RELATION D'EQUIVALENCE

* *
*

PREAMBULE.

Nous avons expliqué, dans l'éditorial de ce bulletin, comment notre équipe avait pour principe de ne jamais publier un article théorique qui n'ait été lu, en première lecture, par un certain nombre de maîtres et comment nous essayons de tenir le plus grand compte, lors de la rédaction finale, des remarques ou suggestions qui nous sont faites par ces derniers.

Une première version de l'article Relation d'Equivalence, a, selon ce principe, été confiée à divers maîtres de l'Académie. Elle était conçue selon le schéma classique qu'adoptent manuels et cours de recyclage sur ce sujet (définition d'une partition d'un ensemble, définition d'une relation sur un ensemble, puis d'une relation d'équivalence et série d'exercices destinés à assurer la compréhension de ces notions).

Les diverses discussions que j'ai pu avoir avec les maîtres qui avaient bien voulu travailler sur ce pré-document (individuellement selon les cas ou collectivement) m'ont permis de me rendre compte que, si les définitions avaient été en général comprises, par contre l'intérêt profond des notions introduites n'avait pas été vu.

J'ai donc repris l'article en question dans un tout autre esprit, dans le but d'aider le lecteur à prendre conscience du fait que les trois concepts fondamentaux de partition, relation d'équivalence et application, sont d'une part, utilisés bien souvent par lui sans qu'il s'en doute, d'autre part étroitement liés.

Malheureusement, tout cela a demandé du temps et les impératifs du tirage ne nous permettent pas de confier cette deuxième version en pré-lecture avant publication. Nous nous en excusons auprès de nos lecteurs et nous leur demandons d'autant plus de ne pas hésiter à nous demander des éclaircissements si certains points leur semblent manquer de clarté.

Pour faciliter la lecture de cet article, nous marquerons d'une étoile noire les alinéas qui peuvent paraître difficiles (car plus théoriques que les autres) en première lecture. S'ils vous semblent obscurs, n'hésitez pas pour autant à poursuivre l'étude du document.

C. COMITI

RELATION D'EQUIVALENCE

par Claude COMITI

I – PARTITIONS D'UN ENSEMBLE

1.1 ETUDE DE QUELQUES SITUATIONS.

On rencontre fréquemment des situations dans lesquelles on a à répartir des objets (qu'ils soient mathématiques ou qu'ils appartiennent au monde extérieur) en différents tas.

1.1.1 L'intendant du lycée classe les élèves selon leur qualité d'externe, demi-pensionnaire, ou interne.

Le censeur classe les mêmes élèves selon leur niveau (6ème, 5ème...) par exemple.

1.1.2 Le biologiste décompose l'ensemble des vertébrés en la réunion de six classes deux à deux disjointes : les agnathes, les amphibiens, les reptiles, les poissons, les oiseaux, les mammifères.

La classe des mammifères est elle-même subdivisée en différentes familles : les bovidés, les canidés, les cervidés, les équidés, les félidés, ...

1.1.3 A l'école maternelle, on fait trier aux enfants les blocs logiques par «attribut» (selon leur forme, leur couleur, leur épaisseur ou leur grandeur).

1.1.4 Dans l'ensemble des nombres entiers on peut répartir les entiers en nombres pairs et nombres impairs.

Toutes les activités effectuées ci-dessus s'appellent des activités de classement.

1.2 PARTITION D'UN ENSEMBLE.

1.2.1 Quelques rappels relatifs aux ensembles.

Nous ne définirons pas les mots : ensemble et élément. Nous les les considérons comme des notions premières. Quelques exemples d'ensemble :

– L'alphabet français est un ensemble qui a pour éléments les lettres de cet alphabet.

– Une nation est un ensemble qui a pour éléments les citoyens de cette nation.

– Une constellation est un ensemble qui a pour éléments les étoiles constituant cette constellation.

Lorsqu'il n'y a pas de mot particulier pour désigner l'ensemble auquel on s'intéresse, nous emploierons une phrase le précisant, par exemple :

– L'ensemble des nombres pairs.

– L'ensemble des élèves de la classe de CP de l'école de Cucuron les Olivettes (village bien connu des provençaux).

En bref, *un ensemble est constitué par des éléments et des éléments constituent un ensemble.*

Lorsque nous définirons l'ensemble par l'énumération de ses éléments : a, b, c, d par exemple, nous le désignerons par $\{a, b, c, d\}$. Cette notation désigne l'ensemble dont les éléments sont désignés par a, b, c, d. Si l'on appelle **E** cet ensemble, on dira que a est élément de **E**, ce qui se notera $a \in \mathbf{E}$ et se lira «a est élément de **E**».

On appelle *sous-ensemble ou partie d'un ensemble* **E** *tout ensemble dont les éléments sont des éléments de l'ensemble* **E**.

Exemples :

* Si $\mathbf{E} = \{a, b, c, d\}$
$\mathbf{A}_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, c\}$ sont deux parties de **E**.

* Si **E** est l'ensemble des élèves d'une école donnée, l'ensemble des élèves inscrits au CP est une partie de **E**.

On appelle partie pleine d'un ensemble la partie qui a pour éléments tous les éléments de l'ensemble, partie vide la partie qui n'a aucun élément.

Remarque :

Un même objet mathématique peut être considéré tantôt comme un ensemble, tantôt comme un élément d'un autre ensemble.

Si je parle de l'ensemble des cinq classes de l'école de Cucuron, chacune des cinq classes est élément de cet ensemble. Mais chacune des classes est également un ensemble d'élèves donné.

Chaque élève est alors élément d'une classe.

Chaque classe est élément de l'ensemble des classes de l'école. Mais en aucun cas un élève ne peut être considéré comme un élément de l'ensemble des classes de l'école.

1.2.2 Partition d'un ensemble.

Etant donné un ensemble **E** on appelle partition de **E** tout ensemble de parties de **E** telles que :

– Chacune de ces parties a au moins un élément.
– Chaque élément de **E** appartient à une de ces parties et une seulement.

Attention :

Le mot «partition» sera toujours utilisé dans cet article avec le sens précisé ci-dessus et non dans le sens du vocabulaire courant (division ou partage).

1.2.3 **Exemple :**

Retournons à Cucuron. Nous avons vu que l'école de ce village a cinq classes (CP, CE.1, CE.2, CM.1, CM.2). Nous allons nous interesser cette fois à l'ensemble des élèves de cette école. Nous l'appellerons **CUC**. Chacune des cinq classes de l'école définit alors une partie de **CUC** qui a au moins un élément (on ne connaît pas d'exemple de classe vide dans une école !). De plus chaque élève est dans une de ces classes et dans une seulement. L'ensemble des cinq classes est donc une partition de **CUC**, ou encore **CUC** est la réunion des cinq classes.

1.2.4 **Exercice :**

Dans l'école dans laquelle vous enseignez, il y a sans doute des enfants qui mangent à la cantine et des enfants qui restent à l'étude.

Si l'on appelle **E** l'ensemble des enfants de votre école, **A** l'ensemble des enfants qui mangent à la cantine, **B** celui des enfants qui restent à l'étude, **A** et **B** sont bien des parties de **E**, mais l'ensemble de ces deux parties n'est probablement pas une partition de **E**. Pourquoi ?

