

A PROPOS DE QUADRILLAGES

par Henriette LAÛGT

On ne trouvera pas ici le contenu de séquences sur ce sujet à un niveau donné mais des idées qui pourront être exploitées par les maîtres, en les adaptant au niveau de leurs élèves. De la même façon, on ne développera pas toutes les possibilités d'exploitation du thème, ni tous les stades de la recherche, cet article étant destiné à donner un exemple d'emploi de la désignation.

On utilisera dans cet article des définitions données dans Grand N° numéro 3 (Relation d'équivalence).

I – CONSIGNE.

A propos de déplacements sur quadrillage la consigne peut être donnée sous différentes formes :

- 1) aller d'un carrefour à un autre en suivant les routes d'un circuit routier ;
- 2) passer d'un croisement A ou nœud A du quadrillage à un autre croisement B, en suivant les bords de carreaux ;
- 3) sur un réseau quadrillé, passer d'un point d'intersection A des lignes du réseau à un autre point d'intersection B, en suivant les lignes.

Il est aisé de mettre en correspondance les désignations «d'objets» mathématiques, désignations différentes suivant le niveau du langage :

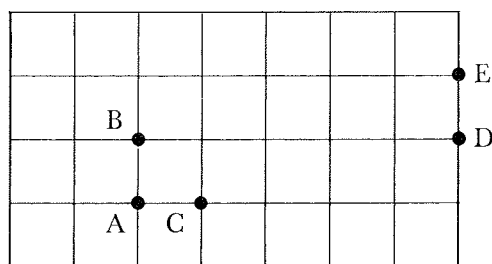
- | | | |
|-------------------|----------------------|------------------------|
| — carrefour | — croisement ou nœud | — point d'intersection |
| — circuit routier | — quadrillage | — réseau quadrillé |
| — routes | — bords de carreaux | — lignes du réseau |

Remarque.

Le jeu de marelle peut donner aux enfants l'idée de sauter d'une case dans une autre case. Le problème se posera alors du passage de la notation des déplacements d'un centre de case à l'autre à la notation des déplacements d'un carrefour à l'autre.

II — DESIGNATION DES DEPLACEMENTS.

On se limitera ici à l'étude de déplacements selon deux directions, par exemple : à *droite* et *en haut*. Chaque point du quadrillage aura alors au plus deux voisins :



A a deux voisins : B et C ;
D a un seul voisin E.

Cette étude pourrait être faite aussi avec quatre directions selon les propositions des enfants.

2.1 Désignations possibles pour chaque déplacement d'un point à l'un de ses voisins.

par des flèches :

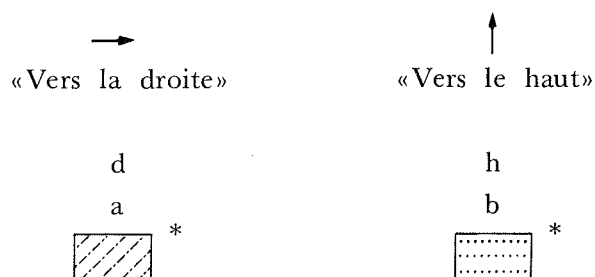
par des expressions verbales :

par des lettres liées aux
expressions verbales :

par des lettres quelconques :

par des couleurs :

etc...



* bleu sera codé :  et rouge : 

Le maître accepte tout d'abord les propositions de désignation faites par les élèves. L'expérimentation dégage les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles, à l'écrit comme à l'oral.

→ pourra se lire : «un bord de carreau vers la droite».

↑ pourra se lire : «un bord de carreau vers le haut».

Ces énonciations sont intéressantes car elles permettent de constater que les énoncés sont différents :

— selon que l'on travaille sur le sol, sur une table ou au tableau (que signifie alors le haut ?) ;

— ou si, travaillant en équipe sur une table, les enfants se font face (c'est la notion de droite qui est relative).

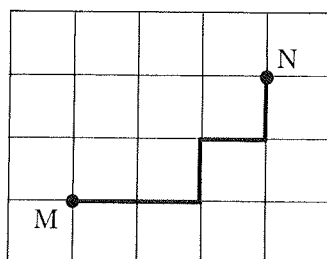
Cela pourra amener à adopter une notation orientée (flèches) ou des lettres moins liées à des directions définies par rapport à un seul observateur du quadrillage. (a et b permettent de se libérer de *droite* et *haut*, et peut devenir suivant le niveau des enfants la désignation la plus pratique, la plus rapide, la moins sujette à quiproquos).

