
ESSAI D'UNE PROGRESSION SUR LE CERCLE POUR L'ÉCOLE PRIMAIRE UNE TRANSITION CLÉ : DU GABARIT AU COMPAS

Caroline BULF

ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux

Valentina CELI

ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux

Introduction

En nous intéressant à la reproduction de figures géométriques planes telle qu'elle est proposée dans différents manuels scolaires (Bulf & Celi, 2015b), nous avons repéré beaucoup d'exercices mettant en jeu le compas et le cercle. Ces exercices ne semblent pourtant pas être de véritables problèmes visant l'articulation des différents usages du compas ; et à l'égard du cercle, ils ne semblent pas non plus prendre en compte la dialectique qui pourrait se créer entre les différentes conceptions que l'on peut avoir sur cette figure géométrique (Artigue & Robinet, 1982). Les « trous » ainsi repérés dans les progressions sur le cercle à l'école primaire nous ont conduites à nous intéresser de plus près à des problèmes autour du cercle, notamment les problèmes de lieux géométriques et de restauration de figures géométriques planes.

Plus particulièrement, en syntonie avec les travaux du *groupe de Lille*¹, nous cherchons à construire une progression qui assure une continuité des apprentissages tout au long de l'école primaire et qui assume de créer les conditions favorables pour exercer et développer chez les élèves le regard géométrique sur les figures. Et, au-delà, nous partageons le constat fait par Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2014, p. 59) que la diffusion de problèmes de restauration « ne va pas de soi » auprès des enseignants. Perrin-Glorian et Godin (2014, p. 33) précisent même que

la pratique de la restauration de figures, telle que nous l'entendons, suppose un changement de contrat didactique habituel de la géométrie de l'école élémentaire (au moins en France) et aussi de la formation des enseignants. Il est en effet souhaitable que ceux-ci puissent intégrer ces problèmes à leur enseignement ordinaire de la géométrie dans une démarche cohérente et non les juxtaposer à leur pratique ordinaire en les traitant comme des exceptions ludiques.

Ainsi, nous partageons avec ces auteurs leur questionnement sur la diffusion des travaux de recherche dans les pratiques ordinaires des enseignants (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian,

¹ De par leur appartenance institutionnelle, nous désignons par le « groupe de Lille » les membres du groupe de recherche qui a fonctionné à l'IUFM du Nord pas de Calais durant une vingtaine d'années : Frédéric BRECHENMACHER, Jean-Robert DELPLACE, Raymond DUVAL, Claire GAUDEUL, Marc GODIN, Joël JORE, Bachir KESKESSA, Régis LECLERCQ, Christine MANGIANTE-ORSOLA, Anne-Cécile MATHÉ, Bernard OFFRE, Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, Odile VERBAERE.

2014, p. 74). :

Comment les formateurs / chercheurs peuvent rendre les situations produites par la recherche plus accessibles pour les enseignants ? [...] Comment les enseignants peuvent-ils enrichir leurs pratiques à l'aide des situations produites par la recherche ?

Dans la perspective de développer des outils efficaces pour l'enseignant, c'est-à-dire que ce dernier pourrait facilement s'approprier et faire vivre dans sa classe à moindre coût, nous avons fait le choix original de construire une progression, sur l'enseignement et l'apprentissage des propriétés du cercle, à partir d'une seule et même figure-modèle, en adaptant le choix des instruments mis à disposition et en jouant sur certaines variables didactiques, comme nous le précisons plus loin.

Quelle progression est-il possible de penser pour enseigner et apprendre les propriétés du cercle depuis la maternelle et jusqu'au début du collège ? Quelle dialectique peut-on viser des différentes conceptions du cercle au sens de Artigue et Robinet (1982) ? Quelle articulation des différents usages du compas (instrument permettant de tracer des cercles, de comparer et de reporter des longueurs sur une droite) et des caractéristiques du cercle (centre, rayon, diamètre) sont à exploiter ? Dans cet article, nous essaierons d'apporter des éléments de réponse à ces questions.

Dans la première partie, après avoir présenté les résultats de notre étude des textes officiels de ces trente dernières années et de quelques extraits des ressources récentes existantes, nous proposons les grandes lignes d'une progression visant le passage du « rond » au cercle et du gabarit de disque au compas, pour des classes d'école primaire et de début du collège.

La deuxième partie est consacrée aux analyses mathématique et didactique d'une figure-modèle qui sert de fil rouge pour notre progression.

La description et l'analyse des grandes étapes de notre progression font l'objet de la troisième partie de cet article. Nous présentons en détails les analyses *a priori* de toutes les situations de notre progression mais aussi quelques éléments d'analyses *a posteriori*, étant donné que la plupart de nos situations ont été testées en classe. Les résultats d'analyses plus approfondies de ces expérimentations feront l'objet d'une prochaine publication.

Dans la quatrième partie, outre les conclusions, nous posons de nouvelles questions en lien avec l'exploitation effective en classe de cette progression et les pratiques des enseignants.

1. Progressions sur le cercle : état des lieux dans les programmes et dans les manuels scolaires

En guise d'introduction de cette partie, il nous semble important de synthétiser, pour le lecteur, quelques spécificités du cercle et des outils qui permettent de le tracer.

Un terme du langage courant, « rond », est souvent utilisé pour indiquer un objet courbe de courbure constante. C'est d'ailleurs ainsi que les enfants apprennent à nommer cette forme aux bords arrondis qui demeure invariante par rotation dans leurs jeux d'encastrement.

Dans le langage mathématique, contrairement aux termes attribués à d'autres figures géométriques élémentaires (triangle, carré, rectangle, ...), le terme « disque » désigne une surface alors que le terme « cercle » en désigne son contour, la ligne qui délimite cette surface. Ainsi, dans une conception ponctuelle de ces objets géométriques, les points qui sont à l'intérieur la surface délimitée par le cercle, y compris son centre, n'appartiennent pas à ce dernier.

Outre le centre, le rayon et le diamètre sont les éléments caractéristiques du cercle : selon le contexte, ces termes désignent soit un segment, soit une longueur.

Comme Artigue et Robinet (1982) l'ont bien mis en évidence, les différentes façons de définir le cercle renvoient à des conceptions différentes de celui-ci (ponctuelle ou globale, statique ou dynamique) (*Ib.*, p. 17) :

Ces définitions sont toutes logiquement équivalentes et définissent donc le même objet géométrique. Mais elles correspondent à des façons différentes de percevoir le cercle, d'utiliser ses propriétés et elles mettent l'accent sur des éléments géométriques, des relations entre ces éléments, différents. C'est pourquoi nous leur associons des conceptions distinctes du cercle.

Nous tenons à ajouter que ces différentes conceptions se forgent aussi selon les différents outils dont on dispose pour tracer le cercle, par exemple : gabarit ; pochoir ; ficelle, punaise et crayon ; compas.

À propos du compas, précisons d'ores et déjà qu'il s'agit d'un outil qui permet de tracer des cercles mais aussi de reporter et de comparer des longueurs. Cette propriété de conservation de longueur lie « matériellement » le compas et la notion de rayon car, bien que l'espace situé entre la pointe et le crayon demeure « vide », il est figé. Nous verrons dans la suite de notre texte quelle piste nous avons privilégiée pour matérialiser ce « vide », au-delà du lien explicite déjà connu entre le compas et la ficelle favorisant la conception du rayon comme segment.

Dans les deux parties suivantes, nous cherchons à repérer quels aspects caractérisant le cercle sont mis évidence dans les textes officiels et dans des ressources pédagogiques.

1.1. Le cercle et le compas : point de vue institutionnel

Pendant ces trente dernières années, les textes officiels ne consacrent pas d'attention particulière au cercle. Ce n'est que dans les programmes de 2002 que des éléments apparaissent explicitement : en fin de cycle 1 (3-5 ans), l'élève doit « être capable de reconnaître, classer et nommer [le] rond » ; au cycle 2 (5-8 ans), « bien qu'aucune compétence spécifique ne soit mentionnée concernant le cercle, les élèves sont initiés à la manipulation du compas pour tracer un cercle de centre donné » ; en cycle 3 (8-11 ans), « pour le cercle, diverses constructions sont envisagées : à partir de la donnée du centre et de la longueur du rayon ou du diamètre, à partir de la donnée du centre et d'un point du cercle, à partir de la donnée d'un diamètre ».

Les textes officiels de 2008 parlent encore de « rond » à l'école maternelle². Ils prévoient ensuite, en CE2, la construction d'un cercle à l'aide d'un compas. Les notions de centre d'un cercle, de rayon et de diamètre ne sont explicitement données qu'en CM1 ; à ce même niveau scolaire, le compas est aussi introduit comme outil pour vérifier la nature d'une figure, permettant donc de comparer ou de reporter des longueurs.

Nous reconnaissons ainsi, dans les textes officiels, trois grands moments : un premier où l'élève manipule une forme, le « rond », et qui semble être liée à l'usage de gabarits permettant de réaliser des disques et leurs bords ; un deuxième où l'élève apprend à se servir du compas comme outil permettant de tracer des cercles ; un troisième où le cercle est exploité comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné et où ses éléments caractéristiques sont introduits : centre, rayon, diamètre.

1.2. Examen de progressions autour du cercle dans des manuels scolaires récents

Comment opérer le passage du « rond » au cercle ? Du gabarit ou pochoir de disque au compas ? Comment articuler les différents usages du compas ? Que nous apprennent les manuels scolaires à ce propos ?

² Dans les textes officiels en vigueur depuis la rentrée 2015 en maternelle, on conseille à l'enseignant de préférer les termes « cercle » ou « disque » au terme « rond ».

Après un rappel rapide du type d'activités exploitant le « rond » que l'on propose aux élèves de maternelle et de CP, nous nous centrons sur le contenu de quelques manuels de CE2 et de CM1, niveaux auxquels des étapes importantes sont proposées pour introduire le cercle et le compas pour ses différents usages.

Indiquons simplement que, après la maternelle et le CP, un travail exploitant des gabarits (ou des pochoirs) de disque n'apparaît plus que très rarement dans les manuels de CE1 (comme si on s'interdisait le recours à ces outils non conventionnels) ; dans les manuels de CM2, le cercle et le compas se retrouvent dans des problèmes de reproduction, de construction et de description de figures.

Dans les ouvrages pédagogiques proposant des activités en maternelle, le disque peut faire partie des figures que l'enfant doit apprendre à reconnaître et dont il se sert pour produire et décrire des figures complexes. Dans Grelier (2004)³, par exemple, on propose d'exploiter des gabarits et des pochoirs pour réaliser des robots dont certaines parties du corps sont constituées de disques (figure 1)⁴.

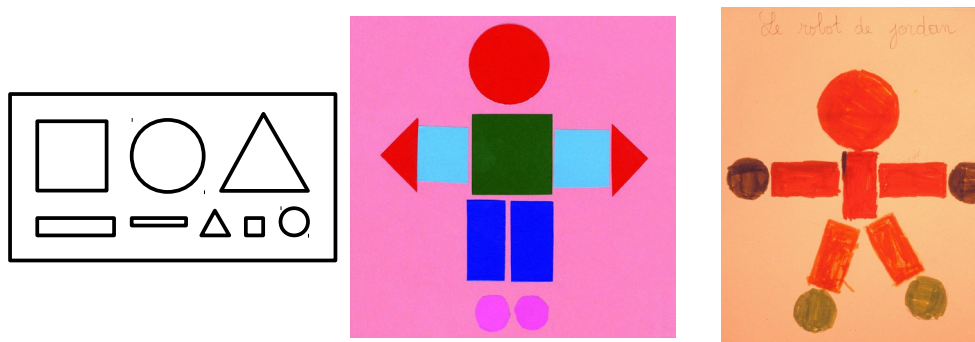


Figure 1 : Gabarits et pochoirs (à gauche) pour réaliser des robots (au centre et à droite), dans Grelier (2004)

Dans les manuels de CP, en continuité avec le travail entamé en maternelle, les disques (ou demi-disques) en tant que figures à bords arrondis apparaissent souvent à côté des figures planes à bords rectilignes. Dans *EuroMaths CP* (Hatier, 2011, pp. 73-75), par exemple, on propose de réaliser des assemblages de figures à l'aide de gabarits dans le but d'opérer le passage de l'objet physique à l'objet géométrique à travers le tracé de son contour. De cette manière, le cercle apparaît implicitement comme une courbe fermée de courbure constante.

Une rupture se crée lorsque, dans le respect des programmes actuellement en vigueur, le cercle et le compas sont introduits dans les ouvrages pédagogiques de CE2. Nous reconnaissons alors trois approches différentes :

- a) le cercle est introduit comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné, le compas étant alors introduit d'abord comme outil pour comparer et reporter des longueurs puis comme traceur de cercles ;
- b) ou alors, le compas est introduit comme outil pour tracer des cercles, puis le cercle

³ cf. <http://www.apprentissages-geometriques.com/> (consulté le 6 novembre 2015). Précisons que l'activité des robots peut évoluer pour la proposer jusqu'en CE1.

⁴ Bien que les exemples d'activités sur le « rond » soient rares dans les ouvrages pédagogiques pour les classes de maternelle, nous savons que cet objet est exploité à ce niveau scolaire et cela depuis longtemps. À titre d'exemple, nous citons Rimbault et Euriat (1995) qui décrivent des travaux aidant l'enfant à prendre conscience du « rond » par sa reconnaissance, sa manipulation, sa production, sa reproduction graphique, sa décomposition et recomposition, à l'aide d'objets de la vie courante ou de gabarits en carton.

comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné ;

c) ou encore, après avoir appris à manipuler le compas en distinguant ses différentes parties, le cercle est introduit en se servant de gabarits.

Nous allons détailler ci-après ces diverses approches en nous appuyant sur quelques extraits de manuels récents.

a) *Le cercle est ici introduit comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné, le compas étant alors introduit d'abord comme outil pour comparer et reporter des longueurs, puis comme traceur de cercles.*

Dans ce cas, les situations récurrentes sont les suivantes :

- des points étant déjà placés tous à égale distance d'un point donné, on demande à l'élève d'en placer d'autres à la même distance ;
- un nuage de points étant donné, on demande à l'élève d'identifier les points qui se situent à égale distance d'un point donné.

C'est ainsi qu'un malentendu semble se produire. C'est le cas, par exemple, dans *La tribu des Maths CE2* (Magnard, 2008, pp. 24-25) où l'objectif affiché au départ (cf. guide du maître, pp. 218-220) porte sur l'enseignement de la construction d'un cercle à l'aide du compas alors que les activités proposées (figure 2) conduisent à l'introduction du compas comme outil permettant de vérifier l'égalité de longueurs.

