

NUMERATION AU C.P. (suite) :
ACTIVITES CONDUISANT AU CODAGE DES NOMBRES

par Mireille GUILLERAULT

INTRODUCTION.

Cet article fait suite aux articles de Grand IN numéro 3 «Introduction à la notion de nombre au C.P.» et de Grand IN numéro 4 «Numération au C.P.», où étaient décrites les activités visant à mettre en place l'idée de nombre. Quelques nombres ont été désignés, mais imaginer un signe nouveau pour chaque nouveau nombre ne serait pas pratique, il devient nécessaire d'élaborer un système de codage des nombres.

Nous nous limiterons ici aux activités permettant de conduire l'enfant vers les numérations de position, nous ne parlerons pas des codages additifs (c'est-à-dire utilisant le signe +) qui peuvent, ou non, les précéder.

Nous avons classé ces activités en trois groupes, suivant qu'elles font intervenir des échanges, des groupements, ou les deux simultanément comme les manipulations d'abaques. L'ordre choisi pour la présentation n'est pas nécessairement celui qui sera adopté en classe ; chaque type d'activités a des avantages, mais aussi des inconvénients, qui sont différents d'un type à l'autre ; il serait dommage de se limiter à un seul type d'activités.

I – ECHANGES.

Lors de ces activités, les élèves sont tout de suite mis en présence d'une règle. Sans règle d'échange, il n'y a pas d'échange. Cette impossibilité de se passer d'une règle se retrouve dans tout problème de codage, en particulier dans tout problème de numération ; un avantage de ces activités est de mettre en évidence l'importance de la règle.

Le point de départ de ces activités peut être l'étude de certains jeux des enfants.

1.1 Jeux d'échange avec des billes, ou des cartes, peut-être même des timbres.....

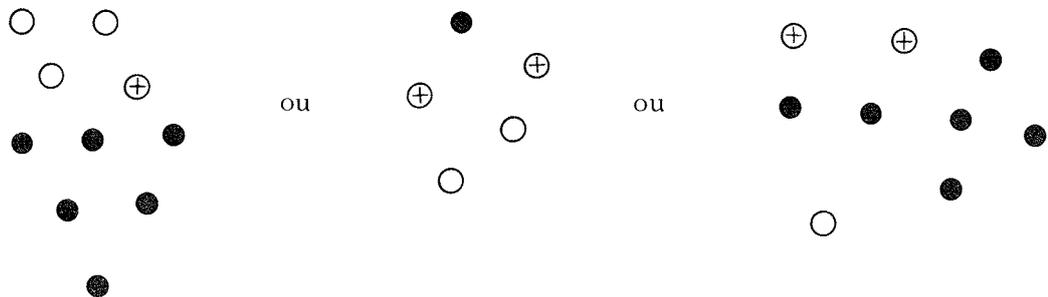
Prenons par exemple la règle :

on peut échanger cinq billes en terre contre une agathe et deux agathes contre une grosse bille en verre.

Il ne suffira pas, un paquet de billes étant donné, de pratiquer tous les échanges possibles ; il faudra systématiquement faire faire les échanges dans les deux sens et poser de petites questions du genre :

«Combien puis-je avoir de grosses billes en verre et d'agathes avec quatorze billes, avec vingt billes ?»

Ces petits problèmes sont résolus par des **manipulations**, et ont pour but de persuader les enfants qu'on peut avoir autant de billes en terre dans les situations schématisées ci-dessous :



● représente une bille en terre, ○ une agathe et ⊕ une grosse bille en verre.

1.2 Premiers codages à propos d'une règle simple.

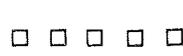
Les élèves peuvent travailler par groupe de deux. L'élève A possède un paquet de bâchettes, son camarade que nous appellerons élève B dispose d'une réserve de cubes (il est bien évident que tout autre matériel peut être utilisé). On leur demande d'utiliser la règle :

«on doit échanger quatre bâchettes contre un cube».

L'élève B donne donc un cube chaque fois que l'élève A lui donne quatre bâchettes, jusqu'à ce qu'il reste moins de quatre bâchettes à l'élève A.