1.2.5 **Autre définition d'une partition :**

Etant donné un ensemble **E**, un ensemble de parties de **E** est une partition de **E** si et seulement si :

- Ces parties ne sont pas vides.
- Deux quelconques de ces parties n'ont aucun élément commun.
- La réunion de ces parties est l'ensemble **E**.

1.2.6 **Pour mieux comprendre :**

La maîtresse d'une classe de perfectionnement de quinze élèves, demande le lundi matin aux enfants de sa classe ce qu'ils ont fait la veille.

Sont-ils allés à l'Alpexpo ? Ont-ils regardé la télévision ? Sont-ils allés se promener ?

Elle note les réponses des enfants dans le tableau ci-dessous.

	est allé à l'Alpexpo	a regardé la télévision	est allé se promener
Dominique	X		
Christine		X	X
Valérie			X
Mireille		X	
Frédéric	X		
Laurence		X	
Sybille		X	X
Benoit		X	
Sandrine	X	X	
Eric			X
Catherine		X	
Francette			
Georges	X	X	
Joël		X	X
Claude		X	X

Si l'on appelle **PERF** l'ensemble des enfants de la classe de perfectionnement, le tableau met en évidence trois parties non vides de **PERF**.

L'ensemble des enfants qui sont allés à Alpexpo, que nous appellerons **ALP**.

L'ensemble des enfants qui ont regardé la télévision, que nous appellerons **TEL**.

L'ensemble des enfants qui sont allés se promener, que nous appellerons **PRO**.

Soit **P** *l'ensemble de ces trois parties,* **P** *est-il une partition de* **PERF** ?

Pour répondre à cette question regardons si les conditions données en 1.2.5 sont vérifiées :

Aucune des parties n'est vide.

Les parties **ALP** et **PRO** n'ont pas d'élément commun. mais **ALP** et **TEL** ont en commun Sandrine et Georges.

Quant à **TEL** et **PRO** elles ont en commun Christine, Sybille, Joël et Claude.

Donc il y a des parties de **PERF** qui ont des éléments en commun. (*)

De plus, Francette qui était malade a passé le dimanche dans son lit. Elle n'est donc élément, comme le montre le tableau ci-dessus, d'aucune des parties **ALP**, **TEL** ou **PRO**. La réunion de ces parties n'est donc pas l'ensemble **PERF**. (*)

P n'est pas une partition de **PERF**. Remarquons qu'il aurait suffi de faire seulement l'une des deux constatations marquées par (*) pour en arriver à cette conclusion.

1.2.7 **Exercice :**

Le Secteur géographique de l'école où se trouve la classe de perfectionnement est bien délimité et il se trouve que les enfants de la classe en question habitent tous dans l'une des six rues suivantes : rue Boileau, rue La Fontaine, rue Pascal, rue Montesquieu, rue Diderot, rue Voltaire.

Les enfants ont rempli le tableau ci-dessous.

	rue Boileau	rue La Fontaine	rue Pascal	rue Montesquieu	rue Diderot	rue Voltaire
Dominique			X			
Christine				X		
Valérie	X					
Mireille		X				
Frédéric		X				
Laurence			X			
Sybille					X	
Benoit				X		
Sandrine			X			
Eric						X
Catherine				X		
Francette	X					
Georges		X				
Joël					X	
Claude			X			

Si l'on appelle **BOI** l'ensemble des enfants de la classe qui habitent rue Boileau.

Si l'on appelle **FON** l'ensemble des enfants de la classe qui habitent rue La Fontaine.

Si l'on appelle **PAS** l'ensemble des enfants de la classe qui habitent rue Pascal.

Si l'on appelle **MON** l'ensemble des enfants de la classe qui habitent rue Montesquieu.

Si l'on appelle **DID** l'ensemble des enfants de la classe qui habitent rue Diderot.

Si l'on appelle **VOL** l'ensemble des enfants de la classe qui habitent rue Voltaire.

L'ensemble {**BOI**, **FON**, **PAS**, **MON**, **DID**, **VOL**} est-il une partition de **PERF** ? Pourquoi ?

Si l'un des enfants habitait un immeuble faisant le coin de deux des rues ci-dessus et ayant une entrée dans chacune des rues, votre réponse resterait-elle la même ?

1.2.8 Peut-on voir, à la lecture d'un tableau, s'il met en évidence une partition de l'ensemble formé des éléments portés dans la colonne d'entrée ?

II – RELATION BINAIRE

2.1 SUR LE MOT «RELATION».

En Français, le mot «relation» est un mot utilisé couramment et dans des sens très variés. On trouve en particulier dans le dictionnaire, sous le titre RELATION :

– Le fait de relater, de rapporter en détails (la relation d'un témoin).

– Le fait de connaître, de fréquenter des gens (avoir des relations).

– En grammaire, lien entre une proposition dite relative et la proposition principale.

– En musique, rapport entre deux sons, deux intervalles, deux accords (relation enharmonique).

– Activité ou situation dans laquelle plusieurs personnes sont susceptibles d'agir mutuellement les unes sur les autres (relations humaines, relations sociales, relations d'amitié,...).

– Le fait de caractériser deux objets tels qu'une modification de l'un entraine une modification de l'autre.

– Lien existant entre plusieurs termes d'une expression.

Le sens du mot qui nous intéressera ici se rapproche du dernier sens donné ci-dessus.

Pour mathématiser la notion de relation, nous exigerons de plus :

– Que les êtres ou objets mathématiques soient des éléments d'ensembles préalablement définis.

– Que la relation soit définie sans ambiguïté, c'est-à-dire qu'à la question «ces deux éléments sont-ils en relation ? » il n'y ait que deux réponses possibles : oui ou non.

2.2 EXEMPLES DE RELATION BINAIRE.

2.2.1 Le maître de la classe de perfectionnement dont nous avons déjà parlé ci-dessus partage les enfants de sa classe en deux groupes, celui des filles et celui des garçons.

G = {Fréderic, Benoit, Eric, Georges, Joël}.

F = {Christine, Valérie, Mireille, Laurence, Sybille, Sandrine, Dominique, Claude, Catherine, Francette}.

On se propose de comparer la taille des garçons à celle des filles. Il se trouve qu'Eric, Georges et Joël sont plus grands que toutes les filles et que :
Frédéric est plus petit que Sandrine mais plus grand que toutes les autres filles.
Benoit est plus petit que Sandrine et Christine mais plus grand que toutes les autres filles.

— Nous dirons que «... est plus petit que...» définit une relation binaire de l'ensemble **G** vers l'ensemble **F.** «... est plus petit que...» est appelé moule à deux pointillés.

Ce moule définit une relation binaire de **G** *vers* **F** *parce qu'il faut utiliser successivement deux éléments, un élément de* **G** *d'abord puis un élément de* **F** *pour transformer le moule en phrase en comblant les pointillés.*

— Appelons $\mathcal{L}$ la relation de **G** vers **F** définie ci-dessus. Alors «Frédéric est plus petit que Sandrine» est vrai : on dira que Frédéric est en relation avec Sandrine pour $\mathcal{L}$. Mais «Joël est plus petit que Francette» est faux : on dira que Joël n'est pas en relation avec Francette pour $\mathcal{L}$.

2.2.2 Si l'on reprend l'ensemble des élèves de l'école de Cucuron, **CUC**, et si l'on appelle **HAB** l'ensemble des habitants de la ville de Cucuron, le moule à deux pointillés «... a pour père ...» définit une relation binaire de **CUC** vers **HAB.**

2.2.3 Armand, Jacques, Marguerite, Robert, Zoë sont assis devant une grande glace. Appelons **EN** l'ensemble de ces cinq enfants et **IM** l'ensemble de leurs cinq images dans la glace.

