

LA MESURE DES LONGUEURS

FICHE DE TRAVAIL POUR LE CE OU LE CM

par J. DANIAU

Nous vous proposons ici un compte-rendu de l'introduction de la mesure des longueurs dans une classe de CM₁. Il ne s'agit en aucune manière d'un «modèle» mais d'une présentation possible de cette notion. Ceci nous semble intéressant, bien qu'il faille y apporter certaines restrictions (voir à la question 11).

PRESENTATION

Le texte qui suit est celui d'une fiche de travail préparée à l'intention des élèves de la classe de M. COQUANT, Maître d'Application à l'école F. BUISSON de GRENOBLE-CM1). Il a été mis au point à l'occasion du stage de six semaines à dominante mathématique qui s'est tenu à l'Ecole Normale d'Instituteurs de Grenoble du 27 septembre au 9 Novembre 1973.

Les étapes de l'élaboration de cette fiche de travail peuvent se résumer de la manière suivante :

- 1 — Avant-projet préparé par le professeur d'Ecole Normale et le maître de la classe d'application.
- 2 — Mise au point avec l'aide des stagiaires après discussion sur le fond et la forme de l'activité à conduire.
- 3 — Préparation du matériel par le maître et les stagiaires. Chaque groupe de quatre ou cinq élèves devait disposer d'un lot d'objets divers de forme, de longueur, de couleur, de matière différentes mais présentant cependant tous deux extrémités faciles à déterminer sans ambiguïté. En outre chaque équipe d'élèves devait pouvoir utiliser le matériel suivant : boîtes (couvercles de boîtes à chaussures) pour le classement des objets, bandes de carton, paire de ciseaux, étiquettes auto-collantes, crayons, papier de brouillon, ... etc

Le questionnaire qu'on lira n'est pas rigoureusement celui qui a été soumis à la réflexion des élèves ; le comité de rédaction du Bulletin de Mathématique a en effet estimé nécessaire de lui apporter quelques modifications portant sur le vocabulaire et parfois sur le découpage dans la perspective d'une utilisation par les lecteurs ; cependant l'essentiel de la démarche a été respecté. Par ailleurs les questions 17 et 18 ont été ajoutées pour donner à l'ensemble une plus grande unité pédagogique ; les points abordés dans ces deux «items» mériteraient un plus grand développement que le lecteur pourra imaginer à sa convenance.

Le processus de recherche proposé aux élèves sur le thème de la mesure des longueurs nous semble pouvoir être repris pour l'étude des autres grandeurs : temps, masse, volume, aire ; il faudrait bien entendu modifier la présentation et le contenu du questionnaire pour les adapter à chacune des grandeurs en question.

Disons enfin que dans le texte qui suit, chaque séquence est accompagnée d'un commentaire précisant les intentions, les conditions matérielles d'emploi, les réactions de chaque groupe d'élève.

QUESTIONNAIRE SOUMIS AUX ELEVES

1 — Vous avez devant vous un ensemble E d'objets divers.

Désignez-les à l'aide des lettres minuscules de l'alphabet : a, b, c, d...

Utilisez éventuellement des étiquettes.

Donnez la liste des objets :

$E = \{$
 $\}$

Commentaire : Chaque groupes d'élèves dispose d'une vingtaine d'objets tels que : bandes de carton, tiges métalliques, tiges de matière plastique, baguettes de bois de couleurs différentes, couteau, clefs etc... Ces objets ont été choisis afin qu'on puisse les classer en 5 ou 6 classes de longueur ; certains sont seuls à avoir une longueur donnée tandis que d'autres ont été fabriqués de telle sorte que leur longueur soit le double ou le triple, etc ... de la longueur d'une autre classe. Le travail à faire ici relève de la simple désignation : on aurait pu laisser les élèves choisir eux-mêmes le signe de chacun des objets ; en imposant cette formule on a voulu seulement éviter que leur choix ne se porte sur des chiffres ce qui aurait risqué d'être gênant au moment des activités de mesurage. Aucune difficulté n'a été constatée à cette étape.

