315, 310)

Au cours de ce travail, les enfants qui avaient dessiné la ficelle en numérotant tous les nœuds à partir de 0 lors du calcul de la distance de 30 à 34 abandonnent petit à petit cette façon de faire. Nous remarquons également que plusieurs enfants utilisent spontanément la propriété de conservation de la distance par translation :

– ”de 7 à 10 ça fait 3, de 57 à 60 ça fait 3”

– ”je regarde de 12 à 15 et je trouve de 112 à 115, c'est 3”

– ”je regarde de 10 à 15 et je trouve de 310 à 315”

– ”c'est pareil que de 0 à 5”

– ”c'est 5 parce que $10 + 5 = 15$ ”

2.5 – Distance de deux nombres "loin" l'un de l'autre, l'un étant situé sur la ficelle, l'autre non.

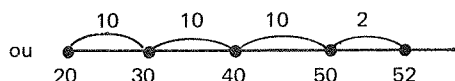
Il est nécessaire de proposer très vite ce type d'activité afin d'inciter les enfants à mettre en œuvre des procédés de calcul divers, le comptage sur les doigts ou le numérotage de tous les nœuds situés entre les deux nombres donnés n'étant plus performants.

d (20, 52)

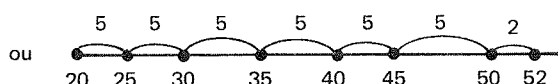
Pour le premier calcul de ce type voici de nouveau toutes les démarches observées dans les classes.

a – Des enfants utilisent un dessin de la ficelle.

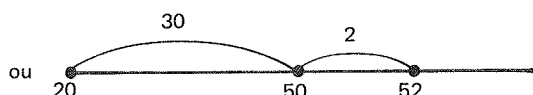
- Soit ils numérotent tous les nœuds à partir de vingt, puis comptent les intervalles (sauts de puce) de un en un.
- Soit ils ne numérotent que certains nœuds pour aller plus vite puis calculent mentalement la distance, par exemple ils dessinent :



puis ils comptent de dix en dix,



puis ils comptent de cinq en cinq,



b – Sans utiliser de dessin, certains enfants disent :

"de 20 à 50 y a 30, de 50 à 52 y a 2, c'est 32" ou

"c'est 32 parce que $20 + 32 = 52$ " ou

"j'ai calculé dans ma tête, $2 + 3 = 5$, $20 + 30 = 52$ " ou enfin

"de 20 à 30 y a 10, de 30 à 40 y a 10, de 40 à 50 y a 10, de 20 à 50 y a 30, de 20 à 52 y a 32".

c – Certains posent une addition à trou :

$$\begin{array}{r} 20 \\ + \dots \\ \hline 52 \end{array}$$

$d(17, 47)$

Pour ce calcul de distance, les mêmes procédés de calcul sont observés mais plusieurs enfants abandonnent le comptage de un en un sur le dessin de la ficelle pour le comptage de dix en dix ou pour dire c'est 30 parce que $17 + 30 = 47$.

Certains enfants remarquent "de 10 à 40 c'est 30, de 17 à 47 c'est toujours 30".

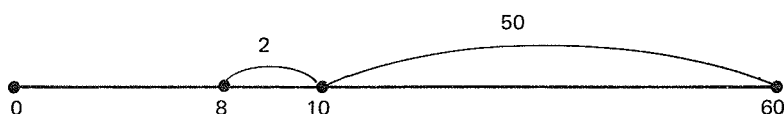
$d(60, 8)$

Dans l'une des classes observées, tous les enfants ayant trouvé les distances précédentes par addition à trou (c'est-à-dire par un raisonnement du type c'est 52 parce que $8 + 52 = 60$) abandonnent ce procédé pour utiliser le dessin de la ficelle. Nous retrouvons ici la difficulté mentionnée précédemment : à savoir qu'il est plus difficile pour les enfants de CE1 de trouver le nombre qui manque dans $2 + \cdot = 19$ que dans $17 + \cdot = 19$.