Le moule à deux pointillés «... en ce moment regarde dans la glace...» définit une relation binaire de **EN** vers **IM** que nous appellerons $\mathcal{R}$.

2.3 REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE RELATION.

2.3.1 Reprenons l'exemple donné en 2.2.3. Désignons par A, J, M, R et Z les enfants et par A', J', M', R', Z' leurs images dans la glace.

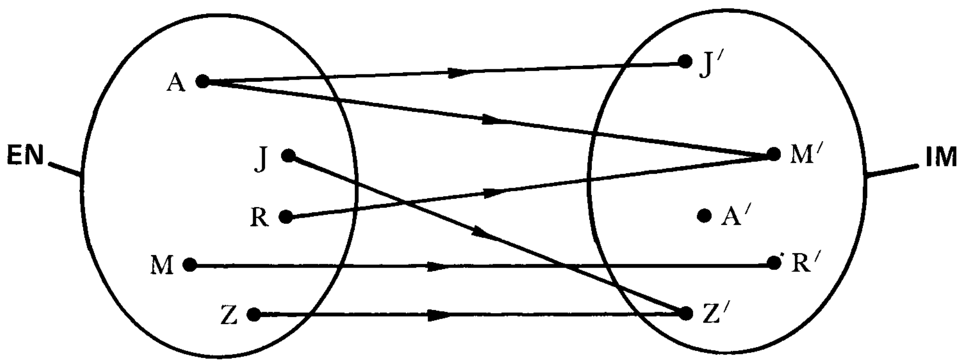
Comment traduire graphiquement que, en ce moment :

Armand regarde l'image de Jacques et celle de Marguerite ;
Jacques regarde l'image de Zoé ;
Marguerite regarde l'image de Robert ;
Robert regarde l'image de Marguerite ;
Zoë regarde sa propre image.

Nous pouvons traduire ces données dans un tableau que l'on appelle diagramme cartésien de la relation $\mathcal{R}$.

en ce moment regarde	A'	J'	M'	R'	Z'
A		x	x		
J					x
M				x	
R			x		
Z					x

Nous pouvons aussi traduire ces données en représentant les deux ensembles **EN** et **IM** par leur diagramme de Venn et en utilisant des flèches (chaque flèche signifiant : en ce moment regarde). C'est ce que l'on appelle le diagramme sagittal de la relation $\mathcal{R}$.



Remarque :

Chacune de ces deux représentations met en évidence les éléments qui sont en relation pour $\mathcal{R}$ et par là même ceux qui ne le sont pas.

2.3.2 **Exercice :**

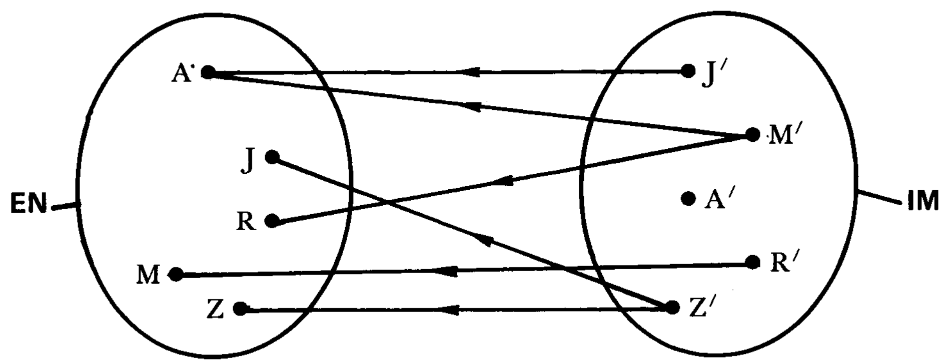
Tracer les diagrammes cartésien et sagittal de la relation de l'ensemble **G** vers l'ensemble **F** définie en 2.2.1 par «... est plus petit que...».

2.4 UN PEU DE VOCABULAIRE.

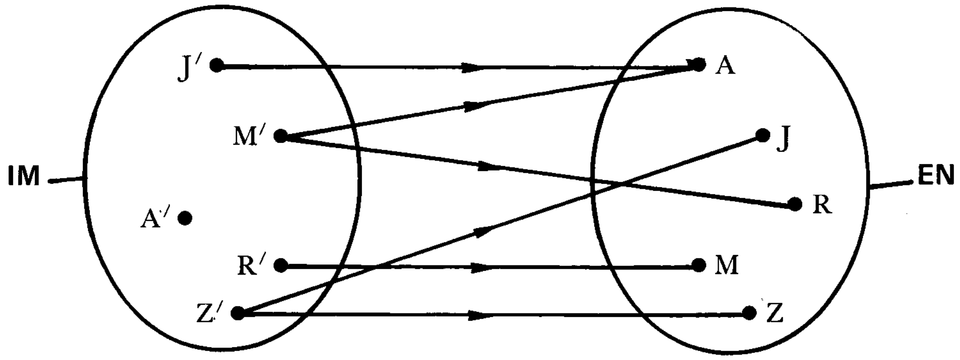
2.4.1 **Relation réciproque :**

Nous avons introduit en 2.2.3 la relation $\mathcal{R}$ définie de **EN** vers **IM** par «... en ce moment regarde dans la glace ...». Nous avons construit ensuite les diagrammes cartésien et sagittal de cette relation.

Nous appellerons relation réciproque de $\mathcal{R}$ la relation binaire dont on obtient le diagramme sagittal en inversant le sens des flèches figurant sur le diagramme sagittal de $\mathcal{R}$. D'où le diagramme sagittal de la relation réciproque de $\mathcal{R}$:



ou, ce qui revient au même :



La relation réciproque de $\mathcal{R}$ est donc la relation définie de **IM** vers **EN** par «... est, en ce moment, regardé par...».

Si l'on veut tracer le diagramme cartésien de la relation réciproque de $\mathcal{R}$, il suffit de changer dans le tableau tracé en 2.3.1, le sens de la flèche indiquant comment lire le tableau. On obtient :

en ce moment est regardé par	A'	J'	M'	R'	Z'
A		x	x		
J					x
M				x	
R			x		
Z					x

ou, ce qui revient au même

en ce moment est regardé par	A	J	M	R	Z
A'					
J'	x				
M'	x			x	
R'			x		
Z'		x			x

Exercices :

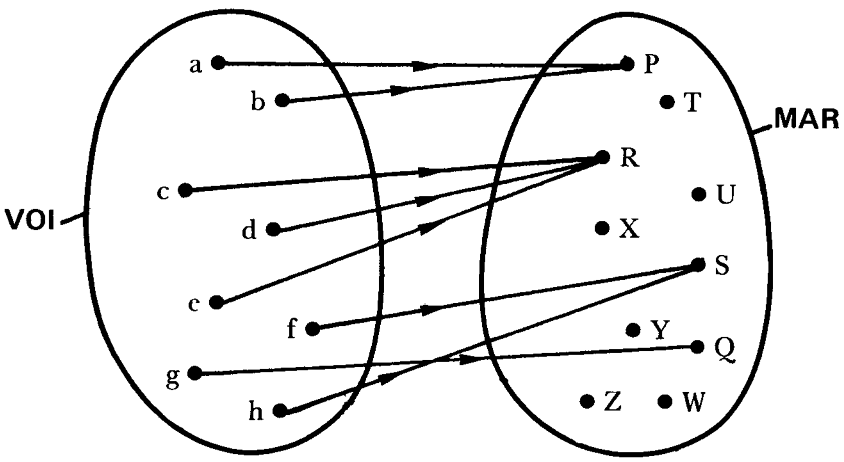
Construisez les diagrammes cartésien et sagittal de la relation réciproque de la relation $\mathcal{L}$ définie en 2.2.1 de **G** vers **F** par «... est plus petit que...». Définissez cette relation par un moule à pointillés convenable.

