

HISTOIRE DES TECHNIQUES OPERATOIRES (suite)

par Raymond GUINET

LA MULTIPLICATION

Cette technique connut de très nombreuses méthodes. Mais, hormis la méthode égyptienne et la méthode russe, qui sont d'une très grande originalité, toutes les autres sont des variantes de notre méthode classique. Toutes ces dernières sont basées sur le principe suivant.

Imaginons que l'on veuille effectuer le produit 73×49 , on peut écrire :

$$\begin{aligned} 73 \times 49 &= (70 + 3) \times (40 + 9) \\ &= (70 \times 40) + (70 \times 9) + (3 \times 40) + (3 \times 9) \\ &= 2800 + 630 + 120 + 27 \end{aligned}$$

En adoptant une autre disposition, on obtient :

$\begin{array}{r} 73 \\ \times 49 \\ \hline 27 \\ 630 \\ 120 \\ 2800 \\ \hline 3577 \end{array}$	ou bien	$\begin{array}{r} 73 \\ \times 49 \\ \hline 657 \\ 2920 \\ \hline 3577 \end{array}$
$\left. \begin{array}{l} 27 \\ 630 \\ 120 \end{array} \right\}$	$\longrightarrow$	657
$\left. \begin{array}{l} 120 \\ 2800 \end{array} \right\}$	$\longrightarrow$	2920

Tout ce qui peut varier, c'est l'organisation des calculs ainsi que leur disposition.

Il est difficile d'établir une chronologie historique rigoureuse en ce qui concerne les différentes méthodes relatives à notre numération décimale.

L'ordre que nous avons adopté consiste à partir de la méthode la moins élaborée vers la méthode communément employée aujourd'hui en passant par des méthodes aux noms évocateurs, où le souci de l'esthétique l'emportait sur le souci de rigueur et de simplification.

1 – Méthode égyptienne ou par duplication.

Dans le papyrus de Rhind datant de 1650 environ avant J.C. , le scribe Ahmès donne de nombreux exemples de cette méthode sans donner de justification. L'emploi de cette méthode nécessite la seule connaissance de la duplication et de l'addition bien sûr.

Soit à effectuer le produit 53×67 .

Voici la série de calculs effectués par le scribe.

			*
／	1	67	(1×67)
	2	134	(2×67)
／	4	268	(4×67)
	8	536	(8×67)
／	16	1 072	(16×67)
／	32	2 144	(32×67)

Il calcule $67 + 268 + 1\,072 + 2\,144$, trouve 3 551 qui est le produit 53×67 , puisque $53 = 32 + 16 + 4 + 1$.

On notait parfois des variantes de cette méthode, en combinant la duplication et la multiplication par 10, 100, 1 000

Par exemple, soit à effectuer 14×78

	1	78
／	10	780
	2	156
／	4	312

d'où $14 \times 78 = 780 + 312 = 1\,092$

* Cette colonne ne figurait pas sur le manuscrit.

Le nombre de lignes de calculs dépend bien entendu de l'importance des facteurs du produit. Par exemple si le plus petit des deux facteurs est voisin de 10 000, le nombre de lignes est 14, car $2^{13} = 8\,192$ et $2^{14} = 16\,384$

2 – Méthode russe.

Cette méthode, encore en usage au début du siècle en Russie, est très voisine de la méthode égyptienne.

Soit à effectuer le produit 53×67

／	53	67	(67×1)
	26	134	(67×2)
／	13	268	(67×4)
	6	536	(67×8)
／	3	1072	(67×16)
／	1	2144	(67×32)

Il suffit de diviser 53 par 2 ainsi que les quotients successifs (sans tenir compte des restes) tandis que 67 est multiplié par 2 ainsi que les produits successifs. On retient les facteurs en regard desquels les quotients sont impairs, et on en fait la somme soit :

$$53 \times 67 = 67 + 268 + 1\,072 + 2\,144 = 3\,551$$

Voici l'explication de cette méthode :

Ecrivons les divisions de 53 par 2 et de leurs quotients successifs.