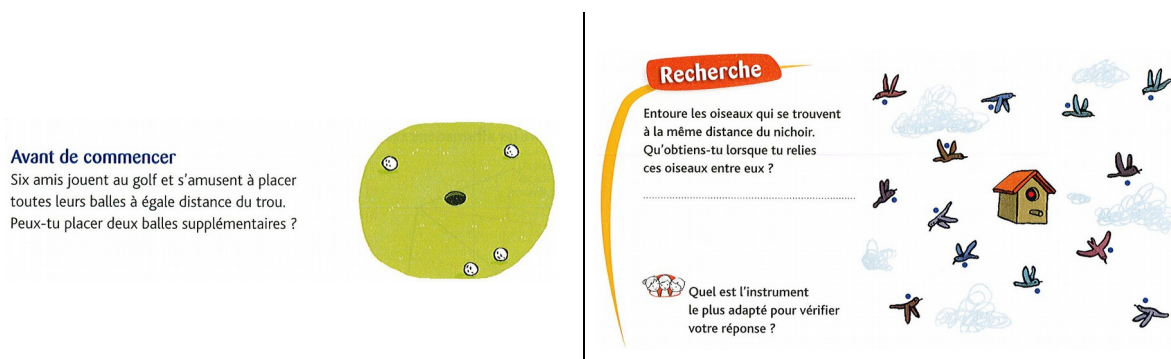


Figure 2 : Extraits⁵ de *La tribu des Maths CE2* (Magnard, 2008), p. 24

Pour déterminer la distance entre le trou et les balles placées (figure 2, à gauche), les auteurs présument que les élèves se servent plutôt de la règle graduée et qu'il sera donc « *nécessaire de faire remarquer que les emplacements des balles se situent sur le tracé d'un cercle* », ce qui pourra se « *vérifier en utilisant le compas* » (guide du maître, p. 219). On peut également remarquer que la présence de la zone verte, qui évoque la surface d'un disque, pourrait participer à l'instauration d'un flou entre les notions de disque et de cercle.

Pour l'activité, dite « *de recherche* » (figure 2, à droite), les auteurs présument que certains élèves se servent encore de la règle graduée alors que d'autres recourent au compas « *pour tracer des cercles concentriques à partir du centre du nichoir afin de repérer quels oiseaux sont situés sur le même* » (guide du maître, p. 219). Remarquons que la schématisation du problème est chancelante, participant ainsi de la complexité de la tâche pour l'élève : quel « point » du nichoir retenir pour centre ? Que dire de la présence des « points » à côté de chaque oiseau alors que la consigne invite l'élève à « *relier les oiseaux entre eux* » ?

Dans ces situations, les différents rôles du compas s'articulent de façon complexe : d'abord comme outil pour reporter ou comparer des longueurs (relation entre deux éléments) avant de

⁵ Tous les extraits des ressources citées dans cet article ne sont pas reproduits à l'échelle.

servir pour tracer un cercle, comme si ce passage allait de soi. Sans compter les difficultés manipulatoires liées à l'usage du compas (placer la pointe, la maintenir fixe, *etc.*), les auteurs de manuels adoptant cette approche semblent négliger deux obstacles majeurs évoqués dans ERMEL (2006) :

- voir une courbe comme étant constituée d'un ensemble de points ;
- le fait qu'avec le compas le rayon ne soit pas matérialisé.

La question se pose ensuite de comment introduire les éléments caractéristiques du cercle. Dans la majeure partie des manuels scolaires de CE2, cette introduction se fait de façon *ostensive*. Par exemple, dans *Outils pour les Maths CE2* (Magnard, 2012, p. 112), on fournit la définition suivante : « *Un cercle est formé par tous les points situés à la même distance de son centre. Cette distance s'appelle le rayon du cercle* ».

Dans le guide du maître (pp. 118-119), on conseille à l'enseignant de faire observer aux élèves les différentes parties qui composent le compas du tableau et de « *préciser que l'on place la pointe du compas sur le centre et que la distance entre les points du cercle et le centre est fixée par l'écartement du compas [...], cette distance s'appelle le rayon* ».

Dans le manuel de CM1 de la même collection (*Outils pour les Maths CM1*, Magnard, 2011), les objectifs portent essentiellement sur la « bonne maîtrise » du compas et sur la connaissance du vocabulaire spécifique lié au cercle. Le terme « diamètre » est introduit et défini exclusivement en tant que segment : « *Le **diamètre** est un segment reliant deux points opposés du cercle et passant par le centre* » (p. 114).

Quelques reproductions de figures constituées de cercles sont ainsi proposées, le choix des instruments et de l'échelle étant parfois suggérés et restant parfois à la charge de l'élève.

b) *Le compas est ici introduit comme outil pour tracer des cercles, puis le cercle comme lieu géométrique de points à égale distance d'un point donné.*

Dans une leçon du manuel *EuroMaths CE2* (Hatier, 2010, pp. 71-72 du livre du professeur), les élèves sont mis en condition d'utiliser le compas librement ou en respectant des conditions imposées ; l'objectif est d'introduire le compas et de permettre aux élèves d'acquérir une certaine dextérité dans son usage. On conseille alors de donner une description détaillée du compas et de préciser ensuite : « *[...] Le point où l'on a piqué la pointe sèche s'appelle le centre du cercle, cet écartement du compas est le rayon du cercle* » (ib.).

Pour le terme « rayon », on suggère de préciser qu'il indique « *aussi tout segment qui joint le centre à un point du cercle* » et que « *c'est le contexte qui permet de savoir de quoi on parle* » (ib.). Le diamètre sera à définir aussi bien comme « *la longueur double du rayon* » que comme « *tout segment joignant deux points du cercle et passant par le centre* » (ib.). Introduit de façon ostensive, ce vocabulaire sera à mobiliser dans des exercices proposés dans cette leçon.

Dans *EuroMaths CM1* (Hatier, 2009), le cercle est ensuite introduit comme « *ensemble de points situés à une distance fixée d'un point donné* », ce qui conduit à proposer deux sortes de situations (pp. 38-39)⁶ :

- un point étant placé sur une feuille, on demande d'en tracer d'autres qui soient tous à la même distance (donnée ou non) du point placé ;
- parmi plusieurs points placés sur une feuille, on en fixe un et il faut déterminer ceux qui sont à une même distance de ce point.

⁶ Nous ne rentrons pas dans les détails mais, dans ces deux pages, les auteurs proposent aussi des problèmes conduisant plus ou moins implicitement à traiter le point comme intersection de cercles, l'inégalité triangulaire et la médiatrice d'un segment.

Dans les deux cas, le choix de l'instrument à utiliser est à la charge de l'élève (une bande de papier, une règle graduée, une ficelle ou un compas), même si l'on encourage l'enseignant à conclure que c'est le compas qui permet « *de répondre rapidement à la question* » (livre du professeur, p. 77). Notamment, dans le cas où il faut placer plusieurs points à une distance fixée d'un point donné, on précise (*ib.*, p. 76) :

C'est ensuite l'enjeu de rapidité et de qualité dans le positionnement de nombreux points à une distance fixée d'un point donné qui va faire évoluer les procédures utilisées (souvent le double décimètre dans un premier temps ou une bande de papier) vers l'utilisation du compas.

Le cercle et le compas sont ensuite mis en jeu dans des problèmes de description, de reproduction et de construction (pp. 40-41), cela afin de permettre aux élèves (livre du professeur, p. 78) :

d'acquérir une certaine dextérité dans le maniement du compas ; de se familiariser avec le vocabulaire associé au cercle [...] ; de retenir que, pour dessiner un cercle, il faut connaître soit le centre et la valeur du rayon, soit un diamètre, soit le centre et un point.

La reproduction d'une figure « *qui contient des cercles et des arcs de cercle* » est aussi l'occasion pour souligner qu'il « *faut repérer où sont les centres et trouver les rayons. Pour cela, il faut souvent repérer des alignements, des milieux, en joignant des points et en comparant des longueurs* » (*ib.*, p. 79). Remarquons néanmoins que la fonction du compas comme reporteur de longueur n'est pas explicitement soulignée alors que la conception de cercle comme lieu géométrique est l'objet d'étude de ces leçons et que les problèmes de reproduction seraient bien adaptés pour la mise en évidence du compas comme outil de report de longueurs.

Une leçon sur l'analyse et la reproduction de figures, présente dans ce manuel (pp. 112-113), a d'ailleurs attiré notre attention. Selon les auteurs, les exercices ici proposés permettent aux élèves de vérifier, avec des instruments, les propriétés des figures ; le papier quadrillé peut faciliter la construction alors que le papier uni permet d'apprendre à maîtriser les instruments (livre de l'enseignant, pp. 142-143). Le choix de proposer une reproduction soit à une même échelle, soit en agrandissant le modèle, n'est pas justifié et aucun argument explicite n'est fourni à propos des diverses fonctions des instruments et de l'importance de leur articulation avec les propriétés géométriques. Dans le cas des figures proposées dans l'exercice 4 de cette leçon (figure 3), les auteurs évoquent la nécessité de « *restaurer* » le même carré (livre de l'enseignant, p. 143), sans pourtant outiller l'enseignant pour qu'il saisisse le rôle que ce quadrilatère joue dans la phase d'analyse de la figure-modèle. Il s'agit en effet d'un élément de dimension 2 qui n'apparaît que par certains de ses éléments de dimension 0, à savoir les sommets (figures S et T) ou les milieux de ses côtés (figure U), points qui sont toutefois donnés comme intersections d'arcs de cercles.

Chacune des figures ci-dessous a été construite à partir d'un même carré.
Dans chaque cas, retrouve ce carré qui a été effacé. Pour cela, utilise un calque.
Reproduis chaque figure à l'identique sur du papier quadrillé ou du papier uni.

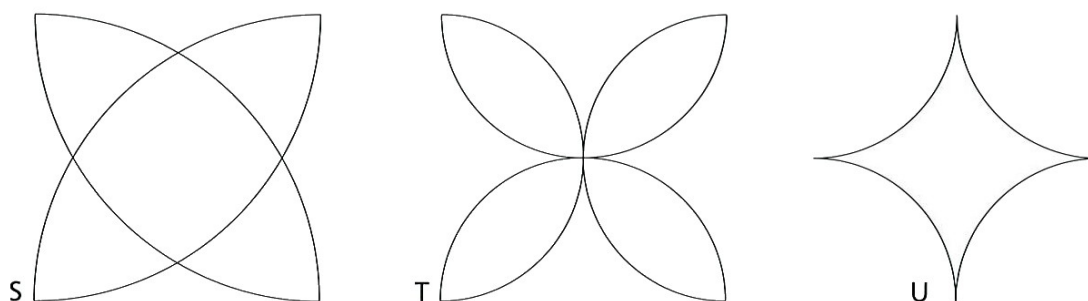


Figure 3 : Extrait de *EuroMaths CMI* (Hatier, 2009), p. 113

Sans aller plus loin dans l'analyse, cela peut déjà montrer la complexité de la tâche laissée à l'élève : il faut déconstruire la figure-modèle pour reconstruire (selon les consignes de l'exercice) une figure — le carré — qui n'apparaît pas mais qui est utile à la reproduction. Le fait que ce soit « *le même carré* » et dans la même position semble toutefois être considéré par les auteurs comme une aide pour l'élève.

Ce dernier exemple nous permet ainsi de souligner que plusieurs éléments, dans la résolution de problèmes de reproduction, concourent à l'articulation des différents usages des instruments, notamment ceux du compas, et des propriétés géométriques par des allers-retours entre la figure-modèle et la figure en train de se construire. Le changement d'échelle demeure indispensable si l'on veut encourager l'élève à prendre conscience de cette articulation : sans compter le fait que cela oblige à se servir du compas pour comparer des longueurs sur la figure-modèle et bloque l'usage de la règle graduée, la reproduction à une autre échelle que le modèle permet d'aller au-delà de l'appréhension perceptive et nécessite une articulation entre les appréhensions opératoire (analyse fine de la figure à travers sa déconstruction, afin de repérer les différents éléments à reproduire) et séquentielle (ordre de réalisation) (Duval, 1994).

c) *Après avoir appris à manipuler le compas en distinguant ses différents éléments, le cercle est introduit en se servant de gabarits.*

Dans le manuel *Cap Maths CE2* (Hatier, 2011), après avoir introduit le compas pour tracer des cercles (livre de l'enseignant, pp. 32-33) et appris à distinguer ses différents éléments (branches, pointe sèche, écartement des branches, ...), les auteurs proposent un problème permettant d'aborder la notion de cercle en tant que « *ligne courbe qui reste toujours à la même distance d'un point qu'on appelle le centre du cercle* » (ib., p. 42).

Parmi les sept pièces proposées dans une fiche (figure 4a), les élèves doivent déterminer laquelle correspond à la pièce manquante A.

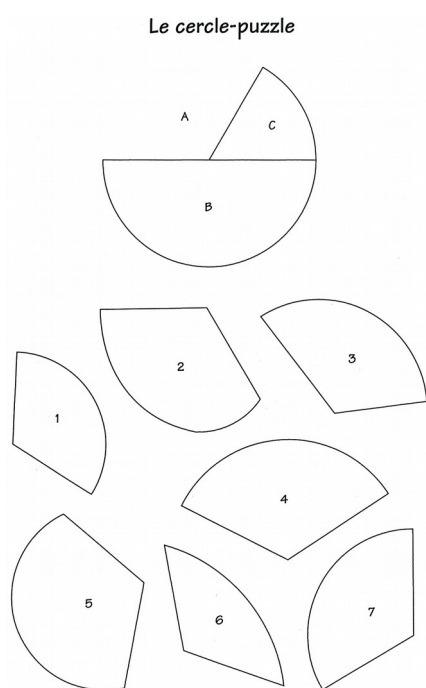


Figure 4a : Extrait de *Cap Maths CE2* (Hatier, 2011, *Matériel photocopiable*, fiche 9)

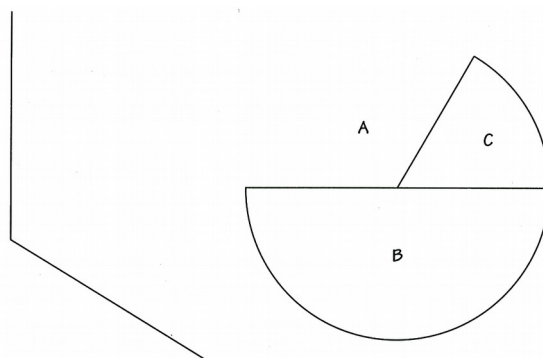


Figure 4b : Extrait de *Cap Maths CE2* (Hatier, 2011, *Matériel photocopiable*, fiche 10)

Dans le guide de l'enseignant correspondant à ce manuel (pp. 42-43), on propose de préciser : « [...] Vous pouvez utiliser tous les instruments que vous voulez [...] Quand vous pensez l'avoir trouvée, vous la découpez et la collez à sa place sur le cercle puzzle ».

Dans une deuxième fiche (figure 4b), les élèves doivent réaliser la pièce manquante A à partir d'une amorce donnée. La mise en commun des procédures utilisées devra servir de prétexte pour introduire la notion de centre d'un cercle et la validation de la construction devra se faire en découpant et en collant la pièce sur le cercle puzzle.

À l'issue de la résolution d'un problème de reproduction, les auteurs du manuel proposent d'introduire les notions de rayon et de diamètre d'un cercle : le rayon est associé à l'écartement du compas et donc « à la distance qui sépare le cercle de son centre » (guide de l'enseignant, p. 46). Aucune allusion n'est faite au rayon en tant que segment⁷ alors que, si l'on revenait au *cercle puzzle*, les bords rectilignes de la pièce manquante A permettraient bien de matérialiser cet élément du cercle.

Si la progression choisie dans ce manuel permet d'éviter le malentendu cité plus haut à propos des divers usages du compas, elle se fonde toutefois sur un implicite, à savoir le passage du disque au cercle. Bien que des pièces formant un disque soient mises en jeu, les auteurs ne parlent jamais explicitement de ce passage : le problème proposé s'appelle *cercle puzzle* alors que les élèves auront à manipuler des portions de disque pour retrouver et puis construire la pièce manquante de ce puzzle⁸. C'est ainsi que, dans ce problème, on bascule du gabarit au compas, d'une conception du cercle à une autre sans pourtant que l'enseignant puisse en saisir l'importance.