Quand la manipulation est terminée, les deux élèves A et B doivent noter sur une feuille ce dont dispose l'élève A.

Imaginons que A se trouve devant deux bâchettes et cinq cubes, ils proposeront alors différentes écritures comme par exemple :



 ou
 




 ou
 

 ou
 
 ou.....

Rien à ce niveau là ne motive l'utilisation d'un tableau pour consigner les résultats, peut-être n'est-il pas opportun de l'imposer ici.

Sans attendre plus, la maîtresse demande aux enfants de former un paquet de bâchettes, qui avec la même règle : «on doit échanger quatre bâchettes contre un cube» a permis d'obtenir par exemple trois bâchettes et quatre cube.

1.3 De l'importance de la règle d'échange.

Il s'agit maintenant de motiver l'indication précise de la règle d'échange, chaque fois que l'on écrit un résultat. Pour cela, il convient de varier les règles d'échange.

1.3.1 La classe est partagée en deux groupes qui reçoivent chacun un tas de cubes, et une réserve de jetons. On demande aux enfants si les deux groupes ont le même nombre de cubes. Après vérification, ils constatent que non. Chaque groupe procède alors à des échanges, le premier (qui a reçu onze cubes) avec la règle «on doit échanger quatre cubes contre un jeton, le second (qui a reçu treize cubes) avec la règle «on doit échanger cinq cubes contre un jeton». Or chaque groupe obtient à la fin de la manipulation : trois cubes et deux jetons. Les deux groupes avaient-ils le même nombre de cube au départ ? Comment pourrait-on préciser le codage ? Il s'agit d'arriver

à persuader les élèves qu'un résultat sans indication de la règle d'échange ne permet pas de retrouver la collection initiale.

1.3.2 Chaque groupe de deux élèves dispose d'un même matériel (par exemple, quinze cubes et une réserve de jetons) et décide d'une règle d'échange. La maîtresse précise aux enfants qu'ils ont tous le même nombre de cubes (ce qui serait impossible à vérifier pour douze groupes). Après les échanges, les élèves constatent qu'ils ne trouvent le même résultat que s'ils ont appliqué la même règle d'échange.

1.4 Echanges successifs.

La règle d'échange devient plus complexe, par exemple :

«on doit échanger $\left\{ \begin{array}{l} \text{trois cubes contre un jeton} \\ \text{cinq jetons contre un rectangle} \end{array} \right.$ »

avec cette règle, on peut obtenir des résultats du type suivant :

2 jetons, 1 cube, 2 rectangles.

4 rectangles, 2 cubes.

etc.....

1.5 Echanges successifs réguliers.

La maîtresse propose la règle :

«on doit échanger $\left\{ \begin{array}{l} \text{trois cubes bleus contre un cube rouge} \\ \text{trois cubes rouges contre un cube vert} \end{array} \right.$ »

si les élèves (ou groupes d'élèves) disposent d'un paquet de cinquante cubes bleus ils obtiennent en fin de manipulation :

2 cubes bleus, 1 cube rouge, 5 cubes verts.

La maîtresse propose alors la nouvelle règle :

«on doit échanger $\left\{ \begin{array}{l} \text{trois cubes bleus contre un cube rouge} \\ \text{trois cubes rouges contre un cube vert} \\ \text{trois cubes verts contre un cube jaune} \end{array} \right.$ »

et cette fois les enfants disposent de paquets de cent trente cubes bleus, par exemple, l'essentiel étant que ce nombre soit suffisamment grand pour donner envie aux élèves de poursuivre la manipulation, et pour ce faire de compléter la règle précédente en choisissant une cinquième couleur. Le maître qui reconnaît ici une approche de la règle de la numération en base trois, multipliera les exercices pour faire sentir à ses élèves qu'il faut d'autant plus de couleurs que le nombre de cubes au départ est grand. Ce sera aussi une préparation à la comparaison des nombres dont les écritures sont obtenues avec une même règle d'échange.