Pour ce calcul de distance, un nouveau procédé apparaît fréquemment, les enfants "reculent de 8 à partir de 60" ou "enlèvent 8 à 60" en récitant $59 - 58 - 57$ etc. et en s'aidant de leurs doigts ou de dessins de barres (| | | | | |) pour savoir quand s'arrêter.

Un enfant justifie sa réponse par :

"de 10 à 60 c'est 50, on enlève 2 de 10, on ajoute à 50 ça fait 52" explication que les autres enfants de la classe ne comprennent qu'à la lecture du schéma :



d – De nombreux calculs de distances de nombres "éloignés" l'un de l'autre sont proposés aux enfants. Ces derniers choisissent leurs procédés de calcul, mais pour compléter des égalités du type :

$$d(10, 20) =$$

$$d(150, 50) =$$

$$d(32, 22) =$$

$$d(320, 120) =$$

$$d(55, 60) =$$

$$d(40, 70) =$$

$$d(110, 100) =$$

etc .

la maîtresse incite les enfants à trouver mentalement la réponse.

III – PROPRIETES DE LA DISTANCE DE DEUX NOMBRES.

Au cours des divers calculs faits, avec ou sans le support visuel de la "ficelle à nœuds", les enfants ont utilisé spontanément les propriétés suivantes de la distance *.

$$3.1 - d(0, x) = x$$

$$3.2 - d(x, y) = d(y, x)$$

Cette propriété est mise en œuvre par la plupart des enfants dès qu'ils ont à calculer $d(x, y)$ où x est supérieur à y car ils préfèrent "avancer de y à x " plutôt que "reculer de x à y ".

$$3.3 - d(x, x) = 0$$

$$3.4 - \text{lorsque } x < y < z, \quad d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

$$3.5 - d(x, y) = d(x + a, y + a)$$

$$d(x, y) = d(x - a, y - a) \quad \text{avec} \quad a \leq x \quad \text{et} \quad a \leq y$$

C'est la conservation de la distance par translation. Elle est fréquemment utilisée en calcul mental, par exemple, pour trouver la distance de 110 à 130 les enfants disent souvent "c'est pareil que de 10 à 30" et pour trouver la distance de 99 à 112, certains disent "c'est pareil que de 100 à 173".

Remarque :

Aucune étude formelle de ces propriétés n'a été faite en classe, les enfants les utilisent naturellement lors des premiers calculs de distance. Comme on le verra dans le compte rendu qui suit le maître suscite la mise en œuvre de l'une ou l'autre de ces propriétés par le choix judicieux des nombres proposés.

Séquence du 26 mai 1978 dans la classe de Maryse CODA (Ecole Clémenceau, mixte 2, de Grenoble).

Dans cette classe plusieurs enfants posaient systématiquement une "addition à trou" dès qu'ils devaient calculer une distance. Pour les amener à calculer mentalement certaines d'entre elles par d'autres méthodes, la maîtresse demande de n'inscrire que la réponse sur l'ardoise. Ensuite les enfants expliquent à leurs camarades comment ils l'ont trouvée.

(*) x, y, z et a désignent des naturels.

La maîtresse propose de calculer la distance de 8 à 12.

Trois élèves n'inscrivent rien sur leur ardoise, une seule élève écrit 20, les autres trouvent 4 qu'ils justifient par

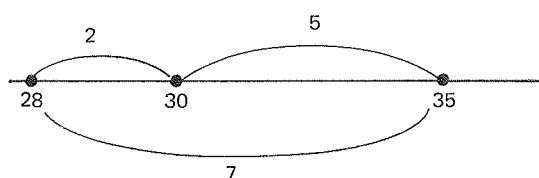
- "de 8 à 10 y a 2, de 10 à 12 y a 2, de 8 à 12 y a 4"
- "j'ai compté les sauts de puce sur mes doigts en disant 9, 10, 11, 12"
- "c'est 4 parce que $8 + 4 = 12$ "

Elle propose ensuite de trouver la distance de 14 à 20 puis celle de 28 à 35.