La transition du disque au cercle est passée sous silence aussi dans *Cap Maths CMI* (Hatier, 2010). Le cercle est implicitement exploité comme figure ayant une infinité d'axes de symétrie dans deux problèmes où c'est en manipulant un disque que les élèves apprennent, par la technique du pliage, à « faire apparaître un diamètre quand on ne connaît pas le centre du cercle et à déterminer le centre d'un cercle sans utiliser d'instruments de géométrie » (guide de l'enseignant, pp. 233-234). Plus loin, le cercle est à nouveau exploité comme lieu géométrique des points à égale distance d'un point fixé : les auteurs proposent de consolider la connaissance des notions de centre, rayon et de diamètre d'un cercle à travers la résolution de problèmes de reproduction et de construction⁹ à l'aide du compas.

Par exemple, on propose de reproduire une figure à une échelle différente du modèle, sans suggérer ni imposer d'instruments ; c'est le choix de l'amorce qui permet de se limiter à l'usage du compas et cela selon ses différentes fonctions (figure 5) : il sert à comparer et à reporter des longueurs afin d'identifier le centre du grand cercle et ainsi de le tracer ; en traçant les diagonales du carré, on pourra identifier le rayon du petit cercle et, en reportant convenablement la longueur de la demi-diagonale du carré, on pourra construire son centre.

Les différentes appréhensions de la figure (Duval, 1994) sont ici conviées : le changement d'échelle incite à aller au-delà de la perception ; des propriétés du carré et du cercle doivent être disponibles pour déconstruire convenablement la figure et choisir la bonne séquence pour la reproduire.

⁷ Cela est prévu pour l'année suivante, à l'issue du traitement de trois problèmes proposés dans *Cap Maths CMI* (Hatier, 2010, guide de l'enseignant, pp. 233-234). Ici, les termes diamètre et rayon seront définis aussi bien comme segments que comme longueurs de tels segments.

⁸ Un problème semblable — Les disques — est proposé dans Artigue et Robinet (1982, pp. 22-24) mais les auteures parlent bien de disque.

⁹ Un problème de construction géométrique comporte la réalisation d'une figure en suivant un programme donné.

- *C On a commencé à reproduire cette figure, mais en plus grand.
Le carré est déjà tracé. Termine la reproduction.

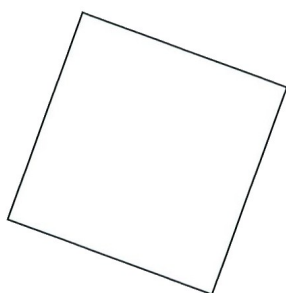
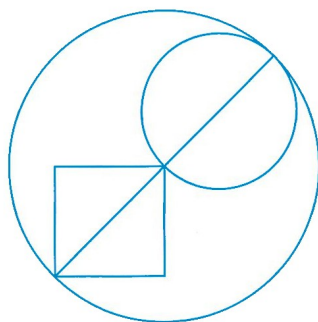


Figure 5 : Extrait de *Cap Maths CM1, Cahier de géométrie et de mesure* (Hatier, 2010), p. 51

1.3. Choix et positionnement par rapport à l'existant

D'après les travaux de Duval (2005) sur la visualisation des figures, il nous semble important de travailler dès la maternelle sur la représentation mentale du cercle comme allure générale des bords d'un disque. Il s'agira ensuite d'étudier le rôle du compas comme outil permettant l'obtention graphique de cette représentation iconique mais aussi comme porteur de propriétés et relations entre ses sous-éléments constitutifs (le rayon, le diamètre — de dimension 1 — et le centre — de dimension 0), ce qui s'articule donc avec les différentes façons de penser le cercle : par exemple, surface délimitée par une ligne de courbure constante ; ligne continue de courbure constante ; ensemble de points situés à une distance donnée d'un point (Artigue & Robinet, 1982 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014).

L'étude que nous avons menée à partir de manuels récents nous a aidées à concevoir une progression qui tienne compte des malentendus et des manques repérés, de l'évolution de diverses conceptions du cercle, du passage du gabarit de disque au compas et de l'articulation entre les différents usages de ce dernier. Nous parvenons ainsi à identifier trois grandes étapes présentées dans le tableau 1 :

<i>Niveau scolaire</i>	<i>Conceptions du cercle</i>	<i>Situations</i>
<i>de la maternelle au CE2</i>	<i>Articulation entre conception iconique (rond) et conception « courbure constante »</i>	Jeu de juxtaposition et de superposition de formes : vision surface, lignes et intersection de lignes. Jeu de tracé de contours de surfaces et intersections de lignes.
<i>du CE2 au CM1</i>	<i>Conception « courbure constante », conception « invariant par rotation », conception « courbe plane admettant une infinité d'axes de symétrie » et amorce d'une conception ponctuelle</i>	Matérialisation des éléments caractéristiques du cercle (centre, rayon et diamètre) à l'aide d'une articulation entre un gabarit de disque et le compas.
<i>du CE2 au début de collège</i>	<i>Conception ponctuelle</i>	Déconstruction et reconstruction dimensionnelle dans les problèmes de lieux géométriques, de reproduction et de restauration de figures.

Tableau 1 : Étapes essentielles d'une progression sur le cercle

Avant d'aborder la deuxième étape, on pourra introduire le compas comme instrument pour tracer des cercles : par exemple, on pourra s'appuyer sur ce qui est proposé dans le manuel *Cap Maths CE2* (Hatier, 2011, pp. 32-33 du guide de l'enseignant).

La deuxième étape est caractérisée par le passage du gabarit au compas dans le but de mettre explicitement en place le passage du disque (surface 2D) à son contour (ligne 1D) jusqu'au tracé du cercle à l'aide du compas. Ce qui marque par conséquent la transition d'une conception « courbure constante » à une conception ponctuelle. Le problème proposé doit aussi permettre de « matérialiser » les éléments caractéristiques du cercle, à savoir le centre, le rayon et le diamètre.

À cette étape, on pourra alors jouer sur les conditions de la construction d'un cercle en faisant varier les données de départ (par exemple, EuroMaths CE2, Hatier, 2010, p. 72 du livre de l'enseignant). Notamment :

- par la donnée de deux points (selon les contraintes initiales du problème, on précise ou on ne précise pas qu'un point est le centre et l'autre un point du cercle) ;
- par son rayon (en tant que longueur) et son centre ;
- par un rayon (en tant que segment) dont une extrémité est le centre du cercle (selon les contraintes initiales du problème, soit une extrémité vaut l'autre, soit il faut choisir correctement laquelle des deux coïncide avec le centre du cercle) ;
- par son diamètre (en tant que longueur ; on se ramène ici au rayon et au centre du cercle) ;
- par un diamètre (en tant que segment ; la notion de milieu est alors mise en jeu).

Le *cercle-puzzle* (*Cap Maths CE2*, guide de l'enseignant, p. 42), le *monnayeur* (*Cap Maths CM1*, guide de l'enseignant, pp. 233-234) ainsi que les problèmes proposés dans Artigue et Robinet (1982, pp. 22-26)¹⁰ pourraient contribuer au travail articulant différentes conceptions du cercle et différents outils.

C'est dans une troisième étape que les problèmes de lieux géométriques (ERMEL, 2006, pp. 303-309 ; Taveau & Fénichel, 2008), de reproduction et de restauration de figures complexes permettront de donner davantage de sens à la conception du cercle comme ensemble de points à

¹⁰ Ici, les auteures proposent trois situations qui privilégient la conception « courbure constante » et faisant appel à des outils variés (portions de disques ; portions de couronnes circulaires ; papier calque ; compas).

égale distance d'un point donné et au compas dans ses diverses fonctions. Des problèmes classiques comme celui de la chèvre et du piquet ou des reproductions de rosaces à six ou à huit branches permettent alors d'articuler les propriétés de figures avec les différents usages du compas.

D'autres problèmes de construction à l'aide du compas prolongeront la progression sur le cercle, par exemple : les triangles, la médiatrice d'un segment, le losange, *etc.*

Dans nos intentions, cette progression veut être un repère pour l'enseignant mais aussi un outil en tant que recueil de problèmes autour du cercle. Un repère pour qu'il ait conscience de ce qu'il est possible de faire à l'école primaire autour de cette figure géométrique et un outil dont il peut se servir partiellement. Un enseignant de CE2 pourrait, par exemple, démarrer son enseignement sur le cercle en prenant en compte l'articulation entre la conception « courbure constante » et la conception ponctuelle (étape 2, tableau 1) : connaître le type de travail qui aurait pu être fait dans les classes précédentes pourrait néanmoins l'aider à mieux accompagner ses élèves dans le passage d'une vision « surface » à une vision « ligne ». Si le même enseignant choisissait de proposer directement des problèmes mettant en jeu la conception ponctuelle du cercle (étape 3, tableau 1), il pourrait mieux comprendre les difficultés rencontrées par certains de ses élèves, l'étape précédente pourrait alors être reprise en guise de remédiation afin de mieux articuler le passage d'une conception à une autre, d'un outil à l'autre.

Dans la troisième partie de cet article, en nous appuyant sur ces réflexions, nous présentons et analysons plus finement certaines étapes de cette progression sur le cercle de la maternelle au début du collège. Avant cela, nous exposons dans la partie qui suit les analyses (préliminaires) menées à propos de la figure géométrique qui a retenu notre attention pour cette progression car celle-ci est exploitée dans divers ouvrages pédagogiques avec des variations possibles (*cf.* annexe 1).

En annexe 2, nous reprenons le tableau 1 en l'enrichissant avec des exemples de problèmes qui peuvent être proposés à chaque étape ou bien entre une étape et la suivante ; et cela, en articulant les problèmes que nous proposons dans la suite de cet article avec ce qui est proposé dans quelques manuels scolaires actuels.

2. Une progression à partir d'une seule et même figure-modèle

Nous avons examiné des problèmes de reproduction de figures géométriques choisis parmi un certain nombre d'extraits de manuels d'époques différentes et de collections différentes (Bulf et Celi, 2015a et b). Dans une sélection de nombreux extraits de manuels impliquant quasiment tous une construction du cercle, c'est la figure 6 et ses variations qui reviennent le plus souvent (annexe 1). L'aspect récurrent de cette figure dans les ressources pédagogiques nous a donc semblé un argument intéressant pour justifier un examen plus approfondi de ses potentialités en termes d'apprentissage.

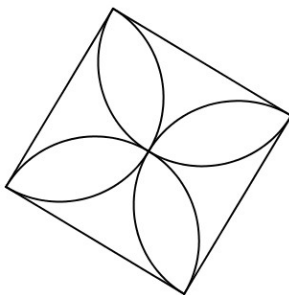


Figure 6 : Figure-modèle à l'origine de l'étude

Les analyses que nous proposons dans cette partie ont pour objectif de justifier en quoi cette figure se révèle être un fil conducteur riche et porteur d'apprentissage dans une progression sur le cercle de la maternelle jusqu'au début du collège. Le fait de référer à une seule et même figure a pour objectif de mettre en valeur « la continuité » des apprentissages visés par notre progression ; c'est, selon nous, une manière d'illustrer le chemin parcouru par un élève. En outre, le fait de référer toujours à la même figure, pour développer notre progression, nous permet de mieux mettre en lumière différents « passages-clé ». Nous pourrions nuancer notre propos en remarquant qu'il ne s'agit pourtant pas toujours du même enseignant, de la maternelle au début du collège, et que la référence à une seule et même figure pourrait être problématique. Notre démarche ne se voulant ni exclusive ni dogmatique mais originale, la progression proposée s'inspire en partie de progressions déjà existantes (*cf.* tableau 1bis en annexe 2) et celle-ci nous semble, d'une certaine manière, sécable sans que cela soit préjudiciable du point de vue des apprentissages. En outre, il ne nous semble pas problématique que certains élèves connaissent déjà la figure. Dans le cas où certains l'auraient déjà rencontrée les années précédentes, les objectifs qui sont derrière peuvent toutefois être nouveaux pour ces élèves : on ne leur demandera pas de la « regarder » de la même manière, les outils qui leur seront fournis n'étant pas les mêmes d'une année à l'autre.

2.1. Une analyse mathématique en termes de déconstruction dimensionnelle

Nous choisissons de faire une analyse de la figure à la manière de Duval (2005), autrement dit il s'agit de repérer les unités figurales (points, droites, figures, *etc.*) de la figure 6 et leur mise en relation (alignement, milieu, appartenance, *etc.*) pour une visualisation non iconique, c'est-à-dire dépassant une simple reconnaissance de formes connues.

Dans un premier temps, il convient de dire que la figure est composée d'un carré et de quatre demi-cercles de centres respectifs les milieux des côtés du carré, passant chacun par le centre du carré. Chaque côté du carré est un diamètre d'un des demi-cercles. Outre des relations de symétrie (axiale et centrale), la figure 7 ci-dessous met en évidence les « tracés auxiliaires » favorisant la « déconstruction dimensionnelle » (*ib.*) de la figure, nécessaire pour penser son éventuelle construction qui dépendra des instruments disponibles.

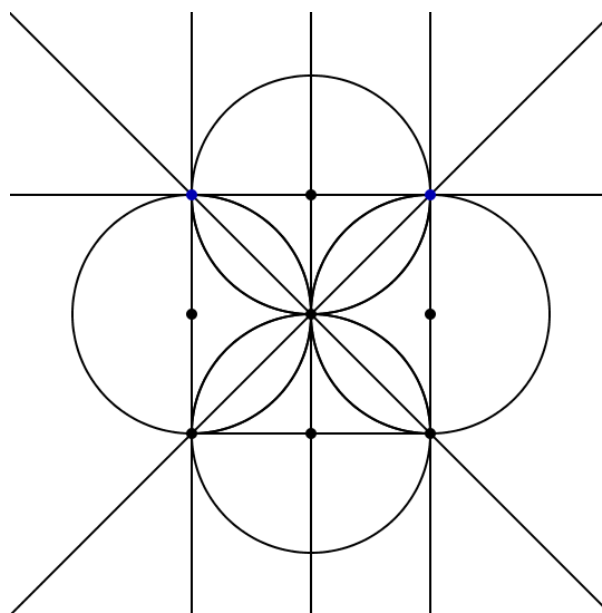


Figure 7 : Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle

En effet (*ib.*, p. 17),

l'activité de construction de figures [...] repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D¹¹ et 0D/2D. Mais dans cette activité de déconstruction, toute l'attention porte sur la reconstruction, car la déconstruction des formes 2D/2D est automatiquement faite par l'instrument tandis que la reconstruction exige que l'on se focalise sur l'ordre dans les instructions à donner pour les opérations de traçage à faire.

Nous reviendrons sur ces aspects et sur le rôle essentiel des instruments dans la suite de cet article. Plusieurs relations entre ces unités figurales nous semblent intéressantes à exploiter :

- le centre du carré, obtenu par intersection des diagonales du carré mais aussi comme point de concours des différents demi-cercles ;
- les milieux des côtés du carré qui sont aussi centres des demi-cercles ;
- les côtés du carré qui sont aussi diamètres des demi-cercles.

Cette mobilité du regard porté sur ces objets géométriques en jeu est ici essentielle, une telle analyse de la figure donnera les clés pour réussir sa reproduction.

