

INTRODUCTION DU PARENTHESAGE AU CE₁

par Hélène BENZAKEN, Institutrice, Ecole Meylan mi-plaine

Le but de cette leçon est double :

*Introduire le plus naturellement possible la nécessité des parenthèses.
Aborder la notion d'associativité.*

Pour faire comprendre la nécessité des parenthèses il nous a semblé qu'il fallait partir de l'étude d'une loi non associative.

Sur le plan numérique nous ne connaissions au moment de cette leçon que l'addition. Nous avons donc utilisé la loi définie sur l'ensemble {a, b, c} par la table suivante : (que l'on trouve dans le livre de Madame ROBERT «Situations mathématiques du CP au CM»).

↖	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Nous avons présenté cette loi, dont on vérifie facilement qu'elle n'est pas associative, sous la forme d'un jeu de message.

Nous avons ensuite introduit une autre loi, qui elle était associative, pour terminer par l'étude de l'addition.

Nous nous servirons par la suite des parenthèses chaque fois que nécessaire (lors de l'étude de la soustraction et de la multiplication en particulier).

Lundi 26 novembre

Le Maître : Je prends trois lettres a, b et c, et je vais faire des messages avec ces trois lettres, par exemple : a b c, a a b c, b b, ..., qui veut faire un message ?

Hervé : c c b.

Lionel : a c b.

Le Maître : Ecrivez un message sur votre ardoise.

Les enfants exécutent puis vont écrire quelques messages au tableau : b b c, a a b a c a, a b, a b c a b c.

Caroline : Il y en a de courts, il y en a de longs.

Le Maître : Caroline combien de lettres a ton message ?

Caroline : 6.

Le Maître interroge plusieurs enfants qui répondent tous correctement. Il demande ensuite aux enfants d'écrire un message de 5 lettres, puis de 2 lettres, puis de 7 lettres. Aucun problème, Philippe donne c c c c c c c, nous l'utiliserons par la suite.

Le Maître : On va essayer de raccourcir les messages en obéissant à la règle suivante : deux mêmes lettres qui se suivent seront remplacées par cette seule lettre.

Le Maître écrit au tableau :

a a ~~~~~> a
b b ~~~~~> b
c c ~~~~~> c

Comment raccourcir le message b c c a ?

Emmanuelle : b c a (sans explication).

Le Maître écrit : b c c a
b c a

Le Maître : Raccourcir b c a a b.

La plupart des enfants s'arrêtent correctement à b c a b, d'autres écrivent :

b c a a b
b c a b
b c a

La consigne n'est pas encore totalement comprise. Le Maître la fait préciser : on n'a le droit de remplacer deux «a» par un «a» que si les deux «a» se suivent (même chose pour les «b» et «c»).

On recommence avec c b b c a - b b c a a b - c b c c a a b. Tout le monde raccourcit correctement ces messages.

Mardi 27 novembre

Rappel de la règle, révision rapide.

On demande aux enfants de raccourcir a a a. On observe que certains passent en deux étapes

$$\begin{array}{c} \text{a} \text{ a} \text{ a} \\ \text{a} \text{ a} \\ \text{a} \end{array}$$

d'autres font directement

$$\begin{array}{c} \text{a} \text{ a} \text{ a} \\ \text{a} \end{array}$$

puis on leur demande de raccourcir a a b a a

La majorité raccourcit correctement, quelques enfants oublient de descendre le b et écrivent :

$$\begin{array}{c} \text{a} \text{ a} \text{ b} \text{ a} \text{ a} \\ \text{a} \quad \text{a} \end{array}$$

Puis on raccourcit le message de Philippe c c c c c c c qui devient c.

On remarque que ce ne sont pas les enfants qui ont le plus de mal d'habitude qui se trompent ici.

Le Maître : Je donne a c b a, peut-on le raccourcir ?

Christophe : Non.

Isabelle : Si moi... Ah non ! parce que les deux a ne sont pas à côté.

Il aurait été intéressant de faire découvrir qu'on peut faire de très longs messages que l'on ne peut pas raccourcir avec la règle donnée.

(exemple a b c a b c a b c a b c).

Le Maître : Pour pouvoir raccourcir tous les messages on va ajouter à la règle d'hier une deuxième règle. Voilà ce qu'on va faire :

a a \rightsquigarrow a
 b b \rightsquigarrow b
 c c \rightsquigarrow c

a b \rightsquigarrow c
 b c \rightsquigarrow a
 a c \rightsquigarrow b

b a \rightsquigarrow c
 c b \rightsquigarrow a
 c a \rightsquigarrow b

Caroline : On remplace deux lettres par celle qui n'y est pas.