4 — Mise en oeuvre dans la classe (durée : une heure). Chacun des cinq groupes formés travaille à partir de un ou deux questionnaires ; il est «pris en charge» par un groupe de stagiaires qui a pour consigne d'observer les élèves, de leur venir en aide essentiellement sur le plan technique (lecture de la fiche, utilisation du matériel) et d'intervenir exceptionnellement pour «débloquer» une situation d'échec qui ne peut manifestement se prolonger sans risque.

5 — Discussion sur les réactions des élèves : stagiaires, maître d'application et professeur en vue d'une éventuelle modification de la démarche suivie.

6 — La fiche a été exploitée au cours des séances qui ont suivi sans qu'une observation continue et prolongée ait pu être organisée.

La fiche a été composée en s'inspirant d'une démarche semi-programmée : chaque conclusion essentielle est acquise après l'exploitation d'un «item»* dont le texte est rédigé dans une bande bien délimitée et numérotée. La consigne aux élèves est d'achever le travail fixé par chaque bande avant de passer à la suivante.

Le plan suivi dans la fiche peut se décrire ainsi :

1 — *Activités de classement* (questions 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7) destinées à mettre en évidence le *concept* «longueur» comme propriété commune aux éléments d'une même classe.

2 — *Activités de rangement* (questions 8 - 9 - 10 - 11). Il s'agit ici de ranger les classes de longueur obtenues avec l'intention de faire naître l'idée que la longueur est une grandeur *repérable*.

3 — *Activités de mesurage* (questions 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18) dont l'objet est de faire correspondre à chaque classe de longueur soit un nombre naturel soit un couple de nombres naturels. Ces activités se subdivisent elles-mêmes ainsi selon l'objectif particulier fixé pour chacune d'elles :

Questions 12 - 13 - 14 : choix d'une unité arbitraire, la longueur est une grandeur mesurable ; notion de finesse de mesurage.

Questions 15 et 16 : unité légale (le cm, le mm) ; changement d'échelle.

Question 17 : notion d'approximation d'une mesure.

Question 18 : «ouverture» sur les nombres à virgule.

Le contenu de ce document ne s'inscrit pas en entier dans le cadre fixé par le thème étudié dans le présent bulletin (Relation d'Equivalence définie dans un ensemble) : seule la phase initiale relève d'une activité de classement et conduit à définir une partition d'un ensemble. Il a semblé cependant intéressant de présenter l'ensemble du texte de la fiche.

* On appelle «item» chacune des 18 séquences proposées aux enfants.

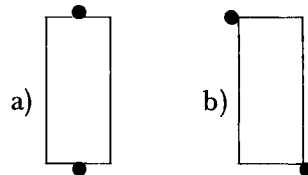
- 2 — Classez les objets de l'ensemble E en les plaçant dans les boîtes qui sont à votre disposition.
Il y a plusieurs manières de les classer. Dites celles que vous avez trouvées.

—
—
—
—

Commentaire : C'est à dessein que les élèves ne sont pas d'emblée orientés vers un classement selon le critère de longueur ; il s'agit de leur faire prendre conscience que réaliser une partition d'un ensemble dépend de la manière dont la comparaison des objets de l'ensemble est envisagée. Voici quelques réactions enregistrées : tri selon la couleur, la forme, la matière, objets ronds et non ronds, plats et non plats. Deux groupes sur cinq ont eu l'idée de faire un tri par taille.

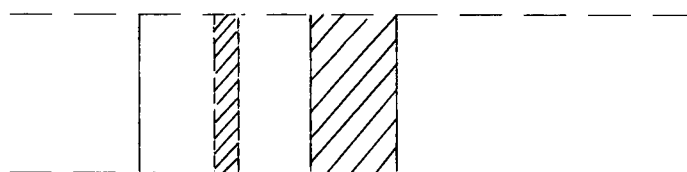
- 3 — Prenez un des objets de l'ensemble E.
Quelles sont les extrémités de cet objet ?
Prenez un autre objet et cherchez ses extrémités.
Recommencez pour tous les objets de l'ensemble E.