Pour ce dernier calcul, deux enfants ayant compté sur leurs doigts trouvent 8 (ils ont compté les nœuds de 28 à 35 et non les intervalles), trois enfants n'écrivent rien sur l'ardoise, les autres trouvent 7, justifié par :

- "j'ai compté les sauts de puce sur mes doigts" ou
- " $28 + 2 = 30$, j'ai ajouté 5 à 2, j'ai trouvé 7"
- Le schéma suivant est fait par un enfant au tableau pour illustrer cette dernière

phrase :



Après le calcul de la distance de 28 à 35, la maîtresse demande de calculer la distance de 37 à 45.

Très vite les élèves inscrivent la réponse sur leur ardoise. La première justification donnée est celle d'Alexandre :

- "Tout à l'heure on a trouvé 7 pour la distance de 28 à 35 alors on a enlevé 1, maintenant ça fait 8"

L'explication d'Alexandre n'est pas très claire pour ses camarades, Yvan tout de même a saisi sa démarche, il dit alors : "Hé oui !, la distance de 28 à 35 c'est pareil que de 38 à 45 : c'est 7, alors que de 37 à 45, c'est 8".

La maîtresse écrit au tableau :

$$d(28, 35) = 7$$

$$d(38, 45) = 7$$

$$d(\cdot, \cdot) = 7$$

Elle demande aux enfants de remplacer les points par des nombres tels que leur distance soit 7.

Elle relève ensuite les différentes solutions trouvées sous la dictée des élèves :

$$\begin{array}{lll} d(8, 15) = 7 & d(58, 65) = 7 & d(39, 46) = 7 \\ d(12, 19) = 7 & d(36, 43) = 7 & d(7, 0) = 7 \\ d(7, 14) = 7 & d(48, 55) = 7 & d(68, 75) = 7 \\ d(78, 85) = 7 & d(49, 55) = 7 & \end{array}$$

• "C'est faux ! C'est $d(49, 56) = 7$ " disent certains élèves

Un autre élève propose $d(49, 51) = 7$.

• "C'est encore faux !"

• "C'est la distance de 49 à 56 qui est 7"

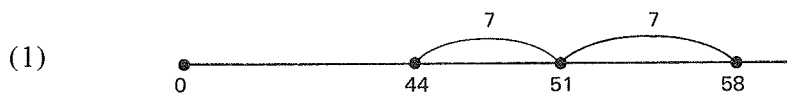
La maîtresse demande alors aux enfants de trouver un nombre qui convient pour remplacer le point dans

$$d(\cdot, 51) = 7$$

Deux solutions sont trouvées :

$$d(44, 51) = 7 \quad \text{et} \quad d(58, 51) = 7$$

Les solutions sont marquées sur le schéma



La maîtresse invite les enfants à "chercher une autre façon d'écrire 58 indiquant que la puce est partie de 51, qu'elle a fait 7 sauts en avant et qu'elle est arrivée sur 58".

Voici les écritures proposées par les enfants :

$$50 + 8$$

$$5 + 50$$

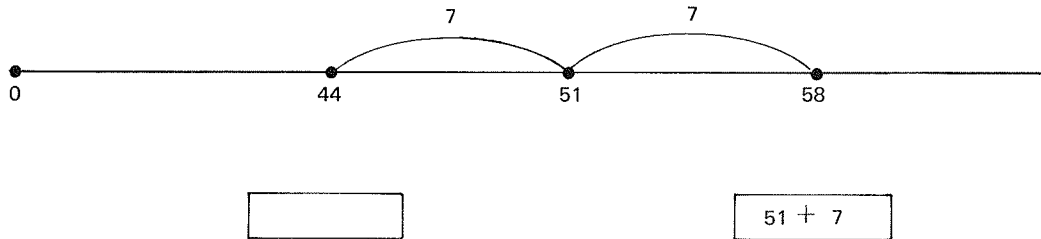
$$51 + 7 = 58$$

$$52 + 6$$

$$51 + 7$$

C'est l'écriture $51 + 7$ qui est retenue pour désigner 58 puisque la puce est partie de 51 et qu'elle a fait 7 sauts en avant.