$$\begin{aligned} 53 &= (2 \times 26) + 1 \\ 26 &= 2 \times 13 \\ 13 &= (2 \times 6) + 1 \\ 6 &= 2 \times 3 \\ 3 &= (2 \times 1) + 1 \end{aligned}$$

Portons cette dernière expression de 3 dans l'avant-dernière égalité, ceci donne :

$$6 = 2 [(2 \times 1) + 1] = 4 + 2$$

Remontant ainsi les différentes égalités, on obtient :

$$13 = 2 \times (4 + 2) + 1 = 8 + 4 + 1$$

$$26 = 2 \times (8 + 4 + 1) = 16 + 8 + 2$$

$$53 = 2 \times (16 + 8 + 2) + 1 = 32 + 16 + 4 + 1$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} 53 \times 67 &= (32 + 16 + 4 + 1) \times 67 \\ &= (32 \times 67) + (16 \times 67) + (4 \times 67) + (1 \times 67) \\ &= 2\,144 + 1\,072 + 268 + 67 \end{aligned}$$

Remarquons que cette méthode signale au calculateur (dès que le dernier quotient est 1) que les calculs sont terminés.

3 – Méthode de l'abaque .

Dès le 10ème siècle, les jetons de calcul sur abaque * sont remplacés par des jetons marqués des chiffres 1, 2, . . . , 9, le zéro n'étant pas nécessaire. La combinaison de ce matériel et de la table de multiplication a donné une méthode de calcul assez longue, mais marque un certain progrès.

Voici comment on effectuait par exemple le produit : $4\,608 \times 369$

			4	6		8
Produit par 9	{		5	4	7	2
		3	6			
Produit par 60	{			4	8	
		3	6			
Produit par 300	{	2	4			
			2	4		
		1	8			
		1	2			
		1	7		3	5
				3	6	9

Si un zéro apparaîtrait dans un résultat partiel ou dans le résultat final, il n'est bien entendu pas indiqué.

Le résultat est ici 1 700 352

* Sorte de tablette divisée en colonnes représentant les différents ordres d'un nombre et facilitant l'exécution des opérations élémentaires.

Cette méthode prenait différentes formes. Voici deux exemples pour illustrer ceci.

	4	6	3	8					
1	0	1	0	1	2				
	8	2	6	6					
3	3	5	2	7	9				
	6	4	7	2					
7	2	4	2	5	7				
	8	2	1	6					
9	2	3	1	4	5				
	0	0	5	0					
	8	0	5	0					

	4	6	3	8					
	0	0	5	0	5	0			
	2	3	1	4					
	8	2	1	6	7	5			
	2	4	2	5					
	6	4	7	2	9	0			
	3	5	2	7					
	8	2	6	6	2	8			
	0	1	0	1					
	1	3	7	9					

On peut imaginer une disposition plus lisible comme ci-dessous.

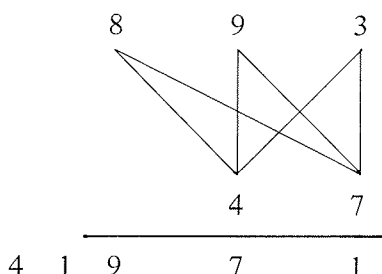
	4	6	3	8					
5	0	0	5	0					
	2	3	1	4					
7	8	2	1	6					
	2	4	2	5					
9	6	4	7	2					
	3	5	2	7					
2	8	2	6	6					
	0	1	0	1					
	1	3	7	9	8	0	5	0	

Le nom de **jalousie** donné à cette méthode provient bien entendu des persiennes qui ont cette forme.

6 – Méthode en croix.

Il s'agit d'une méthode aussi ancienne que la précédente mais qui n'est raisonnablement praticable que si le multiplicateur n'a pas plus de deux chiffres (à moins d'être un excellent calculateur !).

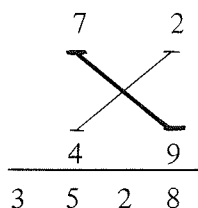
Effectuons par cette méthode le produit 893×47



Voilà ce que l'on peut dire :

7 fois 3, 21. On écrit 1 on retient 2 ;
 7 fois 9, 63 plus 2, 65 ; 4 fois 3, 12 plus 65, 77.
 On écrit 7, on retient 7 ; 7 fois 8, 56 plus 7, 63 ;
 4 fois 9, 36 plus 63, 99. On écrit 9 et on retient 9 ;
 4 fois 8, 32 plus 9, 41 d'où le résultat final.