Commentaire : L'attention est portée maintenant sur la taille des objets. Mais la taille dépend essentiellement du choix des extrémités de l'objet. Pour certains d'entre eux le choix est immédiat ; pour d'autres il faut décider conventionnellement quelles seront les deux extrémités :



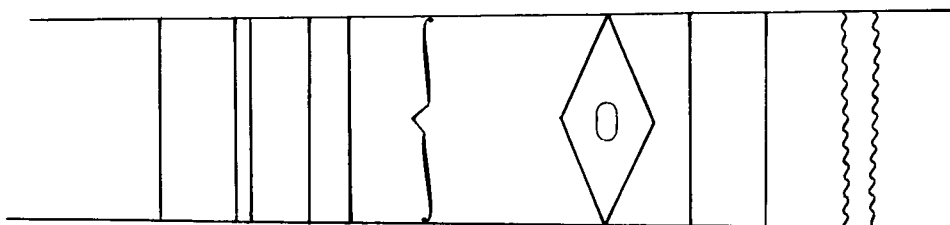
par exemple pour l'objet représenté ci-dessus il est évident que la taille n'est pas la même en a) qu'en b). (Les extrémités sont les points ●). Les objets distribués aux élèves avaient en général, des formes qui permettaient de faire ce choix sans difficulté.

- 4 — Classez maintenant les objets en plaçant dans une même boîte tous les objets de l'ensemble E dont les extrémités peuvent être mises en correspondance comme ceci :



Commentaire : On oriente ici les élèves vers le travail de classement qui présente le plus d'intérêt pour l'étude de la mesure des longueurs. Dans le texte initial le mot «coïncidence» avait été employé au lieu de «correspondance» ; il a gêné les élèves ainsi d'ailleurs que le nombre trop élevé de classes qu'ils avaient parfois à former ; il semble qu'il ne faille pas dépasser cinq classes pour éviter la dispersion de l'attention.

Comment les élèves ont-ils procédé pour comparer les éléments entre eux ? Dans la plupart des cas ils ont choisi un élément de référence auquel ont été comparés les objets qui semblaient, à première vue, avoir la même longueur ; dans ce cas on a opéré par superposition plutôt que par alignement. Cette dernière méthode suggérée dans le questionnaire est plus rapide et utilise la propriété de transitivité de la relation «est aussi long que» définie dans E : a est aussi long que b , b est aussi long que c , donc a est aussi long que c ; mais elle est aussi plus aléatoire car, en comparant les éléments de proche en proche (croquis ci-après), il peut se faire que l'on classe dans un même sous-ensemble deux éléments (celui placé le plus à gauche et celui placé le plus à droite) qui, par comparaison directe et avec les moyens dont on dispose (ici l'oeil nu), n'apparaissent pas comme ayant même longueur :



Ajoutons que le nombre de classes formées dépend du degré d'exigence que se fixent implicitement les élèves. On a pu constater que dans tel groupe, on avait classé dans une même boîte des objets dont la longueur différait de plus d'un centimètre. Dans ce cas le maître est intervenu pour demander de procéder à un classement plus «fin» ; cela suppose, bien entendu, que le matériel confié aux élèves soit confectionné avec soin : l'écart de longueur entre deux objets préparés pour être mis dans une même classe ne doit pas dépasser quelques millimètres* ; par contre l'écart de longueur entre deux objets appartenant à des classes différentes doit être de plusieurs centimètres.

* On ne peut exiger un écart nul entre les objets d'une même classe pour des raisons matérielles et parce que la mesure d'un objet n'est jamais exacte.

- 5 — Etiquetez les boîtes en utilisant les lettres majuscules d'imprimerie et précisez les ensembles obtenus qu'on appelle aussi des classes.

classe A = {

classe B = {

classe C = {

.

.

Vérifier qu'en faisant ce classement vous n'avez oublié aucun objet de l'ensemble E.

Y-a-t-il des objets qu'on pourrait classer dans deux boîtes différentes, c'est-à-dire dans deux classes différentes ?

Toutes les classes contiennent-elles au moins un objet ?