Le Maître : Remplissons un tableau qui donne la règle que l'on va appliquer aujourd'hui :

Les élèves remplissent le tableau et le commentent sans qu'on le leur ait demandé.

\curvearrowright	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Le Maître : Peut-on raccourcir le message a c b a de tout à l'heure ?

Les enfants trouvent les résultats suivants :

Tous les enfants sauf un

a c b a
 b c
 a

Une seule enfant

a c b a
 a a a
 a a
 a

quatre enfants s'arrêtent à : a c b a
 b c

on leur dit de continuer.

La non-associativité de la loi n'apparaît pas ici. Le maître va proposer un autre message qui mette cette propriété en évidence.

Le Maître : Raccourcir a b c a b.

On lit sur les ardoises :

a b c a b
 a a c
 a b
 c

a b c a b
 a a a b
 a a b
 a b
 c

a b c a b
 a a c
 a c
 b

a b c a b
 c b b
 c b
 a

Le Maître : Pour le même message a b a c c trouvez d'autres programmes.

Beaucoup de programmes sont donnés correctement. Une seule erreur :

```

a b a c c
| \ / \ /
a c c
\ / \ /
b c

```

Des élèves : Il n'a pas le droit, le c a déjà été pris.

De nombreux exercices sont faits.

Le Maître : Regardez

```

\ / | | \ /
| \ / |
\ / |
\ /

```

Anne : Il y a tout sauf les lettres

Emmanuelle : Mettons b et c

Philippe : Mettons a et c

Gilbert : Mettons a et b

cela donne

```

b c a c a b
\ / | | \ /
| \ / |
\ / |
\ /

```

Le Maître : Allez-y.

20 élèves sur 26 s'en sortent sans qu'on les aide. Les six autres ne s'en tiennent pas au programme imposé à partir du 2ème ou 3ème rang.

Vendredi 30 novembre

Le Maître : Je voudrais envoyer un message et son programme à une amie mais je n'ai qu'un petit ruban de papier et je ne peux pas écrire le programme par son arbre.

Comment faire pour envoyer le message a b c ?

Beaucoup de réponses mais aucune satisfaisante. Enfin au bout de dix minutes (environ) un élève propose.

Lionel : Si on mettait ensemble les lettres qu'on prend ?

Il vient écrire $a \ b \ c$.

Cette idée est exploitée.

Le Maître : Si on veut prendre ensemble b et c ?

Les enfants écrivent $a \ (b \ c)$

Le Maître : Et pour le message $a \ b \ a \ c$?

Tous écrivent $(a \ b) \ (a \ c)$

Aucun n'a suggéré de cadres emboîtés.

Le Maître : J'ai envoyé ce message $(a \ b) \ (a \ c)$ Pouvez-vous écrire le programme et trouver le résultat.

Les élèves font

$$\begin{array}{cccc} a & b & a & c \\ \backslash & / & \backslash & / \\ & & \backslash & / \end{array}$$

Aucune erreur.

Le Maître : Racourcissez maintenant $a \ (b \ c) \ a$

Quelques hésitations mais tous sauf deux trouvent

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ | & \backslash & / & | \\ a & a & a & \\ & \backslash & / & | \\ & a & a & \\ & & \backslash & / \\ & & a & \end{array}$$

De nombreux exemples sont donnés. On propose ensuite un exemple plus long :

$(a \ (b \ c)) \ (b \ b)$

Tous les élèves parviennent au résultat sauf deux.

Le Maître : Je donne le programme

$$\begin{array}{cccc} a & b & a & a \\ | & \backslash & / & | \\ & | & \backslash & / \\ & & \backslash & / \end{array}$$

Retrouvez les cadres

$a \ (b \ a) \ a$

Une seule erreur $a \ (b \ (a) \ a)$

D'autres exemples analogues sont donnés.

Lundi 3 décembre

Le Maître : On va choisir une nouvelle règle pour raccourcir les messages.

Quand on a : a a ou b b ou c c ça s'efface (gros succès auprès des élèves)

Michel : Mais a b ça donne c ?

Le Maître : Oui.

Valérie : a c \rightsquigarrow b et «pareil pour les autres» ?

Le Maître : Oui. Construisons la table de notre nouvelle règle :

	a	b	c
a		c	b
b	c		a
c	b	a	

Je vous donne a (b b) a, qu'est-ce qui se passe ?

Daniel : On peut effacer b b.

Le Maître : Que reste-t-il ?

Philippe : a a, c'est rien du tout !