Le schéma (1) est complété de la façon suivante :



La maîtresse demande alors aux enfants s'ils ont une idée pour écrire 44 autrement qui montre que la puce est partie de 51 et qu'elle a fait 7 sauts en arrière. Plusieurs enfants proposent spontanément $51 - 7$. C'est la joie dans la classe où on va utiliser "officiellement" le signe moins !

IV – INTRODUCTION DU SIGNE MOINS.

4.1 – Comme on vient de le voir dans le compte rendu précédent, le signe moins a été introduit lorsqu'on s'est proposé de coder les nœuds situés à la distance b d'un nœud donné. En partant du nœud a , la puce peut, en général, atteindre deux nœuds, l'un en faisant b sauts en avant ($a + b$), l'autre en faisant b sauts en arrière ($a - b$).

Remarque :

La désignation $a - b$ ne sera volontiers utilisée par les enfants qu'avec des nombres a et b pour lesquels la désignation habituelle n'est pas facile à trouver mentalement, par exemple, lorsqu'il s'agit de préciser les nombres situés à la distance 10 de 30 tous les enfants répondent naturellement par : "20 et 40" alors que pour préciser ceux qui sont situés à la distance 18 de 75 la plupart proposent $75 + 18$ et $75 - 18$, avant de rechercher l'écriture habituelle de ces nombres.

4.2 – Familiarisation avec la notation $a - b$.

Les exercices suivants sont proposés aux enfants, ils ont pour but de les amener à constater que :

- si $a - b$ désigne le nœud atteint par la puce qui part de a et fait b sauts en arrière, $a - b$ désigne aussi un nombre puisque la puce peut faire $a - b$ sauts pour aller du nœud 0 au nœud $a - b$. Ce nombre $a - b$ peut s'écrire de différentes façons.

- $a - b$ ne désigne aucun nœud de la ficelle lorsque a est inférieur à b donc des écritures du type $7 - 9$, $35 - 48$ n'ont aucun sens.

4.2.1 – Marquer en rouge, lorsque c'est possible, les nœuds suivants sur la ficelle :

$$18 - 7 \quad ; \quad 18 + 7 \quad ; \quad 25 - 19 \quad ; \quad 12 + 18 \quad ; \\ 12 - 18 \quad ; \quad 13 - 13 \quad ; \quad 9 - 15 \quad ; \quad \text{etc.}$$

4.2.2 – Trouver une écriture plus simple, qui n'utilise ni le signe plus ni le signe moins, de :

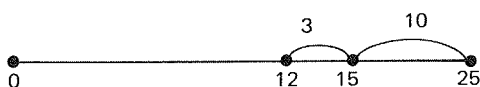
$$25 - 13 \quad ; \quad 48 + 12 \quad \text{etc.}$$

Pour trouver une autre façon d'écrire $25 - 13$ on a pu observer dans les classes les procédés suivants :

a – Comptage de un en un en reculant de 13 à partir du nœud 25 sur le dessin de la ficelle à nœuds.

b – Comptage de un en un en reculant à partir de 25 avec l'aide des doigts pour compter 13.

c – Comptage par "bonds" à partir de 25
 . soit sur le dessin de la ficelle
 . soit grâce à un schéma du type



d – Certains enfants écrivent directement la réponse (12) trouvée mentalement.

e – D'autres enfin écrivent :

$$13 + \dots = 25 \quad \text{ou}$$

$$25 = \dots + 13 \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + \dots \\ \hline 25 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} \dots \\ + 13 \\ \hline 25 \end{array}$$

soit directement, soit après avoir fait l'un des schémas :



Certains enfants ayant écrit l'une des égalités :

$$25 - 13 = 12$$

$$12 + 13 = 25$$

$$13 + 12 = 25$$

on invite alors tous les élèves à écrire toutes les égalités possibles avec les trois nombres 12, 13 et 25.