Comme on le voit, tous ces calculs sont fastidieux. C'est la "multiplication de l'an 2 000" du fascicule : *La multiplication des naturels à l'école élémentaire.* *



Lorsque les deux nombres du produit n'avaient que deux chiffres, certains auteurs des 15ème et 16ème siècles mettaient un X comme ci-contre entre les deux nombres.

Il est vraisemblable que cette pratique est à l'origine du signe (X) de la multiplication qui apparut de manière plus systématique au 17ème siècle.

7 – Méthode Italienne .

En usage dans la deuxième moitié du 16ème siècle essentiellement en Italie, cette méthode n'est qu'une variante de la méthode *per gelosia* où aucune retenue n'est effectuée et où l'organisation des calculs conduit à une disposition symétrique.

* Intéressant fascicule faisant le point sur la multiplication, publié par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 29, Rue d'Ulm - 75005 PARIS.

Pour cette méthode, et la suivante, nous allons traiter le même exemple :

$$4\,398 \times 7\,456 = 32\,791\,488$$

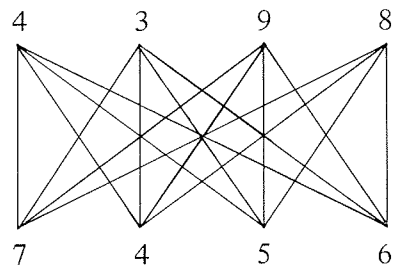
$$\begin{array}{r}
 4\,398 \\
 7\,456 \\
 \hline
 2\,4 \\
 2\,1\,3\,6\,4\,0 \\
 6\,3\,3\,2 \\
 2\,8\,1\,2\,4\,5\,4\,8 \\
 2\,0\,1\,8 \\
 1\,6\,1\,5\,5\,4 \\
 5\,6 \\
 \hline
 3\,2\,7\,9\,1\,4\,8\,8
 \end{array}$$

Voici ci-contre ce produit exécuté selon la méthode italienne.

Nous laissons au lecteur le soin de retrouver celle-ci avant de se référer aux remarques d'ordre géométrique ci-dessous.

Numérotons de ① à ⑦ les différentes lignes des produits partiels, puis alignons les deux nombres 4 398 et 7 456 comme ci-dessous à droite.