Aussi pouvons-nous d'ores et déjà en conclure qu'en l'état, de par ses propriétés intrinsèques (de perpendicularité, de milieu, d'appartenance, d'égalité de longueurs, *etc.*), cette figure est potentiellement intéressante d'un point de vue mathématique. Tout dépend maintenant de l'exploitation qui en est faite et qui peut être très contrastée, d'après notre précédent examen dans les différents manuels scolaires (Bulf & Celi, 2015b).

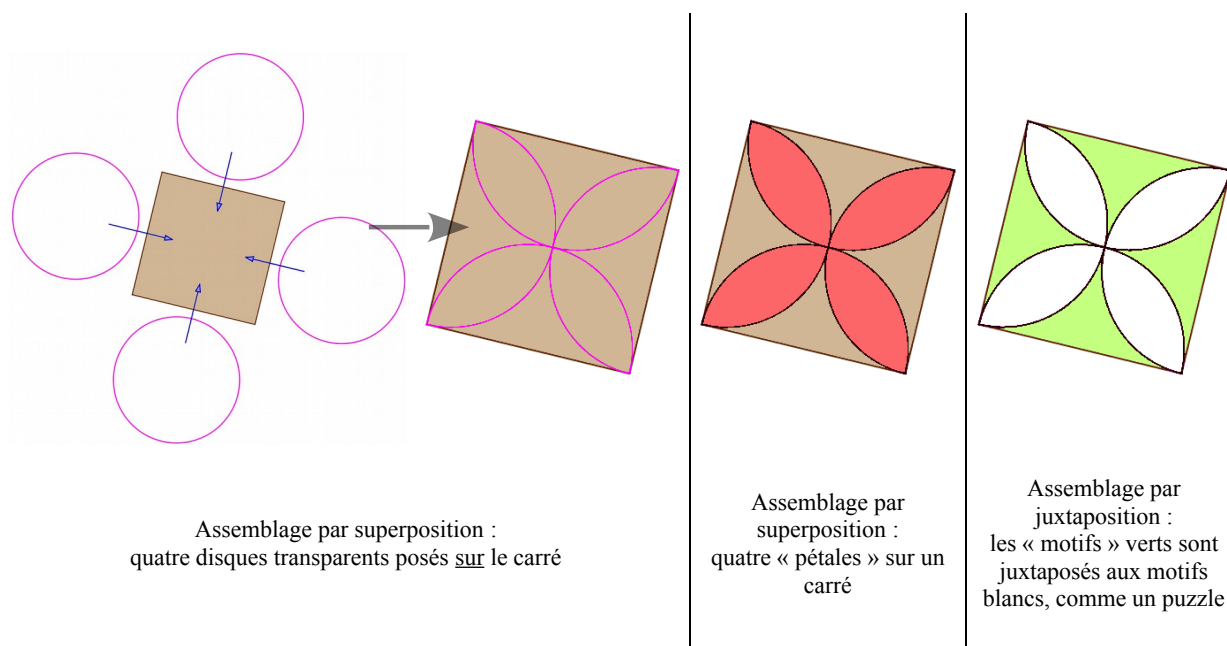
2.2. Appréhension de la figure en termes d'assemblage par superposition ou par juxtaposition

Toujours en référence aux travaux de Duval (1994, 2005) et de Duval et Godin (2005), il nous semble important d'évoquer maintenant la question des différentes façons de percevoir cette figure d'un point de vue « global » car, selon Duval et Godin (*ib.*, p. 7), « *la déconstruction des formes impliquées par l'introduction de connaissances géométriques va à l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des formes* ». Plus particulièrement, au sujet de la reconnaissance des formes, ces auteurs distinguent les « *assemblages par superposition* » et les « *assemblages par juxtaposition* » (pp. 9-10). Ici par exemple, la figure-modèle à l'origine de notre étude (figure 6) peut être perçue comme un assemblage par superposition ou par juxtaposition (voir les différents assemblages possibles dans les figures 8).

Un jeu sur certaines valeurs de variables didactiques bien choisies (les couleurs, le recours à diverses pièces matérielles de type puzzle, des tracés supplémentaires, *etc.*) permet de faire basculer une vision d'un assemblage par superposition à celle d'un assemblage par juxtaposition (et réciproquement). Toute la problématique de changement de regard réside dans le fait d'arriver à dépasser ces visions « globales », ces assemblages de formes et de contours de surfaces, pour amener les élèves vers une déconstruction dimensionnelle des formes allant jusqu'à la mise en lien entre les unités figurales (droites, points, *etc.* ; cf. figure 7).

Ainsi cette figure-modèle nous semble-t-elle particulièrement intéressante à exploiter de par ses propriétés mathématiques intrinsèques et la dialectique entre juxtaposition et superposition qu'elle offre. Un autre de ses intérêts réside, selon nous, dans le fait que la validation de sa reproduction se fera par perception directe sans l'intermédiaire d'un calque, du fait que les quatre arcs de cercle doivent tous passer par les sommets et le centre du carré. Ce moyen de contrôle nous paraît alors un levier important quant à l'opérationnalisation d'un jeu de déconstruction et reconstruction dimensionnelle, nous reviendrons sur cet aspect plus loin dans l'article.

¹¹ Nous rappelons la nomenclature de Duval (2005) : le dénominateur indique la dimension du support considéré, ici 2D renvoie à la dimension de surface, et le numérateur indique l'unité figurale désignée, autrement dit ici 1D désigne des lignes et 0D des points.



Figures 8 : Différents assemblages possibles de la figure-modèle

L'objet de la partie suivante est de développer notre progression qui prend appui en partie sur l'exploitation de la figure-modèle qui est à l'origine de notre étude (figure 6, p. 32) et prend en charge ce changement de regard sur la figure, en nous appuyant sur des problèmes de restauration à la manière du groupe de Lille. L'originalité de notre travail réside donc dans le fait d'avoir choisi d'exploiter une seule et même figure-modèle comme fil rouge de notre progression grâce à un jeu sur les valeurs des variables didactiques (choix des instruments, amorce, etc.). En particulier, nous insistons sur l'un des principes de travail du groupe de Lille qui est « *que la reproduction de figure ne constitue pas un seul type de tâche, mais il y a autant de types de tâches de reproduction que de types d'instruments utilisés. La variation des instruments est une variable didactique essentielle* » (Duval & Godin 2005, p. 8).

3. Une progression autour du cercle de la maternelle au début du collège

L'objectif de cette partie est de montrer qu'à partir d'une seule et même figure (figure 6) et en jouant sur les valeurs de certaines variables didactiques bien choisies, on peut construire différents problèmes de reproduction du cercle qui participent d'une même progression (voir partie 1.3, p. 30) car ces derniers visent des objectifs d'apprentissage différents portant sur les propriétés du cercle. Dans la première partie de cet article, nous avons défini les balises de notre progression en justifiant nos choix. Développons maintenant certains passages-clés de cette progression en explicitant notamment le rôle joué par certaines variables didactiques.

3.1. Les variables didactiques retenues pour une articulation pertinente entre instruments et propriétés

Dans nos précédents travaux (Bulf & Celi, 2015a et b), en référence aux travaux de Ducel et Peltier (1986) et aux travaux du groupe de Lille, nous avons développé des outils d'adaptation permettant d'exploiter le potentiel de tout problème de reproduction afin qu'il puisse davantage articuler les instruments, les figures et leurs propriétés. Ces leviers (principalement des variables didactiques), sans être exhaustifs, peuvent être de nature différente et concernent :

- la nature des figures et leur complexité (juxtaposition, superposition, *etc.*),
- les adaptations ou intermédiaires à la charge de l'élève (au sens de Robert (2004), comme par exemple, l'ajout de tracés ou points supplémentaires),
- l'échelle (agrandissement ou réduction de la figure-modèle),
- le choix de l'amorce,
- le support (feuille blanche, quadrillée, *etc.*) sur lequel sont présentées la figure modèle et l'amorce,
- les contraintes sur les instruments mis à disposition (coût d'utilisation fixé dans un barème¹²),
- les positions relatives de la figure-modèle et de la figure-amorce.

Nous proposons maintenant différents types de problèmes de reproduction de figures, s'appuyant tous sur la même figure-modèle (figure 6). Nous déclinons par niveau la manière dont nous envisageons notre progression et comment nous exploitons les variables didactiques listées précédemment. Nous renvoyons le lecteur au tableau 1, p. 31, qui retrace les étapes importantes de notre progression.

3.2. De la maternelle au CE1 : contours et surface

Nous proposons un problème de reproduction pour la maternelle, CP voire CE1, où les instruments fournis permettent des manipulations d'objets matériels et produisent des formes de dimension 2D (comme des pièces d'un puzzle). Puis, nous proposons une version plutôt pour les niveaux CP et CE1 où les instruments mis à disposition de l'élève permettent plutôt de produire des éléments de dimension 2D et 1D (gabarits de formes et contours de formes).

3.2.1. Jeu de superposition de formes (MS, GS, CP ou CE1)

a) Description du déroulement possible et éléments d'analyse a priori

Le matériel se compose de pièces manipulables (ici il s'agit de formes en papier découpées puis plastifiées) et transparentes dont la couleur peut être la même (figure 9) ou varier (figure 10). Les pièces fournies ont la forme d'un carré et de quatre demi-disques.



Figure 9 : Type de matériel mis à disposition et couleur possible

Précisons ici que la couleur des gabarits est une variable didactique importante car, si les gabarits sont de couleurs différentes (figure 10), les formes transparentes superposées donneront des couleurs différentes et donc une figure-modèle plus complexe à reproduire car celle-ci impose une certaine organisation des gabarits entre eux pour obtenir les couleurs imposées.

¹² Dans un problème de restauration, on dispose « d'instruments variés qui ont un coût d'utilisation donné dans un barème ; [...] Le jeu consiste à restaurer la figure (compléter l'amorce pour retrouver la figure initiale) au moindre coût (on dépense le moins de points possible) » (Perrin-Glorian & Godin, 2014, p. 32).



Figure 10 : Figure-modèle à partir de gabarits de couleurs différentes

Dans un premier temps, on peut envisager de projeter la figure-modèle agrandie sous forme de photographie (figure 11) et mise à distance de là où se passera l'action des élèves. On peut engager un rapide débat avec les élèves sur ce qu'ils perçoivent.

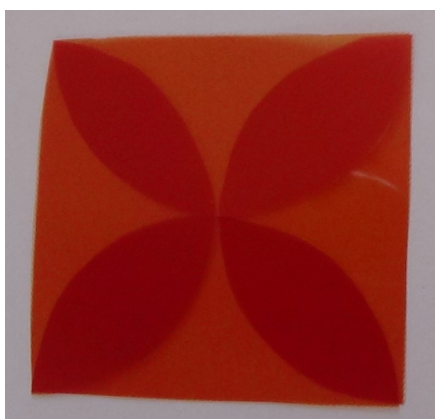


Figure 11 : Figure-modèle projetée aux élèves

À ce stade, on peut supposer que primera une vision par juxtaposition et/ou iconique (« fleurs », « rosace », « pétales »).

Ensuite, la première tâche donnée aux élèves serait : « reproduis la figure affichée à l'aide uniquement des quatre pièces fournies ». Les quatre pièces en question seraient les quatre gabarits de demi-disques transparents. Nous envisageons de ne donner aux élèves le gabarit-carré qu'en cas de difficulté à résoudre le problème avec seulement les quatre demi-disques. En effet, si les élèves éprouvent des difficultés à trouver des repères pour positionner les gabarits et les faire coïncider, autrement dit éprouvent des difficultés à penser en termes de superposition, parce qu'ils associeraient par exemple les gabarits à des pièces de puzzle et donc qu'ils n'essaieraient d'organiser que par juxtaposition, dans ce cas, la consigne serait à compléter : les élèves doivent placer les demi-disques sur le gabarit-carré *sans que les quatre autres gabarits ne dépassent des bords du gabarit-carré (formulation possible pour les élèves)*. Cette variable didactique devrait forcer l'apparition des procédures avec superposition.

La figure sera reproduite par superposition de formes (figures 12a et 12b).

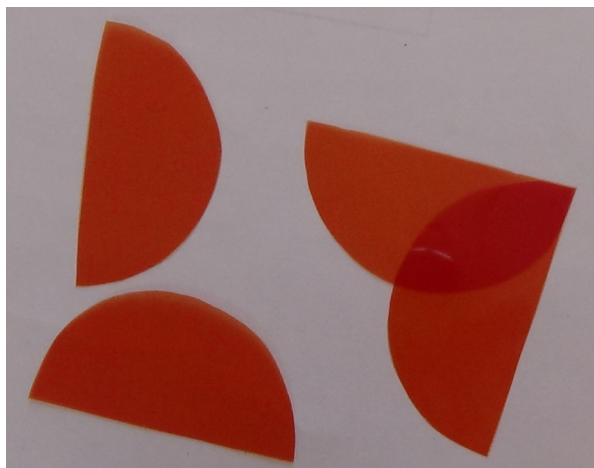


Figure 12a : Reproduction par superposition des gabarits

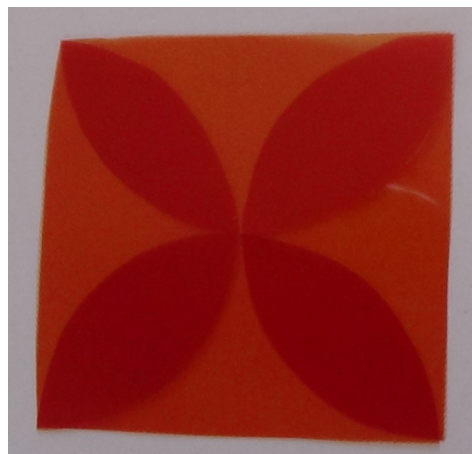


Figure 12b : Reproduction achevée par la superposition des quatre demi-disques

Les élèves peuvent travailler sous forme d'atelier dirigé ou par groupe de deux élèves au début puis de façon plus autonome par la suite, en fonction de l'évolution du modèle. Une fois le gabarit-carré introduit, on peut aussi envisager de le fixer afin que l'élève se concentre sur les positions des demi-disques les uns par rapport aux autres, sans avoir à gérer aussi les micro-déplacements possibles du carré.

Lors des différentes étapes de la reproduction, les élèves doivent être attentifs aux positionnements des quatre demi-disques les uns par rapport aux autres. Cela nécessite des compétences de motricité fine (en fonction aussi de la taille des pièces en jeu) mais également la prise en compte, en même temps, des différents éléments des formes considérées pour contrôler les déplacements et leur position. Il s'agit entre autres de comprendre que :

- le diamètre d'un demi-disque (bord de surface 1D/2D) est un côté du carré (1D/2D),
- les extrémités du diamètre d'un demi-disque (0D/2D) correspondent aux sommets du carré (0D/2D),
- l'intersection commune des bords des quatre demi-disques (1D/2D) correspond au centre du carré (0D/2D),

ou de faire coïncider ces éléments, si les élèves disposent du gabarit-carré.

b) Éléments d'analyse a posteriori

Nous avons testé ce premier problème auprès d'élèves¹³ de CE1 d'une classe à double niveau CE1-CE2, près de Bordeaux en avril 2015. Après avoir projeté la figure-modèle (figure 11), nous invitons les élèves à dire ce qu'ils voient. Comme décrit dans l'analyse *a priori*, les élèves parlent en effet de « fleur », « papillon », « ailes de papillon », « rosace », « pétales » et « carré ». Puis la tâche est dévolue de la façon dont nous l'avons décrite précédemment. Durant cette première phase de recherche, les élèves procèdent tous par juxtaposition des formes (figures 13).