* Quel moule à pointillés permet de définir la relation réciproque de la relation définie en 2.2.2 de **CUC** vers **HAB** par «... a pour père...» ?

2.4.2 **Application d'un ensemble dans un autre ensemble :**

Dans le parking attenant à leur école, les maîtres et maîtresses garent leur voiture. Il y a un matin huit voitures garées. Nous avons cherché la marque de chaque voiture. Autrement dit, nous avons étudié la relation, définie de l'ensemble des voitures garées ce matin sur ce parking, ensemble que nous appellerons **VOI** vers l'ensemble des marques de voiture {P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z} que nous appellerons **MAR**, par «... a pour marque ...».

— Construisons le diagramme sagittal de cette relation :



Que remarquons-nous sur ce diagramme ?

De chaque point de l'ensemble **VOI** part une flèche et une seule vers un point de l'ensemble **MAR**.

– Construisons maintenant le tableau cartésien de la relation étudiée :

a pour marque	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
a	x									
b	x									
c			x							
d			x							
e			x							
f				x						
g		x								
h				x						

Que remarquons-nous sur ce tableau ?

Dans chaque ligne du tableau figure une croix et une seule.

La relation définie par le moule «...a pour marque...» de **VOI** vers **MAR** est donc telle que chaque élément de **VOI** est en relation avec un unique élément de **MAR**. On dit que le moule «... a pour marque...» définit une application de l'ensemble des voitures considérées dans l'ensemble des marques.

Le nom que l'on peut donner à cette application est *marque*. On appelle alors représentation cartésienne (ou sagittale) de l'application *marque* le diagramme cartésien (ou sagittal) de la relation définie par le moule «... a pour marque...».

Nous avons remarqué que dans chaque ligne du tableau cartésien figure une unique croix. Nous pouvons traduire cela en écrivant

marque de a = P
marque de b = P
marque de c = R
marque de d = R
marque de e = R
marque de f = S
marque de g = Q
marque de h = S.

On traduit le fait que *marque* de a = P en disant que P est l'image de a par l'application *marque*. On peut encore dire que a et b ont même image, P, par l'application *marque.*

★ **Mise au point :**

Plus généralement, nous dirons qu'une relation $\mathcal{R}$ d'un ensemble **A** vers un ensemble **B** définit une application f de **A** dans **B** si chaque élément de **A** est en relation pour $\mathcal{R}$ avec un unique élément de **B.** Ce qui se traduit :

* Sur le diagramme cartésien de $\mathcal{R}$ par le fait qu'il y a une unique croix dans chaque ligne (ou colonne) du tableau (selon la disposition choisie).

* Sur le diagramme sagittal de $\mathcal{R}$, par le fait que de chaque point de A part une flèche unique.

On appelle alors représentation graphique de l'application f un quelconque des diagrammes de la relation initiale $\mathcal{R}$.

On appelle image d'un point a de **A** par l'application f, le point b de **B** où aboutit l'unique flèche partant de a sur la représentation sagittale de l'application. On peut alors écrire: b = f(a).

Remarque :

Nous utilisons très fréquemment la notion d'application d'un ensemble dans un autre dans la vie de tous les jours. En voici des exemples :

Le moule «... a pour âge...» définit une application (que l'on peut appeler *âge*) d'un ensemble d'individus donnés dans l'ensemble des nombres.

Le moule «... a pour pointure...» définit une application (*pointure*) d'un ensemble d'individus donnés dans l'ensemble des nombres inférieurs ou égaux à 50.

Le moule «...a pour prénom usuel...» définit une application *(prénom)* d'un ensemble d'individus donnés dans l'ensemble des prénoms de ces individus.

Le moule «... a pour triple...» définit une application (*triple*) de l'ensemble des nombres entiers dans lui-même. Ainsi :

triple de 0 = 0
triple de 1 = 3
triple de 2 = 6
triple de 3 = 9.
....

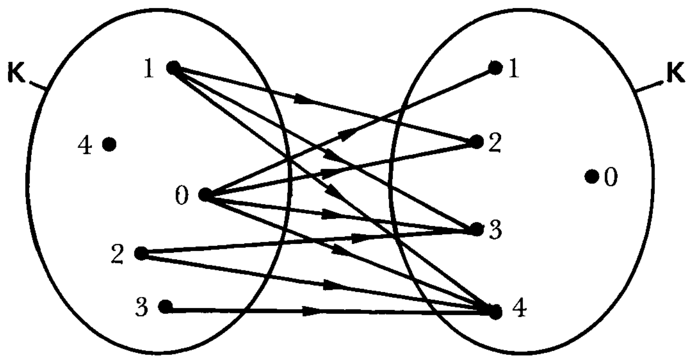
III – RELATION BINAIRE SUR UN ENSEMBLE

3.1 EXEMPLES.

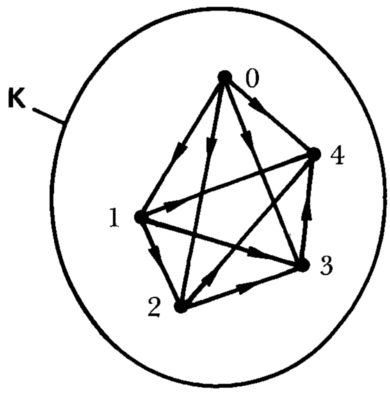
3.1.1 Appelons **K** l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à 4, et étudions la relation $\mathcal{H}$ définie de **K** vers **K** par «... est strictement inférieur à...».

Traçons ses diagrammes cartésien et sagittal.

est strictement inférieur à	0	1	2	3	4
0		x	x	x	x
1			x	x	x
2				x	x
3					x
4					



Puisque la relation $\mathcal{H}$ est définie de **K** vers lui-même, (nous dirons à partir d'ici «... est définie sur **K**...»), nous avons ici une nouvelle possibilité de représentation sagittale.



3.1.2 Si nous retournons à l'école de Cucuron, «... est la sœur de ...» définit une relation binaire sur l'ensemble **CUC** (parce qu'il faut utiliser successivement deux éléments de **CUC** pour transformer le moule en phrase en comblant les pointillés).

3.2 REMARQUES.

3.2.1 Il peut arriver que l'on ait à utiliser successivement deux fois le même élément de l'ensemble sur lequel est définie la relation étudiée pour combler les pointillés du moule.

Traitons un exemple :

Après la séance de gymnastique, les enfants doivent remettre leurs chaussures et quand on est petit, lacer ses souliers, ce n'est pas facile. On a observé les enfants et on s'est aperçu que :

Bernard, qui est dégourdi, a lacé ses souliers, ceux d'Alain et ceux de Claude.

Denis a lacé les souliers d'Eric pendant qu'Eric laçait les souliers de Denis.

François a lacé ses souliers.

