UNE TRISECTION DE TRIANGLE

Philippe REGNARD, Lycée Jules Renard - Nevers

Après avoir décrit de nombreux procédés permettant d'inscrire et de circonscrire des figures polygonales ou circulaires les unes dans les autres, Marolois expose à partir de la proposition 59 des découpages de figures, bissections, trisections et autres.

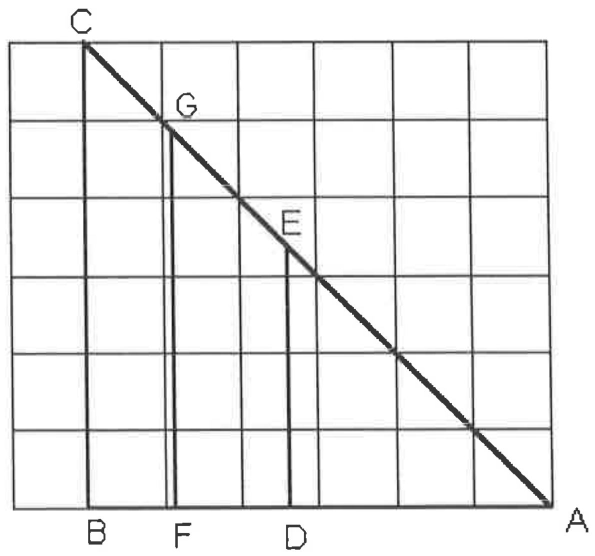
Le premier consiste à "*diviser un triangle en trois parties égales avec lignes parallèles à l'un des cotés*".

La construction proposée (voir page 6 des annexes) n'a rien de surprenant. Elle utilise la moyenne proportionnelle de deux grandeurs permettant la construction à la règle et au compas d'une racine carrée comme la décrit Euclide dans la 13[ième] proposition du livre VI de ses Éléments.

Son intérêt pour des élèves de seconde a résidé tout d'abord dans le simple énoncé du problème qui a suscité des interrogations et des débats fructueux. Il s'est dégagé principalement d'une recherche empirique, qu'un triangle dont les dimensions sont trois fois plus petites n'a pas une aire trois fois plus petite. Une étude plus théorique nous a menés à la nécessité de construire des racines carrées en utilisant la hauteur d'un triangle rectangle. L'activité s'est terminée par une étude de la figure et de la construction de Marolois.

I – Construction expérimentale.

Après une présentation du problème et des propositions plus ou moins fantaisistes, les élèves ont tenté une trisection approchée sur un triangle rectangle isocèle de côté 6.



Il suffisait, dans le triangle ABC de délimiter trois secteurs d'aires égales à 6 ce qui était facilité par la présence de carreaux et de demi-carreaux. Les constructions obtenues ont fourni en moyenne les rapports suivants :

$$\frac{AB}{AD} \approx \frac{6}{3,4} \approx 1,76 \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{AF} \approx \frac{6}{4,9} \approx 1,22$$

II – Étude d'un triangle particulier

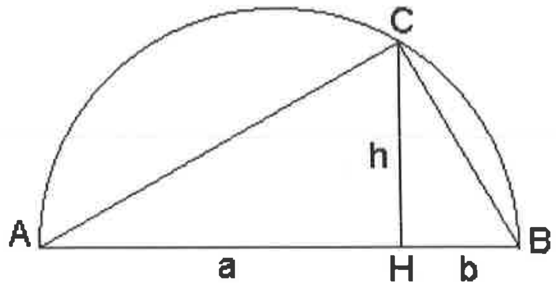
Afin d'expliquer les rapports trouvés précédemment, des calculs théoriques ont été demandés en conservant un triangle rectangle (voir figure précédente) dont l'aire est plus simple à calculer. Le cheminement a été le suivant :

1. Pourquoi l'aire du triangle ABC est-elle le triple de l'aire du triangle ADE ?
2. Si $\frac{AB}{AD} = k$, en déduire que k=3.
3. Par une méthode analogue, comparer les aires des triangles ABC et AFG, en déduire que $$\frac{AB}{AF} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$
4. Comparer $\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{6}}{2}$ aux deux rapports obtenus expérimentalement.
5. Pour tripler l'aire d'un triangle, faut-il tripler les dimensions de ses côtés ?