Remarque :

A ce niveau, il ne s'agit pas d'un calcul systématique de différences, seulement quelques exemples sont traités de façon à :

- jouer avec les nombres
- utiliser le signe moins
- écrire des "additions à trou"

Le calcul systématique de différences se fera après avoir remarqué que $a - b$ désigne aussi la distance de a à b lorsque le nombre a est plus grand que le nombre b .

Pour calculer $a - b$ les enfants pourront alors utiliser également tous les procédés de calcul mis en œuvre pour calculer la distance de deux nombres.

L'expérience prouve que les enfants préfèrent avancer du nœud b au nœud a (c'est-à-dire calculer la distance de a à b) plutôt que reculer de b à partir du nœud a .

Alors pourquoi ne pas introduire le signe moins pour désigner la distance de a à b ?

Parce que la distance de a à b étant la même que celle de b à a , nous craignons que les enfants utilisent indifféremment $a - b$ ou $b - a$ pour désigner cette distance alors que seule l'une de ces deux écritures est convenable.

$$(a - b \text{ si } a \geq b, \quad b - a \text{ si } b \geq a)$$

V – UTILISATION DU SIGNE MOINS POUR DESIGNER LA DISTANCE DE a A b.

Au cours de toutes les activités de familiarisation avec le signe moins il n'est pas rare que des enfants fassent des remarques du type :

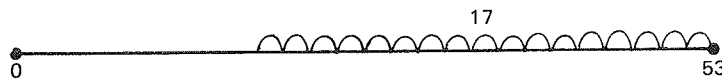
”90 – 10 égale 80 c'est pareil que la distance de 10 à 90”

”15 – 7 égale 8 parce que 7 + 8 égale 15 c'est comme pour la distance de 7 à 15”

On peut alors exploiter ces remarques et constater qu'effectivement pour trouver 90 – 10 on peut partir de 90 et reculer de 10 mais on peut aussi calculer la distance de 10 à 90 puisque dans les deux cas on trouve le même nombre 80.

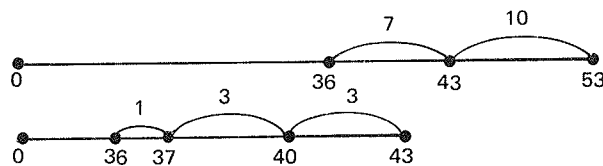
La maîtresse demandant de calculer 53 – 17, voici les différentes méthodes observées dans une classe :

a – Certains enfants placent 53 sur la ficelle et reculent de 17 en faisant le schéma :

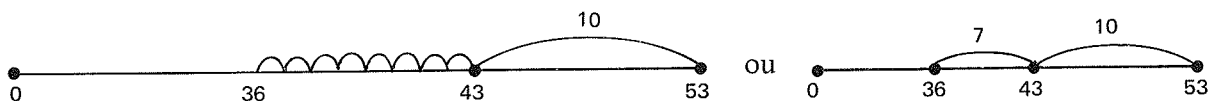


puis ils repartent de 53 et récitent 52 - 51 - 50 etc. en suivant le dessin, ils trouvent 36 lorsqu'ils font le dernier saut.

b – Un enfant fait les deux schémas suivants :



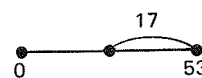
c – Plusieurs élèves font l'un des schémas :



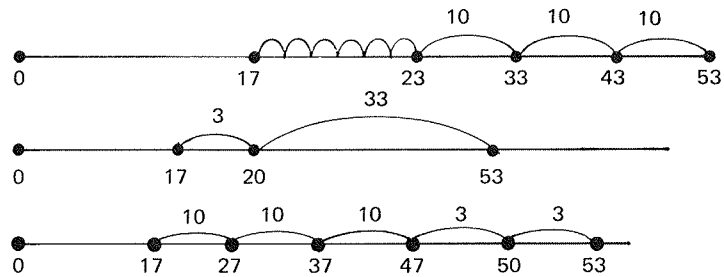
d – Certains écrivent :

$$53 = 17 + \dots \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 17 \\ + \dots \\ \hline 53 \end{array}$$

soit directement soit après avoir fait un schéma du type :