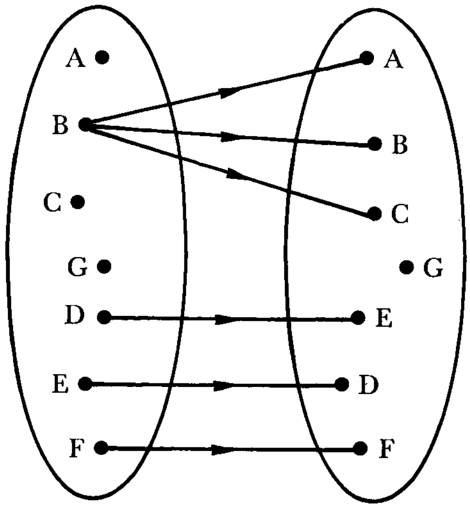
Gérard, qui avait des bottes en caoutchouc, n'a rien lacé.

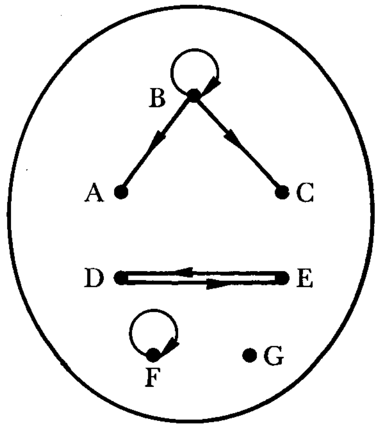
Le moule à deux pointillés «... a lacé les souliers de ...» définit une relation binaire sur l'ensemble des enfants que nous désignons par les initiales de leur prénom.

Nous voyons ici que B est en relation avec A et C mais aussi avec B et que F est en relation avec F.

Traçons les trois représentations possibles de la relation.

a lacé les souliers de	A	B	C	D	E	F	G
A							
B	x	x	x				
C							
D					x		
E				x			
F						x	
G							





La boucle en F signifie
que F a lacé ses propres souliers.

3.2.2 Dans la suite de cet article, les relations binaires sur un ensemble que nous serons amenés à étudier seront données à partir de leur représentation sagittale sur l'ensemble en question. Le lecteur s'efforcera chaque fois de construire le tableau cartésien et de chercher comment se traduisent sur cette représentation, les diverses propriétés étudiées.

3.3 UN PEU DE VOCABULAIRE A PROPOS D'UNE RELATION BINAIRE DEFINIE SUR UN ENSEMBLE.

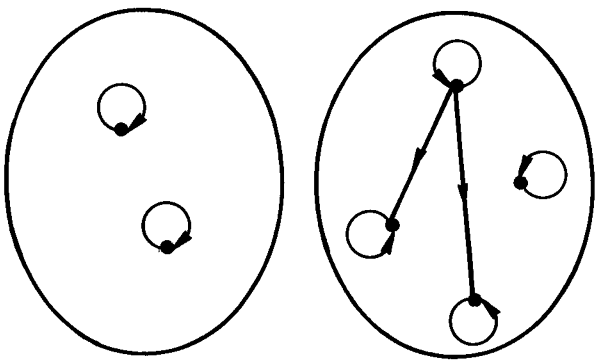
3.3.1 Boucle :

On appelle ainsi la flèche que l'on trace en un point sur le diagramme sagittal pour exprimer que ce point est en relation avec lui-même. (Sur la représentation sagittale de la relation étudiée en 3.2.1, il y a une boucle en B et une boucle en F).

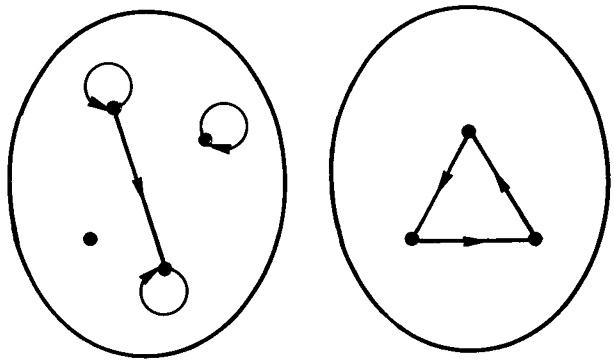
Réflexivité :

On dit qu'une relation définie sur un ensemble est réflexive s'il y a une boucle en tout point du graphe sagittal de l'ensemble, autrement dit, si chaque élément de l'ensemble est en relation avec lui-même pour la relation étudiée.

Exemples de relations réflexives :



Exemples de relations non réflexives :



3.3.2 **Double flèche :**

On appelle ainsi les deux flèches orientées en sens contraire qui joignent, sur le diagramme sagittal, deux points tels que chacun d'entre eux soit en relation avec l'autre. (Sur la représentation sagittale de la relation étudiée en 3.2.1, il y a une double flèche entre D et E).

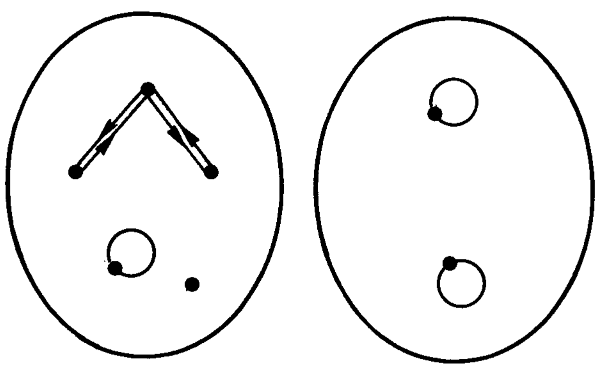
Remarque :

On peut considérer qu'une boucle en un point est une double flèche. A partir d'ici, nous ne mettrons plus de flèches sur les boucles.

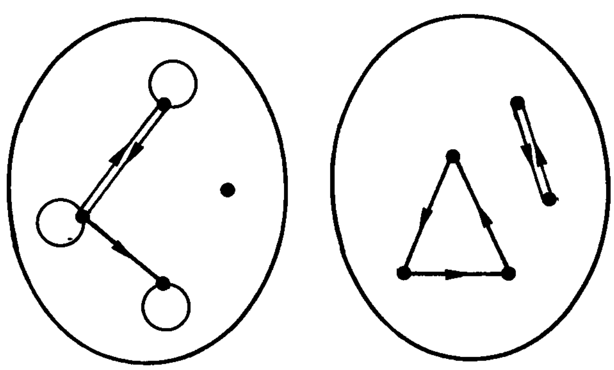
Symétrie :

On dit qu'une relation binaire définie sur un ensemble est symétrique s'il n'y a, en aucun point de son graphe sagittal, une flèche qui ne soit pas double ; autrement dit, si chaque fois qu'un élément de l'ensemble est en relation avec un autre élément, ce dernier est également en relation avec le premier.

Exemples de relations symétriques :



Exemples de relations non symétriques :



Remarque :

Si l'on veut tracer la représentation sagittale de la relation réciproque d'une relation binaire, on a vu qu'il suffit d'inverser, sur le diagramme sagittal de la relation de départ, le sens des flèches. Si la relation de départ est symétrique, nous venons de voir que, de tout point de la représentation, part ou arrive bien aucune flèche, ou bien une double flèche, ou bien une boucle. Nous obtiendrons donc dans ce cas, pour la relation réciproque le même diagramme sagittal que pour la relation de départ. On dit alors que la relation est égale à sa réciproque.