1.6 Comparaison de nombres et organisation de leurs écritures.

Lors des activités où les équipes n'ont pas toutes, au départ, le même nombre d'objets, il est toujours quelqu'enfant pour dire «c'est nous qui en avons le plus» ou «on en avait plus que vous». On peut en profiter pour poser le problème de la comparaison des nombres à partir de la comparaisons des écritures obtenues avec la même règle d'échange.

Reprenons, par exemple la règle énoncée en 1.5 qui, en représentant par R un cube rouge, V un cube vert, B un cube bleu et J un cube jaune, s'écrit :

3B contre 1R

3R contre 1V

3V contre 1J

le maître peut écrire cette règle au tableau et demander à quelques enfants de venir écrire le code obtenu par leur groupe

Annie écrit 1R 2V 1B 1J

Luc écrit 1J 1B 1R 1V

Jean écrit 1B 2V 1R 2J

Monique écrit 2R 2V 2B 1J.

Les élèves s'aperçoivent alors qu'il n'est pas simple de comparer les nombres ainsi écrits, d'où l'idée d'énoncer les couleurs toutes dans le même ordre. A priori, n'importe quel ordre convient. On peut toutefois orienter les élèves vers l'ordre dans lequel on a utilisé les couleurs mais en leur demandant de commencer par la dernière couleur utilisée puis la précédente, etc... pour conserver l'écriture habituelle de la gauche vers la droite. Les résultats précédents s'organisent alors ainsi

Annie 1J 2V 1R 1B

Luc 1J 1V 1R 1B

Jean 2J 2V 1R 1B

Monique 1J 2V 2R 2B.

Il ne reste plus qu'à remarquer que l'on peut éviter l'écriture répétée des lettres J, V, R, B pour en arriver à la disposition en tableau.

	J	V	R	B
Annie	1	2	1	1
Luc	1	1	1	1
Jean	2	2	1	1
Monique	1	2	2	2

L'ordre que l'on a choisi pour placer les couleurs dans le tableau rappelle celui de la règle d'échange qui peut ainsi être simplifiée, il suffit de se souvenir qu'on commence par la couleur la plus à droite, et qu'on échange trois cubes d'une couleur contre un cube de la couleur suivante (dans l'ordre fixé au départ), on peut alors écrire simplement à côté du tableau «trois contre un» ou «base trois».

La nécessité d'utiliser le zéro pourra éventuellement se faire sentir (pour éviter de laisser des cases vierges) lorsque les enfants devront transcrire dans le tableau des résultats du genre :

2V 2B
1J 1B 1R
1B 2R
etc...

II – GROUPEMENTS.

Au niveau des activités de communication, les groupements sont certainement plus spontanés chez les enfants que les échanges.

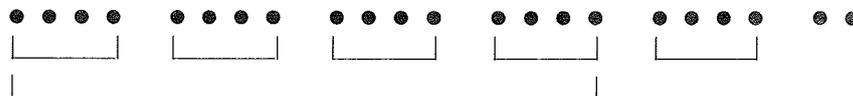
Placez les élèves devant un grand nombre d'objets et demandez leur de communiquer ce nombre, ils essayeront de compter, et s'ils n'y arrivent pas, ils feront des petits paquets, de deux, trois, cinq... objets. Là où les difficultés surgissent c'est au moment de coder ; par exemple, la consigne «grouper par 5» les vingt trois objets d'un paquet, peut les conduire à écrire 5 5 5 5 3, plutôt qu'à écrire 4 paquets de 5 objets et 3 objets. Peut-être est-il possible de les aider en matérialisant les groupements ; dans l'exemple ci-dessus on peut demander aux enfants de grouper les objets par cinq et de placer chaque groupe de cinq objets dans un sac, ou une enveloppe, ainsi le codage sera plus simple : 4 sacs, 3 objets.

Dès qu'un codage sera proposé, on n'oubliera pas l'activité inverse de décodage, ceci permettra d'insister sur la règle de groupement.

