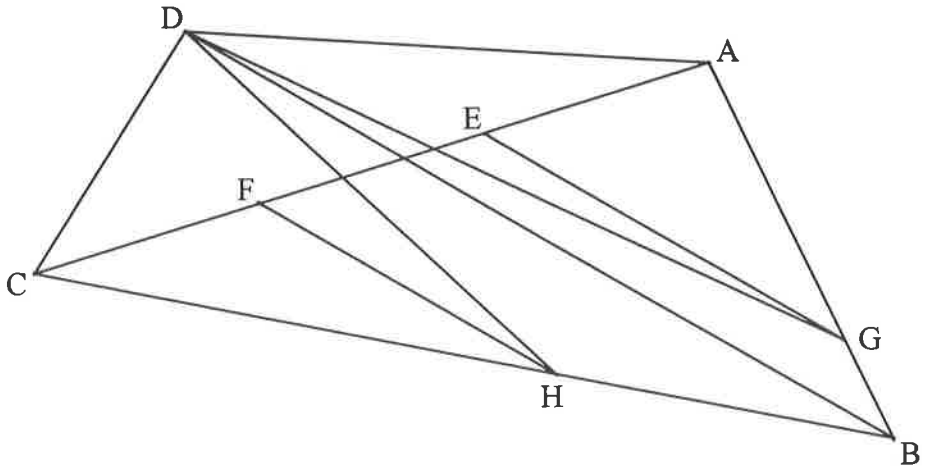
UN PROBLEME DE TRISECTION RESOLU PAR MAROLOIS

Pierre COLLAUDIN, Lycée de Paray-le-Monial

Dans la fin de la partie géométrique se rapportant aux constructions à la règle et au compas, Marolois traite plusieurs problèmes de partage. Il s'agit de partager en parties égales des polygones (quadrilatère, pentagone ...) suivant des contraintes données. La proposition 60 que nous allons étudier dans ce paragraphe est l'un de ces problèmes, elle s'énonce ainsi : "Diviser un quadrilatère par lignes sortantes d'un des angles".

Marolois propose deux solutions, nous ne nous intéresserons qu'à la première. La seconde solution, elle, est assez proche des solutions reprises dans les autres constructions, elle repose essentiellement sur la réduction du polygone en un triangle, puis du partage d'un côté du triangle en trois parties égales. La première solution est plus originale, elle est présentée sous le titre de construction 167 : "Soit le quadrilatère à diviser en trois parties égales ABCD, soit tirée la diagonale AC, laquelle soit divisée en trois parties égales et soient de ces points fait les parallèles à la diagonale BD, coupant les côtés AB et BC en G et H desquels étant menées lignes droites au point D aurons la division requise."



L'activité qui suit peut être traitée en seconde, voire même en troisième, une seule connaissance est nécessaire : savoir que l'aire d'un triangle est le demi-produit d'une base par une hauteur.

L'activité est donc divisée en trois parties :

- La lecture du texte avec une vérification expérimentale de la méthode de Marolois.
- L'étude de propositions préliminaires donnant l'idée de la justification de la méthode étudiée.
- La justification finale de la méthode.

I – Lecture du texte avec les élèves

Cette lecture nécessite toujours quelques explications classiques, typographiques pour les s qui ne sont pas placés en fin de mot et qui ressemblent plus à des lettres f, orthographiques pour les s et les c qui ont disparu dans notre orthographe actuelle : esgale, estre, costé, estant, droicte, faict.

Le vocabulaire demande aussi quelques explications, "lignes sortantes", "d'iceux points" "es points"

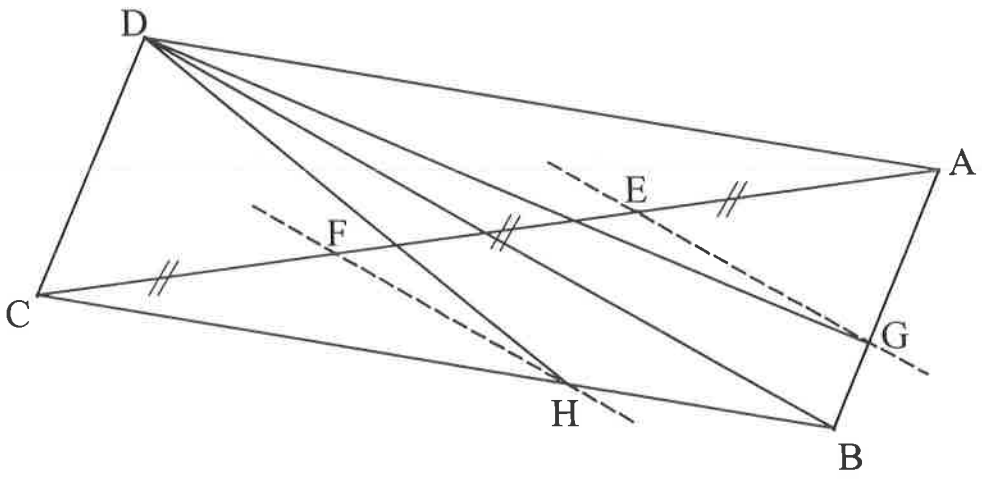
L'élève s'attarde toujours plus à ces curiosités liées à l'ancienneté du langage, qu'au contenu mathématique du texte. Une fois la curiosité de l'élève satisfaite, nous pouvons passer au texte mathématique .