¹³ Nous remercions chaleureusement Caroline Tuphile et ses élèves qui ont accepté avec enthousiasme notre proposition et nous ont permis de tester plusieurs de nos situations. L'enseignante désignée dans ce texte est ici la chercheuse expérimentatrice et non l'enseignante titulaire de la classe, présente dans la classe pour nous aider à filmer, mais qui n'a pas mené les échanges avec les élèves.

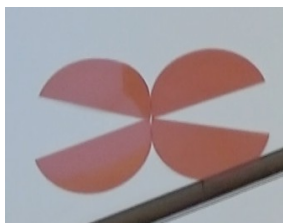


Figure 13a



Figure 13b



Figure 13c

Figures 13 : Différentes juxtapositions des quatre demi-disques lors de la première phase de recherche des élèves de CE1

Certains vont chercher à obtenir les juxtapositions des quatre « pétales » (figures 13a), comme nous l'avions décrit *a priori* et dans la partie 2.2, p. 34. D'autres vont chercher à organiser autrement leurs pièces, guidés par la reconnaissance de côtés « droits », comme dans un carré (figure 13b) ou par la reconnaissance de « bouts de cercle » (figure 13c). Les élèves se rendent compte que cela ne correspond pas à la figure projetée mais n'arrivent pas à dépasser ces stratégies de juxtaposition :

adulte : Alors est-ce que c'est exactement la même chose [à propos de la juxtaposition 13a gauche] ?

élève 2 : Non.

adulte : Pourquoi ce n'est pas pareil ?

élève 1 : Parce que tu l'as mis à l'envers [et il corrige la position de la pièce, 13a droite].

adulte : Et non, ce n'est pas pareil.

élève : Ah oui.

Face à ces difficultés, l'enseignante introduit le gabarit-carré. La consigne est maintenant : « vous devez placer les pièces que je vous ai données sur la nouvelle pièce sans que ça déborde ». Comme déjà décrit par l'analyse *a priori*, cette nouvelle variable contraint fortement les stratégies et va permettre aux élèves de dépasser la vision par juxtaposition.

En effet, les élèves explorent rapidement de nouveaux agencements. En particulier, on constate qu'ils s'appliquent maintenant à chercher des repères de position. Notamment, la position d'un gabarit du demi-disque n'est plus aléatoire mais devient relative au gabarit-carré et éventuellement aux autres pièces de demi-disques déjà placées. Par exemple, dans les figures 14, soit l'élève est attentif à placer le diamètre du demi-disque suivant un axe de symétrie du carré, soit il cherche à ce que le contour du demi-disque soit tangent à un côté du carré (figures 14a et b), soit il fait correspondre le diamètre à un côté du carré (figures 14a et c).

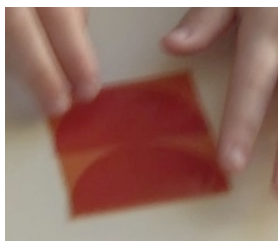


Figure 14a



Figure 14b

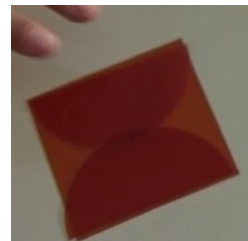


Figure 14c

Figures 14 : Différentes positions des gabarits de demi-disque par rapport au carré

Dans tous les cas, ce qui est intéressant est que les élèves s'appliquent à faire correspondre des repères de dimension 1D/2D (diamètre-côté du carré), voire 0D/2D (demi-cercle tangents au côté du carré). Cela est sensiblement différent de la précédente phase de recherche où la vision de la figure ne nécessitait pas de changement de dimensions des unités considérées et se limitaient à une vision 2D/2D. Cette nouvelle façon de voir les gabarits leur permet d'aboutir assez rapidement à la solution.

Lors de la mise en commun, les élèves n'ont pas encore les mots pour désigner les objets dont on parle et usent plutôt de déictiques (ehm à ça /// Après j'ai mis ça comme ça ... et puis celui-là comme ça). L'enseignante montrera les étapes une à une, guidée par les commentaires des élèves :

adulte : Vous voyez ? Zoé, tu vois ? Tu vois ? Et du coup [en prenant un troisième demi-disque et en l'ajoutant aux autres] voyez j'ai mis, vous voyez bien ? Qu'est ce que j'ai fait avec mon mon troisième morceau ?

élèves hors-champ : Tu l'as mis contre l'autre.

adulte : Je l'ai mis contre l'autre, je l'ai mis comme-ça.

élèves hors-champ : Tu l'as mis dessus l'autre

Les quelques éléments livrés par cette analyse *a posteriori* nous encouragent à penser que ce premier problème est porteur quant au jeu du regard géométrique des élèves sur la figure. En particulier, le matériel utilisé et le choix de la figure permettent selon nous une articulation intéressante entre juxtaposition et superposition de formes.

Examinons maintenant la suite envisagée à ce type de problème.

3.2.2. Jeu entre vision de surfaces et vision de lignes (CP ou CE1, voire CE2)

a) Description du déroulement possible et éléments d'analyse a priori

L'évolution du problème se situe au niveau de l'utilisation des gabarits qui permettent maintenant de tracer des contours : on met ainsi en place un jeu entre la vision de surfaces (2D) et la vision de lignes (1D), mais aussi la vision en termes de points (0D), nécessaires pour contrôler le tracé. Ce problème se situe donc dans le prolongement du précédent et concerne plutôt les niveaux CP ou CE1, voire CE2. La superposition des formes a pour but de faire émerger les bords de surface comme contours et lignes permettant d'obtenir le tracé de la figure-modèle. Il ne s'agit plus ici de jouer sur les effets de transparence de gabarits car on ne dispose plus que d'un seul gabarit de demi-disque et éventuellement d'un gabarit de carré (figure 15, à gauche).

La feuille de travail de l'élève peut varier en fonction des objectifs poursuivis par l'enseignant ; celle-ci comportera la figure-modèle à échelle réduite et éventuellement une des amorces suivantes :

- le carré¹⁴ (figure 15, à droite) et, dans ce cas, on ne donnera qu'un seul gabarit de demi-disque ; l'élève n'a à sa charge que le tracé des demi-cercles ;
- un ou deux côté(s) du carré (ayant même longueur que les côtés du gabarit en forme de carré¹⁵) et, dans ce cas, l'élève dispose du gabarit du carré et de celui de demi-disque ; le tracé du carré est à la charge de l'élève ; ces choix dépendront des intentions de l'enseignant

¹⁴ La dimension du carré est une variable didactique importante. Il est essentiel que la longueur du côté du carré soit la même que celle du diamètre du gabarit en forme de demi-disque.

¹⁵ La longueur des côtés tracés est une variable didactique importante. Si la longueur du côté est plus petite (ou plus grande) que la longueur du diamètre du gabarit en forme de demi-disque (ou la longueur du côté du gabarit en forme de carré), l'élève a à sa charge de prolonger ce côté déjà tracé puis de déterminer la longueur pertinente, puis de reporter cette longueur lors des tracés des autres côtés. Cela demande davantage de compétences à mobiliser dans l'activité de reproduction attendue (savoir prolonger un segment, savoir reporter une longueur à l'aide d'un gabarit, ...).

et de sa progression par rapport à la reconnaissance et la construction des carrés et des angles droits ; cette construction peut se révéler complexe et dépasser les objectifs initiaux portant sur le cercle.

- aucune amorce, l'élève a à sa charge la reproduction dans son intégralité de la figure-modèle à partir des gabarits de carré et de demi-disque ; là encore, proposer ce type de reproduction dépendra des intentions de l'enseignant.

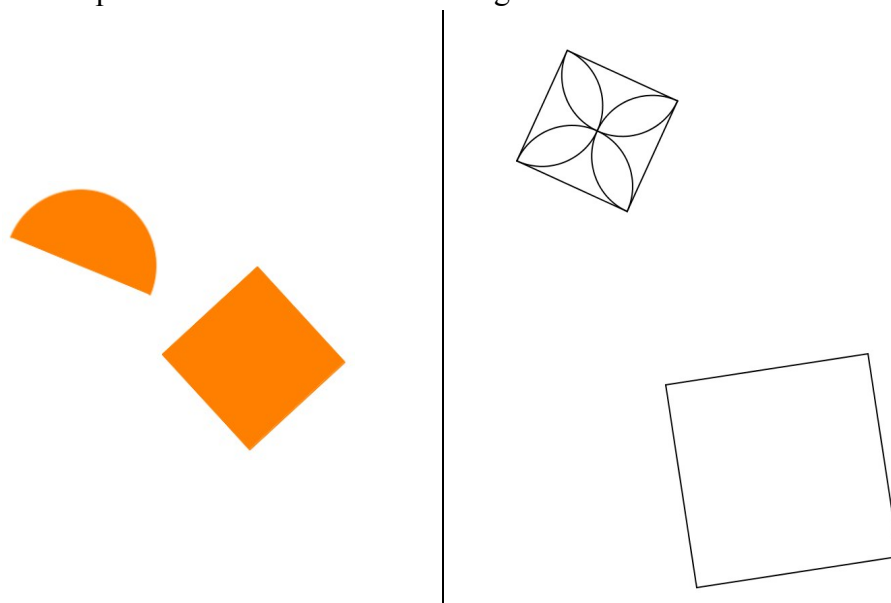


Figure 15 : Type de matériel et feuille de travail avec amorce possible

Étant donnée la difficulté de gestion et du degré de précision des gabarits, il y aura sans doute une marge d'erreur au niveau des tracés et plus particulièrement au niveau du point d'intersection des demi-cercles, le centre du carré. Nous supposons que cette marge d'erreur doit inviter les élèves à refaire leur tracé en étant plus vigilants sur les éléments à contrôler (de dimension 1D/2D et 0D/2D). En effet, lorsque l'on trace les deux derniers arcs de cercle, le contrôle des tracés se révèle complexe : il s'agit de faire coïncider, en même temps, le côté du carré avec le diamètre du disque ; le tracé du contour du demi-disque doit passer par l'intersection des autres tracés d'arcs de cercle et doit s'arrêter aux extrémités des bords du disque qui doivent correspondre aux sommets du carré. Ces moyens de contrôle se révèlent ainsi un levier important quant à l'opérationnalisation des allers-retours entre déconstruction et reconstruction dimensionnelle. C'est pour cette raison que la validation des tracés des élèves par un calque de la figure-modèle à la même échelle ne nous paraît plus nécessaire mais, si celle-ci fait partie des habitudes de classe en géométrie, elle peut s'opérer aussi par ce biais.

On peut envisager une mise en commun qui porterait sur la prise en compte des différents éléments de la figure en essayant d'aller jusqu'à l'identification et la formulation de certains éléments en fonction de ce que les élèves proposent (*côté ; sommet ; centre ; cercle ou demi-cercle ; diamètre ; contours ; bords ; etc.*) lors de l'explicitation des tracés. Pour autant, insister sur ces termes de vocabulaire ne nous paraît pas essentiel, les enjeux du problème étant ailleurs. Cela pose toutefois la question de ce qui constitue la phase de conclusion d'une telle séance ou du type de trace écrite qui peut en résulter. Nous reviendrons sur ces aspects en conclusion de l'article même si nous donnons quelques éléments décrivant la fin de la séance dans le paragraphe suivant.

b) Éléments d'analyse a posteriori

Nous avons testé cette situation toujours dans la même classe de CE1-CE2 et durant la même

séance, après que les élèves de CE1 eurent expérimenté le premier problème avec les gabarits transparents. Cette fois, tous les élèves sont mobilisés et leur tâche diffère par l'amorce proposée sur la feuille de travail : pour les élèves de CE1, l'amorce est le carré et ils disposent d'un gabarit de demi-disque non transparent ; pour les élèves de CE2, l'amorce est un côté du carré, et ils disposent d'un gabarit de demi-disque et d'un gabarit de carré non transparents.

La figure affichée n'est cette fois pas coloriée (figure 6) et ne renvoie pas directement à un matériel donné (contrairement à celle qui est affichée durant le premier problème avec les élèves de CE1). À la question « qu'est-ce que vous voyez ? », les élèves proposent des réponses proches de celles données par les élèves de CE1 durant le premier problème (« rosace » « fleur » « ailes de papillon » « pétales »). Les élèves s'engagent ensuite facilement dans le travail par groupe de deux. Ce sont surtout les élèves de CE2 qui se sont rendu compte du problème au « centre » du carré (figure 16) qui est plus persistant en CE2 qu'en CE1.

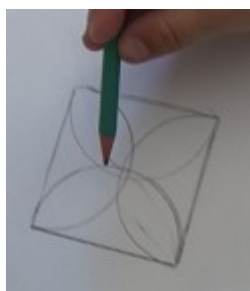


Figure 16 : Un élève pointe avec son crayon le problème de tracé au centre de la figure

Les élèves parlent « d'espaces », « d'espacements » ou de « trous ». De nombreux élèves de CE2 le remarquent et invalident eux-mêmes leur tracé lorsqu'on leur demande si leur reproduction est correcte. Les stratégies d'adaptation sont alors nombreuses pour parvenir à améliorer leur tracé. La stratégie que nous attendions et que nous avons décrite *a priori* consiste à refaire en contrôlant de façon plus précise la position du gabarit de demi-disque par rapport au centre du carré et aux sommets du carré coïncidant avec les extrémités du diamètre, à condition que le tracé du carré soit correct. Les tracés des élèves de CE1 sont assez réussis mais nombreux sont les élèves qui proposent des procédures alternatives (figures 17).

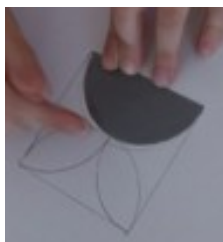


Figure 17a

L'élève fait reculer légèrement la pièce, celle-ci dépasse du carré.

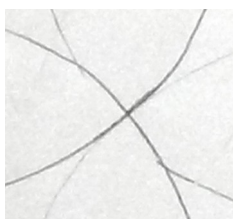


Figure 17b

L'élève lève le crayon s'il voit que les arcs de cercle ne se croisent pas correctement.

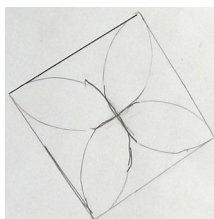


Figure 17c

L'élève repasse le centre en faisant une croix grossière.

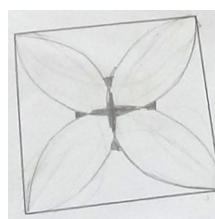


Figure 17d

L'élève colorie les espacements.

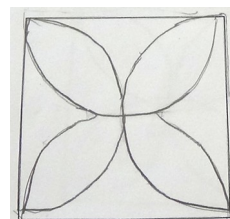


Figure 17e

L'élève refait à main levée (sans le recours aux gabarits).

Figures 17 : Différentes procédures d'élèves pour que les arcs de cercle soient concourants

Globalement, les élèves de CE2 ne remettent jamais en question le tracé du carré mais toujours celui des arcs de cercle (les élèves de CE1 ont eu moins de difficultés à faire des figures

correctes étant donné que le carré était déjà tracé). Et, comme évoqué *a priori*, la vision qu'ont les élèves de la figure doit prendre en compte plusieurs éléments de manière concomitante :

- l'intersection des arcs de cercle pour former le centre du carré (en un seul point) ;
- les tracés ne doivent pas dépasser du carré ;
- les arcs de cercle doivent passer par les sommets du carré.