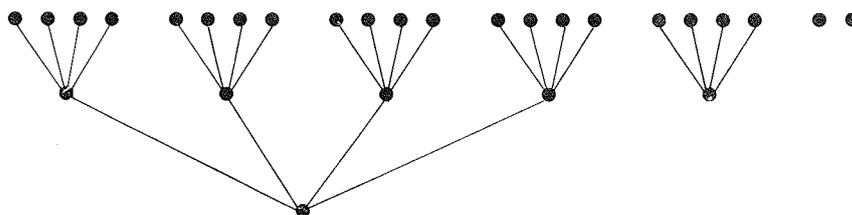
Le même genre d'activités que celles décrites plus haut dans ECHANGES amène les enfants à disposer les différents résultats dans un tableau.

Les cubes emboîtables dans tous les sens sont un matériel bien agréable pour les activités de groupement, cependant il ne serait pas souhaitable de s'y limiter ; varier le matériel permet de varier les représentations et le vocabulaire. Trop souvent, certains maîtres ou certains livres se croient obligés de faire apprendre un certain vocabulaire «baguette, plaque, cube...» or ce vocabulaire ne convient vraiment qu'aux cubes emboîtables et, même dans ce cas, n'est pas le seul.

Ce n'est qu'après une longue période de codage et de décodage à partir de manipulations qu'on envisage le dénombrement d'objets dessinés. Peut-être est-il intéressant de ne pas donner systématiquement des dessins en vrac ; le dénombrement, en «groupant par quatre» des points dessinés ci-dessous :



ne peut-il pas conduire certains élèves vers la représentation ci-dessous :



dans laquelle, on peut voir qu'il y a échange de quatre points de la première ligne contre un point de la deuxième ligne, etc...

C'est peut-être là l'occasion d'unifier les consignes et de remplacer :

«quatre contre un»

ou

par «base quatre».

«grouper par quatre»

III – ABAQUES.

On peut retrouver groupements et échanges dans l'activité suivante :

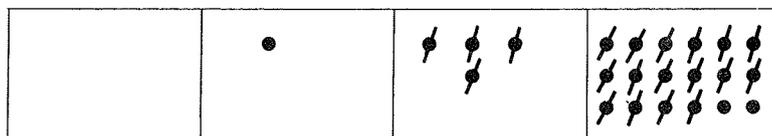
Tous les jetons d'une même couleur sont placés sur la case de droite d'une bande de carton ainsi dessinée (ou découpée)



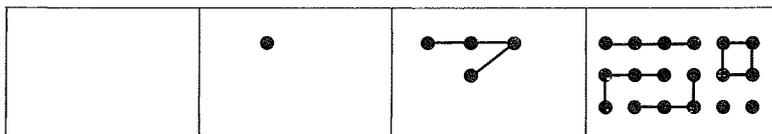
Les élèves sont invités à échanger ces jetons avec la règle «4 contre 1» par exemple et les jetons de la deuxième couleur sont placés à gauche des précédents sur la case voisine et ainsi de suite.

On peut, dès qu'on enlève quatre jetons de la case de droite, placer un jeton sur la case voisine, mais on peut aussi préparer le travail en groupant par quatre les jetons sur la case initiale.

Les manipulations peuvent être remplacées par les dessins suivants :



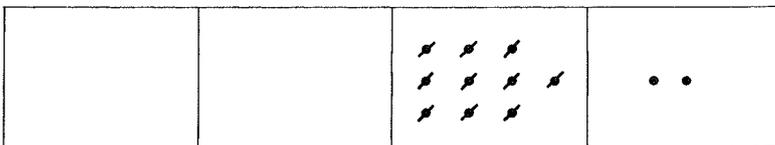
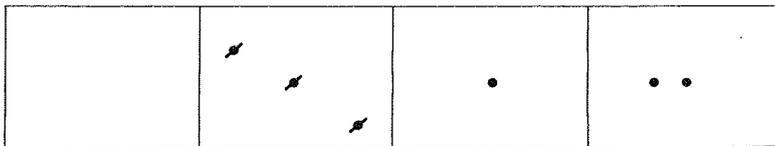
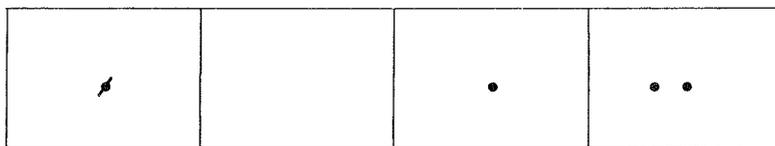
ou



Dans un premier temps, il semble indispensable de renforcer la distinction entre les jetons de deux cases différentes en utilisant des couleurs différentes, comme dans la manipulation.