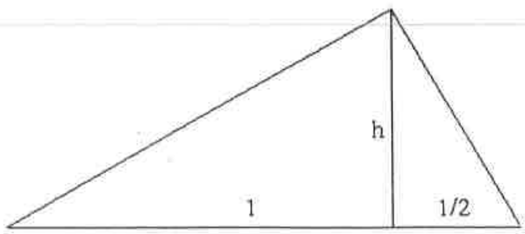
III – Constructions de racines carrées

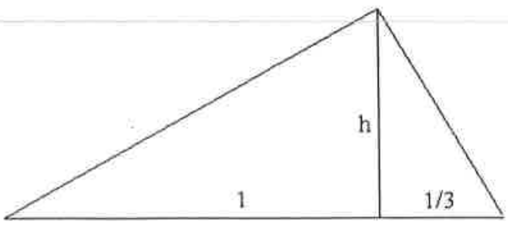
Dans sa construction, Marolois fait référence à la proposition 13 (et non 15) du livre VI des Éléments d'Euclide qui permet de "trouver la moyenne proportionnelle de deux droites données".

1. En utilisant le théorème de Pythagore dans les deux triangles rectangles ACH et BCH, Montrer que $h^2 = ab$ ou $h = \sqrt{ab}$.
2. On dit que h est la moyenne proportionnelle (ou moyenne géométrique) de a et b. Alors : $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$



3. En déduire une construction à la règle et au compas de $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ ou $\sqrt{a}$ $(a > 0)$.
4. Calculer h dans les figures ci-dessous

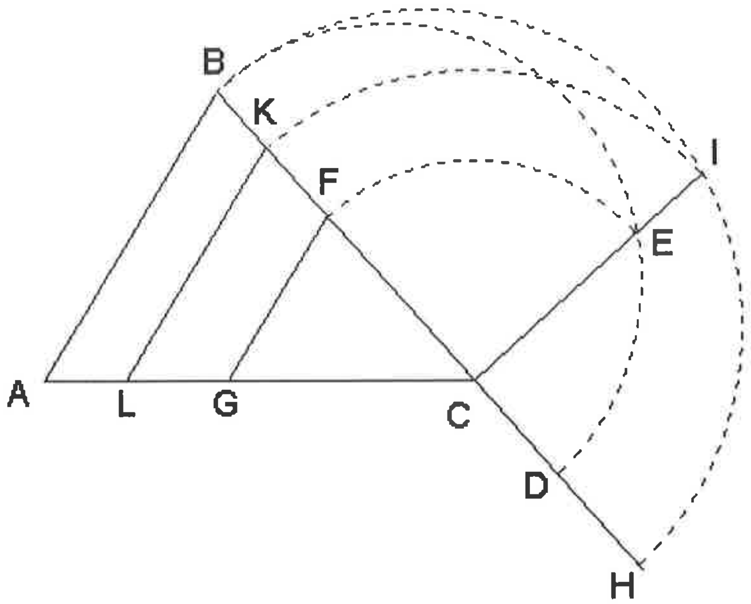




En déduire la construction de $1/\sqrt{a}$ $(a > 0)$.

III – Figure et construction de Marolois

Après une lecture collective de la construction (page 6 des annexes), s'est ensuivie une explication textuelle et mathématique.



Marolois divise le côté [BC] en trois segments de même longueur et reporte deux fois à partir de C cette longueur commune, que l'on prendra comme unité, pour obtenir les points D et H.

Que vaut alors CE ? En déduire le rapport $\frac{CB}{CE}$.

Montrer de la même façon que $\frac{CB}{CF} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Conclure.

Réaliser la même construction en n'utilisant que la règle et le compas.