Ces différents critères nécessitent donc une mobilité du regard passant d'une figure dans sa dimension globale (2D) à ses éléments de dimension 1D ou 0D et réciproquement. Lors de la mise en commun, il fut difficile de faire expliciter ces critères :

adulte : *Et comment tu es sûre que ce n'est plus comme ça ?*

Zoé : *Parce que heu...*

adulte : *Bon, admettons que le deuxième ça marche. Le troisième, comment tu fais pour le placer ?*

Zoé : *Comme ça.*

adulte : *Comment tu fais pour contrôler ton placement ? // J'imagine que tu vas le reculer aussi ?*

Zoé : *Ben je le tiens comme-ça et je trace.*

adulte : *Oui et comment tu es sûre de ne pas avoir l'espacement au milieu comme on a eu tout à l'heure ?*

Zoé : *Ben je regarde bien [elle montre le centre du carré].*

adulte : *Tu regardes bien quoi ?*

Zoé : *Au milieu.*

L'enseignante conclut la séance en faisant formuler aux élèves ce qu'ils ont fait et, après avoir explicité les termes de « gabarit » et de « superposer », elle écrit au tableau : « pour reproduire une figure avec des gabarits, je peux superposer les gabarits ou je peux tracer leur contour »¹⁶.

Ces premiers problèmes, situés au début de notre progression, permettent une dialectique entre gabarits de forme et figure mais aussi une dialectique entre juxtaposition et superposition de formes, les deux étant essentielles dans la démarche de changement de *regard géométrique*.

Poursuivons en présentant maintenant un problème qui nous paraît fondamental pour aller jusqu'à l'institutionnalisation des éléments caractéristiques du cercle, qui sont le centre, le rayon et le diamètre. L'aspect crucial du problème que nous présentons dans le paragraphe suivant réside dans une articulation entre l'usage des gabarits et celui du compas. Ce problème concerne plus particulièrement le CE2.

3.3. En CE2, un **problème-clé** : l'articulation entre le gabarit et le compas

Dans les manuels analysés (*cf.* partie 1.2, p 23), la transition du disque au cercle est passée sous silence et les éléments caractéristiques du cercle sont surtout introduits de façon ostensive. Partant en outre du constat que la plupart des élèves, à l'entrée du secondaire, « *ne réalisent pas nécessairement encore que l'écartement du compas correspond à une longueur non matérialisée* » (Perrin-Glorian & Godin, 2014, p. 31) et de l'hypothèse que le concept de distance est un bon candidat en tant qu'obstacle épistémologique¹⁷, le problème que nous proposons a pour ambition de créer les conditions favorisant :

- le passage du disque au cercle,
- la matérialisation du rayon, du diamètre et du centre d'un cercle,

et cela en mettant simultanément en jeu un compas et un gabarit de demi-disque. Dans ce sens, le problème en question garde encore un lien avec la conception du cercle comme figure ayant une

¹⁶ Avant de parvenir à une trace écrite, il serait intéressant pour l'enseignant de centrer le bilan sur les autres stratégies d'adaptation et sur les procédés de contrôle, ce qui n'a pas été possible lors de notre expérimentation par manque de temps.

¹⁷ Nous renvoyons le lecteur à Chevallard (1991) pour l'étude du processus de transposition didactique du concept de distance.

courbure constante et invariante par rotation mais ouvre la voie sur la conception nouvelle du cercle comme défini par le centre et un rayon ; par le centre et un point ; par un diamètre.

3.3.1. Un problème clé du point de vue du changement de regard sur la figure

De manière générale, les problèmes portant sur le cercle comme lieu géométrique consistent à trouver *tous les* points situés à une distance r d'un point donné O , jusqu'à définir que l'ensemble de tous ces points est un cercle, de centre O et de rayon r . Selon nous, l'ensemble de ces problèmes — dits de lieux géométriques — coupe le lien avec d'autres conceptions du cercle mais aussi avec la trace graphique du rayon vu comme bord de surface (comme cela est exploité dans nos problèmes précédents) ou encore celle du centre vu comme intersection de lignes (également bords de surface). En effet, la vision qu'on a de la figure dans les problèmes de lieux géométriques se situe d'abord au niveau du point (0D) pour ensuite « remonter » vers la vision du cercle comme un ensemble de points représenté par une ligne continue (1D). À notre avis, ce passage est non trivial et la matérialité du rayon et du centre nous paraît essentielle pour penser cette transition ; c'est ce que nous défendons dans le problème — dit *problème-clé* — que nous présentons ci-après. Dans les problèmes de lieux géométriques, il ne s'agit plus d'opérer une déconstruction dimensionnelle mais bien une reconstruction dimensionnelle (du point vers la ligne) ; ces problèmes reposent sur la mise en fonctionnement de la relation $d(\text{centre} ; \text{point du cercle})$, distance entre un point donné — *le centre* — et n'importe quel point du cercle, relation qui ouvre la voie vers une nouvelle façon de penser¹⁸ le cercle et qui sera également au cœur de la résolution des problèmes de restauration proposés dans la suite de l'article (partie 3.4, p. 46).

3.3.2. Présentation du problème et de son rôle dans la progression

Dans une première phase, on met à la disposition de chaque élève un gabarit de demi-disque opaque, un compas et une feuille de travail sur laquelle un cercle est préalablement tracé¹⁹. Le gabarit fourni a les mêmes dimensions que le cercle tracé sur la feuille.

La tâche donnée à chaque élève consiste à *trouver un moyen de reproduire le même cercle en une seule fois, en se servant uniquement du compas pour le tracer. Le gabarit de demi-disque fourni ne devra servir que pour prendre ou ajouter des informations sur le cercle-modèle* (phase d'analyse de la figure-modèle). *Le gabarit fourni ne doit être ni plié, ni coupé* (formulations possibles pour les élèves).

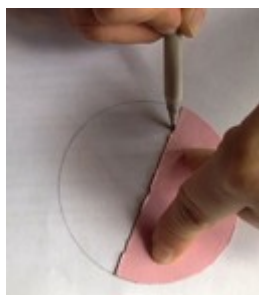
Pour résoudre ce problème, on pourra, sur le cercle-modèle, tracer un diamètre avec le gabarit de demi-disque, puis, en le tournant suivant la trajectoire du bord courbe²⁰, on pourra en tracer un second qui permettra ainsi de mettre en évidence (figure 18) :

- le centre d'un cercle comme intersection de deux diamètres ;
- un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points ;
- le diamètre comme segment joignant deux points du cercle et passant par son centre ;
- deux points comme intersections de chaque diamètre avec le cercle : à terme, le cercle comme ensemble de points.

¹⁸ Nous nous appuyons également sur l'idée que les différentes manières de penser le cercle, au sens de Artigue et Robinet (1982) peuvent être décrites notamment par une analyse logique des objets (Barrier, Hache & Mathé, 2014a et b) qui sont en relation étroite avec des manières d'agir et de parler le cercle. Nous renvoyons directement le lecteur vers Bulf, Mathé et Mithalal (2014) pour une analyse plus fine de l'activité géométrique des élèves dans ce cadre.

¹⁹ On fera en sorte que des élèves voisins n'aient pas les gabarits et les cercles de mêmes dimensions pour ne pas les inciter à utiliser les deux demi-disques pour reproduire le cercle-modèle.

²⁰ On exploite ici l'invariance du disque par rotation.



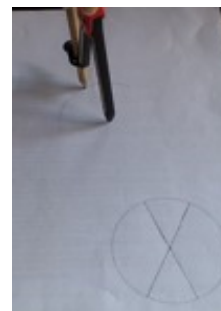
Positionner le gabarit dans le cercle-modèle et tracer un premier diamètre.



Tourner le gabarit dans le cercle-modèle et tracer un second diamètre.



Ouvrir le compas pour matérialiser le rayon et le centre.



En gardant l'ouverture du compas, tracer un cercle (superposable au cercle-modèle).

Figure 18 : Description étape par étape de la résolution du *problème clé*

Grâce à ce problème, les éléments caractéristiques du cercle vont ainsi se « matérialiser » : le centre apparaît comme intersection de segments (bords rectilignes du demi-disque) ; le rayon est tracé et permet de contrôler l'écartement du compas pour reproduire le cercle.

Une fois que les élèves ont résolu individuellement la reproduction du cercle, la mise en commun peut mettre au jour la nécessité d'un vocabulaire spécifique pour désigner les nouveaux objets géométriques tracés (rayon, centre, diamètre), leurs définitions faisant ainsi l'objet d'une institutionnalisation. Le compas servira à la fois pour :

- reporter des longueurs (le rayon du cercle pour le tracer) ;
- tracer le cercle ;
- comparer des longueurs (pour vérifier les caractéristiques du diamètre).

Le problème du *cercle-puzzle*, proposé dans *Cap Maths CE2* (Hatier, 2011) et présenté dans la partie 1.2, p. 23, pourrait enrichir cette étape : si l'on suppose que la transition du gabarit au compas a eu lieu (soit de la façon dont nous venons de le décrire, soit autrement), ce problème permettrait alors de généraliser la notion de rayon — au-delà du fait de représenter une longueur égale à la moitié de celle du diamètre (et la moitié du bord rectiligne d'un demi-disque) — pour être maintenant vu comme le segment joignant le centre et n'importe quel point du cercle, voire pour introduire explicitement le cercle comme ensemble de points à égale distance d'un point donné. En outre, cela permettrait de traiter deux situations-clés liées au compas comme traceur de cercles :

- un compas permet de tracer simultanément plusieurs points à une même distance d'un point donné ;
- dans un ensemble de points, un compas permet de déterminer ceux qui se situent à égale distance d'un point donné (problème réciproque).

Dans la partie qui suit, nous poursuivons nos réflexions à partir d'exemples de problèmes de restauration qui complètent notre progression.

3.4. Du CE2 au début du collège : vision du cercle et usage du compas dans des problèmes de restauration

Nous proposons ici l'étude de problèmes de restauration au sens du *groupe de Lille*. Il s'agit de présenter aux élèves la même figure-modèle (figure 6) en leur proposant de la reproduire à partir d'une amorce et en ajoutant un coût sur l'utilisation des instruments disponibles. Le but du jeu est de cumuler le moins de points possible (voir annexe 3 pour un exemple). Les élèves ont à leur disposition :

- une règle non graduée : par exemple, une bande de papier cartonné plastifiée avec laquelle on peut tracer des lignes droites ;
- une règle pour reporter des longueurs : par exemple, une bande de papier cartonné que l'on peut plier pour mémoriser une longueur, ou sur laquelle on peut marquer une longueur à l'aide d'un crayon dans le but de la reporter ;
- un gabarit d'angle droit (on évitera de donner l'équerre où il y a un côté gradué) ;
- une règle graduée ;
- un compas.

Les instruments peuvent être utilisés sur le modèle (pour prendre des informations ou pour ajouter des éléments supplémentaires) et pour tracer la figure à restaurer à partir de l'amorce fournie. Sur la figure-modèle, le recours à un instrument, quel qu'il soit, est gratuit. En revanche, sur la figure à restaurer, il existe un système de points qui peut être par exemple :

- tracer une ligne droite avec la règle non graduée est gratuit ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle prévue pour cet usage coûte 10 points ;
- utiliser un gabarit d'angle droit coûte 5 points ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle graduée coûte 20 points ;
- utiliser le compas coûte 1 point, que ce soit pour tracer un cercle ou pour reporter une longueur (prise sur le modèle ou sur la figure en construction).

Un tel système de coût sur les instruments favorise les procédures mobilisant le compas comme outil permettant la conservation puis le report d'une longueur mais aussi comme outil permettant de tracer un cercle. Nous avons prévu l'utilisation seule du papier uni.

La validation des productions des élèves peut s'effectuer classiquement par superposition avec la figure attendue tracée au préalable sur du papier calque même si nous considérons *a priori* que les propriétés intrinsèques de la figure suffisent à sa validation (notamment du fait que les tous les arcs de cercle doivent passer par le centre du carré, ce qui constitue selon nous un moyen de contrôle des tracés) mais aussi par un comptage du nombre de points utilisés pour la restauration (on peut annoncer le coût minimal possible).

3.4.1. Éléments d'analyses *a priori* selon différentes amorces possibles

Nous proposons maintenant un « catalogue » d'amorces possibles afin de mettre en évidence la richesse de l'exploitation d'une seule et même figure-modèle dans un problème de restauration de figures, dans le but de travailler les propriétés du cercle. Pour faciliter nos analyses, nous avons codé la figure-modèle (figure 19).

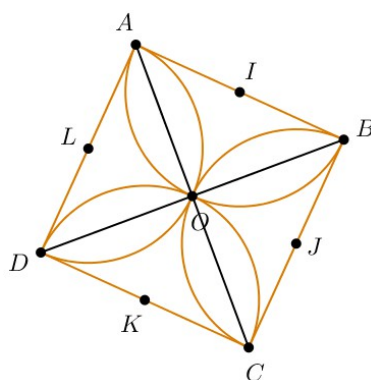


Figure 19 : Figure-modèle codée

Dans les figures ci-dessous (figures 19a, b, c et d), les amorces proposées portent sur le carré $ABCD$.

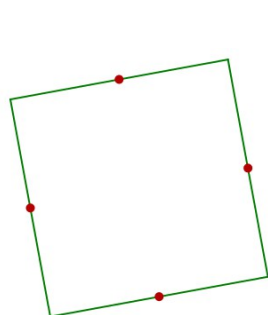


Figure 19a

le carré $ABCD$
et les points I, J, K et L

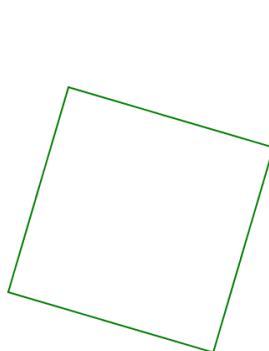


Figure 19b

le carré $ABCD$

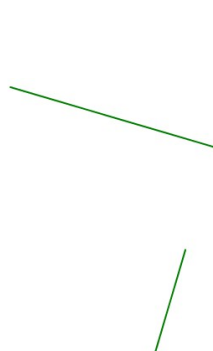
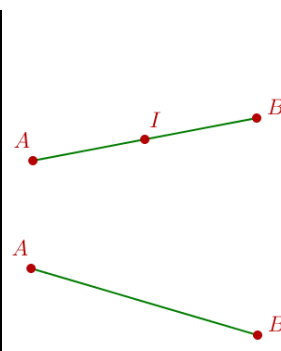


Figure 19c

le côté $[AB]$ du carré
et le segment $[JC]$ ²¹



Figures 19d et 19e

19d : un côté du carré, p.
ex. $[AB]$, et son milieu I
ou
19e : un côté du carré, p.
ex. $[AB]$

On supposera que le coût sur les instruments est pensé dans le but de favoriser le recours au compas (comme proposé précédemment et dans l'annexe 3).

Pour la figure 19a, le carré est déjà tracé et le choix des centres des cercles est suggéré. Il reste donc à la charge de l'élève le choix de l'écartement du compas pour tracer les cercles. Pour cela, une analyse de la figure-modèle permet de repérer les points par lesquels passent les demi-cercles : le centre du carré O et les sommets du carré. Toutefois, le compas semble avant tout exploité ici comme traceur de l'objet graphique « cercle » et pas comme outil permettant la conservation puis le report d'une longueur.