Pour trouver le code du nombre de jetons placés initialement dans la case de droite, il suffit d'écrire sous chaque case le nombre de jetons non barrés dans cette case ; ceci donne dans l'exemple ci-dessus 102 (lire un - zéro - deux) écriture qui, si elle est séparée de l'abaque, doit être accompagnée de la règle d'échange «4 contre 1» ou «base quatre».

Le décodage peut se faire par la manipulation sur un abaque ou par une suite de dessins. Voyons par exemple le décodage du code 1012 en base trois.



Ou pour conserver des représentations du même nombre d'une bande à l'autre, on peut ne pas barrer d'où la suite :

•		•	• •
	• • •	•	• •
		• • • • • • • • • •	• •
			• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •

CONCLUSION.

Ce qui précède ne doit pas laisser penser au lecteur que l'étude de la base dix a été oubliée. Les premières activités d'échanges ou de groupements sont faites avec des règles utilisant de petits nombres, ceci pour permettre aux élèves de mieux dominer leurs manipulations, et pour faciliter le travail du maître (préparation du matériel, et surtout contrôle du travail). Cependant quelques manipulations seront faites avec les règles «dix contre un» ou «grouper par dix». Les nombres considérés seront alors, comme avec les autres règles, codés dans un tableau. Les enfants qui connaissent l'écriture en base dix de certains nombres (par exemple, ceux qu'ils ont rencontrés lors de la désignation des premières boîtes) reconnaitront ces nombres «à l'intérieur» du tableau obtenu avec la règle «dix contre un» ou «grouper par dix». Ce pourra être l'occasion de nombreux exercices : on pourra lorsque le nombre obtenu s'écrit avec seulement deux chiffres, le sortir du tableau et apprendre le mot français lui correspondant. Mais il serait imprudent de se priver brusquement du tableau, et il serait bon que chaque écriture de nombre en base dix soit replacée dans un tableau. Dans un même exercice, les élèves devront replacer dans un tableau les écritures comme 32 et 23, ou 15 et 51 etc... et sentiront mieux ainsi l'importance de la place des chiffres dans l'écriture.

Dans l'apprentissage de la numération orale les difficultés ne sont pas seulement d'ordre mathématique, «il est raisonnable de ne pas dépasser cent au cours préparatoire» lisons-nous dans la circulaire du 2 janvier 1970, mais pour la numération écrite, il serait dommage de laisser croire que, dans la base dix, il suffit de deux chiffres pour écrire un nombre, et malgré la lourdeur des manipulations, il sera indispensable de coder et décoder de grands nombres, tout comme avec les autres règles.

Le décodage de 1021 en base dix ne pourra donner lieu à une manipulation individuelle, cette manipulation sera faite collectivement ou par groupe, alors que le décodage de 1021 en base trois pourra aisément se faire individuellement, chaque enfant ayant reçu une poignée d'une bonne quarantaine de jetons ou cubes. Inversement, le codage du nombre de jetons dans une collection importante (par exemple mille jetons) sera long, mais plus simple en base dix qu'en base trois. Ces comparaisons entre les écritures en différentes bases ne se font au C.P., qu'à partir de manipulations même si celles-ci doivent être longues. Dans la suite de la scolarité (C.E. et surtout C.M.) ces comparaisons n'auront plus le même objectif et deviendront l'occasion de motiver de nombreux calculs en base dix. Au cours préparatoires, le principal intérêt des bases autres que dix est de faire comprendre le codage des nombres, en s'appuyant sur des manipulations assez simples.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.

Math Equipe — Garron — fascicule 2 (chez Hatier).

Activités Recherches Pédagogiques numéro 2.

Documents de Recherche INRDP (recherche 7171223)

Mathématique dans l'enseignement élémentaire — Wheeler — (chez OCDL).