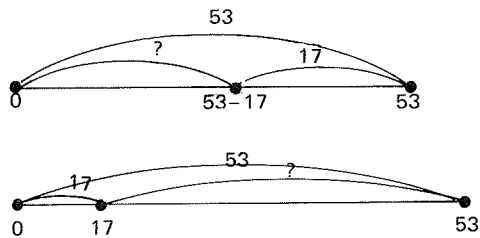
e – D'autres enfants font l'un des schémas suivants :



”Ils n’ont pas cherché $53 - 17$ ” remarquent certains enfants, ”ils ont cherché la distance de 17 à 53”.

Le nombre trouvé dans les deux cas étant 36 les enfants constatent que $53 - 17$ est égal à $d(53, 17)$.

Les enfants ont trouvé la solution (36) grâce à l’un des schémas :



ou l’une des équations $\dots + 17 = 53$ ou $17 + \dots = 53$

VI – CALCULS SYSTEMATIQUES DE DIFFERENCES. – TECHNIQUE DE LA SOUSTRACTION.

Pour calculer une différence on peut utiliser les méthodes mises au point pour calculer les distances. Deux d'entre elles seront favorisées.

Par exemple, pour compléter $57 - 28 = \dots$

- on va par "bonds de 28 à 57 sur la corde (dessinée ou imaginée), c'est une méthode très efficace en calcul mental.

- on résout $57 = 28 + \dots$
ou $28 + \dots = 57$

et on pose

$$\begin{array}{r} 28 \\ + \dots \\ \hline 57 \end{array}$$

Pour cela on utilise le travail mené en parallèle sur les additions à trou et on débouche ainsi sur une technique écrite de calcul de différence dont la présentation définitive

$$\begin{array}{r} 57 \\ -28 \\ \hline \dots \end{array}$$

ne sera peut être mise en place qu'en CE₂.

Au CE₁, pour compléter :

$$\begin{array}{r} 57 \\ -28 \\ \hline \dots \end{array}$$

la plupart des enfants écrivent

à côté :

$$\begin{array}{r} 28 \\ + \dots \\ \hline 57 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 57 \\ 28 \\ + \dots \end{array}$$

Ils trouvent à la fin de leurs calculs :

soit

$$\begin{array}{r} 1 \\ 28 \\ + 29 \\ \hline 57 \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{r} 57 \\ \hline 1 \\ 28 \\ + 29 \end{array}$$

Ils reportent alors le résultat 29 dans la "soustraction" donnée.

Certains enfants écrivent :

$$\begin{array}{r} 57 \\ - 28 \\ \hline \dots \end{array} + \quad \text{et trouvent} \quad \begin{array}{r} 57 \\ \overset{1}{-} 28 \\ \hline 29 \end{array} +$$

Ce travail débouche sur une technique écrite de la soustraction directement liée à celle de l'addition. Elle sera consacrée ultérieurement, la technique écrite pouvant s'accompagner de "la chanson" :

- J'écris 9 parce que $9 + 8 = 17$

$$\begin{array}{r} 57 \\ - 28 \\ \hline 9 \end{array}$$

- et je retiens 1

$$\begin{array}{r} 57 \\ \overset{1}{-} 28 \\ \hline 9 \end{array}$$

- $2 + 1 = 3$, j'écris 2 parce que $2 + 3 = 5$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \overset{1}{-} 28 \\ \hline 29 \end{array}$$

Après la lecture de cet article, peut-être vous posez-vous la question : une meilleure aisance dans le calcul de différence permet-elle de mieux utiliser la soustraction dans les problèmes ? Nous retrouvons le "problème du problème" qui est toujours un sujet d'étude.