Exemple : «... est la sœur de ...» définit une relation binaire égale à sa réciproque sur un ensemble de filles. Pourquoi ? Ce résultat resterait-il vrai sur un ensemble de garçons et de filles ?

3.3.3 **Transitivité :**

Une relation est transitive si son diagramme sagittal est tel que

$$\text{Si} \begin{cases} \text{une flèche va de } x \text{ vers } y \\ \text{et} \\ \text{une flèche va de } y \text{ vers } z \end{cases} \quad \text{Alors une flèche va de } x \text{ vers } z$$

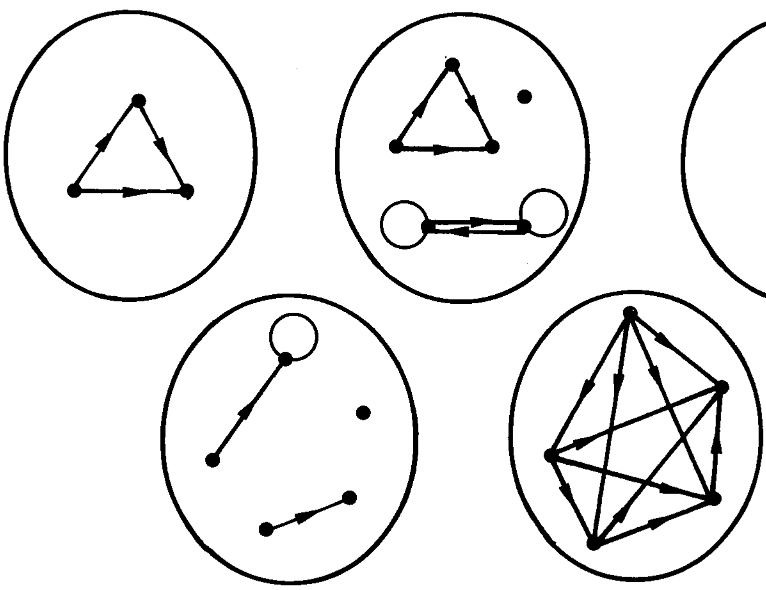
et ce, quels que soient les points x, y, z, distincts ou non.

Ceci signifie que quels que soient les éléments x, y et z de l'ensemble sur lequel est définie la relation,

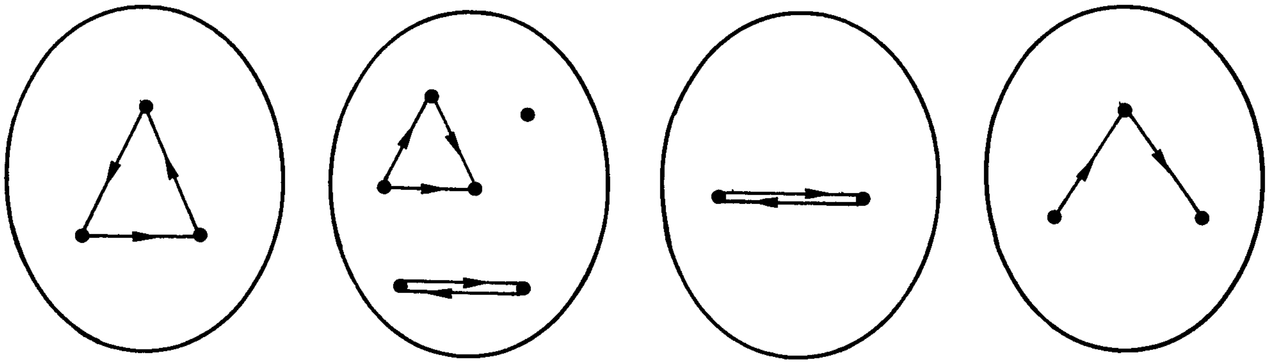
$$\text{Si} \begin{cases} x \text{ est en relation avec } y \\ \text{et} \\ y \text{ est en relation avec } z \end{cases} \quad \text{Alors } x \text{ est en relation avec } z$$

et ceci que x, y et z soient distincts ou non.

Exemples de relations transitives :



Exemples de relations non transitives :



Remarque :

Vous pouvez, si vous en éprouvez le besoin, étudier des relations que vous aurez vous-même construites et vous demander si elles sont réflexives, symétriques ou transitives.

Notre but n'est pas ici d'insister sur ces notions (qui sont des notions difficiles) ; nous vous avons simplement défini, au passage, quelques mots que vous aurez l'occasion de rencontrer souvent en mathématique et en particulier dans la suite de cet article.

Si vous avez lu et travaillé cet article d'une seule traite jusqu'ici, accordez-vous un peu de repos et laissez décanter quelque temps... avant de passer à la suite.

IV – OU L'ON REPARLE DE PARTITION

4.1 APPLICATION ET RELATION ASSOCIEES A UNE PARTITION.

4.1.1 Le maître de la classe de perfectionnement dont nous avons déjà parlé, laisse, lors des activités d'éveil, les enfants se regrouper par affinités respectives.

La partition ainsi obtenue de l'ensemble des élèves de la classe de perfectionnement donne naissance au concept d'équipe. Si les enfants appellent leurs équipes Hirondelles, Mammouths, Papillons et les désignent par **HIR**, **MAM** et **PAP**, à la partition **T** = {**HIR**, **MAM**, **PAP**} de **PERF** est associée l'application *équipe* de l'ensemble **PERF** dans l'ensemble **T** définie par

équipe de Dominique = **HIR**
équipe de Christine = **HIR**
équipe de Valérie = **MAM**
équipe de Mireille = **PAP**
équipe de Frédéric = **PAP**
équipe de Laurence = **MAM**
équipe de Sybille = **HIR**
équipe de Benoit = **MAM**
équipe de Sandrine = **MAM**
équipe d'Eric = **PAP**
équipe de Catherine = **PAP**
équipe de Francette = **PAP**
équipe de Georges = **MAM**
équipe de Joël = **HIR**
équipe de Claude = **HIR**

A la partition en question est associée également la relation binaire définie sur **PERF** par «... a même image par l'application *équipe* que ...» ou encore «... appartient à la même équipe que ...».

★ 4.1.2 Les résultats obtenus dans le cas particulier étudié ci-dessus sont vrais dans le cas général.

Soit **P** une partition d'un ensemble **ENS**, **P** est un ensemble de parties de **ENS** satisfaisant à certaines propriétés (revoir la définition d'une partition donnée en 1.2.2). Un élément de **P** est donc un ensemble que l'on doit appréhender comme un seul objet mathématique, (de même que dans l'exemple précédent, l'ensemble **HIR** était un élément de la partition étudiée de **PERF**).

On peut ainsi mettre en œuvre deux ensembles **ENS** d'une part et **P** d'autre part (dans l'exemple précédent **PERF** et **T**) et définir l'application de **ENS** dans **P** qui à chaque élément X de **ENS** associe l'unique élément de **P** auquel il appartient (c'est dans l'exemple précédent, l'application *équipe*). Si on appelle cette application f, l'image de X par f sera désignée par $f(X)$ (ce que l'on lira «effe de ixe»).

A la partition **P** de **ENS** est alors également associée la relation binaire définie sur **ENS** par «... a même image par l'application f que ...». X a évidemment même image que lui-même par l'application f, et ceci, quel que soit X de **ENS**. La relation est donc réflexive.