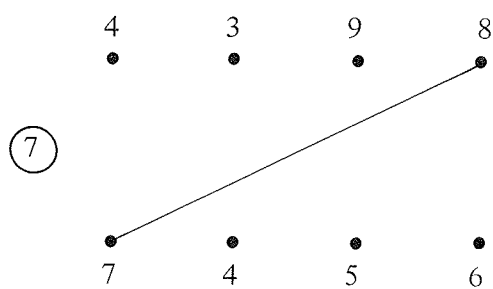
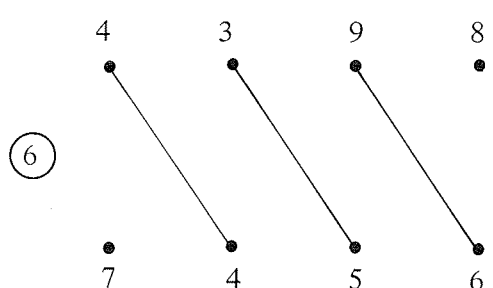
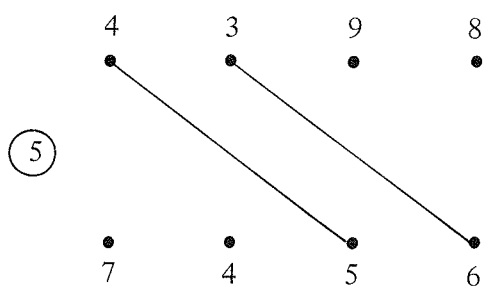
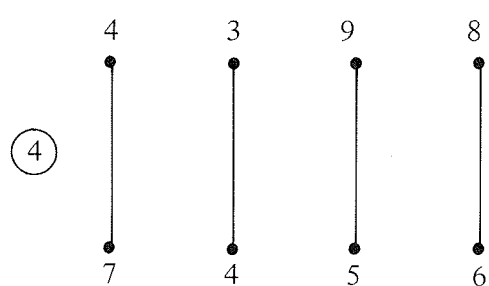
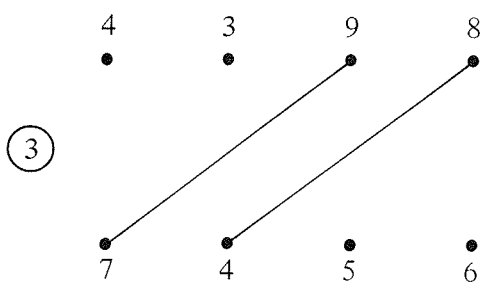
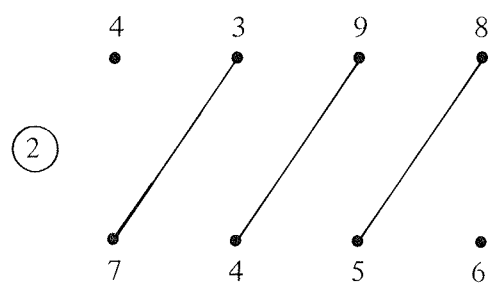
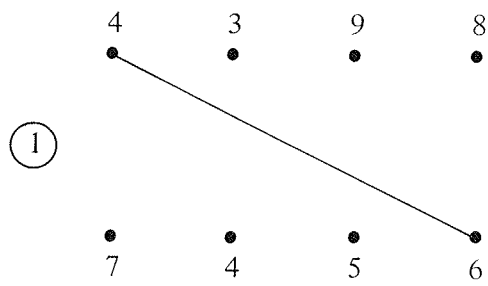
$$\begin{array}{l}
 \textcircled{1} \\
 \textcircled{2} \\
 \textcircled{3} \\
 \textcircled{4} \\
 \textcircled{5} \\
 \textcircled{6} \\
 \textcircled{7}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2\,4 \\
 2\,1\,3\,6\,4\,0 \\
 6\,3\,3\,2 \\
 2\,8\,1\,2\,4\,5\,4\,8 \\
 2\,0\,1\,8 \\
 1\,6\,1\,5\,5\,4 \\
 5\,6
 \end{array}$$



Observons pour chacune des lignes de ① à ⑦ la façon dont sont obtenus les produits partiels en se référant à la figure de droite. Nous remarquons tout de suite que :

à chaque ligne correspond une direction et une seule des droites tracées sur la figure ci-dessus.

Les sept schémas ci-après le montrent bien.



8 – Méthode *per rombo* .

Cette méthode qui date de la deuxième moitié du 16ème siècle, est un peu postérieure à la précédente. L'expression "*per rombo*" signifiait : en losange.

$$\begin{array}{r}
 4\ 3\ 9\ 8 \\
 7\ 4\ 5\ 6 \\
 \hline
 2\ 4 \\
 2\ 0\ 1\ 8 \\
 1\ 6\ 1\ 5\ 5\ 4 \\
 2\ 8\ 1\ 2\ 4\ 5\ 4\ 8 \\
 2\ 1\ 3\ 6\ 4\ 0 \\
 6\ 3\ 3\ 2 \\
 5\ 6 \\
 \hline
 3\ 2\ 7\ 9\ 1\ 4\ 8\ 8
 \end{array}$$

Il s'agit de la méthode précédente
où l'ordre des produits partiels est :

① , ⑤ , ⑥ , ④ , ② , ③ , ⑦

9 – Méthode *per copa* .