Représentez sur un même schéma l'ensemble E et toutes les classes :

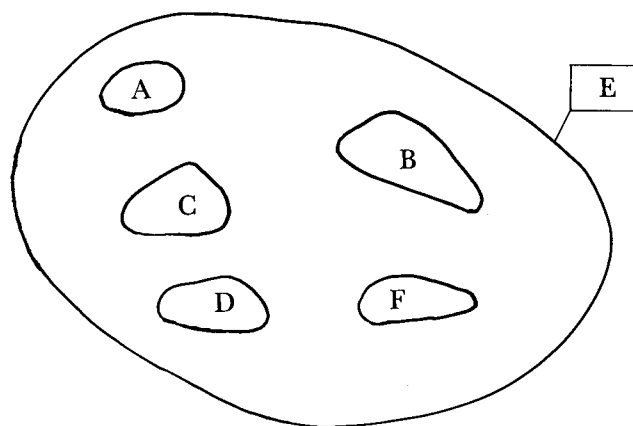
Commentaire : Les élèves n'ont éprouvé aucune difficulté à définir en extension les classes formées. (le mot propre : «classe» est ici introduit). Par les questions qui suivent on invite à vérifier les propriétés d'une partition d'un ensemble :

- *la réunion de toutes les classes est l'ensemble E lui-même.*

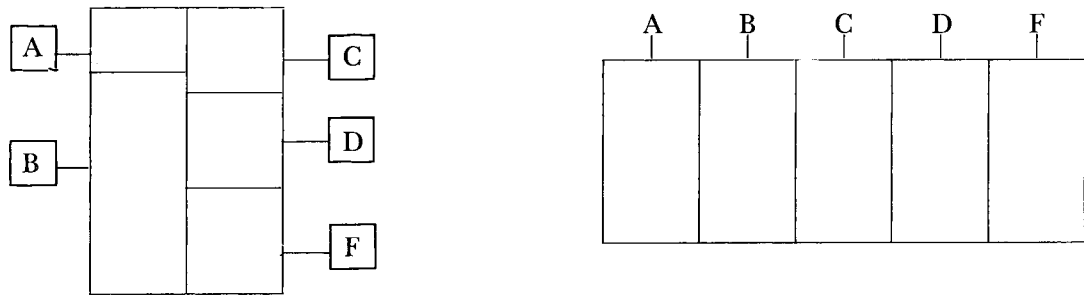
- *les classes formées sont disjointes*

- *aucune des classes n'est vide.*

Les élèves avaient la possibilité de représenter la partition sur la fiche elle-même ; en général ils ont adopté la représentation de Venn ; voici ce qu'un groupe a dessiné :



Deux groupes ont utilisé une représentation rectangulaire :



Mais dans ces derniers cas l'ensemble *E* n'est pas désigné.

6 — A partir de maintenant on n'utilisera plus le mot «boîte» mais le mot «classe».

Prenez l'une quelconque des classes que vous avez formées et dans cette classe choisissez *deux* objets quelconques.

On pourrait dire que ces deux classes ont même . . . (trouvez le mot convenable).

On peut dire aussi que l'objet . . . a même . . . que l'objet . . .

Prenez un *troisième* objet de la *même* classe.

Ecrivez quelques phrases comme ci-dessus :

—
—
—
—

Remplacez les objets dans la classe où vous les avez pris.

On peut dire que tous les objets de la classe . . . ont même . . .

Si l'on avait travaillé sur les autres classes, on aurait pu dire de la même manière.

Tous les objets de la classe . . . ont même . . .

Tous les objets de la classe

Tous les objets

Tous.

Chacune des classes formées s'appellera : *classe de longueur*. On parlera de la *classe de longueur A* ou plus simplement de la *longueur A*.

Ecrivez pour les classes que vous avez formées.

— classe de longueur ou longueur

— classe de longueur ou longueur

— classe de longueur ou longueur

Commentaire : Il s'agit ici de faire surgir le concept de longueur comme propriété commune à tous les objets d'une même classe. Les élèves ont rempli correctement les «trous» ; toutefois un groupe a donné un nom différent à la classe de longueur et à la longueur associée (fin de question).