Le Maître : Tu as raison. Et si je change le programme (a b) (b a)

Un élève : c c

Un autre : C'est rien encore.

Le Maître : Je donne a b a, qui veut faire un programme ?

Un élève donne (a b) a et trouve b

Un autre donne a (b a) et trouve aussi b

Les élèves constatent sur de nombreux exercices qu'on trouve toujours le même résultat, quelque soit le programme adopté.

La leçon continue avec des messages plus longs.

Nous cessons de relater ici la suite des leçons. Elles ont porté essentiellement sur les aspects numériques suivants :

1) Diverses évaluations d'une somme de plusieurs nombres :

$$\begin{array}{l}
 \text{Par programme} \quad 8+7+8+2 \\
 \quad \quad \quad | \ \backslash \ / \ | \\
 \quad \quad \quad \backslash \ / \ | \\
 \quad \quad \quad \quad \backslash \ /
 \end{array}$$

$$\text{Par cadres} \quad (3 + (7 + 8)) + 2$$

Avec constatation de l'identité des résultats pour tous les programmes envisageables, d'où inutilité, quand on ne fait que des additions de préciser le programme puisqu'on sait qu'on obtiendra toujours le même résultat.

2) Dès que d'autres opérations numériques seront introduites nous utiliserons systématiquement les cadres ou les programmes. En particulier, dès que nous aurons introduit la soustraction, nous demanderons aux enfants de calculer avec les programmes qu'ils choisiront des différences de la forme $13 - 8 - 4$ et nous mettrons en évidence le fait que l'on n'obtient pas le même résultat suivant le programme choisi, mais aussi le fait qu'il y a alors des programmes conduisant à des impossibilités (exemple $19 - 8 - 4 - 5$

QUELQUES REMARQUES

Le changement de règle pour passer à une structure associative bien qu'ayant été acceptée sans aucun problème par les élèves peut choquer par le fait qu'un 4ème élément (quand on efface tout, c'est-à-dire le message vide) n'est pas nommé.

On peut utiliser d'autres lois associatives, par exemple la loi suivante :

↖	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

Bien que non expérimentée cette loi pourrait présenter les avantages suivants :

* Il n'est pas difficile de constater que des messages avec une seule lettre par exemple $a a a$ ou $b b b b b$ ou $c c c$ conduise quels que soient les programmes au résultat unique a ou b ou c . Il n'est pas non plus difficile de voir que si deux lettres différentes figurent dans le message le résultat sera toujours a . Cela aurait l'avantage de montrer très simplement l'associativité.

* Cette associativité ayant été constatée, un jeu de calcul mental pourrait être mis en oeuvre pour réduire les messages.

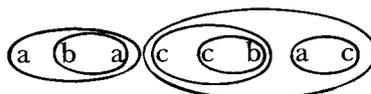
PROLONGEMENTS ENVISAGES

Comme on peut le constater les parenthèses n'ont pas été introduites. Nous pensons que cela est totalement inutile au CE₁. Comment peut-on envisager la suite dans une classe de niveau plus élevé ?

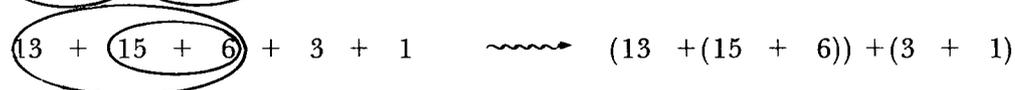
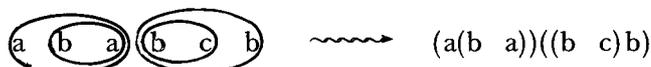
Première étape : Passage des cadres au parenthèses.

Il est peut-être difficile d'en expliquer la nécessité sauf celle d'éviter un graphisme trop lourd

Par exemple



à part cette remarque les exercices sont simples : passage de cadres aux parenthèses sur des exemples de messages ou sur des exemples numériques

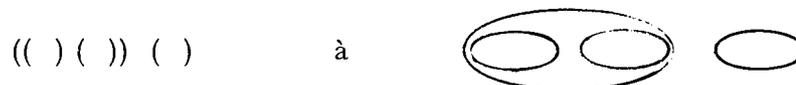


Deuxième étape : Passage réciproque.

Il s'agit de repasser aux cadres



On peut même donner un jeu purement graphique du passage de :



Ce qui met en relief le rôle de la courbure des parenthèses.

Mais encore une fois, ce qui nous semble important au CE₁ c'est de faire comprendre la nécessité du «parenthésage» (sans introduire les parenthèses et en se contentant des cadres) en faisant étudier des lois non associatives.