Comme pour la méthode précédente, il s'agit d'une organisation esthétique des produits partiels en forme de coupe. Selon l'historien des sciences américain David Eugène SMITH, il s'agit du premier exemple de multiplication imprimé dans le nouveau monde au 16ème siècle.

$$\begin{array}{r}
 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\
 \hline
 5\ 4\ 5\ \quad 2\ 4\ 6 \\
 4\ 7\ \quad 5\ 5 \\
 1\ 8\ \quad 2\ 5 \\
 1\ \quad 2 \\
 4\ \quad 3 \\
 \hline
 6\ 1\ 6\ \quad 5\ 4\ 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

Voici ci-contre le produit *per copa*
 $937 \times 658 = 616\ 546$

Peut-être le lecteur aura-t-il trouvé la
solution avant de la lire ci-contre ?

Le produit commence par l'ordre le plus élevé du multiplicateur 937 vers l'ordre le plus bas. Voici ci-dessous les différentes étapes du calcul.

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4 \\ \\ (9 \times 6) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5 \\ 4 \\ \\ (9 \times 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5\ 2 \\ 4\ 7 \\ \\ (9 \times 8) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5\ 2 \\ 4\ 7 \\ 1\ 8 \\ \\ (3 \times 6) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5\ 2 \\ 4\ 7\ 5 \\ 1\ 8 \\ 1 \\ \\ (3 \times 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5\ 2\ 4 \\ 4\ 7\ 5 \\ 1\ 8\ 2 \\ 1 \\ \\ (3 \times 8) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5\ 2\ 4 \\ 4\ 7\ 5 \\ 1\ 8\ 2 \\ 1\ 2 \\ 4 \\ \\ (7 \times 6) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5\ 2\ 4 \\ 4\ 7\ 5\ 5 \\ 1\ 8\ 2 \\ 1\ 2 \\ 4\ 3 \\ \\ (7 \times 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 7\ \backslash\ 6\ 5\ 8 \\ \hline 5\ 4\ 5\ 2\ 4\ 6 \\ 4\ 7\ 5\ 5 \\ 1\ 8\ 2\ 5 \\ 1\ 2 \\ 4\ 3 \\ \\ (7 \times 8) \end{array}$$

Puis dans une dernière étape, on effectue les additions.

10 – Méthode indienne .

Encore en usage en Inde au 19ème siècle, cette méthode était connue des arabes au 13ème siècle.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 9 \cancel{8} \\ \cancel{8} \cancel{2} 0 \\ \cancel{7} \cancel{8} \cancel{7} \\ 2 \cancel{X} \cancel{8} \cancel{8} 6 \end{array}$$

C'est par excellence la méthode qui se fait de gauche à droite.

$$\begin{array}{r} 7 \ 5 \ 4 \\ \cancel{8} \ \cancel{9} \ \cancel{9} \ 9 \\ \cancel{8} \ 3 \end{array}$$

Voici ci-contre par cette méthode le produit :

$$754 \times 39 = 29\ 406$$

Voici ci-dessous les différentes étapes.

$\begin{array}{r} 7 \ 5 \ 4 \\ 3 \ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \ 1 \\ 7 \ 5 \ 4 \\ \cancel{8} \ 9 \\ 3 \\ (7 \times 3) \\ (1) \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ 2 \ \cancel{X} \ 3 \\ 7 \ 5 \ 4 \\ \cancel{8} \ \cancel{9} \ 9 \\ 3 \\ (7 \times 9) \\ (2) \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \cancel{8} \ 8 \\ 2 \ \cancel{X} \ \cancel{8} \\ 7 \ 5 \ 4 \\ \cancel{8} \ \cancel{9} \ 9 \\ \cancel{8} \ 3 \\ (5 \times 3) \\ (3) \end{array}$
---	---	--	--

Les calculs se font de la gauche vers la droite en commençant par les ordres les plus élevés du multiplicande 754 . Au fur et à mesure des calculs, le calculateur barre le chiffre utilisé au multiplicateur en ayant soin de le récrire à côté pour le calcul ultérieur.

- En (1), $7 \times 3 = 21$ représente un nombre d'unités de mille.
- En (2), $7 \times 9 = 63$ représente un nombre de centaines qui ajoutées aux 210 centaines de (1), donnent 273 centaines.
- En (3), $5 \times 3 = 15$ représente un nombre de centaines qui ajoutées à 273 centaines donnent 288 centaines.