- 7 — Prenez *une* classe de longueur qui ne compte que trois ou quatre éléments. Si on considère deux objets quelconques de cette classe on peut écrire une phrase : l'objet a même longueur que l'objet
cette partie est le «lien verbal»

Ecrivez toutes les phrases possibles en remplaçant le lien verbal par le signe $\longrightarrow$

Faites un schéma en représentant chaque objet par son signe et en dessinant toutes les flèches possibles.

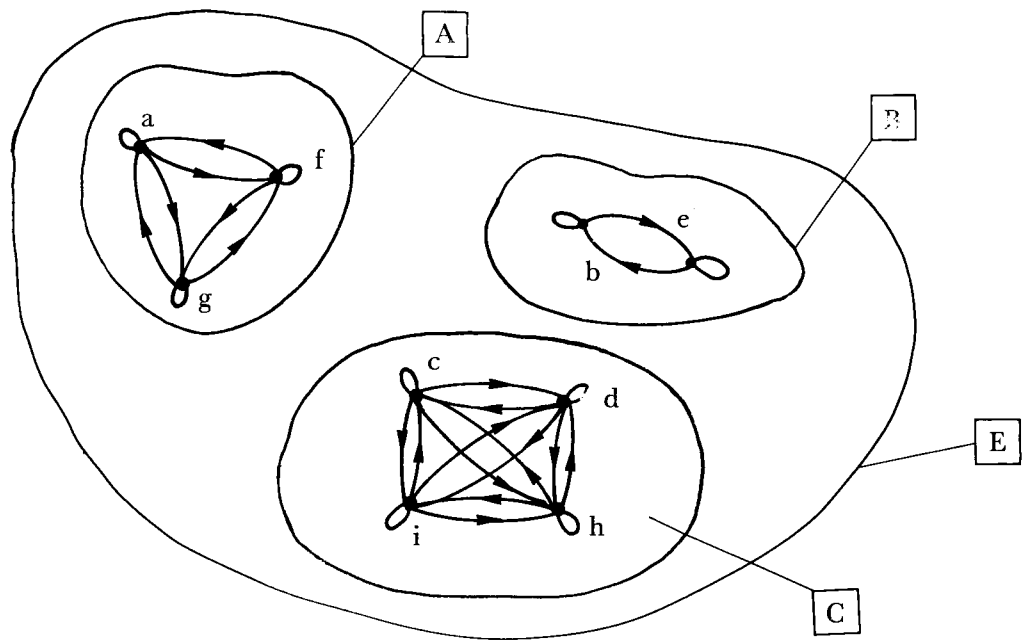
Commentaire : Le but est ici de définir la relation d'équivalence qu'on peut associer à la partition réalisée précédemment : « x à même longueur que y », d'en saisir les propriétés et de les traduire sur un schéma sagittal (c'est-à-dire à l'aide des flèches).

La condition imposée : «trois ou quatre» vise simplement à éviter d'avoir à tracer un schéma trop compliqué.

Le texte initial invitait les élèves à passer par une étape intermédiaire pour dessiner le schéma : disposer les objets sur une feuille et tracer les flèches sur cette feuille ; peut être avec de plus jeunes élèves serait-il utile de prévoir cette étape ?

En toute rigueur, il faudrait représenter l'ensemble E et non seulement une classe ; il se trouve d'ailleurs que spontanément la plupart des groupes ont représenté toutes les classes.

Exemple de schéma obtenu :



- 8 — Prenez maintenant deux objets n'appartenant pas à la même classe de longueur. Pouvez-vous dire qu'ils ont même longueur ?
 On peut dire qu'ils
 On peut dire que l'objet est plus long que l'objet
 que l'objet que l'objet
 (N'oubliez pas de remettre les objets dans les classes après cette opération).

Commentaire : Avec cette séquence et la suivante on aborde les activités de rangement sur les classes, propres à souligner que la longueur est une grandeur repérable ; cela signifie qu'on peut «situer» n'importe quelle classe par rapport aux autres. Ce repérage pourrait être fixé en faisant correspondre à chacune des classes un nombre naturel reproduisant l'ordre de rangement des classes ; cette dernière activité n'a pas été introduite pour éviter qu'une confusion ne s'établisse au moment où les opérations de mesurage (question 12 et suivantes) conduisent les enfants à utiliser aussi des nombres naturels pour exprimer les mesures de longueurs.