Le choix de l'amorce 19b amène l'élève à prendre en charge le choix des centres des demi-cercles²². Plusieurs procédures sont possibles : l'élève peut recourir à la bande de papier (et la plier en deux) ou à la règle graduée pour mesurer et trouver le milieu des côtés et donc les

²¹ Cette désignation peut être laissée à la charge de l'élève. Nous l'avons désignée pour simplifier l'analyse écrite proposée ici.

²² On rappelle au lecteur que cette même amorce est exploitée dans un autre cas décrit précédemment et mettant en œuvre un autre choix d'instruments (partie 3.2, p. 36).

centres respectifs des cercles (à condition de considérer les côtés du carré comme diamètres des cercles à tracer). Toutefois, si le coût sur ces instruments est trop élevé (et même sans cette considération), l'élève peut les éviter en procédant par exemple par essais-erreurs en plaçant à l'œil la pointe de son compas. Cela risque d'être problématique mais cela signifie que, malgré tout, l'élève considère que les côtés des carrés sont des diamètres et les milieux des côtés sont les centres des cercles respectifs ; les tracés des deux derniers cercles révéleront toutefois des erreurs d'approximation. L'élève peut aussi penser à des procédures plus expertes et peu coûteuses en mobilisant ses connaissances sur les propriétés du carré et en construisant, par exemple, le point d'intersection O des diagonales du carré puis en utilisant un gabarit d'angle droit pour tracer la médiane relative à un côté du carré, passant par le point O . L'élève obtiendrait ainsi, du même coup, le centre de deux demi-cercles (milieux de deux côtés opposés du carré). En 6^e, l'élève peut aller jusqu'à mobiliser une procédure de tracé à la règle et au compas pour trouver les milieux des côtés du carré²³. Cette procédure peut même être mobilisée une seule fois car le compas peut alors être utilisé pour mémoriser puis reporter la longueur du rayon autant de fois que nécessaire pour trouver les autres centres des demi-cercles. À ce propos, il nous semble important de souligner que le choix de cette procédure nécessite la maîtrise d'un *schème d'utilisation* (au sens de Rabardel, 1995) du compas où deux gestes opèrent sur deux points qui jouent successivement deux rôles différents — le centre du cercle, puis un point du même cercle — et où le compas intervient successivement avec deux fonctions différentes : reporteur de longueurs et traceur de cercle. Il s'agit en effet de reporter une longueur (le rayon) à partir d'un point donné (le sommet du carré) pour identifier un nouveau point qui sera aussitôt à prendre en compte comme étant le centre du demi-cercle passant par le point donné (le sommet du carré). Ce schème, par sa complexité, devra alors auparavant faire l'objet d'un apprentissage : par exemple, la *reproduction d'une chenille*, proposée dans Fénichel et Taveau (2006).

Si l'on procède à un comptage des points, comme dans l'annexe 3 (le report d'une longueur par le compas coûte 1 point), la figure peut être reproduite avec un coût minimal de 7 points (procédure pouvant être attendue au début du collège) :

- construire le point O , intersection des diagonales : 0 point ;
- tracer un point intermédiaire M , comme intersection d'arc de cercles de même rayon (par exemple arc de cercle de centre A , puis arc de cercle de centre B) : 2 points ;
- tracer la droite (OM) , on obtient les points I et K : 0 point ;
- report au compas de la longueur IB , pour obtenir le point J : 1 point ;
- tracer la droite (OJ) , on obtient le point L : 0 point ;
- tracer des quatre demi-cercles de centre respectifs I, J, K et L et de rayon IO à l'intérieur du carré : 4 points.

L'amorce 19c implique la prise en charge par l'élève du tracé du carré. Cette amorce se révèle plus complexe car elle nécessite en tout premier lieu une analyse de celle-ci pour interpréter la partie qu'elle représente de la figure-modèle. En effet, la figure n'étant pas connexe, le segment $[JC]$ peut être perçu comme un étalon pour déterminer l'écartement du compas. En début de collège, la construction peut se faire seulement au compas et à la règle non graduée mais celle-ci se révèle plus longue et complexe.

Les amorces 19d et 19e représentent un côté seulement du carré. Le tracé du carré se retrouve à la charge de l'élève. Pour autant, ces deux amorces ne relèvent pas du même niveau de complexité et sont donc bien différentes. Dans un cas, le milieu du côté est représenté, ce qui facilite donc la recherche du centre et du rayon du premier demi-cercle à tracer. Il reste certes à

²³ Il existe de nombreuses techniques pour obtenir le milieu d'un segment. Nous renvoyons le lecteur à Perrin-Glorian et Godin (2014, p. 34) qui en proposent quelques unes.

déterminer les autres centres et rayons des autres demi-cercles mais le tracé du premier demi-cercle facilite la suite de la construction, puisque l'élève peut procéder de la même façon que précédemment (les autres centres sont également les milieux des côtés du carré). Dans ce cas, la complexité de la tâche réside donc surtout dans le tracé du carré. Tandis que dans l'autre cas (amorce 19e), la recherche du centre et du rayon est aussi à la charge de l'élève et donc celui-ci devra procéder à une analyse plus fine de la figure-modèle et mobiliser des propriétés du cercle.

Les amorces proposées en figures 20a et 20b portent sur l'un des demi-cercles et/ou le carré. Là aussi, même si les amorces semblent proches, le degré de complexité de la tâche à résoudre n'est pas du même ordre.

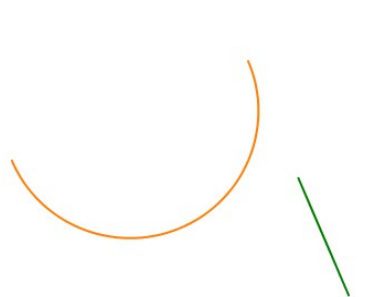


Figure 20a
le demi-cercle de diamètre $[AB]$
et le segment $[JC]$



Figure 20b
un demi-cercle,
par exemple celui de diamètre $[BC]$

Tout comme la précédente amorce (figure 19c), celle-ci nécessite une analyse préalable pour interpréter ce qu'elle représente de la figure-modèle. Les postulats de la *Gestalt Theory*²⁴ à propos de la loi de clôture (Guillaume, 1937) nous amènent à penser que l'élève cherchera à « fermer » la figure ; autrement dit, on peut raisonnablement penser que l'élève tracera en premier le diamètre du demi-cercle, obtenant ainsi un des côtés du carré. Puis, en prolongeant la droite (JC) jusqu'à l'extrémité du côté déjà tracé, on obtient un deuxième côté. En traçant la diagonale du carré à partir des deux sommets opposés qui viennent d'être tracés (A et C), on obtient le centre O du carré. On peut alors tracer l'autre diagonale en reliant le sommet B et le centre O . Jusque-là, les tracés ont coûté 0 point. En utilisant seulement le compas comme report de longueur, on peut terminer la construction du carré à la règle non graduée (1 point). Il reste à tracer les trois autres arcs de cercle. Plusieurs procédures sont possibles pour obtenir les centres des arcs de cercle, nous renvoyons le lecteur à celles déjà décrites précédemment (procédure de la construction du milieu à l'aide du compas ; report de longueur par pliage d'une bande de papier ; recours à une règle graduée, etc.), le coût minimal étant de 3 points pour obtenir les centres manquants. Au final, la construction peut coûter seulement 4 points.

Le choix de l'amorce 20b amène également à penser que l'élève aura d'abord tendance à « fermer » la figure (loi de clôture de la *Gestalt Theory*). Il reste à la charge de l'élève la construction du carré puis des arcs de cercle. La construction du carré, en début de collège, peut se faire seulement au compas et à la règle non graduée (pour un coût minimal de 5 points) en

²⁴ La théorie de la Gestalt (psychologie de la forme) défend la thèse qu'il existe des idées innées sur la forme, la taille, la couleur et les propriétés d'objets, et que c'est l'organisation de la figure décomposée en unités qui permet d'accéder à la perception. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage *La Perception* (Rock, 2001) dans lequel l'auteur expose les différentes théories de la perception.

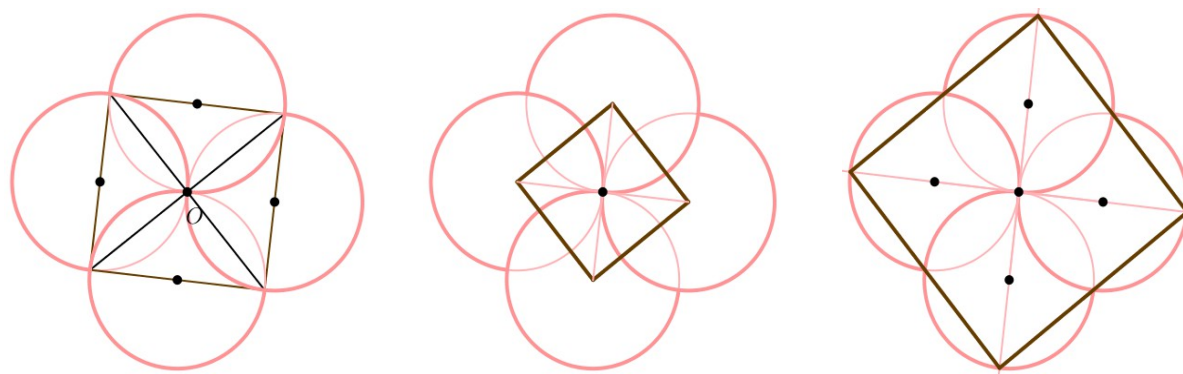
mobilisant notamment la technique de la médiatrice du côté tracé, qui permet d'obtenir le centre du demi-cercle tracé et le centre du carré. Par la suite, en traçant les diagonales et en reportant une longueur du côté du carré, on peut terminer la construction du carré²⁵.

3.4.2. Synthèse sur l'intérêt didactique de cette variété d'amorces

Les analyses *a priori* des différents problèmes de restauration proposés ici permettent de mettre en évidence que le choix entre ces différentes amorces et le coût sur les instruments conduiront les élèves à une mobilisation et à une organisation différente des propriétés du cercle et du carré et donc à un jeu différent du regard porté sur les unités figurales : côtés du carré (2D), vus aussi comme diamètres du cercle (1D) ; points-repères du carré (0D) appartenant au cercle (1D) ; diagonales du carré (1D), médianes des côtés du carré (1D) et points d'intersection (0D) ; relation de perpendicularité, d'alignement et de milieu, *etc.*

Certaines amorces favorisent a priori davantage un jeu de déconstruction et reconstruction de la figure-modèle ($2D \rightleftharpoons 1D \rightleftharpoons 0D$) afin de mobiliser les propriétés du cercle et sa caractérisation par la relation $d(\text{centre} ; \text{point du cercle})$, pour résoudre la tâche. Certaines mobilisent d'autres connaissances géométriques au-delà des propriétés du cercle : prolongement de droites, intersection de droites pour obtenir un point, relation d'incidence et d'alignement, *etc.*

Ajoutons à cela que l'amorce « carré » peut être également envisagée en fonction des différentes façons de « voir » la figure (figures 21) et ouvre ainsi la voie à des variations possibles de la figure-modèle (annexe 1).



Figures 21 : Différentes façons de voir la figure impliquant un rôle différent au carré

4. Conclusion et perspectives

Nous avons présenté ici une progression originale qui porte sur l'apprentissage du cercle et de ses propriétés, qui assure selon nous une continuité des apprentissages tout au long de l'école primaire et qui assume de créer les conditions favorables pour exercer et développer le regard géométrique des élèves. Dans la perspective de développer des outils efficaces pour l'enseignant, c'est-à-dire que ce dernier pourrait facilement s'approprier et faire vivre dans sa classe, nous avons fait le choix de construire en partie notre progression à partir d'une seule et même figure-modèle (figure 6), en adaptant le choix des instruments mis à disposition et en jouant sur certaines variables didactiques. Notre progression est basée sur une articulation entre les propriétés et les instruments dans la continuité des travaux du *groupe de Lille* (Perrin-Glorian & al., 2013 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014).

²⁵ À propos de cette dernière amorce, pour des analyses *a priori* et *a posteriori* détaillées de ce problème, nous renvoyons le lecteur à Dupont (2015).

En appui sur une étude de quelques extraits significatifs des ressources récentes existantes (partie 1.2, p. 23), nous avons dressé les grandes lignes d'une progression visant le passage du « rond » au cercle et du gabarit de disque au compas, pour des classes d'école primaire et de début du collège. L'un des points forts de notre progression est de prendre en charge certains passages « clés » qui nous semblaient manquants (voir tableau 1, p. 31) : jeu de superposition de formes (vision surface, lignes et intersection de lignes) ; jeu de tracé de contours de surfaces et intersections de lignes ; matérialisation des caractéristiques du cercle (centre, rayon et diamètre) à l'aide d'une articulation entre un gabarit de disque et le compas ; déconstruction et reconstruction dimensionnelle dans les problèmes de lieux géométriques et de restauration de figures.

Notre proposition de progression nous conduit maintenant à de nouvelles interrogations : quelle est l'activité géométrique effective de l'élève à qui on propose les problèmes étudiés ici ? Quelle formulation des savoirs en jeu ? Et quelle diffusion peut-on envisager dans les pratiques des enseignants et dans la formation à ces pratiques ?

Nous avons évoqué certains éléments d'analyse *a posteriori* de nos situations testées en classe (partie 3.2, p. 36). Les premiers résultats obtenus nous conduisent à penser que les premiers problèmes proposés au début de notre progression permettent une dialectique entre gabarits de forme et figure mais aussi une dialectique entre juxtaposition et superposition de formes, les deux étant essentielles dans la démarche de changement de regard géométrique.

Plus particulièrement, il nous semble que la suite logique de ce travail s'orienterait plutôt vers une analyse fine de l'activité géométrique des élèves, qui prendrait en charge de façon simultanée leurs différentes conceptions (et différentes façons de voir la figure), leurs actions sur le milieu (dont les différentes façons d'agir en fonction des instruments de géométrie mobilisés) et les différents langages qu'ils utilisent (Barrier, Hache & Mathé, 2014a et b ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014 ; Celi & Perrin-Glorian, 2014 ; Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016 [à paraître]).

Cela nous conduit également à nous interroger de façon plus spécifique sur la formulation de savoirs résultant des séances que nous proposons ici : quels savoirs ou savoir-faire en jeu au-delà des propriétés du cercle ? Quelle récupération de l'activité mathématique des élèves ? Pour découvrir d'autres exemples de problèmes de restauration, de nombreux travaux du *groupe de Lille* apportent des éléments de réponse. En particulier, d'autres types de matériel sont présentés (notamment les gabarits déchirés) favorisant des procédures de prolongement de droites ou de report d'angle et de longueur dans la reproduction de certains polygones (cela ne concerne donc pas directement notre propos quant à l'enseignement et l'apprentissage du cercle). Ainsi, les apprentissages en jeu dans les problèmes de restauration portent-ils sur « les relations » comme (Perrin-Glorian & Godin, 2014, p. 35) :

- une droite peut toujours se prolonger ;
- il faut un segment ou deux points pour définir une droite ;
- il faut un support rectiligne pour reporter une longueur à partir d'un point jusqu'à un autre point, sinon il faut un compas qui donne tous les points à une distance fixée d'un point donné ;
- il faut deux lignes qui se croisent pour déterminer un point.

D'autres savoirs mathématiques centraux de l'école primaire et du collège peuvent aussi être prétextes à des problèmes de restauration : comme la symétrie axiale (Perrin-Glorian & al., 2013) ou la symétrie centrale (Dupont, 2015).