II – Vérification expérimentale de la méthode de Marolois

La mesure d'une aire n'étant pas aisée expérimentalement, nous devons aborder des cas particuliers de figure.

Deux cas sont donc traités avec les élèves : le rectangle puis le parallélogramme. Dans le rectangle l'élève peut calculer l'aire totale du rectangle, l'aire des deux triangles DCH et DGA qui sont rectangles en C et en A et il ne reste qu'à déduire celle de la troisième partie, la méthode de Marolois est donc assez simple à vérifier.

Dans le cas du parallélogramme, il faut repérer que la diagonale [DB] partage déjà le quadrilatère ABCD en deux triangles de même aire, il suffit donc que les triangles DCH et DGA aient pour aires les deux tiers de celles des triangles DCB et DBA pour que la méthode soit vérifiée. Ayant des paires de triangles de même hauteur, le problème se ramène donc à prouver que H est aux 2/3 de [CB] et G aux 2/3 de [AB]

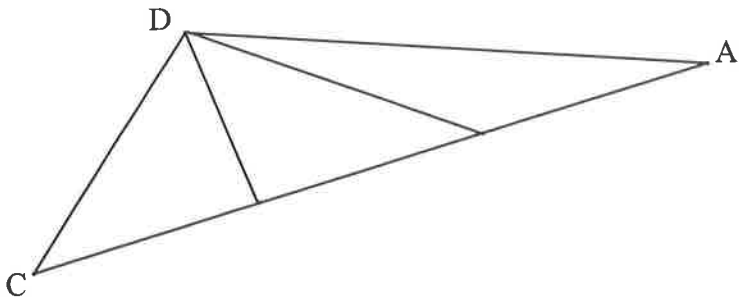


III – Etude de propositions préliminaires

La partie expérimentale faite et la méthode Marolois n'étant pas mise en défaut, sauf erreur de figure de l'élève, il reste à montrer la nécessité d'une preuve générale que les vérifications précédentes ne sauraient remplacer. Les avis des élèves divergent souvent de celui du professeur sur ce dernier point.

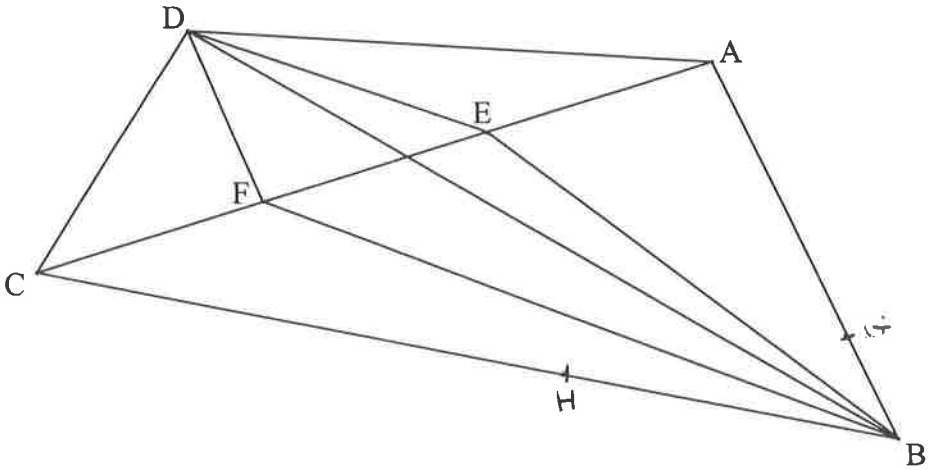
Deux propositions préliminaires sont nécessaires. La première n'est autre que la proposition 37 du livre 1 d'Euclide : "Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux ". En fait même si cette proposition nous paraît évidente, elle ne l'est pas pour les élèves, le rappel de la formule donnant l'aire d'un triangle est nécessaire mais pas toujours suffisante.

La deuxième est assez proche : il faut démontrer que si un segment [AC] est divisé en trois parties égales et si les extrémités de ces trois segments sont jointes à un point D extérieur au support de ces segments alors les trois triangles obtenus ont même aire.