- 9 — On voudrait maintenant ranger toutes les classes de longueur dans un ordre (par exemple de la plus grande à la plus petite).
 Faites-le et expliquez au maître comment vous avez procédé).

Commentaire : La séquence 10 était associée à la séquence 9 dans le texte initial. Il a semblé intéressant de laisser les élèves aller à la découverte avant de les mettre sur la voie : d'où le nouveau découpage de la question.

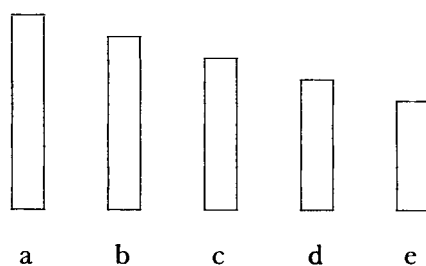
- 10 — Si vous n'avez pas réussi faites ainsi : choisissez dans chaque classe un objet qui *représentera* les autres et qu'on appelle un *représentant* de la classe ; rangez les représentants et utilisez ce rangement pour ranger les classes.

Notez l'ordre obtenu.

Recommencez le même travail en changeant de représentant. Obtient-on le même ordre ?

Dessinez un schéma qui montre l'ordre de rangement obtenu.

Commentaire : En général cette activité a été réussie (un groupe a achoppé sur la difficulté). L'ordre de rangement adopté sur le dessin a été du plus grand représentant au plus petit ; les élèves ont négligé de désigner les classes représentées mais ont le plus souvent, transcrit le symbole des représentants choisis. Cela tendrait à montrer la difficulté qu'éprouvent les enfants à effectuer un rangement portant vraiment sur les classes de longueur. Exemple de schéma obtenu :

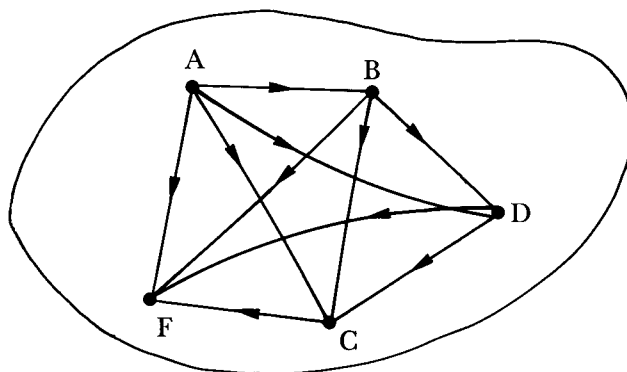


- 11 — Faites un dessin représentant les classes de longueur par des points. Reliez les points par des flèches qui voudront dire :

La longueur est plus grande que la longueur

Commentaire : La diagramme a été bien réussi par les groupes sauf par celui qui avait à ranger sept classes de longueur (des flèches ont dans ce cas été oubliées).

Exemple de schéma obtenu par un des groupes :

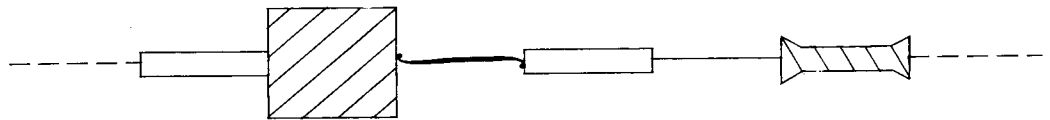


Remarque : A la suite de cette séquence le questionnaire présentait trois questions destinées à faire «opérer» sur les classes de longueur : «addition» de deux longueurs et commutativité de cette opération, «addition» de trois longueurs et associativité. Cette partie du questionnaire a été supprimée ici pour deux raisons :

— la première d'ordre pédagogique : l'intérêt de cette activité est de portée limitée, les situations appelant la mise en oeuvre de «l'addition» des longueurs étant peu nombreuses. Cette partie n'a d'ailleurs pas été exploitée dans la classe faute de temps.