De plus si X a même image que Y par l'application f, c'est-à-dire si $f(X) = f(Y)$, alors Y a même image que X par l'application f, et ce, quels que soient X et Y de **ENS**. La relation est donc symétrique.

Enfin quels que soient X, Y, Z de **ENS** tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} f(X) = f(Y) \\ \quad\text{et} \\ f(Y) = f(Z) \end{array}\right. \quad \text{alors } f(X) = f(Z)$$

la relation est donc transitive.

En résumé :

A une partition donnée **P** *d'un ensemble* **ENS**, *on peut associer une application de* **ENS** *dans* **P** *que nous désignons par f et une relation réflexive, symétrique et transitive définie sur* **ENS** *par «... a même image par l'application f que ...».*

4.1.3 **Exercice :**

Reprenez la partition définie dans l'ensemble de la classe de perfectionnement en 1.2.7 et précisez l'application et la relation associées à cette partition.

4.2 RELATION D'EGALITE SUR UN ENSEMBLE.

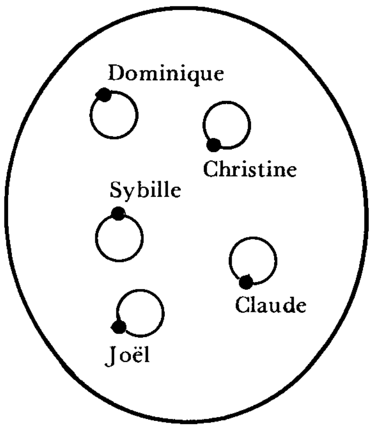
Reprenons l'équipe définie en 4.1.

HIR = {Dominique, Christine, Sybille, Joël, Claude} et supposons que le maître, excédé par le chahut provenant de cette équipe, ait séparé les cinq enfants et les ait dispersés dans la classe. On peut alors dire qu'il a fait une partition **K** de **HIR** dont les éléments sont les cinq parties de **HIR** suivantes : {Dominique}, {Christine}, {Sybille}, {Joël}, {Claude}.

L'application f de **HIR** dans **K** associée à la partition **K** est alors définie par :

f(Dominique) = {Dominique}
f(Christine) = {Christine}
f(Sybille) = {Sybille}
f(Joël) = {Joël}
f(Claude) = {Claude}.

Cette application est vous le voyez, sans grand intérêt. Mais cherchons la relation associée à la partition **K**. C'est donc la relation définie sur **HIR** par «... a même image par l'application f que ...». Traçons son diagramme sagittal. On obtient :

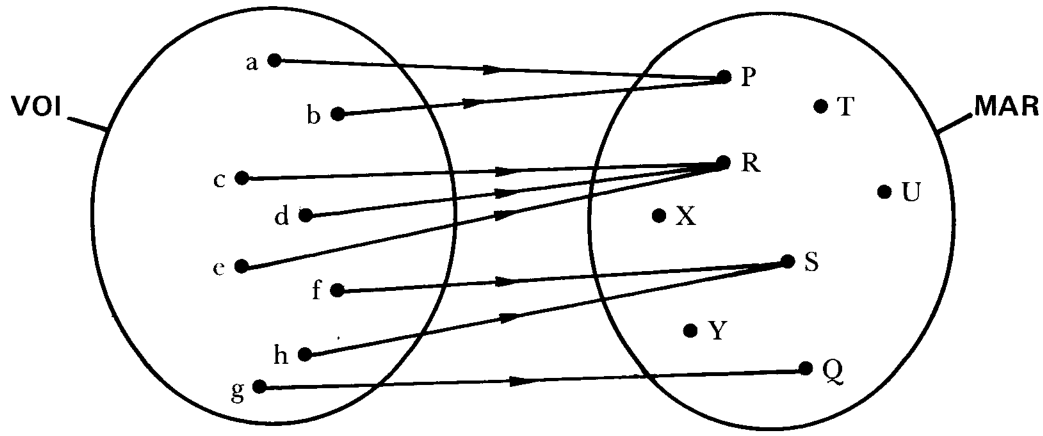


Cette relation n'est autre que la relation définie sur **HIR** par «... est égal à ...», relation que l'on appelle égalité sur **HIR**.

Au passage, nous retrouvons bien le fait que la relation d'égalité sur un ensemble possède les trois propriétés de réflexivité, symétrie, transitivité.

4.3 RELATION ET PARTITION ASSOCIEES A UNE APPLICATION.

4.3.1 Reprenons l'application *marque* définie en 2.4.2 de **VOI** dans **MAR**. Cette application a pour représentation sagittale :



On définit immédiatement la relation associée à l'application étudiée sur **VOI** par «... a même image par l'application *marque* que ...» ou encore «... a même *marque* que ...».

On obtient alors une partition de **VOI** en regroupant ensemble les éléments qui ont même image par l'application *marque.* On obtient ainsi les parties **X** = {a, b}, **Y** = {c, d, e}, **Z** = {f, h} et **T** = {g}, et {**X**, **Y**, **Z**, **T**} est une partition de **VOI.**

Remarque :

A partir de l'application *marque* de **VOI** dans **MAR,** nous avons donc précisé une partition de **VOI.** Mais nous avons vu, en 4.1.2 que, à toute partition **P** d'un ensemble **ENS,** on pouvait associer une application de **ENS** dans **P.** Précisez quelle est ici l'application associée (au sens de 4.1.2) à la partition {**X**, **Y**, **Z**, **T**} de **VOI.**

★ 4.3.2 Explicitez en quoi les résultats trouvés en 4.3.1 sont généraux et précisez quel est le lien entre l'application associée à la partition obtenue et l'application initialement donnée.

V – RELATION D'EQUIVALENCE

5.1 Nous avons montré en IV que :

– Chaque fois que l'on se donne une partition d'un ensemble, on peut mettre en évidence une application et une relation réflexive, symétrique, transitive, qui sont associées à cette partition.

– Chaque fois que l'on se donne une application d'un ensemble dans un autre ensemble, on peut lui associer une partition de l'ensemble de départ et une relation réflexive, symétrique, transitive définie dans cet ensemble.

Nous allons, dans ce paragraphe, partir cette fois d'une relation réflexive, symétrique et transitive, définie sur un ensemble. C'est en effet, une situation que l'on rencontre couramment.

En voici un exemple :

* A la relation définie par le moule «On peut aller du lieu ... au lieu ... à pied sec» est associée une partition du territoire français en ce que les insulaires appellent «le continent» et toutes les îles appartenant au territoire français. (Les îles reliées par un pont au continent, comme l'île de Ré par exemple, ne sont pas ici considérées comme des îles mais comme faisant partie du continent.

5.2 APPLICATION ET PARTITION ASSOCIEES A UNE RELATION REFLEXIVE, SYMETRIQUE ET TRANSITIVE.

Considérons l'ensemble $\mathbf{E} = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 16, 17, 18\}$ et proposons-nous d'étudier la relation définie sur $\mathbf{E}$ par «... et ... sont deux éléments de $\mathbf{E}$ tels que leur produit soit un carré parfait». Nous appellerons $\mathcal{R}$ cette relation.

5.2.1 Construire la table de multiplication de **E** et en déduire les diagrammes cartésien et sagittal de la relation $\mathcal{R}$.

Vérifier, à partir du diagramme sagittal ou de quelqu'autre façon, que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive.

5.2.2 A la relation $\mathcal{R}$ nous allons associer l'application *classe* qui, à chaque élément X de **E** associe l'ensemble des éléments de **E** en relation avec X pour $\mathcal{R}$.