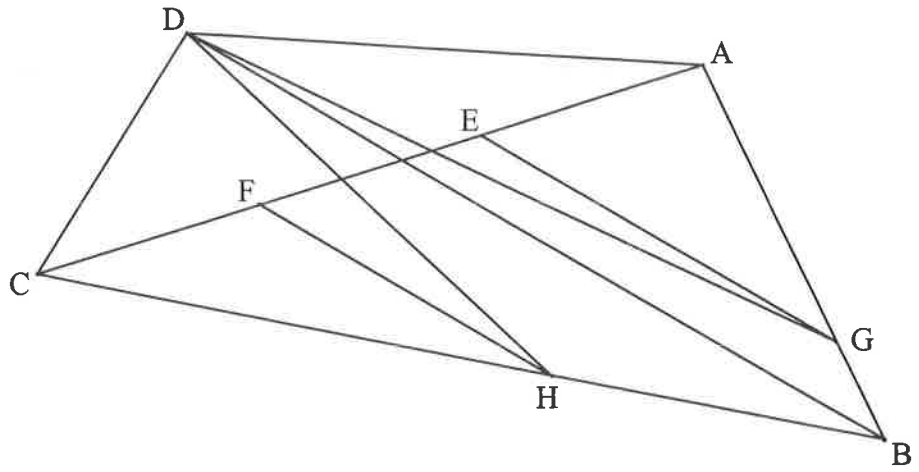
IV – Justification de la méthode de Marolois :

Sans aide supplémentaire la justification ne vient pas il faut fournir à l'élève des figures extraites de la construction de Marolois :



Il faut inciter les élèves à retrouver l'une des figures étudiée dans les deux propositions préliminaires dans le dessin extrait.

Une fois que tous sont d'accord que les quadrilatères DCBF, DFBE et DEBA réalisent bien un partage en trois parties égales de ABCD il reste encore à utiliser la proposition d'Euclide pour terminer la démonstration en prouvant que les triangles DEG et EGB ont même aire et qu'il en est de même pour DFH et FHB .



La difficulté principale de cette activité réside dans l'observation d'une figure et dans l'extraction de figures déjà rencontrées ou de figures clés. Or ce qui était certainement usuel pour les mathématiciens du niveau et de l'époque de Marolois, ne l'est plus pour nous et pour nos élèves. En dehors de la configuration dite de Thalès, notre catalogue est assez pauvre.

Fiche donnée aux élèves

I. Lire le texte de Marolois et relever les mots non compris et les curiosités rencontrées .
proposition 60 et construction 167 (voir page 7 des annexes)

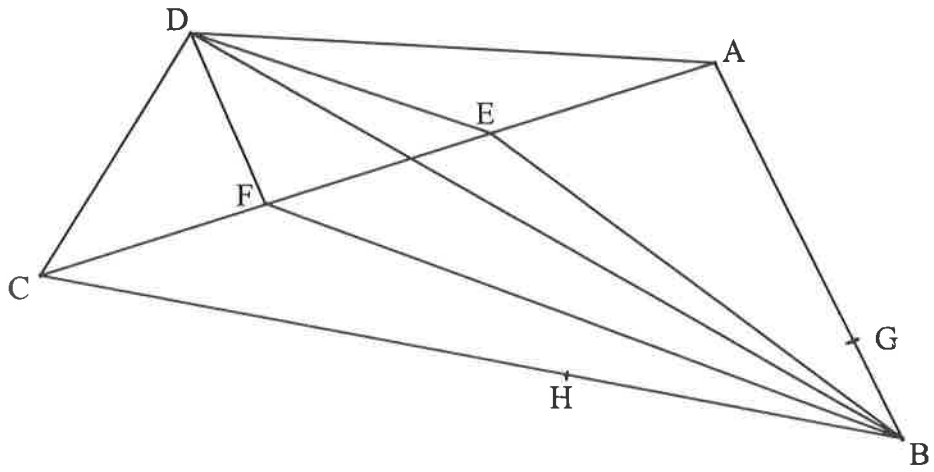
II. Essayer de vérifier la méthode de Marolois en prenant ABCD rectangle

III. Soit ABCD un parallélogramme, opérer le partage du parallélogramme suivant la méthode de Marolois, vérifier que le point H est situé aux deux tiers du segment [CB] et que G est situé aux deux tiers du segment [AB], en déduire que l'aire du triangle DCH est égale aux deux tiers de celle du triangle DCB et donc au tiers de l'aire du parallélogramme ABCD. Que dire du quadrilatère DHBG ?

IV. Soient d et d' deux droites parallèles, B et C deux points de d et A_1, A_2, A_3 trois points de d'. Montrer que les triangles A_1BC, A_2BC et A_3BC ont même aire. Enoncer un théorème général rapportant ce que vous venez d'étudier dans cette question.

V. Soit ABC un triangle quelconque, soient I et J deux points de [BC] tels que BI = IJ = JC. Comparer les aires des triangles ABI, AIJ et AJC .

VI. Retrouver sur la figure suivante des triangles de même aire, puis repérer trois quadrilatères partageant ABCD en trois parties égales.



VII. En reprenant la figure de Marolois prouver l'égalité des aires des triangles DFH et BFH puis de DEG et EGB, terminer la justification de la méthode de Marolois .