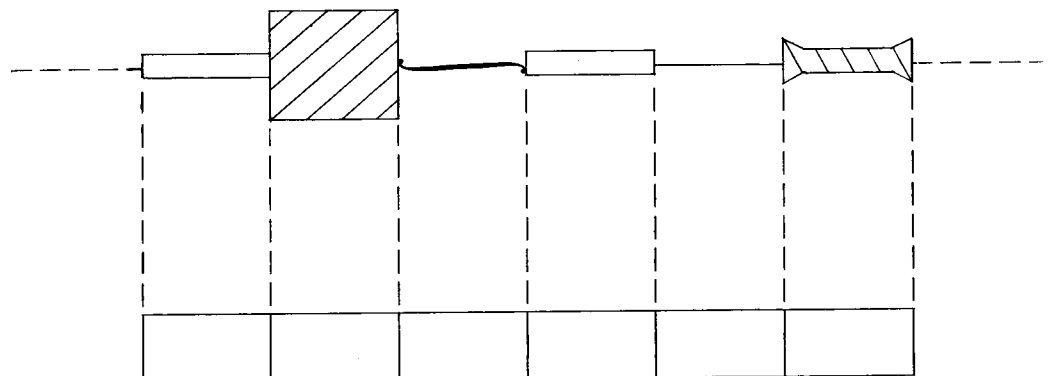
— la seconde d'ordre théorique : il se trouve que les avis sur l'adéquation du modèle mathématique en question sont partagés ; les uns considèrent que l'opération «addition» sur les classes de longueur est un modèle grossier mais assez satisfaisant pour l'école élémentaire. Les autres estiment que le modèle ne convient pas. En tout état de cause le modèle mathématique qui semble devoir convenir en l'occurrence est trop élaboré pour pouvoir être approché même de manière intuitive dès l'école élémentaire.

- 12 — Choisissez une classe de longueur qu'on appelle l'unité,
Placez les objets de cette classe bout-à-bout comme l'indique le croquis.



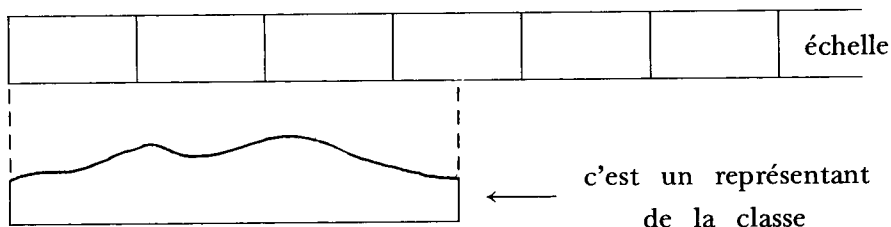
Quelle classe avez-vous choisie pour unité ? Classe . . .

Prenez une bande de carton et graduez la en la comparant à la file d'objets de la classe prise pour unité.



Vous avez fabriqué *une échelle* que vous utiliserez pour mesurer les longueurs des objets que vous avez classés.

Prenez l'une des classes de longueur et placez un représentant de cette classe près de l'échelle comme l'indique le croquis ci-après.



Quelle classe avez-vous mesurée ?

Exprimez la mesure de la longueur (en abrégé : mes A, mes B ... etc) avec l'unité choisie :

Déterminez la mesure de la longueur à l'aide du tableau :

Longueur						
Mesure avec l'unité choisie						

Commentaire : C'est intentionnellement que l'échelle dessinée ci-dessus n'est pas graduée, il faut que les élèves découvrent eux-mêmes la nécessité d'utiliser des nombres naturels. Les élèves sont également amenés à écrire des encadrements, c'est-à-dire à faire correspondre à une longueur un couple de nombres naturels consécutifs éventuellement égaux :

exemple : $1 < \text{mes } A < 2$

$0 < \text{mes } B < 1$

Dans certains cas les élèves ont écrit quand la comparaison à l'échelle a placé l'extrémité exactement en regard d'un des traits de la graduation :

$\text{mes } A = 4$ $\text{mes } B = 2$

Bien entendu si A est prise comme unité : $\text{mes } A = 1$ (ce que la plupart des groupes ont découvert sans difficulté).