Il nous semble néanmoins important de souligner que ces questions sur la nature des savoirs à enseigner dans ce type de situation se rapprochent de celles évoquées par Barrier (2015) à propos de « la déconstruction dimensionnelle » (Duval, 2005) comme savoir à enseigner au même titre, par exemple, que l'« énumération » (Briand, 1999-2000).

Nous supposons que cela peut être un frein à l'appropriation de ce type de problèmes par les enseignants, à moins de changer complètement le contrat relatif à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, comme le suggèrent Perrin-Glorian et Godin (2014).

Ces dernières réflexions nous conduisent alors à un autre niveau de questions portant sur les pratiques des enseignants et de la formation à ces pratiques.

Les travaux de Mangiante-Orsola (2013) et de Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2014) concernent l'appropriation des problèmes issus de la recherche dans l'enseignement ordinaire. Ces auteures décrivent un dispositif de formation destiné à la diffusion de travaux de recherche du *groupe de Lille* auprès des enseignants du premier degré (problèmes de restauration). Elles décrivent la complexité sous-jacente à ce projet et proposent des critères indispensables à prendre en compte si on veut espérer une diffusion possible et non galvaudée, dans les pratiques ordinaires, des travaux issus de la recherche (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014, p. 74) :

*prendre en compte les prescriptions institutionnelles [...],
concevoir et mettre en œuvre les activités pour la classe [...],
donner une finalité à la tâche prescrite via les formateurs et l'accepter [...].*

Aussi, à travers cet article, même si nos ambitions initiales consistent en la diffusion d'outils directs et autonomes auprès des enseignants, il nous paraît néanmoins indispensable de conclure en insistant sur la nécessité d'une formation continue auprès des enseignants pour assurer la mise en place des conditions nécessaires à une possible diffusion des travaux issus de la recherche²⁶. En particulier dans l'idée générale de participer à la construction d'une culture ou d'un « *monde commun* » (*ib.*).

Références bibliographiques

- ARTIGUE M. & ROBINET J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherche en didactique des mathématiques*, 3.1, La pensée sauvage éditions, 5-64.
- BARRERA-CURIN R., BULF C. & VENANT F. (2016 à paraître). Agir-parler-penser de la symétrie à l'école, *actes du colloque du GDM (Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec)*, Université de Sherbrooke, Canada.
- BARRIER T. (2015). Formation initiale en géométrie et visualisation, *Actes du 41^e colloque de la Copirelem*, Mont de Marsan 2014 [CD-rom].
- BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.-C. (2014b). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, 93, 13–37.
- BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.-C. (2014a). Décrire l'activité géométrique des élèves : instrument, regard, langage, *Actes du 40^e colloque de la Copirelem*, Nantes 2013 [CD-rom].
- BRIAND J. (1999 - 2000). Enseigner l'énumération en moyenne section, *Grand N*, 66, 7-22.
- BULF C. & CELI V. (2015b). Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3, *Grand N*, 96, 5-33.
- BULF C. & CELI V. (2015a). Des problèmes de reproduction aux problèmes de restauration :

²⁶ Un progrès dans ce sens semble pouvoir se réaliser avec l'entrée en vigueur, dès la rentrée 2016, des nouveaux programmes pour l'école élémentaire. Les problèmes de reproduction de figures géométriques y trouvent une place et un rôle importants : on y préconise en effet un travail sur les propriétés et les relations géométriques à partir de ce type de problèmes (<http://www.education.gouv.fr/cid93042/projet-de-programmes-pour-les-cycles-2-3-et-4.html>, consulté le 11 novembre 2015).

- quelles adaptations pour la classe ?, *Actes du 41^e Colloque de la Copirelem*, Mont de Marsan 2014 [CD-ROM].
- BULF C., MATHÉ A.-C. & MITHALAL J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, 54, 29-48.
- CELI V. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014). Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, 54, 151-174.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné suivi de Un exemple de la transposition didactique*, La Pensée Sauvage.
- DUCEL Y. & PELTIER M.-L. (1986). *Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2*, brochure IREM de Rouen (Université de Rouen).
- DUPONT T. (2015). *Les dimensions matérielles et langagières de l'activité géométrique de l'élève à l'entrée au collège*, mémoire de Master 2, Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation, mention Pratiques et Ingénierie de Formation, parcours didactique des mathématiques, Université de Bordeaux.
- GUILLAUME P. (1937, éd. 1979). *La psychologie de la forme*, Paris : Flammarion.
- RABARDEL P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. *Outils pour le calcul et le traçage de courbes*
http://tecfa-labs.unige.ch/mitic/system/files/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf
- RIMBAULT C. & EURIAT J. (1995). Géométrie à l'école maternelle, *Actes du 22^{ème} colloque de la Copirelem*, Douai, 155-159.
- ROBERT A. (2004). Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants. Perspectives en formation d'enseignants, *Petit x*, 65, 52-79.
- ROCK I. (2001). *La perception*, Paris – Bruxelles : De Boeck Université.

Liste des publications du groupe de Lille utilisée dans notre recherche

- DUVAL R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138.
- DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- DUVAL R. & GODIN M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N*, 76, 7-27.
- DUVAL R., GODIN M. & PERRIN GLORIAN M.-J. (2004). Reproduction de figures à l'école élémentaire, *Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques de l'ARDM*, Ed. Irem de Paris 7.
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/actes_seminaire_national_de_didactique/Actes_du_Seminaire_National_de_Didactique_2004.pdf
- GODIN M. & PERRIN M.-J. (2009). *De la restauration de figure à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître*, Actes du 35^{ème}

colloque la Copirelem, Bombannes 2008.

KESKESSE B., PERRIN-GLORIAN M.J. & DELPLACE J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, n°79, 33-60.

MANGIANTE-ORSOLA C. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des Maîtres, *Grand N*, n° 94, 47-83.

MANGIANTE-ORSOLA C. (2013), Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM*, Irem Paris 7.

http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/97/26/56/PDF/actes_sem_2013.pdf

PERRIN-GLORIAN M.-J. & GODIN A. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés, *Math-École*, n° 222, Numéro Spécial sur la géométrie (version papier), 26-35.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHÉ A.-C. & LECLERCQ R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Liste des ressources pédagogiques et institutionnelles citées dans l'article

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P. & MADIER D. (2011). *Cap Maths* CE2, Hatier.

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P. & MADIER D. (2010). *Cap Maths* CM1, Hatier.

DEMAGNY C., DEMAGNY J.-P., DIAS T. & DUPLAY J.-P. (2008). *La tribu des Maths* CE2, Magnard.

DEMAGNY C., DEMAGNY J.-P., DIAS T. & DUPLAY J.-P. (2008). *La tribu des Maths* CM1, Magnard.

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*, Paris : Hatier.

FÉNICHÉL M. & TAVEAU C. (2006). *Enseigner les mathématiques au cycle 2. Deux situations d'apprentissage en images : combien de bûchettes ?, le petit moulin*, Créteil : SCÉRÉN-CRDP, Académie de Créteil [DVD].

FÉNICHÉL M. & TAVEAU C. (2008). *Enseigner les mathématiques au cycle 3. Deux situations d'apprentissage en images : le cercle sans tourner en rond, l'enveloppe des nombres*, Créteil : SCÉRÉN-CRDP, Académie de Créteil [DVD].

GRELIER J.-F. (2004). *Apprentissages géométriques à l'école primaire*

<http://www.apprentissages-geometriques.com/>

GROS P., FREY-TOURNIER M.-L. & RÉALE-BRUYAT F. (2012). *Outils pour les Maths* CE2, Magnard.

PELTIER M.-L., BRIAND J., NGONO B., VERGNES D. (2009). *EuroMaths* CM1, Hatier.

PELTIER M.-L., BRIAND J., NGONO B., VERGNES D. (2010). *EuroMaths* CE2, Hatier.

PELTIER M.-L., BRIAND J., NGONO B., VERGNES D. (2011). *EuroMaths* CP, Hatier.

PETIT-JEAN I., CARLE S., ROUSSEAU M. (2011). *Outils pour les Maths* CM1, Magnard.

MEN (2002). *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 2*, Scéren CNDP.

MEN (2002). *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 3*, Scéren CNDP.

MEN (2008). *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*, BO n° 3, 19 juin 2008.

Annexe 1

Exemples de variations de la figure-modèle, extraits des cahiers de géométrie *La tribu des maths* (Magnard)²⁷.

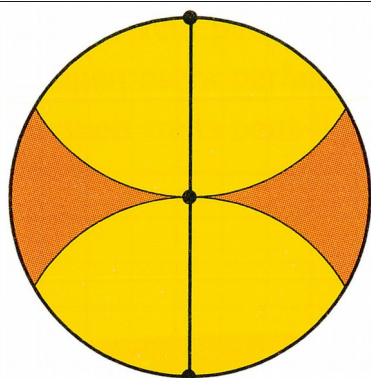


Figure a (CE2, p. 32)

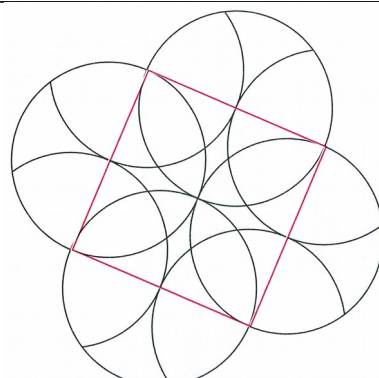


Figure b (CM2, p. 8)

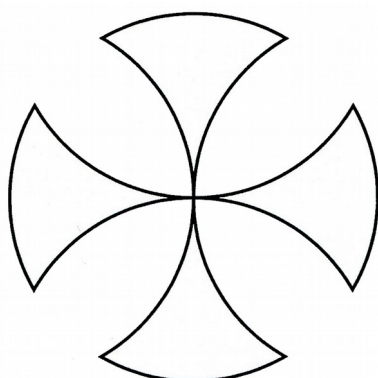


Figure c (CM2, p. 19)

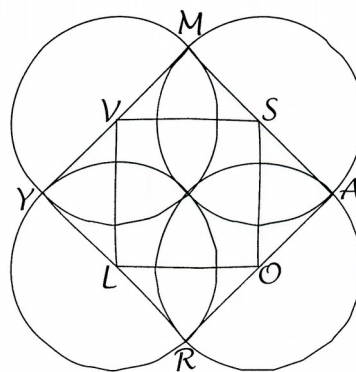


Figure d (CM2, p. 51)

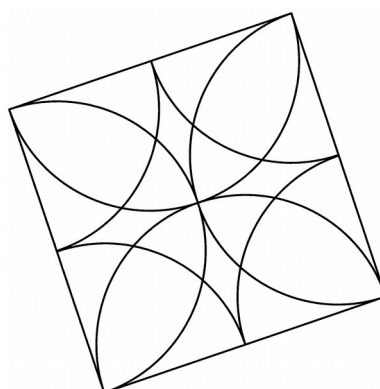


Figure e (CM2, p. 53)

²⁷ Certaines de ces figures sont déjà présentées dans Bulf et Celi (2015b).

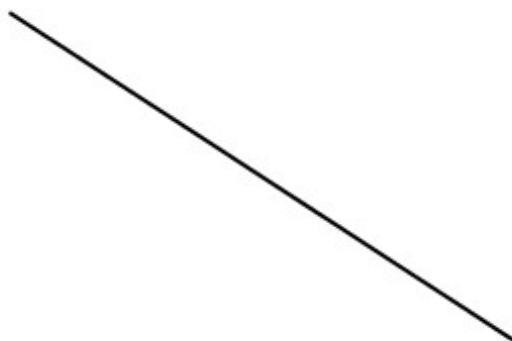
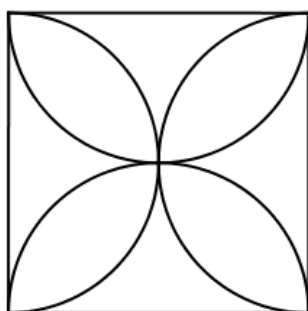
Annexe 2

Niveau scolaire	Conceptions du cercle	Situations	Exemples de problèmes associés
de la maternelle au CE1	Articulation entre conception iconique (rond) et conception « courbure constante »	Jeu de juxtaposition et de superposition de formes : vision surface, lignes et intersection de lignes. Jeu de tracé de contours de surfaces et intersections de lignes.	Problèmes de reproduction de figures à l'aide de gabarits ou pochoirs : • <i>Les robots</i> (Grelier, 2004) ; • Problèmes extraits de <i>Euromaths</i> CP (Hatier, 2011, pp. 73-75) ; • Jeu de superposition de formes : la figure-modèle étudiée dans cet article (§3.2, p. 36).
du CP au CE2			Jeu entre vision de surface et visions de lignes : un problème de reproduction avec la figure-modèle étudiée dans cet article (§3.2, p. 36).
du CE2 au CM1	Conception « courbure constante », conception « invariant par rotation », conception « courbe plane admettant une infinité d'axes de symétrie » et amorce d'une conception ponctuelle	Introduction du compas comme outil pour tracer des cercles	Problèmes extraits de <i>Cap Maths</i> CE2 (Hatier, 32-33, guide de l'enseignant)
		Matérialisation des éléments caractéristiques du cercle (centre, rayon et diamètre) à l'aide d'une articulation entre un gabarit de disque et le compas.	Le problème-clé présenté dans cet article (§3.3, p. 43) : reproduire un cercle donné.
			<i>Les disques</i> (Artigue et Robinet, 1982, pp. 22-24) ; <i>Les couronnes</i> (Artigue et Robinet, 1982, pp. 24-26) ; <i>Les arcs</i> (Artigue et Robinet, 1982, pp. 26-28) ; <i>Cercle-Puzzle</i> (<i>Cap Maths</i> CE2, Hatier, 2011, pp. 42-43 du guide de l'enseignant ; dans cet article (§1.2, figure 4, p. 28).
			Problèmes autour du diamètre et du centre d'un cercle : <i>Cap Maths</i> CM1 (Hatier, 2010, pp. 233-234 du guide de l'enseignant).
			Reproduire des cercles à l'aide du compas : <i>Cap Maths</i> CE2 (Hatier, 2011, pp. 45-46 du guide de l'enseignant).
			Problèmes extraits de <i>Euromaths</i> CE2 (Hatier, 2010, p. 72 du livre du professeur) : construction de cercles en faisant varier les conditions de départ.
du CE2 au début de collège	Conception ponctuelle	Déconstruction et reconstruction dimensionnelle dans les problèmes de lieux géométriques	<i>Même distance à coup sûr</i> (ERMEL, 2006, pp. 303-309) Problèmes extraits de <i>Euromaths</i> CM1 (Hatier, pp. 38-41) : <i>Le cercle sans tourner en rond</i> (Fénichel, Taveau, 2008).
		Déconstruction et reconstruction dimensionnelle dans les problèmes de reproduction et de restauration de figures	La <i>chenille</i> (Fénichel, Taveau, 2006) Problème de reproduction extrait de <i>Cap Maths</i> CM1 (Hatier, 2010, p. 51 ; dans cet article §1.2, figure 5, p. 30) ; Problèmes de restauration étudiés dans cet article (§3.4, p. 46).

Tableau 1bis : Étapes d'une progression sur le cercle avec renvoi à des problèmes possibles

Annexe 3

Exemple de présentation d'un problème de restauration



<i>action</i>	<i>coût</i>	<i>comptes</i>
Règle non graduée pour tracer une ligne droite	0	
Règle pour reporter une longueur	10	
Règle graduée	20	
Gabarit d'angle droit	5	
Compas	1	