Si vous avez correctement construit les diagrammes de $\mathcal{R}$ demandés en 5.2.1, vous trouverez avec nous que l'application *classe* est alors définie par :

classe de 1 = {1, 4, 9, 16}
classe de 2 = {2, 18}
classe de 3 = {3, 12}
classe de 4 = {1, 4, 9, 16}
classe de 9 = {1, 4, 9, 16}
classe de 12 = {3, 12}
classe de 16 = {1, 4, 9, 16}
classe de 17 = {17}
classe de 18 = {2, 18}.

5.2.3 **Faisons quelques remarques :**

* Si un élément de **E** appartient à la même classe qu'un autre élément de **E**, les deux classes sont égales.

* Il n'y a que quatre classes distinctes.

* Ces quatre classes distinctes sont disjointes deux à deux.

* Chaque élément de **E** appartient à sa classe.

Nous pouvons donc conclure que l'ensemble des classes des éléments de **E** est une partition de **E**.

5.2.4 Mais nous savons (voir 4.1) qu'à une partition **P** de **E** sont associées :

– L'application de **E** dans **P** qui à chaque élément de **E** associe l'unique élément de **P** auquel il appartient (ce n'est autre que l'application *classe* définie en 5.2.2).

– La relation définie sur **E** par «... a même image par l'application *classe* que ...» autrement dit «... a même classe que ...» qui est précisément la relation $\mathcal{R}$ dont nous sommes partis.

5.2.5 Ceci est général. Chaque fois que nous partirons d'une relation binaire sur un ensemble **E** possédant les propriétés de réflexivité, symétrie, transitivité, nous pourrons lui associer l'application *classe* et l'ensemble des classes des éléments de **E** sera une partion de **E**.

5.3. RELATION D'EQUIVALENCE.

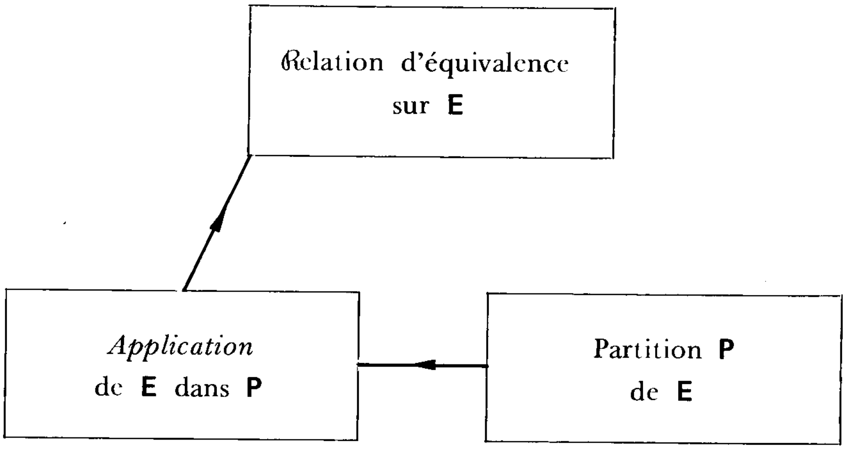
Tout ce qui précède montre l'importance des relations binaires ayant les trois propriétés de réflexivité, symétrie, transitivité. C'est pourquoi on leur donne un nom : on les appelle relations d'équivalence.

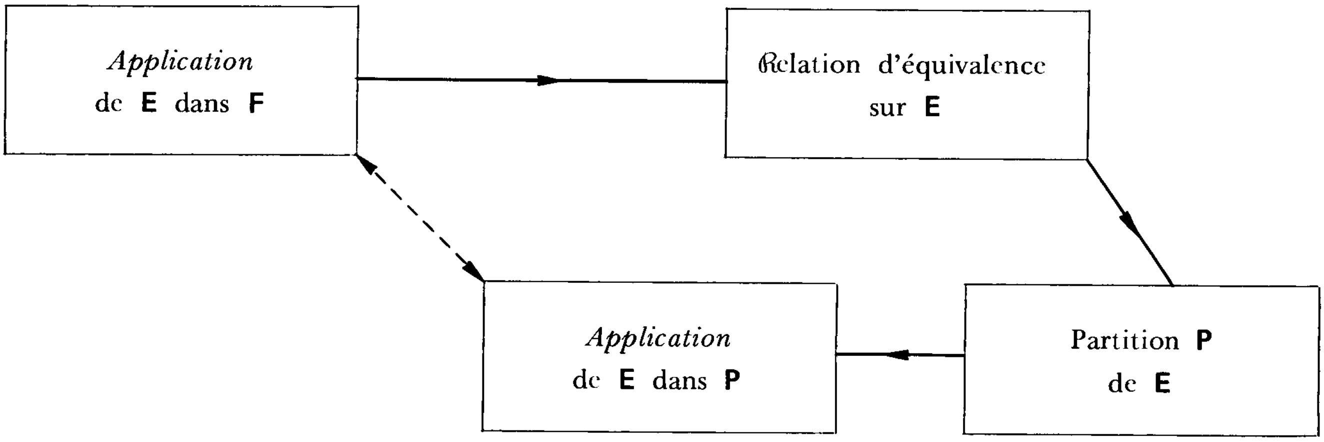
Nous aurions pu, comme c'est fait dans la plupart des livres ou des cours de recyclage destinés aux maîtres, nous contenter de vous dire :

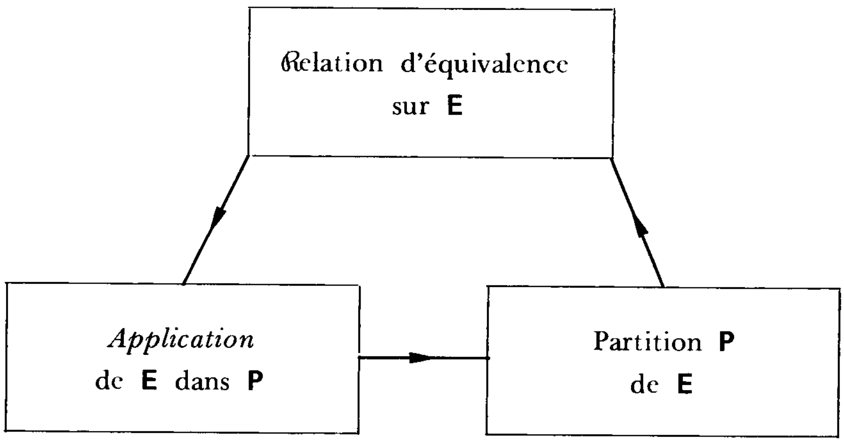
«On appelle relation d'équivalence sur un ensemble E toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive».

Nous avons choisi une autre démarche, parce qu'elle permet, nous semble-t-il, de bien faire comprendre que les trois concepts de PARTITION, APPLICATION et RELATION D'EQUIVALENCE sont indissociables.

En conclusion de cet article, essayons de montrer, par trois schémas, les liens existant entre ces trois concepts. Ces schémas résument, en quelque sorte, les résultats des paragraphes 4.1, 4.3 et 5.2. Il vous appartient de les commenter.


Relation d'équivalence
sur E
Application
de E dans P
Partition P
de E


Application
de E dans F
Relation d'équivalence
sur E
Application
de E dans P
Partition P
de E


Relation d'équivalence
sur E
Application
de E dans P
Partition P
de E