- 13 — En examinant ce tableau observez que certaines longueurs pourtant différentes sont encadrées de la même manière. On dit que le mesurage n'est pas assez fin. Pour éviter cela, choisissez une autre unité. Construisez une nouvelle échelle et faites un autre tableau.

Obtenez-vous un rangement plus fin des longueurs ?
Avec quelle unité obtient-on le *mesurage le plus fin* ?

Commentaire : Les élèves ont senti d'emblée l'intérêt de prendre comme unité la plus petite des longueurs ou tout au moins une des plus petites longueurs. Il n'est pas sans intérêt cependant qu'ils constatent qu'en prenant la plus grande longueur pour unité toutes les mesures sont encadrées par le couple (0, 1) : cela induit l'idée de la finesse de mesurage. C'est pourquoi cette séquence a été introduite.

Le mesurage le plus fin est obtenu quand chacun des intervalles $[n, n + 1]$ ne sert plus qu'à encadrer une mesure et une seule ; pour cela il faut prendre une unité encore plus petite que la plus petite des longueurs à mesurer ; d'où l'intérêt de la séquence 14 qu'on peut prolonger par la recherche d'une unité 3 fois, 4 fois . n fois plus petite et la confection d'une échelle graduée plus fine. Il convient de préciser qu'à cette étape de l'exploitation du questionnaire des explications supplémentaires données par le maître oralement se sont révélées nécessaires.

14 — Donnez les mesures en prenant pour unité une longueur égale à la moitié de la longueur la plus petite.

15 — Choisissez une longueur et faites là mesurer par un autre groupe à l'aide d'une échelle qu'ils ont fabriquée. Trouvent-ils le même encadrement que vous ?

Prenez comme unité le centimètre ; fabriquez une échelle à l'aide de cette unité et mesurez les longueurs ; notez-les dans un tableau.

Demandez à un autre groupe de mesurer les longueurs dont vous disposez avec une échelle en centimètres. Comparez vos résultats.

Commentaire : L'idée d'unité légale est ici induite par l'expérience vécue des contraintes qu'impose la communication sociale : pour se comprendre il faut utiliser la même unité. Le travail doit être organisé de telle sorte que les équipes échangent leurs résultats deux à deux.

16 — Faites le même travail en prenant le millimètre pour unité (qui est dix fois plus petite) : utilisez une règle graduée.

Dans le cas où le mesurage «tombe juste» que remarque-t-on en comparant les nombres obtenus dans chacun des deux tableaux (l'un avec l'échelle en centimètres, l'autre avec l'échelle en millimètres).

- 17 — On décide d'exprimer les mesures à un *centimètre près par défaut*.
 Par exemple si on a trouvé $3 < \text{mes } A < 4$ on écrit que la mesure de A à un centimètre près par défaut est : $\text{mes } A = 3$.
 Réécrire le tableau de la question 15 avec cette convention :
 Puis réécrire la tableau ainsi obtenu en exprimant les mesures à un *millimètre près par défaut*.
- 18 — Réécrire le tableau de la question 17 en exprimant les mesures à un millimètre près par défaut mais en prenant le *centimètre* comme «unité de référence» (nombre à virgule).
 exemple : mesure de A = 16 (à 1mm. près par défaut)
 mesure de A = 1,6 (à 1mm. près par défaut le centimètre étant l'unité de référence).

Commentaire : Il est évident que ces deux dernières séquences ne sont à proposer qu'à des élèves de fin de CM1 ou de CM2. La notion de nombre à virgule est introduite ainsi plus naturellement semble-t-il qu'avec la méthode proposée par les instructions du 2/1/70.

EN GUISE DE CONCLUSION

C'est avec intérêt que nous recevrons toute suggestion, remarque ou critique au sujet de cette fiche de travail qui ne prétend pas être un modèle mais simplement un essai d'approche de la question. Nous serions heureux, en particulier, de recueillir le point de vue des maîtres qui l'ont abordée d'une autre manière ou qui auront tenté de la traiter en s'inspirant de la démarche suggérée ici.