12 – Tables de multiplication .

Quelles que soient les civilisations et les numérations qui étaient en usage, on a toujours rencontré des tables de multiplication pour simplifier les calculs.

L'une des premières tables est babylonienne. Elle date de 1700 avant J.C. environ. Nous savons que la numération usitée était de base 60. Ces tables ne présentaient pas tous les multiplicateurs de 1 à 59, mais tous les multiplicateurs de 1 à 20, puis 40, enfin 50. Le calculateur devait combiner ces tables pour obtenir n'importe quel produit. Par exemple pour multiplier par 27 il fallait se référer à la table de 20 puis à celle de 7, puis utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

En Europe, les tables de multiplication prenaient différentes formes.

- Une forme linéaire classique : on a trouvé des tables de multiplication jusqu'à 100×100 et parfois davantage. Elles étaient utilisées par les commerçants.
- Une forme carrée appelée à tort table de Pythagore.

Elles prenaient aussi la forme triangulaire comme ci-dessous par exemple :

1	2								
2	4	3							
3	6	9	4						
4	8	12	16	5					
5	10	15	20	25	6				
6	12	18	24	30	36	7			
7	14	21	28	35	42	49	8		
8	16	24	32	40	48	56	64	9	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Au moyen-âge, la table de multiplication n'était apprise que jusqu'à 5×5 . On employait alors un moyen ingénieux appelé "regula pigri" (règle du paresseux) ou multiplication digitale.

Par exemple pour retrouver le produit 7×8 , on procédait de la manière suivante :

On lève 2 doigts d'une main ($7 - 5$) et 3 doigts de l'autre ($8 - 5$). On a donc 3 doigts baissés dans une main et 2 doigts baissés dans l'autre.

Le nombre d'unités de 7×8 est égal au produit (3×2) nombre de doigts baissés soit 6.

Le nombre de dizaines de 7×8 est égal à la somme $2 + 3 = 5$ des doigts levés d'où $7 \times 8 = 56$ *

Reconnaissons qu'il est plus simple d'apprendre la table de multiplication jusqu'à 9×9 .

13 – Preuve de la multiplication .

La preuve par 9 de la multiplication dont l'origine est inconnue, était déjà employée dès le 9ème siècle par les arabes. Les mathématiciens à partir de cette époque sont friands de preuves.

Les opérations sont souvent effectuées avec en regard la preuve de l'opération. Mais, la preuve par 9 n'était pas la seule employée. On utilisait aussi la preuve par 7, par 8 et par 11.

Voici sur un exemple comment se pratiquait la preuve par 7 sur l'opération :

$$4\,398 \times 7\,456 = 32\,791\,488$$

On commence par rechercher le reste de la division par 7 de 4 398 en commençant par la gauche, c'est-à-dire 43. On peut tenir le discours suivant :

- 43 par 7 reste 1
- 19 par 7 reste 5
- 58 par 7 reste 2

donc le reste de la division par 7 de 4 398 est 2 .

On fait de même pour 7 456 et 32 791 488 .

$$\begin{array}{rcl}
 4\,3\,9\,8 & \text{↪} & 2 \\
 \times 7\,4\,5\,6 & \text{↪} & 1 \\
 \hline
 3\,2\,7\,9\,1\,4\,8\,8 & \text{↪} & 2
 \end{array}$$

* La raison de ceci est fort simple. Si l'on désigne par a et b les nombres dont on cherche le produit ab , le nombre de doigts levés pour une main est $a - 5$ et pour l'autre main $b - 5$. Le nombre de doigts baissés est pour une main $5 - (a - 5) = 10 - a$ et pour l'autre main $5 - (b - 5) = 10 - b$.

Le nombre de dizaines du produit ab est : $a - 5 + b - 5 = a + b - 10$

Le nombre d'unités est : $(10 - a)(10 - b) = 100 + ab - 10a - 10b$

Il s'ensuit que le nombre cherché est : $(a + b - 10)10 + 100 + ab - 10a - 10b = ab$
ce qui est bien le produit des deux nombres.