Il est important de ne pas passer trop vite sur ces choix de désignations en relation avec la disposition, par rapport aux élèves, des quadrillages sur lesquels on travaille.

En liaison avec la lecture des plans et cartes, avec les problèmes d'orientation, ce thème permet de mettre en place beaucoup d'observations nécessaires à une bonne prise de conscience spatiale.

2.2 Désignation des chemins.

Voici un exemple de chemin reliant les points M et N du quadrillage.



On note, pour rendre compte du trajet suivi ;

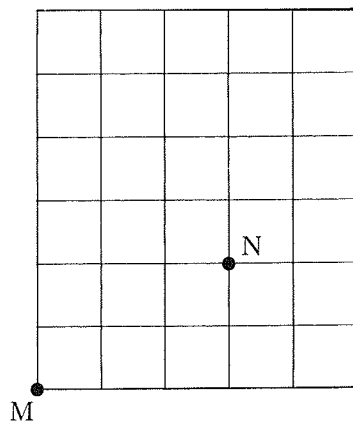
	→	→	↑	→	↑	suite de flèches
ou :	d	d	h	d	h	} suite de lettres
ou :	a	a	b	a	b	
						suite de couleurs

Remarque.

Certains enfants avaient proposé d'écrire + entre les flèches ou les lettres. Après discussion, on convient de placer les signes adoptés côte à côte sans signe opératoire, pour indiquer la succession des déplacements d'un point à son voisin.

III – EQUIVALENCE DE CHEMINS.

On se limite volontairement à l'étude des chemins ayant tous la même origine, M par exemple, sur un quadrillage limité.



Pour se rendre de M en N, il existe plusieurs voies possibles. On peut alors chercher tous les chemins menant de M à N.

Cette recherche peut se faire par tâtonnements, par arbre, par calcul (adultes).

On établit ainsi la liste des chemins reliant M à N :

dans laquelle on peut remarquer que l'on trouve dans la désignation de tous ces chemins toujours :

- le même nombre total de lettres (cinq) ;
- le même nombre de a (trois) et le même nombre de b (deux) différemment répartis.

a a a b b
 a a b a b
 a a b b a
 a b a b a
 a b a a b
 a b b a a
 b a a a b
 b a a b a
 b a b a a
 b b a a a

Les enfants qui expérimentent ces notions constatent que ces chemins sont dessinés dans un rectangle de diagonale MN et généralisent ce résultat lorsqu'on fait varier le point d'arrivée.

On dégage ainsi dans l'ensemble C des chemins d'origine M, la relation définie par «... a même arrivée que...» qui est réflexive, symétrique, transitive. C'est une relation d'équivalence. Cette relation permet de classer tous les chemins partant de M suivant leur point d'arrivée. On dira alors que deux chemins partant de M sont équivalents s'ils ont même arrivée.

Se pose alors le problème de la désignation des classes d'équivalence de chemins, ainsi définies.

Considérons par exemple l'ensemble des chemins d'arrivée N. D'après Grand IN numéro 3 (page 37, paragraphe 5.2.2) cet ensemble est la classe de chacun des chemins d'arrivée N, on peut donc le désigner indifféremment par :

classe de a b a b a
 ou classe de a a b a b
 ou classe de a a a b b
 etc...

On peut convenir, pour plus de commodité, de tous choisir le même représentant de cette classe, par exemple le premier chemin par ordre lexicographique, soit ici a a a b b.

On désigne alors l'ensemble des chemins d'arrivée N par :
 classe de a a a b b, que l'on peut abréger en : $cl(a a a b b)$ ou $C(a a a b b)$ ou $\overset{\cdot}{a a a b b}$, expressions qui seront toutes lues : classe de a a a b b.

C'est volontairement que nous avons borné cette étude aux phases où se présente un choix de désignation. Le travail sur quadrillages offre bien d'autres possibilités qui pourront, si cela intéresse nos lecteurs, faire l'objet d'un autre article.